ریاضی ۱

قابل استفاده برای دروس ریاضی عمومی، ریاضی عمومی ۱،
ریاضی عمومی ۲، ریاضی آ، ریاضی آآ و ریاضی آآآ
جهت دانشجویان مهندسی و علوم پایه

مهدی نجفی‌خواه

عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

تابستان ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

نام کتاب: ریاضی ۱
نویسنده: دکتر مهدی نجفی‌خواه
ناشر: ساحل اندیشه تهران
نوبت چاپ: سوم
شابک: $964-96823-7-6$
تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت: ؟ ریال
تعداد صفحات: ۲۰۸
تعداد شکلها: ۵۲

دیباچه

این کتاب اولین جلد از یک دورهٔ دو جلدی در ارتباط با حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی می‌باشد، که بترتیب آنها را «ریاضی ۱» و «ریاضی ۲» نامیده‌ایم. موضوع اصلی در حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی، آشنایی با جنبه‌های محاسباتی آنالیز ریاضی کلاسیک می‌باشد. در آنالیز ریاضی کلاسیک به مطالعهٔ خواص توابع بین فضاهای اقلیدسی پرداخته می‌شود. این مطالعه شامل سه بخش اساسی «حد»، «مشتق» و «انتگرال» می‌باشد. به دلیل اینکه مطالعهٔ توابع به فرم $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به یک باره ممکن نیست، موضوع به بخشهای مختلف تقسیم شده و به شکل مرحله به مرحله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در درس ریاضی عمومی یک (که مطابق با این کتاب تدریس می‌شود)، توابع به فرم $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مطالعه می‌گردد، یعنی حالت $m = n =$ ۱. پس از حصول این مطلب، در درس ریاضی عمومی دو، ابتدا توابع به فرم $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (توابع برداری) مورد مطالعه قرار گرفته، سپس توابع به شکل $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (توابع چند متغیره) و آنگاه توابع به فرم $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (نگاشتها و میدانهای برداری) مورد بررسی قرار می‌گیرد. سایر مباحث دورهٔ حاضر، مطالبی می‌باشند که مستقیم و یا غیر مستقیم در سایر قسمتها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

این کتاب دارای نه فصل است. در فصل اول به بیان مفهوم عدد، سیر رشد آن و نهایتاً طرح مفهوم اعداد مختلط پرداخته شده است. در فصل دوم انواع توابع مورد استفاده در کتاب مطرح شده است و ضمن آشنایی با توابع مقدماتی، چگونگی ترسیم و خواص مقدماتی هر یک از آنها به تفکیک مطرح گردیده است. در فصل سوم به یکی از سه موضوع اصلی، یعنی حد و پیوستگی توابع پرداخته می‌شود. در این فصل موضوعاتی چون رفع ابهام، حد یک طرفه و هم ارزی بینهایت کوچکها مطرح می‌گردد. در فصل چهارم به موضوع مشتق توابع یک متغیره پرداخته می‌شود. در این فصل ضمن بیان اصول خواص مشتق و دیفرانسیل، کاربردهای آن نیز مطرح می‌گردد. خواص اصلی انتگرال نامعین و روشهای انتگرالگیری در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ششم انتگرال معین و کاربردهای متنوع آن بیان می‌گردد. انتگرال ناسره، که تعمیم طبیعی انتگرال معین به دامنه‌های بی‌کران و یا توابع بی‌کران است، در فصل هفتم مورد بررسی قرار می‌گیرد. جمع بینهایت اعداد عملاً ممکن نیست، مگر آنکه مفهوم دنباله و در پی آن سری مطرح شود؛ این امر در فصل هشتم محقق می‌گردد. در فصل پایانی به بیان دنباله‌ها و سریهای تابعی پرداخته می‌شود که نهایتاً به مبحث سریهای تابعی می‌انجامد.

سالها است که دروس ریاضی عمومی، ریاضی عمومی ۱، ۲ و نیز دروس ریاض آ، آآ و آآآ (مخصوص دانشجویان رشتهٔ ریاضی) در دانشگاه‌های کشور تدریس می‌شود، اما مرجع مناسبی که بتواند سرفصلهای مصوب وزارت محترم علوم، تحقیقات و فن آوری را برآورده کرده و در عین حال شرایط دانشجویان این درس را نیز در نظر بگیرد وجود ندارد. مؤلف که خود سالها به امر تدریس این دروس مشغول بوده است، با علم به این مطلب و نیز با توجه به استانداردهای موجود در جهان، اقدام به تدوین این اثر نموده است.

این کتاب دارای نکات برجسته‌ای است که برخی از آنها مخصوص این اثر می‌باشند. از جمله:

۱ — کتاب نتیجهٔ تدریس عملی در دانشگاه‌های کشور است و عملاً قابل استفادهٔ مجدد می‌باشد.

۲ — ارزشیابیهای انجام شده در پایان هر دورهٔ آزمایشی تدریس آن خبر از موفقیت نسبی آن در امر تفهیم مطالب و در نتیجه بالاتر رفتن سطح علمی دانشجویان داشته است (این کار با مقایسه با سایر گروهها انجام گرفته است).

۳ — کتاب حاضر مالامال از مثالهای متنوع است، تا حدی که در مقایسه با استاندارد کتابهای مشابه، دو تا سه برابر بیشتر است.

۴ — کتاب حاضر دارای تعداد بسیار زیادی تمرین و مسأله است که از مسایل معمولی آغاز و به تمرینات مبارزه طلب ادامه می‌یابد. بر همین اساس هم مدرس و هم شاگرد نیازی به دنبال مسایل جدید گشتن ندارند.

۵ — در خلال مباحث کتاب استفاده از نرم افزار میپل آموزش داده شده است و این کار موجب تسریع امر آموزش و یادگیری می‌شود.

٦ — یک دیسک فشرده از مواد کمک آموزشی همراه کتاب است که استفادهٔ مناسب از آن می‌تواند اثر بسیار شگرفی در امر آموزش داشته باشد.

از این کتاب می‌توان به شیوه‌های مختلفی در امر آموزش حساب دیفرانسیل، انتگرال و هندسه تحلیلی استفاده نمود. نظیر: دو درس چهار واحدی (ریاضی ۱ و ۲)، دو درس سه واحدی (ریاضی ۱ و ۲)، و سه درس چهار واحدی (ریاضی آ، آآ و آآآ).

هر چند این کتاب حاصل سالها تدریس مؤلف در دانشگاه‌های مختلف بوده است و در چهار دورهٔ مختلف به صورت آزمایشی تدریس شده است، اما همانند همهٔ محصولات بشر می‌تواند دارای کاستی‌های فراوانی باشد. مؤلف با علم به این مطلب از خوانندهٔ محترم استدعا دارد که هر گونه نکته، انتقاد و یا پیشنهادی در خصوص مطالب این کتاب را با ایشان (به آدرس: تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکدهٔ ریاضی) در میان بگذارد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم تا از همهٔ کسانی که این جانب را در تهیهٔ این اثر همراهی نموده‌اند تشکر کنم. چه دانشجویانی که با انعکاس نکات مورد توجه خود باعث بالانده‌تر شدن آن گردیده‌اند و چه همکارانی که با اشارات فهیمانهٔ خود باعث ایجاد اصلاحات اساسی در آن شده‌اند. این کتاب را سرکار خانم راحلهٔ بادرستانی و نیز سرکار خانم فرزانهٔ حیدری فعال به کمک نرم افزار فارسی‌تک تایپ نموده‌اند و جناب آقای احمد رضا فروغ و جناب آقای مهدی جلالوندی ویرایش نموده‌اند، که در اینجا از زحمات بی‌دریغ همهٔ این عزیزان کمال تشکر را دارم. شکلها توسط مؤلف و به کمک نرم افزارهای Paint، Photoshop، Maple و GSview تهیه نموده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

عدد

عدد اولین مفهوم ریاضی است که مورد توجه بشر قرار گرفته است. با گذشت زمان و ایجاد نیازهای جدید، مفهوم عدد نیز گسترش یافته است. مثلاً، در ابتدا عدد را تنها به عنوان وسیله‌ای برای شمارش می‌شناختند و در نتیجه لزومی به تصور اعداد غیر طبیعی نبود.

اما، رفته رفته نیاز به محاسبه بالا گرفت و لازم شد که مفهوم عدد منفی و صفر مطرح گردد: مجموعهٔ اعداد صحیح. پس از آن نیاز به محاسبهٔ کسری از اعداد بوجود آمد، مثلاً در مسألهٔ ارث نیاز به تقسیم زمینی به مساحت ده هکتار بین سه نفر و با سهم مساوی پیش آمد که با اعداد صحیح این کار میسر نبود. این طور بود که مجموعهٔ اعداد گویا مطرح گردید.

با گذشت زمان معلوم شد که طولهایی وجود دارند که به شکل کسری گویا از اعداد طبیعی قابل بیان نیستند، نظیر $\sqrt{۲}$. بر همین اساس مجموعهٔ همهٔ طولهای جبری ممکن را به عنوان مجموعهٔ اعداد حقیقی مطرح نمودند.

این مجموعه نیز نتوانست همهٔ نیازهای انسان آن روزگار را برآورده کند. مثلاً، در توجیه مسایل مطرح در الکتریسیته لازم بود که معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ دارای جواب باشد؛ در حالی که می‌دانیم هیچ عدد حقیقی‌ای در این معادله صدق نمی‌کند. فرض وجود جواب برای این مسأله بود که منجر به کشف مجموعهٔ اعداد مختلط گردید.

این داستان همچنان ادامه داشته و دارد. اعداد چهار تایی کایلی و اعداد هشت تایی هامیلتن از این دسته تلاشها می‌باشند. روشی که در ذیل برای بیان این مفهوم در پیش گرفته شده است، حد اکثر نزدیکی را با روند تاریخی این مفهوم دارد.

هدف از این فصل آشنایی خواننده با آن دسته از مجموعه‌های عددی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرند: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی

همان طوری که نام اعداد طبیعی پیدا است، اولین دسته از اعدادی هستند که بطور طبیعی در مسیر سیر تفکر ریاضیات ظاهر شده و بوجود آمدند.

۱.۱.۱ تعریف. مجموعه‌ای از اعداد A را در صورتی **یکدار** گوئیم که $۱ \in A$، و در صورتی **موروثی** گوئیم که به ازای هر $n \in A$ ای داشته باشیم $n + ۱ \in A$.

۲.۱.۱ مثال. فرض کنید

$$A = \{۱, ۲, ۳\}\ ,\ B = \{۵, ٦, \cdots, n, n+۱, \cdots\}\ ,$$
$$C = \{۲, ۵\}\ ,\ D = \{-۱, ۰, ۱, ۲, \cdots, n, n+۱, \cdots\}\ .$$

در این صورت A یکدار است، ولی موروثی نیست. B موروثی است، ولی یکدار نیست. C نه یکدار است و نه موروثی. D یکدار و موروثی است.

۳.۱.۱ تعریف. کوچکترین مجموعه عددی یکدار و موروثی را **مجموعه اعداد طبیعی** نامیده و با نماد $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\boxed{\mathbb{N} = \{۱, ۲, \cdots, n, n+۱, \cdots\}}$$

بنابه تعریف بالا، اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ یکدار و موروثی باشد، آنگاه $A = \mathbb{N}$. از این حکم ساده به عنوان ابزاری سودمند در اثبات تساویها، نامساویها و . . . استفاده می‌شود:

۴.۱.۱ قضیه استقراء. اگر $P(n)$ حکمی در خصوص عدد n باشد و بدانیم:

الف) $P(۱)$ درست است،

ب) اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+۱)$ درست است،

در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر n طبیعی درست است.

اثبات: فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{N}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی nای است که حکم $P(n)$ به ازای آنها درست می‌باشد. در این صورت، بنابه فرض (الف)، مجموعهٔ A یکدار است و بنابه فرض (ب)، مجموعهٔ A موروثی می‌باشد، بنابراین از تعریف ۳.۱.۱ نتیجه می‌گردد که $A \subseteq \mathbb{N}$ و بنابراین، $A = \mathbb{N}$ و برهان تمام است. □

۵.۱.۱ مثال. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی m،

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $P(n)$ نمایشگر حکم بالا است. در این صورت

$$P(1) \equiv 1^3 = \frac{1}{4}(1)^2(1+1)^2 \equiv 1 = 1$$

که صحیح است. حال فرض کنیم $P(n)$ درست باشد و درستی $P(n+1)$ را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \\ &= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \end{aligned}$$

که این یعنی $P(n+1)$ نیز درست است.

۶.۱.۱ اولین تعمیم قضیهٔ استقراء. فرض کنید k_0 عددی طبیعی و $P(n)$ گزاره‌ای در خصوص اعداد طبیعی باشد. اگر بدانیم که:

الف) $P(k_0)$ درست است،

ب) اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+1)$ درست است،

در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر $k_0 \leq n$ درست است.

اثبات: کافی است در برهان قضیهٔ ۴.۱.۱ فرض شود که

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{به ازای } n = m + k_0 - 1 \text{ درست است } P(n)\}$$

در این صورت A یکدار و موروثی است و بنابراین $A = \mathbb{N}$. این ثابت می‌کند که گزارهٔ $P(n)$ به ازای همهٔ n های بزرگتر و یا مساوی با k_0 صحیح است. □

۷.۱.۱ مثال. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 4$ ای $n^3 \leq 3^n$.

حل. برای این منظور فرض کنیم $P(n)$ یعنی $n^3 \leq 3^n$. اولاً، روشن است که $P(4)$ صحیح است، زیرا $P(4) \equiv 4^3 \leq 3^4 \equiv 64 \leq 81$. بعلاوه، اگر $P(n)$ درست باشد و $n \leq 4$، در این صورت $P(n+1)$ نیز درست است، زیرا بنا به فرض $n^3 \leq 3^n$. طرفین این نامساوی را در ۳ ضرب می‌کنیم: $3n^3 \leq 3^{n+1}$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات درستی $P(n+1)$، کافی است ثابت شود $(n+1)^3 \leq 3n^3$:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 3n^3 &= -2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\leq -2n^3 + 3n^2 + 3n + n^2 \\ &= n^2(-2n+7) \end{aligned}$$

که چون $n \geq 4$، پس $0 \leq 2n - 7$ و حکم اثبات شده است. بنابراین حکم به ازای هر $n \geq 4$ ای صحیح است.

۸.۱.۱ تمرین. با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید:

۱) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

۲) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

۳) $1 \times 2 + 2 \times + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

۴) اگر $n \geq 3$، آنگاه $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$

۵) در صورتی که $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ (خوانده شود n «فاکتوریل»)، به ازای هر $n \geq 4$ ای $2^n < n!$.

۶) بازای هر n ای $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

۷) در صورتی که $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (خوانده شود «انتخاب k از n»)، داریم:

الف) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$؛ و

ب) $n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

۸) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ نیز طبیعی است.

۹) به ازای هر عدد طبیعی n ای

$$\frac{1}{1 \times 2}\binom{n}{1} - \frac{1}{2 \times 3}\binom{n}{2} + \frac{1}{3 \times 4}\binom{n}{3} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}\binom{n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

در قضیهٔ زیر مهمترین خواص جبری مجموعهٔ اعداد طبیعی آورده شده است.

۹.۱.۱ قضیه. اگر $n, m, l \in \mathbb{N}$، آنگاه

۱) (بسته بودن جمع) $n + m \in \mathbb{N}$.

۲) (شرکتپذیری جمع) $n + (m + l) = (n + m) + l$.

۳) (جابجایی جمع) $n + m = m + n$.

۴) (بازتابی $\leq$) $n \leq n$.

۵) اگر $n \leq m, m \leq n$، آنگاه $n = m$.

۶) اگر $n \leq m, m \leq l$، آنگاه $n \leq l$.

۷) اگر $n < m \leq n + ۱$ ، آنگاه $m = n + ۱$.

۸) (بسته بودن ضرب) $nm \in \mathbb{N}$.

۹) (شرکتپذیری ضرب) $n(ml) = (nm) + l$.

۱۰) (عنصر خنثی ضرب) $n۱ = ۱n = n$.

۱۱) (توزیعپذیری ضرب در جمع) $n(m + l) = nm + nl$.

۱۲) $n \leq m$، آنگاه $nl \leq ml$.

۱۳) $n \leq m$، آنگاه $n + l \leq m + l$.

۱۰.۱.۱ تعریف. هر عدد طبیعی را بصورت یکتا به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$n = a_۰ + ۱۰a_۱ + ۱۰^۲a_۲ + \cdots + ۱۰^k a_k$$

که در آن $k \in \mathbb{N}$ و

$$a_۰, a_۱, a_۲, \cdots, a_k \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

در این حالت، a_i ها را **رقم** می‌نامیم و می‌نویسیم: $n = \overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰}$ عبارت مذکور را **نمایش اعشاری** n می‌گوئیم.

۱۱.۱.۱ تمرین. ثابت کنید که اگر $[x]$ بزرگترین عدد کوچکتر و یا مساوی با x باشد در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n ای یک عدد $k \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$ طوری یافت می‌شود که $۱۰^k \leq n < ۱۰^{k+۱}$. فرض کنید:

$$a_k = \left[\frac{n}{۱۰^k}\right] \quad , \quad a_{k-۱} = \left[\frac{n - ۱۰^k a_k}{۱۰^{k-۱}}\right],$$
$$a_{k-۲} = \left[\frac{n - ۱۰^k a_k - ۱۰^{k-۱} a_{k-۱}}{۱۰^{k-۲}}\right] , \cdots$$

در این صورت $n = \overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۲ a_۱}$.

۱۲.۱.۱ قضیهٔ تقسیم. فرض کنید n و m دو عدد طبیعی دلخواهند و $m \leq n$. در این صورت اعداد $q \in \mathbb{N}$ و $r \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ به صورت یکتا، چنان یافت می‌شوند که $n = mq + r$ و $۰ \leq r < m$. n را مقسوم، m را مقسوم علیه، r را باقیمانده عمل تقسیم نامند.

۲.۱ مجموعهٔ اعداد صحیح

لزومی ندارد که تفاضل دو عدد طبیعی، عددی طبیعی باشد: $۳ - ۴ = -۱$. پس لازم است که به منظور فراهم شدن ابزاری مناسب‌تر برای انجام کارهای بعدی، مجموعه‌اعداد طبیعی را بصورت زیر گسترش بدهیم.

۱.۲.۱ تعریف. اگر جواب مسأله $x + y = x$ را با نماد $y = ۰$ نشان دهیم و نیز اگر جواب مسأله $x + y = ۰$ را با نماد $y = -x$ نشان دهیم، **مجموعهٔ اعداد صحیح** را بصورت

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots, n, \cdots\}}$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۲.۱ قضیه. اگر $n, m, l \in \mathbb{Z}$، آنگاه

۱) (بسته بودن جمع) $n + m \in \mathbb{Z}$.

۲) (شرکتپذیری جمع) $n + (m + l) = (n + m) + l$.

۳) (وجود خنثی جمع) $n + ۰ = ۰ + n$.

۴) (وجود معکوس جمعی) $n + (-n) = (-۱) + n = ۰$.

۵) (جابجایی جمع) $n + m = m + n$.

۶) (بسته بودن ضرب) $nm \in \mathbb{Z}$.

۷) (شرکتپذیری ضرب) $n(ml) = (nm)l$.

۸) (پوچسازی صفر) $n۰ = ۰n = ۰$.

۹) (وجود خنثی ضربی) $n۱ = ۱n = n$.

۱۰) (بازتابی $\leq$) $n \leq n$.

۱۱) (تعدی $\leq$) اگر $n \leq m$ و $m \leq l$، آنگاه $n \leq l$.

۱۲) اگر $n \leq m$ و $m \leq n$، آنگاه $n = m$.

۱۳) اگر $n < m$ و $m \leq n + ۱$، آنگاه $m = n + ۱$.

۱۴) اگر $n \leq m$، آنگاه $n + l \leq m + l$.

۱۵) اگر $m \leq ۰$ و $n \leq ۰$، آنگاه $nm \geq ۰$.

۱۶) اگر $m \geq ۰$ و $n \leq ۰$، آنگاه $nm \leq ۰$

۱۷) اگر $m \leq l$ و $n \geq ۰$، آنگاه $nm \leq nl$.

۱۸) اگر $m \le l$ و $۰ \le n$، آنگاه $nm \ge nl$.

۳.۲.۱ قضیهٔ تقسیم. اگر $m,n \in \mathbb{Z}$ و $۰ < m \le |n|$، آنگاه اعداد صحیح منحصر بفرد r و q طوری وجود دارد که $n = mq + r$ و $۰ \le r < m$.

۴.۲.۱ تعریف. در صورتی که در تقسیم n بر m باقیمانده r صفر شود، می‌گوئیم n **مضربی از** m است و یا m **عدد** n **را می‌شمارد** و می‌نویسیم $m|n$. اگر $m|n$ و $m|n'$، می‌گوئیم m یک عامل مشترک n و n' است. **کوچکترین عامل نامنفی مشترک** n **و** n' را با نماد (n,n') نشان می‌دهیم.

۵.۲.۱ نمایش اعشاری. هر عدد صحیح $n \in \mathbb{Z}$ را بشکل $\pm\overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۱}$ می‌توان نوشت، که درآن $k \in \mathbb{N}$ و $a_۱, \cdots, a_k \in \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ این نمایش منحصر بفرد است. یعنی، اگر دو عدد صحیح دارای نمایشهای برابر باشند، آنگاه برابرند.

۶.۲.۱ دومین تعمیم قضیهٔ استقراء. فرض کنید $k_۰$ عددی صحیح و $P(n)$ گزاره‌ای در خصوص اعداد صحیح باشد. اگر بدانیم که: **الف)** $P(k_۰)$ درست است، **ب)** اگر $P(n)$ درست باشد، آنگاه $P(n+۱)$ درست است، در این صورت، حکم $P(n)$ به ازای هر عدد صحیح $k_۰ \le n$ درست است.
اثبات: کافی است در برهان قضیهٔ ۴.۱.۱ فرض شود که

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ به ازای } n = m + k_۰ - ۱ \text{ درست است}\}$$

در این صورت A یکدار و موروثی است و بنابراین $A = \mathbb{N}$. این ثابت می‌کند که گزارهٔ $P(n)$ به ازای همهٔ n های بزرگتر و یا مساوی با $k_۰$ صحیح است. □

۷.۲.۱ تمرین.

۱) تعداد عوامل ۲ موجود در ۱۰۰ فاکتوریل رامحاسبه کنید.

۲) آزمونی برای بخش‌پذیری عدد طبیعی n بر یازده یافته و سپس آن را ثابت کنید.

۳) عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را طوری بیابید که اعداد چهار رقمی $\overline{abc۱}$ و $\overline{۲abc}$ در رابطهٔ $\overline{abc۱} = ۳ \times \overline{۲abc}$ صدق کنند.

۴) فرض کنید $a_n = \overline{۱\cdots۱} - \overline{۲\cdots۲}$ که در آن تعداد ۱ ها برابر $۲n$ و تعداد ۲ ها برابر n است. به ازای کدام مقادیر از n، عدد a_n مربع کامل است؟

۳.۱ مجموعهٔ اعداد گویا

مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به عمل ضرب بسته است و دارای عضو خنثی یک است، اما لزومی ندارد که هر عضو از آن دارای قرینهٔ ضربی باشد. مثلاً، هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شود و حاصل برابر یک گردد. این مشکل را بصورت زیر حل می‌کنیم.

۱.۳.۱ تعریف. جواب مسألهٔ $mx = n$ را که $m,n \in \mathbb{Z}$ و $m \neq ۰$، با نماد $\frac{n}{m}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ چنین اشیائی را با نماد $\mathbb{Q}$ نشان داده و به آن **مجموعهٔ اعداد گویا** می‌گوئیم. اعداد گویای $\frac{n}{m}$ و $\frac{s}{t}$ را در صورتی برابر گوئیم که $ms = nt$. **بعلاوه** قرارداد می‌کنیم که اگر $n \in \mathbb{Z}$، آنگاه $n = \frac{n}{۱} \in \mathbb{Q}$. بنابراین، $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

بر خلاف اعداد طبیعی و صحیح که دارای نمایش منحصر بفرد بودند، هر عدد گویا را به بینهایت صورت می‌توان نوشت: $\frac{m}{n} = \frac{m\ell}{n\ell}$. برای رفع این مشکل مفهوم کسر ساده را مطرح می‌کنیم.

۲.۳.۱ کسر ساده. اگر $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ و اعداد صحیح n و m به عدد طبیعی $۱ < k \in \mathbb{N}$ قابل قسمت باشند، آنگاه بجای $\frac{n}{m}$ از $\frac{p}{q}$ استفاده می‌کنیم که در آن $p = \frac{n}{k}$ و $q = \frac{m}{k}$. بعلاوه، ترجیه می‌دهیم که همواره مخرج کسرها مثبت باشند. عدد $\frac{n}{m}$ را در صورتی **یک کسر ساده** گوئیم که قابل ساده کردن نباشد و بعلاوه $۰ < m$.

هر عدد گویا را دقیقاً به یک صورت بفرم یک کسر ساده می‌شود نوشت:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N},\, (n,m) = ۱ \right\}}$$

۳.۳.۱ قضیه. اگر $n,m,l \in \mathbb{Q}$، آنگاه

۱) (بسته بودن جمع) $n + m \in \mathbb{Q}$.

۲) (شرکتپذیری جمع) $n + (m + l) = (n + m) + l$.

۳) (جابجایی جمع) $n + m = m + n$.

۴) (عنصر خنثی جمع) $n + ۰ = ۰ + n = ۰$.

۵) (وجود معکوس جمعی) $n + (-۱)n = ۰$.

۶) (بسته بودن ضرب) $nm \in \mathbb{Q}$.

۷) (شرکتپذیری ضرب) $n(ml) = (nm)l$.

۸) (جابجایی ضرب) $nm = mn$.

۹) (عنصر خنثی ضرب) $n۱ = ۱n = n$.

۱۰) (وجود معکوس ضربی) اگر $n \neq ۰$، آنگاه $n \times \frac{۱}{n} = ۱$.

۱۱) اگر $n \leq ۰$ و $m \leq l$، آنگاه $nm \geq nl$.

۱۲) اگر $n \leq m$، آنگاه $n + l \leq m + l$.

۱۳) (توزیعپذیری ضرب در جمع) $n(m+l) = nm + nl$.

۱۴) (بازتابی $\leq$) $n \leq n$.

۱۵) (تعدی $\leq$) اگر $n \leq m$ و $m \leq l$، آنگاه $n \leq l$.

۱۶) (تثلیث $\leq$) اگر $n \leq m$ و $m \leq n$، آنگاه $m = n$.

۱۷) اگر $n \leq ۰$ و $m \leq ۰$، آنگاه $nm \geq ۰$.

۱۸) اگر $n \leq ۰$ و $m \geq ۰$، آنگاه $nm \leq ۰$.

۱۹) اگر $n \geq ۰$ و $m \geq ۰$، آنگاه $nm \geq ۰$.

۲۰) اگر $n \geq ۰$ و $m \geq l$، آنگاه $nm \geq nl$.

۲۱) اگر $m < n$، آنگاه $l \in \mathbb{Q}$ ای وجود دارد که $m < l < n$.

توجه شود که علاوه بر بسته بودن $\mathbb{Q}$ نسبت به عمل تقسیم، مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ چگال است به این معنی که بنا به خاصیت (۲۱) از قضیهٔ بالا، بین هر دو عدد گویای مفروض، لااقل یک عدد گویای دیگر می‌توان یافت.

۴.۳.۱ قضیهٔ تقسیم. اگر $m, n \in \mathbb{Z}$ و $۰ < m \leq |n|$، آنگاه اعداد گویای منحصر بفرد p و r چنان یافت می‌شوند که $n = mp + r$ و $۰ \leq r < m$. p را خارج قسمت و r را باقیماندهٔ تقسیم n بر m می‌نامیم.

۵.۳.۱ نمایش اعشاری نامختوم. هر عدد طبیعی و نیز هر عدد صحیح دارای یک **نمایش اعشاری مختوم** است (یعنی، با تعداد ارقام مخالف صفر متناهی)؛ ولی برای اعداد گویا این انتظار درست نیست.

بیائید به عنوان مثال عدد گویای $\frac{۷}{۳}$ را بصورت اعشاری بنویسیم. چون $\frac{۷}{۳} = ۲ + \frac{۱}{۳}$ پس روی $\frac{۱}{۳}$ کار می‌کنیم. چون $\frac{۱۰}{۳} = ۳ + \frac{۱}{۳}$، باز هم بر روی $\frac{۱}{۳}$ کار می‌کنیم و . . . بنابراین:

$$\begin{aligned}
\frac{۷}{۳} &= ۲ + \frac{۱}{۳} = ۲ + \frac{۱}{۱۰}\left(۳ + \frac{۱}{۳}\right) = ۲ + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۱}{۳۰} \\
&= ۲ + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰۰}\left(۳ + \frac{۱}{۳}\right) = ۲ + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۱}{۳۰۰} \\
&\vdots \\
&= ۲ + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \cdots + \frac{۳}{۱۰^n} + \frac{۱}{۳ \times ۱۰^n} \\
&\stackrel{?}{=} ۲ + \frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{۳}{۱۰^n} + \cdots
\end{aligned}$$

دلیل تساوی ؟ را بعداً در قسمت سریهای عددی بیان خواهیم کرد. به همین دلیل است که می‌شود نوشت:

$$\frac{۷}{۳} = ۲/۳۳۳\cdots۳\cdots = ۲/\overline{۳}$$

۶.۳.۱ نمایش اعشاری. فرض کنیم $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{m} &= \pm\, \overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۰ / b_۱ b_۲ b_۳ \cdots b_n \cdots} \\
&= \pm\Big(۱۰^k a_k + ۱۰^{k-۱} a_{k-۱} + \cdots \\
&\qquad + ۱۰ a_۱ + a_۰ + \frac{b_۱}{۱۰} + \frac{b_۲}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{b_n}{۱۰^n} + \cdots\Big)
\end{aligned}$$

که در آن $b_i, a_i \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ و نیز $k \in \mathbb{N}$. لزومی ندارد که عدد گویا تنها دارای یک نمایش اعشاری باشد. مثلاً

$$\frac{۱}{۲} = ۰/۵ = ۰/۵۰۰\cdots۰\cdots = ۰/۴۹۹\cdots۹\cdots$$

بهتر آن است که اعداد گویا را بشکل $\frac{n}{m}$ بنویسیم و محاسبه کنیم، مثلاً جمع کردن دو عدد گویای ۳۷/۴۲۱۴۲۴۲، −۳/۲۱۴۵۲۲ ساده به نظر نمی‌رسد!

۷.۳.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که $\sqrt[۴]{\frac{۳+۲\sqrt[۴]{۵}}{۳-۲\sqrt[۴]{۵}}} = \frac{\sqrt[۴]{۵}+۱}{\sqrt[۴]{۵}-۱}$.

۲) اعداد گویای α و β را طوری بیابید که $\sqrt[۳]{۷ + ۵\sqrt{۲}} = \alpha + \beta\sqrt{۲}$.

۳) ریشه‌های گویای معادلهٔ $۹x^۳ - ۶x^۲ + ۱۵x - ۱۰ = ۰$ را بیابید. آیا اصلاً ریشه دارد؟

۴) به ازاء عدد طبیعی مفروض $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم: $H_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}$. ثابت کنید به ازای هر n ای H_n یک عدد گویای غیر صحیح است.

۵) فرض کنید $\frac{p}{q}$ یک کسر ساده با $\frac{۱}{n+۱} < \frac{p}{q} < \frac{۱}{n}$ است. نشان دهید که پس از ساده شدن $\frac{p}{q} - \frac{۱}{n+۱}$ کسری حاصل می‌شود که صورتش از p کوچکتر است. سپس به استقراً ثابت کنید که بازاً هر کسر سادهٔ $\frac{p}{q}$ که

$۰ < \frac{p}{q} < ۱$، اعداد طبیعی $n_۱, n_۲, \cdots, n_k$ چنان یافت می‌شوند که

$$\frac{p}{q} = \frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲} + \cdots + \frac{۱}{n_k}$$

به عنوان مثال

$$\frac{۱۹}{۱۵} = \frac{۱}{۲} + \frac{۲۳}{۳۰} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶۰}$$

۴.۱ مجموعهٔ اعداد حقیقی

آیا $\sqrt{۲}$ عددی گویا است؟ مگر می‌شود؟! در حالی که می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ با وتر a و اضلاع مجاور b و c رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است، و به ازای $b = c = ۱$ باید $a^۲ = ۲$ یا $a = \sqrt{۲}$! در هر حال $\sqrt{۲}$ گویا نیست، زیرا اگر فرض شود $\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}$ و $\sqrt{۲} = \frac{n}{m}$ به صورت کسر ساده نوشته شده باشد، داریم $m\sqrt{۲} = n$. با به توان دو رساندن دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم $۲m^۲ = n^۲$، پس $n^۲$ زوج است؛ یعنی n زوج است و می‌شود نوشت $n = ۲k$. بنابراین $۲m^۲ = ۴k^۲$ یا $m^۲ = ۲k^۲$. پس $m^۲$ و در نتیجه m نیز زوج است، یعنی n و m را به صورت همزمان بر دو می‌شودتقسیم کرد! این با فرض ساده بودن کسر $\frac{n}{m}$ متناقض است. پس چه باید کرد؟ افزودن $\sqrt{۲}$ به $\mathbb{Q}$ علاج موقت است: $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}) = \left\{a + b\sqrt{۲} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ این مجموعه از $\mathbb{Q}$ بهتر است ولی هنوز معیوب است، زیرا $\sqrt{۳} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{۲})$. پس سؤال این است که «چه باید کرد؟» اضافه کردن $\sqrt{۳}$ به مجموعهٔ بالا نیز یک علاج موقت است:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳}) = \left\{a + b\sqrt{۲} + c\sqrt{۳} + d\sqrt{۶} \;|a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}$$

و این داستان با ظهور عدد π جالبتر نیز می‌شود. پس سر انجام چه باید کرد؟

این مشکل را با تعریف زیر رفع می‌کنیم:

۱.۴.۱ تعریف. حاصل عبارت

$$\pm\Big(a_k \times ۱۰^k + \cdots + a_۱ \times ۱۰ + a_۰ + b_۱ \times \frac{۱}{۱۰} + b_۲ \times \frac{۱}{۱۰^۲} + \cdots + b_n \times \frac{۱}{۱۰^n} + \cdots\Big)$$

را بشکل $\pm a_k \cdots a_۰/b_۱ \cdots b_n \cdots$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ چنین اشیائی را با نماد $\mathbb{R}$ نشان داده و **مجموعهٔ اعداد حقیقی** می‌نامیم. با توجه به اطلاعاتی که بعداً در قسمت سریهای عددی بدست خواهیم آورد، هر عدد حقیقی r را بصورت $\lim_{n\to\infty} r_n$ می‌شود نوشت که در آن $r = \pm a_k \cdots a_۰/b_۱ \cdots b_n \cdots$ و $r_n = \pm a_k \cdots a_۰/b_۱ \cdots b_n$.

۲.۴.۱ تمرین.

۱) فرض کنید n یک عدد طبیعی است که مجذور کامل نیست. یعنی بشکل $m^۲$ که $m \in \mathbb{N}$ نمی‌توان نوشت. ثابت کنید $\sqrt{n}$ گویا نیست.

۲) نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در۱.۳.۳ است.

۳) $\mathbb{Q}(\pi)$ را همانند $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ تعریف کنید و سپس نشان دهید که دارای کلیهٔ خواص مشروح در ۱.۳.۳ است.

۴) نشان دهید که عدد $\sqrt[۳]{۴ + \sqrt{۱۵}} + \sqrt[۳]{۴ - \sqrt{۱۵}}$ گنگ است.

۵) مجموعهٔ $\mathbb{Q}(\sqrt{۲ + \sqrt{۲}})$ را بسازید.

در ابتدای این بخش مشاهده نمودیم که $\sqrt{۲}$ گویا نیست، این بدان معنی است که مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ اعداد گویا در نقطهٔ نظیر $\sqrt{۲}$ یک **حفره** وجود دارد. این مشکل را مجموعهٔ اعداد حقیقی ندارد. برای توضیح این مطلب، به تعریف زیر نیاز می‌باشد.

۳.۴.۱ تعریف. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$. عدد s را در صورتی **سوپرموم** A گفته و با نماد $\sup A$ نشان می‌دهیم که **الف)** به ازای هر $x \in A$ ای $x \le s$. **ب)** به ازای هر $\epsilon > ۰$ یک $x \in A$ ای یافت شود که $s - \epsilon < x$. عدد s را در صورتی **اینفیموم** A گفته و با نماد $\inf A$ نشان می‌دهیم که

الف) به ازای هر $x \in A$ ای $s \le x$.

ب) به ازای هر $\epsilon > ۰$ یک $x \in A$ ای یافت شود که $s + \epsilon > x$.

عدد s را در صورتی یک **کران بالای** A گوئیم که به ازای هر $x \in A$ ای $x \le s$. عدد s را در صورتی یک **کران پائینی** A گوئیم که به ازای هر $x \in A$ ای $s \le x$. مجموعهٔ A را در صورتی **از بالا کراندار** گوئیم که حداقل یک کران بالا داشته باشد. مجموعهٔ A را در صورتی **از پائین کراندار** گوئیم که حداقل یک کران پائین داشته باشد.

۴.۴.۱ مثال ۱). فرض کنید $A = [۰; ۱]$. در این صورت $\sup(A) = ۱$. زیرا اولاً به ازای هر $x \in A$ ای $x \le ۱$ و در ثانی اگر به اازای هر $x \in A$ ای $x \le \ell$، آنگاه به ازای $x = ۱$ نتیجه می‌گردد که $۱ \le \ell$.

مثال ۲) فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{۲}\}$. در این صورت $\sup(A) = \sqrt{۲}$ که عضو A نیست. از تعریف A نتیجه می‌گردد که هر عضو از A از $\sqrt{۲}$ کوچکتر است و در نتیجه $\ell = \sup(A) \geq \sqrt{۲}$. حال اگر $\ell > \sqrt{۲}$، آنگاه $\ell' = (\ell + \sqrt{۲})/۲ > \sqrt{۲}$ کمتر از ℓ است و یک کران بالایی A می‌باشد که تناقض می‌باشد. بنابراین $\ell = \sqrt{۲}$

۵.۴.۱ قضیه. مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در قضیهٔ ۳.۳.۱ برای $\mathbb{Q}$ می‌باشد. بعلاوه:

۱) هر زیر مجموعهٔ از بالا کراندار و غیر تهی از $\mathbb{R}$ سوپرموم دارد.

۲) هر زیر مجموعهٔ از پائین کراندار و غیر تهی از $\mathbb{R}$ اینفیموم دارد.

۶.۴.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که $A = \left\{p \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p^۲ < ۲\right\}$ زیر مجموعه‌ای از بالا کراندار و غیرتهی در $\mathbb{Q}$ است، ولی در $\mathbb{Q}$ سوپرموم ندارد. یعنی، $\mathbb{Q}$ خواص (۱) (و نیز (۲)) مشروح در بالا را ندارد.

۲) نشان دهید که اگر a و b اعداد گویا با $(a-b^۳)b > ۰$ باشند،

$$\sqrt[۳]{a + \frac{۸b^۳+a}{۳b}\sqrt{\frac{a-b^۳}{۳b}}} + \sqrt[۳]{a - \frac{۸b^۳+a}{۳b}\sqrt{\frac{a-b^۳}{۳b}}}$$

نیز عددی گویا خواهد بود.

۳) فرض کنید a یکی از اعداد گنگ $\sqrt{۲} + ۱$، $۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$، $\sqrt[۳]{۳}$، $\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۳}$، $(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})/(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$ و یا $\sqrt{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}} + \sqrt{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$ است. یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح به گونه‌ای بیابید که a ریشهٔ آن باشد.

۷.۴.۱ قضیه. نمایش اعشاری عدد r را در صورتی **دوری** گوئیم که بتوان یک بلوک تکرار شونده در ارقام آن یافت، مانند $۳/۲۰۰۰\cdots = ۳/۲$ و یا $۰/۳۳۰۰\cdots = \frac{۱}{۳}$. عدد حقیقی r وقتی و تنها وقتی گویا است که دارای نمایش اعشاری دوری باشد.

۸.۴.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که اعداد $۳۲۵/\overline{۲۱۱}$ و $-۱۲/۳۲\overline{۴}$ گویا هستند و سپس آنها را بشکل کسر ساده بنویسید.

۲) نشان دهید که اعداد $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱\cdots$ و $۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲\cdots$ گنگ هستند.

۵) نشان دهید که اگر $۰ \leq n \in \mathbb{Z}$ و a_i ها و b_i ها رقم باشند، آنگاه

$$n/a_۱a_۲\cdots a_m\overline{b_۱b_۲\cdots b_k} = $$
$$= n + \frac{a_۱\cdots a_m b_۱\cdots b_k - a_۱\cdots a_m}{۹۹\cdots۹۰۰\cdots۰}$$

که در اینجا تعداد ۹ های در مخرج برابر k و تعداد صفرها برابر m است.

۹.۴.۱ نمایش هندسی اعداد حقیقی.

فرض کنید ℓ یک خط راست افقی باشد و آن را **محور اعداد حقیقی** نامیده و نقطه‌ای O بر آن بنام **مبداء** انتخاب کنیم.

سمت راست مبداء را **مثبت** و سمت چپ آن را **منفی** معرفی می‌کنیم. حال پاره خطی را به عنوان **واحد** ۱ اندازه‌گیری در نظر گرفته و با در پی هم قرار دادن آن، و با ابتدای از O و به سمت مثبت، محور بدست آمده را مدرج می‌کنیم. نقاط حاصل را به ترتیب صعودی و با شروع از مبداء، با اعداد یک، دو، سه و ... شماره گذاری می‌کنیم. همین عمل را برای سمت چپ مبداء انجام داده و اعداد حاصل را از راست به چپ با اعداد ۱−، ۲−، ۳− و ... شماره گذاری می‌کنیم. به این ترتیب وسیله‌ای برای نمایش اعداد صحیح فراهم شده است.

در ادامه با تقسیم کردن هر یک از تقسیمات حاصل به ده بخش مساوی، امکان نمایش اعداد اعشاری به فرم $\pm\bar{a}/\bar{b}$ را فراهم می‌کنیم. سپس، با تقسیم هر یک از تقسیمات جدید به ده قسمت مساوی، امکان نمایش اعداد اعشاری به فرم $\pm\bar{a}/\overline{bc}$ را فراهم می‌کنیم. این کار را همچنان ادامه می‌دهیم، و نهایتاً موفق به نمایش همهٔ اعداد گویا می‌گردیم. اما، نقاط بر محور حقیقی بسیار بیشتر از اعداد گویا هستند.

با توجه به اینکه هر عدد حقیقی را به شکل حد یک دنباله از اعداد گویا می‌توان نوشت (به تعریف ۱.۴.۱ توجه شود)، می‌توان نقاطی بر محور حقیقی یافت که حد اکثر نزدیکی را با مکان واقعی عدد مورد نظر دارند! آنچه که در این موقعیت می‌توان گفت، این فرض است که

۱۰.۴.۱ اصل. تناظری یکبیک میان مجموعهٔ اعداد حقیقی و مجموعهٔ نقاط واقع بر محور حقیقی وجود دارد.

فرض درستی این اصل، مبنی هندسهٔ تحلیلی است و منشاء مطالب بسیاری در ریاضیات می‌باشد.

۱۱.۴.۱ تمرین. چند مساله مبارزه طلب:

۱) فرض کنید n عددی طبیعی است. ثابت کنید که هر عدد با ۳^n رقم بر ۳^n قابل قسمت است.

۲) فرض کنید k عددی طبیعی دلخواهی است و $n = ۲^{k-۱}$. ثابت کنید که از بین هر $۲n - ۱$ عدد طبیعی دلخواه، n عدد را طوری می‌توان انتخاب نمود که مجموع آنها بر n قابل قسمت است.

۳) فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبتند و $۱ \leq abc$. ثابت کنید $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} > a+b+c$.

۴) فرض کنید x، y و z اعداد حقیقی با $x+y+z = ۱$ هستند. ثابت کنید $۶(x^۳+y^۳+z^۳)^۲ \leq (x^۲+y^۲+z^۲)^۳$.

۵) ثابت کنید که در !۱۰۰۰ درست ۲۴۹ تا رقم ۵ و ۲۵۹ تا رقم ۰ وجود دارد؛ در نتیجه، در نمایش اعشاری !۱۰۰۰ درست ۲۴۹ صفر وجود دارد. آیا این حکم را برای $n!$ می‌توانید تعمیم دهید؟

۵.۱ چند عدد و فرمول خاص

در این بخش ابتدا به معرفی چند عدد خاص می‌پردازیم. علت آن این است که از آنها در ادامه درس استفاده می‌شود و بعلاوه در سایر زمینه‌های علوم که ریاضیات در آنها استفاده می‌شود، دانستن این اعداد می‌تواند راهگشا باشد. در ادامه به معرفی چند اتحاد مفید می‌پردازیم.

n	۲^n	۲^{-n}	$n!$
۱	۲	۰٫۵	۱
۲	۴	۰٫۲۵	۲
۳	۸	۰٫۱۲۵	۶
۴	۱۶	۰٫۰۶۲۵	۲۴
۵	۳۲	۰٫۰۳۱۲۵	۱۲۰
۶	۶۴	۰٫۰۱۵۶۲۵	۷۲۰
۷	۱۲۸	۰٫۰۰۷۸۱۲۵	۵۰۴۰
۸	۲۵۶	۰٫۰۰۳۹۰۶۲۵	۴۰۳۲۰
۹	۵۱۲	۰٫۰۰۱۹۵۳۱۲۵	$۳٫۶۲۸۸ \times ۱۰^۵$
۱۰	۱۰۵۶	۰٫۰۰۰۹۷۶۵۶۲۵	$۳٫۶۲۸۸ \times ۱۰^۶$

$$\begin{aligned}
\pi &\approx ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵\\
\pi/۲ &\approx ۱٫۵۷۰۷۹۶۳۲۶۸\\
\pi/۳ &\approx ۱٫۰۴۷۱۹۷۵۵۱۲\\
\pi/۴ &\approx ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶۳۴\\
\pi/۶ &\approx ۰٫۵۲۳۵۹۸۷۷۵۶\\
\sqrt{\pi} &= \Gamma(\tfrac{۱}{۲}) \approx ۱٫۷۷۲۴۵۳۸۵۰۹
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &\approx ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵\\
e/۲ &\approx ۱٫۳۵۹۱۴۰۹۱۴۲\\
\sqrt{e} &\approx ۱٫۶۴۸۷۲۱۲۷۰۷\\
e^\pi &\approx ۲۳٫۱۴۰۶۹۲۶۳۲۸\\
\pi^e &\approx ۲۲٫۴۵۹۱۵۷۷۱۸۴
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{۲} &\approx ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۴\\
\sqrt{۳} &\approx ۱٫۷۳۲۰۵۰۸۰۷۵\\
\sqrt{۵} &\approx ۲٫۲۳۶۰۶۷۹۷۷۵\\
\sqrt[۳]{۲} &\approx ۱٫۲۵۹۹۲۱۰۵۰\\
\sqrt[۳]{۳} &\approx ۱٫۴۴۲۲۴۹۵۷۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln ۲ &\approx ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۸۰۷\\
\ln ۳ &\approx ۱٫۰۹۸۶۱۲۲۸۸۷\\
\log e &\approx ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹\\
\ln ۱۰ &\approx ۲٫۳۰۲۵۸۵۰۹۳۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) &= \sqrt{\pi} \approx ۱٫۷۷۲۴۵۳۸۵۰۹\\
\Gamma(\tfrac{۱}{۳}) &\approx ۲٫۶۷۸۹۳۸۵۳۴۷\\
\Gamma(\tfrac{۱}{۴}) &\approx ۳٫۶۲۵۶۰۹۹۰۸۲
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{۱ رادیان} &= ۱۸۰^\circ/\pi \approx ۵۷٫۲۹۵۷۷۹۵۱۳۱\\
۱^\circ &= \pi/۱۸۰ \text{ رادیان} \approx ۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹۲۵
\end{aligned}$$

به ازاء اعداد حقیقی دلخواه x و y داریم:

$$\begin{aligned}
(x+y)^۲ &= x^۲+xy+y^۲\\
(x-y)^۲ &= x^۲-xy+y^۲\\
(x+y)^۳ &= x^۳+۳x^۲y+۳xy^۲+y^۳\\
(x-y)^۳ &= x^۳-۳x^۲y+۳xy^۲-y^۳
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^۲-y^۲ &= (x-y)(x+y)\\
x^۳-y^۳ &= (x-y)(x^۲+xy+y^۲)\\
x^۳+y^۳ &= (x-y)(x^۲-xy+y^۲)\\
x^۴-y^۴ &= (x-y)(x+y)(x^۲+y^۲)\\
x^۴+y^۴ &= (x^۲+\sqrt{۲}xy+y^۲)(x^۲-\sqrt{۲}xy+y^۲)
\end{aligned}$$

به ازاء اعداد حقیقی دلخواه x و y و عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n+nx^{n-۱}y+\frac{n(n-۱)}{۲}x^{n-۲}y^۲\\
&\quad +\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{n-۳}y^۳+\cdots\\
&\quad \cdots+nxy^{n-۱}+y^n\\
(x-y)^n &= x^n+nx^{n-۱}y-\frac{n(n-۱)}{۲}x^{n-۲}y^۲\\
&\quad +\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{n-۳}y^۳-\cdots\\
&\quad \cdots+nxy^{n-۱}-y^n
\end{aligned}$$

۶.۱ مجموعهٔ اعداد مختلط

نزدیک به ۴۵۰ سال از زمانی که برای اولین بار بشر با اعداد مختلط آشنا شد می‌گذرد. بر اساس مستندات تاریخی، گیرولامو کاردانو [۱] اول کسی است که تا سال ۱۵۴۵ با اعداد مختلط آشنا شد. کاری که وی انجام داد، ابراز این نکته بود که احتمال دارد این اشیاء مفید باشند!

اما، اولین محاسبهٔ عملی با اعداد مختلط را رافائل بومبلی [۲] در سال ۱۵۷۲ انجام داد. نتیجهٔ کار او را در این جمله‌اش می‌توان خلاصه نمود که گفته است:

به نظر می‌رسد که همهٔ چیزهای مطرح شده جز حقیقت نباشند!

دانشمندان بین پذیرش و یا عدم پذیرش وجود این اعداد مردد بودند، و تا سال ۱۷۰۲ که لایبنیتز نماد i را ابداء کرد، این روند ادامه داشت. این ابهام را در اصطلاحات بکار رفته می‌توان مشاهده نمود: عدد مختلط و یا عدد موهومی. حتی در سال ۱۷۷۰ ریاضیدان بزرگی چون اویلر در برقراری رابطهٔ $\sqrt{-۲}\sqrt{-۳}=\sqrt{۶}$ اظهار شگفتی می‌کند.

مدتهای مدیدی طول کشید تا دانشمندان متفق القول شدند که این اعداد وجود دارند و بعلاوه، سازگار نیز هستند؛ به این معنی که در محاسبات انجام شده هیچ گونه ابهام و یا تناقضی رخ نمی‌دهد. در واقع در پایان قرن هجدهم بود که فردریش گاوس با ابداء صفحهٔ مختلط راه را برای تجسم هندسی این اعداد فراهم نمود. پس از آن در مدت زمانی کمتر از چهل سال (یعنی بین سالهای ۱۸۱۴ و ۱۸۵۱) و با همت دانشمندانی چون کوشی و ریمان نظریهٔ اعداد مختلط به شدت توسعه یافت.

۱.۶.۱ تعریف. مجموعهٔ **اعداد مختلط** را به صورت

$$\boxed{\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}}$$

تعریف می‌کنیم. بر این مجموعه اعمال جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &:= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) &:= (ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

قرارداد می‌کنیم

$$\begin{gathered}۱:=۱+۰i,\qquad ۰:=۰+۰i,\\ -(a+bi):=(-a)+(-b)i,\\ \frac{۱}{a+bi}=\frac{a}{a^۲+b^۲}+\frac{-b}{a^۲+b^۲}i.\end{gathered}$$

۲.۶.۱ قضیه. مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ دارای کلیهٔ خواص مشروح در قضیهٔ ۳.۳.۱ برای $\mathbb{Q}$ می‌باشد. به بیان دیگر، $\mathbb{C}$ به همراه اعمال جمع و ضرب یک میدان است.

۳.۶.۱ مثال. ۱) اگر $u=۱-i$، $v=۲-i$ و $w=۳-i$، آنگاه

$$\begin{aligned}uvw &= u[vw]=(۱-i)(۲-i)(۳-i)\\ &= (۱-i)\Big[(۶-۱)+(-۲-۳)i\Big]\\ &= (۱-i)(۵-۵i)=(۵-۵)+(-۵-۵)i\\ &= ۰-۱۰i=-۱۰i.\end{aligned}$$

مثال ۲) اگر $u=۴+۳i$ و $v=۳-۴i$، آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= u\frac{۱}{v}=(۴+۳i)\frac{۱}{۳-۴i}\\ &= (۴+۳i)\left(\frac{۳}{۹+۱۶}+\frac{۴}{۹+۱۶}i\right)\\ &= (۴+۳i)\left(\frac{۳}{۲۵}+\frac{۴}{۲۵}i\right)\\ &= \left(\frac{۱۲}{۲۵}-\frac{۱۲}{۲۵}\right)+\left(\frac{۹}{۲۵}+\frac{۱۶}{۲۵}\right)i=i.\end{aligned}$$

مثال۳) اگر $z=۱+\sqrt{۲}i$، آنگاه

$$z^۲-۲z+۳=(۲\sqrt{۲}i-۱)-۲(۱+\sqrt{۲}i)+۳=۰$$

۴.۶.۱ تمرین. هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید:

۱) $(۲-i)(۱+i)$، ۲) $(۳-۲i)(۲+۳i)$،

۳) $\dfrac{۴+۲i}{۳-۶i}$، ۴) $\dfrac{۱-i}{۲+i}(۲+۳i)$.

۵) فرض کنید w عددی مختلط است که $w^۲+w+۱=۰$ (مثلاً، $w=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$) اعداد حقیقی a و b را طوری تعیین کنید که $\dfrac{۷+۵w+۳w^۲}{۱-۲w}=a+bw$.

مقادیر زیر را محاسبه کنید:

۶) $\dfrac{(۱+۲i)^۳-(۱-i)^۳}{(۳+۲i)^۳-(۲+i)^۳}$،

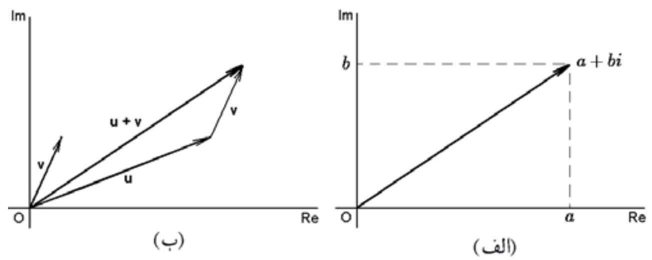
۷) $\dfrac{۱+i\tan\theta}{۱-i\tan\theta}$، ۸) $\dfrac{(۱-i)^۵-۱}{(۱+i)^۵+۱}$.

۹) موارد (۷) و (۱۰) از قضیهٔ ۲.۶.۱ را ثابت کنید.

---

[۱] Girolamo Cardano
[۲] Rafael Bombelli

۵.۶.۱ نمایش دکارتی اعداد مختلط. فرض کنید $\mathbb{R}^۲ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ صفحهٔ دکارتی معمولی است. تناظری بصورت زیر بین $\mathbb{R}^۲$ و مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم: $\mathbb{C} \ni a+bi \mapsto (a,b) \in \mathbb{R}^۲$ این تناظر یکبیک است (به شکل ۱.۱—الف توجه شود). پس می‌توان اعداد مختلط را بعنوان نقاط صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ تجسم کرد. به همین دلیل است که $\mathbb{C}$ را صفحهٔ مختلط نیز می‌نامند. در بسیاری از موارد، بهتر آن است که عدد $a+bi$ را با برداری که مبداء $(۰,۰)$ را به نقطهٔ (a,b) متصل می‌کند، یکی بگیریم. با این دیدگاه، جمع دو عدد مختلط همچون جمع دو بردار خواهد بود (به شکل ۱.۱—ب توجه شود).



شکل ۱.۱: الف) نمایش دکارتی، ب) تعبیر جمع اعداد مختلط به عنوان جمع برداری

۶.۶.۱ تعریف. فرض کنید $z = a+bi$، در این صورت **قدر مطلق** z را با نماد $|z|$ نشان داده و بصورت $\sqrt{a^۲+b^۲}$ تعریف می‌کنیم. a را **قسمت حقیقی** z نامیده و با نماد $\mathrm{Re}(z)$ نشان می‌دهیم. b را **قسمت موهومی** z نامیده و با نماد $\mathrm{Im}(z)$ نشان می‌دهیم. **مزدوج** z را بصورت $a-bi$ تعریف کرده و با نماد $\overline{z}$ نشان می‌دهیم.

۷.۶.۱ قضیه. فرض کنید $z,w \in \mathbb{C}$، در اینصورت:

۱) (نامنفی بودن قدر مطلق) $|z| \geq ۰$

۲) $|z| = ۰$ اگر و تنها اگر $z = ۰$.

۳) $|zw| = |z||w|$.

۴) (نامساوی مثلثی) $|z+w| \leq |z|+|w|$.

۵) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$ و $\overline{z-w} = \overline{z}-\overline{w}$.

۶) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ و $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \left(\frac{\overline{z}}{\overline{w}}\right)$.

۷) $\mathrm{Re}(z) = \frac{۱}{۲}(z+\overline{z})$ و $\mathrm{Im}(z) = \frac{۱}{۲}(z-\overline{z})$.

۸) $|z|^۲ = z\overline{z}$.

۹) $z = \overline{z}$ اگر و تنها اگر $z \in \mathbb{R}$.

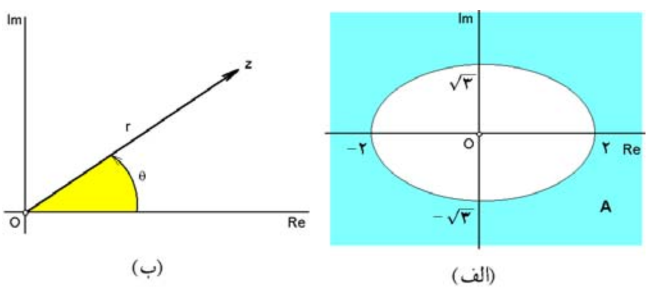
۱۰) $\overline{\overline{z}} = z$ و $|\overline{z}| = |z|$.

۱۱) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ و $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

۸.۶.۱ مثال. ۱) مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{C}$ اعداد مختلط z صادق در نامساوی $|z-۱|+|z+۱| > ۴$ را مشخص کنید.
حل. برای این منظور فرض کنید $z = a+bi$ به A متعلق است، بنابراین

$$
\begin{aligned}
&|a-۱+bi|+|a+۱+bi| > ۴,\\
&\sqrt{(a-۱)^۲+b^۲}+\sqrt{(a+۱)^۲+b^۲} > ۴,\\
&(a-۱)^۲+b^۲-۸\sqrt{(a-۱)^۲+b^۲}+۱۶ > (a+۱)^۲+b^۲,\\
&۲\sqrt{(a-۱)^۲+b^۲} > a-۴,\\
&۴(a^۲-۲a+۱+b^۲) > a^۲-۸a+۱۶,\\
&۳a^۲+۴b^۲ > ۱۲.
\end{aligned}
$$

در نتیجه $\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۳} > ۱$. این مجموعه را در شکل ۲.۱—الف ترسیم نموده‌ایم.



شکل ۲.۱: الف) مجموعهٔ A در مثال ۱ ب) مثلث در مثال ۳

مثال ۲) نشان دهید که اعداد مختلط $z_۱,z_۲,z_۳ \in \mathbb{C}$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست قرار دارند که اعداد حقیقی α و β و γ چنان یافت شوند که $\alpha z_۱+\beta z_۲+\gamma z_۳ = ۰$ و $\alpha+\beta+\gamma = ۰$.
حل. برای این منظور، توجه می‌کنیم که نقاط $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ وقتی و تنها وقتی بر یک خط راست واقعند که بردارهای $\overrightarrow{z_۱z_۲}$ و $\overrightarrow{z_۱z_۳}$ موازی باشند، یعنی عددی حقیقی مانند α یافت شود که $\overrightarrow{z_۱z_۳} = t\overrightarrow{z_۱z_۲}$. به بیان دیگر $z_۳-z_۱ = t(z_۲-z_۱)$ یا $(t-۱)z_۱-tz_۲+z_۳ = ۰$. اکنون کافی است فرض شود $\alpha = t-۱$، $\beta = -t$ و $\gamma = ۱$. بر عکس این حکم به صورت مشابه قابل اثبات می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید $z_۱+z_۲+z_۳ = ۰$ و

$$|z_۱| = |z_۲| = |z_۳| = ۱$$

نشان دهید که $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد (یعنی، $C : |z| = ۱$) هستند. به شکل

۲.۱—ب توجه شود.

حل. با توجه به قضیهٔ ۷.۶.۱، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}|z_۲ - z_۳|^۲ &= (z_۲ - z_۳)\overline{(z_۲ - z_۳)}\\ &= z_۲\overline{z_۲} + z_۳\overline{z_۳} - z_۲\overline{z_۳} - z_۳\overline{z_۲}\\ &= ۲|z_۲|^۲ + ۲|z_۳|^۲ - (z_۲ + z_۳)\overline{(z_۲ + z_۳)}\\ &= ۴ - |z_۲ + z_۳|^۲ = ۴ - |-z_۱|^۲ = ۴ - |z_۱|^۲ = ۳.\end{aligned}$$

و چون بین $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ تقارن وجود دارد، پس فاصلهٔ آنها دوبه‌دو برابرند.

مثال ۴) مجموعهٔ همهٔ $z = a+bi \in \mathbb{C}$ هایی را مشخص کنید که $|z^۲ - ۱| = \alpha$.

حل. اگر $z = a + bi$ در این شرط صدق کند، آنگاه

$$\begin{aligned}\alpha = |z^۲ - ۱| &= |a^۲ - b^۲ + ۲abi - ۱|\\ &= \sqrt{(a^۲ - b^۲ - ۱)^۲ + (۲ab)^۲}.\end{aligned}$$

$$a^۴ + b^۴ + ۱ - ۲a^۲b^۲ + ۲b^۲ - ۲a^۲ + ۴a^۲b^۲ = \alpha^۲$$

$$(a^۲ + b^۲ + ۱)^۲ = ۴a^۲ + \alpha^۲$$
$$b^۲ = -a^۲ - ۱ \pm \sqrt{\alpha^۲ + ۴a^۲}$$

که چون a و b عدد حقیقی‌اند، پس + مورد قبول است، یعنی $b = \pm\sqrt{\sqrt{\alpha^۲ + ۴a^۲} - ۱ - a^۲}$. بایستی زیر رادیکال مثبت باشد، یعنی $۱+a^۲ \le \sqrt{\alpha^۲ + ۴a^۲}$، یا $(a^۲-۱)^۲ \le \alpha^۲$. بنابراین جواب مساله چنین است

$$\{a+bi \mid ۱ - \alpha \le a^۲ \le ۱ + \alpha,\; b = \pm\sqrt{\sqrt{\alpha^۲ + ۴a^۲} - ۱ - a^۲}\}.$$

مثال ۵) نشان دهید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد و z یک ریشه از آن، آنگاه $\overline{z}$ نیز ریشهٔ این چند جمله‌ای است.

حل. فرض کنیم $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_۱x + a_۰$ که a_i ها اعداد حقیقی‌اند. اگر z ریشهٔ $P(x)$ باشد، آنگاه $P(z) = ۰$. از طرفین این رابطه مزدوج می‌گیریم:

$$\begin{aligned}۰ &= \overline{۰} = \overline{P(z)} = \overline{a_nz^n + \cdots + a_۱z + a_۰}\\ &= \overline{a_n}\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_۱z} + \overline{a_۰}\\ &= a_n\overline{z^n} + \cdots + a_۱\overline{z} + a_۰ = P(\overline{z})\end{aligned}$$

مثال ۶) حل معادلهٔ درجه دوم با دلتای منفی. فرض کنیم $ax^۲ + bx + c = ۰$ و $\triangle = b^۲ - ۴ac < ۰$. در اینصورت $a(x - \frac{b}{۲a})^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a} = ۰$، یا $(x - \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$. بنابراین

$$x = \frac{b}{۲a} \pm \sqrt{\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}} = \frac{b}{۲a} \pm \frac{\sqrt{۴ac - b^۲}}{۲a}i.$$

توجه شود که بنابه تمرین قبل این دو جواب مزدوج هستند!

۹.۶.۱ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر عدد مختلط z با قدر مطلق ۱ $= |z|$ باشد و نیز $z \neq -۱$، آنگاه عدد حقیقی t ای یافت می‌شود که $z = \frac{۱+ti}{۱-ti}$.

۲) فرض کنید $z, w \in \mathbb{C}$ دلخواهند، ثابت کنید (قاعده متوازی الاضلاع): $|z+w|^۲ + |z-w|^۲ = ۲(|z|^۲ + |w|^۲)$.

۳) موارد (۳)، (۶) و (۱۱) از قضیهٔ ۷.۶.۱ را ثابت کنید.

۴) فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| = |\beta|$، نشان دهید که $|\alpha+\gamma|^۲ + |\alpha-\gamma|^۲ = |\beta+\gamma|^۲ + |\beta-\gamma|^۲$.

۵) نشان دهید که اگر $|\alpha| < ۱$ و $|\beta| \le ۱$، آنگاه $|\beta+\alpha| \le |۱+\overline{\alpha}\beta|$. در چه صورتی تساوی برقرار می‌شود؟

در هر مورد، مجموعهٔ همهٔ z های صادق در روابط را بنویسید:

۶) $\mathrm{Re}(z) \ge \mathrm{Im}(z)$,	۷) $\lvert z - ۱ + ۳i\rvert < ۴$,
۸) $\lvert z - ۱\rvert + \lvert z + i\rvert = ۲$,	۹) $\lvert z - ۱ + i\rvert = \lvert z + ۱ - i\rvert$,
۱۰) $\lvert z - ۱\rvert \le \lvert z + ۱\rvert$,	۱۱) $\lvert z\rvert + \mathrm{Re}(z) \le ۱$,
۱۲) $\left(\frac{z+۱}{z-i}\right)^۴ = ۱$,	۱۳) $۳\lvert z\rvert - \mathrm{Re}(z) = ۱۲$,
۱۴) $\lvert z - ۲\rvert = \lvert ۱ - ۲\overline{z}\rvert$	۱۵) $۲\lvert z - i\rvert = \mathrm{Re}(z) + ۱$

فرض کنید $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = ۱$، نشان دهید که

۱۵) $|\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta| = |\alpha + \beta + \gamma|$,

۱۶) $\dfrac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R}$.

۱۷) نشان دهید که اگر a و b و c و نیز x و y و z رئوس دو مثلث در $\mathbb{R}^۲ = \mathbb{C}$ باشند، آنگاه در صورتی این دو مثلث متشابه‌اند:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = ۰.$$

۱۸) معادلات زیر را با فرض $x \in \mathbb{R}$ حل کنید:

۱) $(x+i)^n - (x-i)^n = ۰$,

۲) $\cos x + i\sin x = \sin x + i\cos x$.

۱۹) فرض کنید α عدد طبیعی دلخواهی است، ثابت کنید که
$$\left(\frac{۱+i\tan\alpha}{۱-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{۱+i\tan(n\alpha)}{۱-i\tan(n\alpha)}.$$

۲۰) فرض کنید $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=۱$، در این صورت ثابت کنید که $(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=۱$.

۲۱) فرض کنید a و b اعداد مختلط مخالف یک و صفر می‌باشند. نشان دهید که دو مثلث با رئوس O، ۱ و a و نیز با رئوس O، b و ab متشابه هستند.

۱۰.۶.۱ نمایش قطبی اعداد مختلط. فرض کنید $z=a+bi\in\mathbb{C}$ یک عدد مختلط مخالف صفر است. فاصلهٔ نقطهٔ z تا مبداء را r و زاویهٔ مثبت بین محور Re و نیمخط Oz را θ می‌نامیم:

$$r:=|z|=\sqrt{a^۲+b^۲}.$$
$$\theta:=\arg(z)=\begin{cases}\arctan(b/a) & \text{اگر } a>۰\\ \pi/۲ & \text{اگر } a=۰<b\\ ۳\pi/۲ & \text{اگر } a=۰>b\\ \arctan(b/a)+\pi & \text{اگر } a<۰\end{cases}$$

در این صورت، r را طول z و θ را آرگومان z می‌نامیم. بعلاوه تعریف می‌کنیم:
$$\boxed{\mathrm{Arg}(z):=\{\arg(z)+۲k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}}$$
بسادگی اثبات می‌شود که $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$. در این حالت می‌نویسیم
$$z=re^{i\theta}\quad \text{یا} \quad z=r\exp(i\theta)$$

۱۱.۶.۱ مثال. با توجه به تعریف داریم:

$z=a+bi$	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$	$\|z\|$	$\arg(z)$	$z=re^{\theta}$
۱	۱	۰	۱	۰	$۱e^{۰i}$
-۱	-۱	۰	۱	π	$۱e^{\pi i}$
i	۰	۱	۱	$\pi/۲$	$۱e^{\pi i/۲}$
$-i$	۰	-۱	۱	$۳\pi/۲$	$۱e^{۳\pi i/۲}$
$۱+i$	۱	۱	$\sqrt{۲}$	$\pi/۴$	$\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}$
$۱-i$	۱	-۱	$\sqrt{۲}$	$-\pi/۴$	$\sqrt{۲}e^{-\pi i/۴}$
$-۱+i$	۱	-۱	$\sqrt{۲}$	$۳\pi/۴$	$\sqrt{۲}e^{۳\pi i/۴}$
$-۱-i$	-۱	-۱	$\sqrt{۲}$	$۵\pi/۴$	$\sqrt{۲}e^{۵\pi i/۴}$

۱۲.۶.۱ قضیه. نمایش قطبی اعداد مختلط دارای خواص به شرح زیر است:

۱) $re^{i\theta}=r_۱e^{i\theta_۱} \Leftrightarrow \begin{cases} r=r_۱,\\ \theta=\theta_۱+۲k\pi,\quad k\in\mathbb{Z},\end{cases}$

۲) $re^{i\theta}=۱ \Leftrightarrow r=۱$ و $\theta=۲k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

۳) $re^{i\theta}=r\cos\theta+r\sin\theta i,$

۴) $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}),\qquad$ ۵) $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i},$

۶) $(r_۱e^{i\theta_۱})(r_۲e^{i\theta_۲})=(r_۱r_۲)e^{i(\theta_۱+\theta_۲)},$

۷) $(re^{i\theta})^n=r^ne^{n\theta i},\qquad$ ۸) $-re^{i\theta}=re^{i(\theta+\pi)},$

۹) $\overline{re^{i\theta}}=re^{-\theta i},\qquad$ ۱۰) $(re^{i\theta})^{-۱}=\dfrac{۱}{r}e^{-\theta i},$

۱۳.۶.۱ مثال. ۱) چون $۱+i=\sqrt{۲}e^{\pi/۴}$، داریم:
$$\begin{aligned}(۱+i)^{۲۵} &= \left(\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}\right)^{۲۵}\overset{(۷)}{=}\left(\sqrt{۲}\right)^{۲۵}e^{۲۵\pi/۴i}\\ &= ۲^{۱۲}\sqrt{۲}e^{(۶\pi+\pi i/۴)}\overset{(۳)}{=}۲^{۱۲}\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}\\ &\overset{(۲)}{=} ۲^{۱۲}\sqrt{۲}\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)+۲^{۱۲}\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\\ &= ۲^{۱۲}(۱+i)\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

مثال ۲) چون $۱+\sqrt{۳}i=۲e^{\pi i/۴}$ و $۱-i=\sqrt{۲}e^{\pi i/۴}$:
$$\begin{aligned}\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-i}\right)^{۳۰} &= \left(\frac{۲e^{\pi i/۳}}{\sqrt{۲}e^{-\pi i/۴}}\right)^{۳۰}\\ &\overset{(۶)}{=}\left(\sqrt{۲}e^{(\pi i/۳+\pi i/۴)}\right)^{۳۰}\overset{(۷)}{=}(\sqrt{۲})^{۳۰}e^{۳۰(۷\pi i/۱۲)}\\ &= ۲^{۱۵}e^{(۱۷\pi+\pi i/۲)}\overset{(۳)}{=}۲^{۱۵}e^{-\pi i/۲}\\ &\overset{(۲)}{=}۲^{۱۵}\cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right)+۲^{۱۵}\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=-۲^{۱۵}i.\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

مثال ۳) مقدار عبارت $\sin\theta+\sin۲\theta+\cdots+\sin n\theta$ را بدست می‌آوریم. با استفاده از قسمت (۱) از قضیه ۱۲.۶.۱، داریم:
$$\begin{aligned}&\sin\theta+\sin(۲\theta)+\cdots+\sin(n\theta)\\ &\quad=\mathrm{Im}(e^{\theta i})+\mathrm{Im}(e^{۲\theta i})+\cdots+\mathrm{Im}(e^{n\theta i})\\ &\quad=\mathrm{Im}(e^{\theta i}+e^{۲\theta i}+\cdots+e^{n\theta i})\\ &\quad\overset{(۷)}{=}\mathrm{Im}(e^{\theta i}+(e^{\theta i})^۲+\cdots+(e^{\theta i})^n)\\ &\quad=\mathrm{Im}\left(\frac{۱-(e^{\theta i})^n}{۱-e^{\theta i}}e^{\theta i}\right)\overset{(۲)}{=}\mathrm{Im}\left(\frac{۱-e^{n\theta i}}{۱-e^{\theta i}}e^{\theta i}\right)\\ &\quad=\mathrm{Im}\left(\frac{e^{n\theta i/۲}(e^{n\theta i/۲}-e^{-n\theta i/۲})}{e^{\theta i/۲}(e^{\theta i/۲}-e^{\theta i/۲})}e^{\theta i}\right)\\ &\quad\overset{(۵)}{=}\mathrm{Im}\left(e^{(n+۱)\theta i/۲}\frac{۲i\sin\left(\frac{n\theta}{۲}\right)}{۲i\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)}\right)\\ &\quad\overset{(۳)}{=}\sin\left(\frac{n+۱}{۲}\theta\right)\ \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{۲}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)}.\end{aligned}$$

توضیح اینکه، اعداد داخل پرانتزها، به شمارهٔ حکم مورد استفاده از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ اشاره دارند.

۱۴.۶.۱ تمرین.

۱) هر یک از اعداد -۲، $۲+i\sqrt{۲}$، $-\sqrt{۲}$، $-۱-i\sqrt{۳}$، $\left(\frac{۱+\cos\alpha+i\sin\alpha}{۱+\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^{۲۲}$ را به شکل قطبی بنویسید.

۲) هر یک از مقادیر $\left(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i}\right)^{۴۱}$، $(۱-i)^{۱۰}$، $\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}i}{\sqrt{۳}+i}\right)^{۱۲}$ و $\left(\frac{۱-i}{۱+i}\right)^{۲۲}$ را محاسبه کنید.

۳) نشان دهید که اگر $\theta\in\mathbb{R}$، آنگاه

الف) $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$،

ب) $\sin ۳\theta = ۴\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{۳}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{۳}+\theta\right)$ ، و

ج) $\sin ۴\theta = ۸\sin\theta\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{۴}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\theta\right)$

۴) در صورتی که $n\geq ۲$، ثابت کنید که

$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{۲\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-۱)\pi}{n}\right) = n/۲^{n-۱}$

۵) کوچکترین اعداد طبیعی n و m ای را بیابید که $\left(۱+\sqrt{۳}i\right)^m = (۱-i)^n$.

٦) اگر $z = a+bi\in\mathbb{C}$، تعریف می‌کنیم

$$e^z := e^a e^{bi} = e^a\cos b + (e^a\sin b)\,i$$

در این صورت با فرض

$$\sin z = \frac{۱}{۲i}\left(e^{zi}-e^{-zi}\right) \quad \text{و} \quad \cos z = \frac{۱}{۲}\left(e^{zi}+e^{-zi}\right)$$

در این صورت ثابت کنید

الف) $\sin^۲ z + \cos^۲ z = ۱$،

ب) $\tan z = \dfrac{\sin(۲a)+i\sinh(۲b)}{\cos(۲a)+\cosh(۲b)}$ و

ج) $\sin z = \sin a\cosh b + i\cos a\sinh b$.

۷) در صورتی که $x_n + iy_n = \left(۱+i\sqrt{۳}\right)^n$، نشان دهید:

الف) $x_n y_{n+۱} - x_{n+۱}y_n = \sqrt{۳}\,۲^{۲n}$ و

ب) $x_{n+۱}x_n + y_{n+۱}y_n = ۲^{۲n}$.

۸) مجموع هر یک از عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\cos x + \cos(۲x) + \cdots + \cos(nx)$ و

ب) $\sin x + \sin(۳x) + \cdots + \sin((۲n-۱)x)$.

۱۵.۶.۱ قضیهٔ دموآور.

گیریم $z = re^{\theta i}\in\mathbb{C}-\{۰\}$ و $n\in\mathbb{N}$. در اینصورت n ریشهٔ n ام عدد z عبارتند از

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{\theta+۲k\pi}{n}i\right)$$

که در آن $k = ۰,۱,۲,\cdots,n-۱$.

اثبات: فرض کنید $z = re^{i\theta}$، $w = r_۱e^{i\theta_۱}$ و $w = \sqrt[n]{z}$. بنابراین $z = w^n$ و بنابه قسمت (۷) از قضیهٔ ۱۲.۶.۱، داریم $re^{i\theta} = r_۱^n e^{in\theta_۱}$. اکنون از قسمت (۱) از قضیهٔ ۱۲.۶.۱ نتیجه می‌گیریم $r = r_۱^n$ و $n\theta_۱ = \theta = ۲k\pi$، که $k\in\mathbb{Z}$ دلخواه است. بنابراین $r_۱ = \sqrt[n]{r}$ و $\theta_۱ = (\theta+۲k\pi)/n$.

اگر فرض کنیم $u = \sqrt[n]{r}e^{\theta i/n}$ و $v = e^{۲\pi i/n}$، آنگاه می‌توان نوشت

$$\sqrt[n]{r}e^{(\theta+۲k\pi)i/n} = \sqrt[n]{r}e^{\theta i/n}\left(e^{۲\pi i/n}\right)^k = uv^k.$$

از طرفی $۱ = e^{۲\pi} = \left(e^{۲\pi i/n}\right)^n = u^n$، بنابراین uv^n عملاً همان $u = uv^۰$ است. پس کافی است که k مقادیر بین صفر و $n-۱$ را اختیار کند. □

۱۶.۶.۱ مثال.

۱) فرض کنید $z = ۱$ و $n = ۳$ در این صورت، سه ریشهٔ سوم عدد یک برابرند با

$$\sqrt[۳]{۱} = \sqrt[۳]{۱e^{۰i}} = \sqrt[۳]{۱}\exp\left\{\frac{۰+۲k\pi}{۳}i\right\}$$

که در آن $k = ۰,۱,۲$. برای $k = ۰$، داریم

$$\sqrt[۳]{۱} = \sqrt[۳]{۱}۱e^{۰i} = \cos ۰ + i\sin ۰ = ۱$$

برای $k = ۱$، داریم

$$\sqrt[۳]{۱} = ۱e^{۲\pi/۲} = \cos\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

برای $k = ۲$، داریم

$$\sqrt[۳]{۱} = ۱e^{۴\pi i/۳} = \cos\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

مثال ۲) فرض کنید $z\neq ۱$ یکی از ریشه‌های پنجم یک است، در این صورت ثابت کنید که

$$\frac{z}{۱+z^۲} + \frac{z^۲}{۱+z^۴} + \frac{z^۳}{۱+z} + \frac{z^۴}{۱+z^۳} = ۲$$

حل. چون $z^۵ = ۱$، بنابراین $zz^۴ = ۱$. یعنی $z^۴ = \frac{۱}{z}$. همچنین $z^۲z^۳ = ۱$، یعنی $z^۳ = \frac{۱}{z^۲}$. بنابراین، طرف اول تساوی بالا عبارت است از

$$\begin{aligned}
\frac{z}{۱+z^۲} + \frac{z^۲}{۱+۱/z} + \frac{z^۳}{۱+z} + \frac{z^۴}{۱+۱/z^۲} &= \\
&= \frac{z}{۱+z^۲} + \frac{z^۳}{z+۱} + \frac{z^۳}{۱+z} + \frac{z^٦}{z^۲+۱} \\
&= \frac{۲z^۳}{۱+z} + \frac{۲z}{۱+z^۲} \\
&= \frac{۲z^۵+۲z^۳+۲z^۲+۲z}{(۱+z^۲)(۱+z)} \\
&= \frac{۲(۱+z+z^۲+z^۳)(۱-z)}{(۱+z^۲)(۱-z^۲)} \\
&= \frac{۲(z^۴-۱)}{(z^۲+۱)(z^۲-۱)} = ۲.
\end{aligned}$$

۱.۶.۱۷ تمرین.

۱) هر یک از مقادیر $\sqrt[4]{-8}$، $\sqrt[3]{i}$، $\sqrt[3]{-2+2i}$، $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$، $\sqrt{2+2\sqrt{2}i}$ و $\sqrt[5]{\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}$ را محاسبه کنید.

۲) تمام ریشه‌های پنجم ۳۲ را بیابید.

۳) عدد $8-8\sqrt{3}i$ را بشکل قطبی نوشته و سپس ریشه‌های چهارم آن را بیابید.

۴) تمام مقادیر مختلف $(1-i)^{5/4}$ را محاسبه کنید.

۵) نشان دهید که اگر $w_1,\cdots,w_n=1$ ریشه‌های n ام یک باشند، آنگاه $w_1+w_2+\cdots+w_n=0$.

۶) فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و $m\in\mathbb{N}$، نشان دهید که عبارت زیر برابر $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2}$ است:

$$\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)+a^2\right)$$
$$\times\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)+a^2\right)$$
$$\times\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)+a^2\right).$$

۷) نشان دهید که اگر $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، آنگاه

$$(x+y+z)(x+yw+zw^2)(x+yw^2+zw)=$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

۸) معادلهٔ $x^3-3ax+(a^3+1)=0$ که $a\in\mathbb{R}$ را حل کنید.

۱.۶.۱۸ کرهٔ ریمان و صفحهٔ مختلط گسترش یافته.

می‌دانیم که $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{R}^2$ می‌شود یکی گرفت. بعلاوه $\mathbb{R}^2$ را نیز با صفحه xOy از فضا $\mathbb{R}^3$ می‌توان یکی گرفت. در نتیجه می‌شود $\mathbb{C}$ را با $xOy:=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ یکی گرفت. حال کره‌ای به مرکز $(0,0,1)$ و به شعاع واحد را در نظر بگیرید:

$$S:x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

همچنین فرض کنید $N(0,0,2)$ قطب شمال S می‌باشد (به شکل ۱.۳—الف توجه شود). بازاء هر نقطه $x+iy=(x,y,0)$ از $\mathbb{C}$، خط راست و اصل بین این نقطه و N را در نظر گرفته و محل تلاقی آن را با کرهٔ S را با نماد $f(x+iy)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{C}$ به $S-\{N\}$ بدست می‌آید. این نگاشت را **نگاشت ریمانی** و S را **کرهٔ ریمان** می‌نامند:

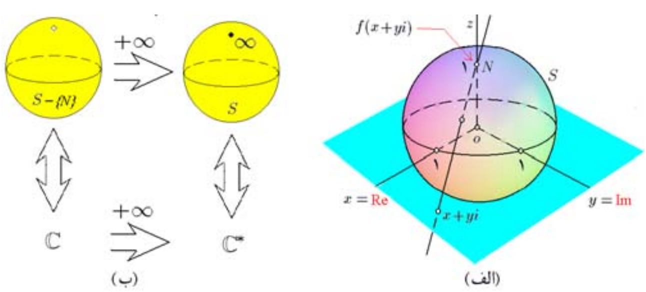
$$f:\mathbb{C}\longrightarrow S-\{N\}$$
$$f(x+yi)=\frac{1}{1+x^2+y^2}\left(x,y,x^2+y^2\right)$$

با استفاده از نگاشت ریمان (یا، تصویر گنجگاری) هر خط راست و هر دایره بر S نگاشته می‌شود. خطوط راست به دوایری بر S تصویر می‌شوند که از N می‌گذرند. پس تمام خطوط در $\mathbb{C}$ در بینهایت به یک نقطه می‌رسند! این نقطهٔ (انگاری) را با نماد ∞ نشان می‌دهیم (به شکل ۱.۳—ب توجه شود). این نقطه به $N\in S$ متناظر است. $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ را که با N در تناظر است، **صفحهٔ مختلط گسترش یافته** می‌نامند. مهمترین خواص ∞ عبارتند از

۱) $z+\infty=\infty$ ۲) $\frac{w}{0}=\infty$

۳) $z\infty=\infty$ ۴) $\frac{w}{\infty}=0$

که در آن $z\in\mathbb{C}$ و $w\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$. بنابراین، با بینهایت اعداد مختلط ∞ همانند خود اعداد مختلط می‌توان کار کرد. تنها نکته‌ای که می‌بایستی در نظر گرفته شود این است که به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و یا $\frac{\infty}{\infty}$ نرسیم. در این صورت محاسبات کاملاً صحیح هستند!



شکل ۱.۳: الف) نگاشت گنجنگاری ب) گسترش صفحهٔ مختلط با افزودن ∞

۱.۶.۱۹ تمرین.

۱) فرض کنید معادلهٔ جبری درجهٔ سومی به شکل

$$\mathcal{E}\,:\,X^3+AX^2+BX+C=0$$

داده شده است، که ضرایب آن اعداد حقیقی هستند. در این صورت نشان دهید که با فرض $X=x-A/3$ می‌توان معادلهٔ $\mathcal{E}$ را به فرم ساده‌تر $\mathcal{E}'\,:\,x^3+bx+c=0$ تبدیل نمود. حال فرض کنید که $x=s+t$ و نشان دهید که بایستی $st=-b/3$ و $s^3+t^3=-c/2$. اکنون، با حذف t بین دو معادلهٔ بالا، به معادله‌ای درجهٔ دوم بر حسب s^3 برسید. سپس، با حل معادلهٔ بدست آمده، جوابهای $\mathcal{E}$ را بیابید. به ؟؟ توجه شود.

۲) نشان دهید که اگر $M=a^2+b^2$ و $N=c^2+d^2$ دو عدد طبیعی باشند که به صورت مجموعی از دو عدد طبیعی نوشته شده‌اند، آنگاه MN را نیز به صورت مجموعی

از دو عدد طبیعی می‌توان نوشت. (راهنمایی: عبارت $|(a+bi)(c+di)|^۲$ را در نظر بگیرید.)

۲۰.۶.۱ تمرین. چند مساله مبارزه طلب:

۱) دستگاه معادلات $x^۵+y^۵=۳۳$ و $x+y=۳$ را با فرض $x,y\in\mathbb{C}$ حل کنید.

۲) فرض کنید A، B، C و D چهار نقطه در صفحه هستند (بعبارت دیگر چهار عدد مختلط هستند). نامساوی افلاطون $|AC|.|BD| \geq |AB|.|CD|+|BC|.|AD|$ را اثبات کنید.

۳) فرض کنید $A_۱A_۲A_۳$ و $B_۱B_۲B_۳$ دو مثلث متساوی الضلاع دلخواهند (رئوس آنها را اعداد مختلط می‌توانید در نظر بگیرید). فرض کنید C_i وسط پاره خط A_iB_i است، که $i=۱,۲,۳$. ثابت کنید مثلث $C_۱C_۲C_۳$ نیز متساوی الاضلاع است.

۴) فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی است. در این صورت، بکمک اعداد مختلط مقدار عبارت

$$\binom{n}{۱}\sin a+\binom{n}{۲}\sin(۲a)+\cdots+\binom{n}{n}\sin(na)$$

را بدست آورید.

۷.۱ استفاده از میپل

میپل (Maple) نام یک نرم افزار کامپیوتری بسیار قوی است. از این نرم افزار به شکل گسترده‌ای در آموزش، تحقیق و کاربرد ریاضی استفاده می‌شود. میپل دارای مزایای بیشماری است که آن را از سایر نرم افزارهای مشابه (نظیر، متمتیکا، متلب، متکد، درایو و . . .) متمایز می‌سازد. برخی از این ویژگیها به شرح زیرند:

۱) محاسبات با اعداد صحیح را در آن می‌توان انجام داد.

۲) محاسبات عددی را با هر تعداد رقم می‌توان انجام داد.

۳) محاسبات نمادین را به کمک آن می‌توان انجام داد.

۴) توابع ساخته شده و بسته‌های نرم افزاری بیشماری به زبان میپل وجود دارد که هر کدام می‌تواند در موضوعی بخصوص بکار آید.

۵) هر گونه محاسبه‌ای را می‌توان ضبط کرده و در دفعات بعدی استفاده نمود.

۶) از محیط آن به عنوان یک ادیتور مناسب کامپیوتری می‌توان استفاده نمود.

۷) میپل یک زبان برنامه نویسی بسیار قوی و در عین حال ساده است.

۸) تعداد بیشماری از کاربران با آن کار می‌کنند و به همین دلیل دارای مشکلات پنهانی احتمالی کمتری است.

میپل در اساس نرم افزاری است که در دانشگاه واترلو کانادا به وجود آمد و رفته رفته سیر تکاملی خود را طی نمود. برای ملاحظهٔ تاریخچه و ویژگیهای در حال گسترش آن می‌توانید به آدرس `http:\www.maplesoft.com` بر شبکهٔ اینترنت مراجعه کنید.

۱.۷.۱ چرا. شاید بتوان دلایل زیر را در این مورد مطرح نمود که هر کدام به تنهایی می‌توان دلیل کافی برای استفاده از میپل در آموزش باشد، در حالی که اینها تنها دلایلی هستند که تا کنون به نظر می‌رسند:

۱) مدرس، متعلم و خواننده از درگیر شدن با مباحث تکراری معاف می‌شود.

۲) مدرس به کمک آن می‌تواند چیزهایی که در تخیل می‌گنجد را به عیان بیان نشان داده و چگونگی تفهیم مطلب را تسریع کند.

۳) مدرس می‌توان از فرصت بدست آمده حاصل از بکارگیری میپل، به عمق مطالب بپردازد و یا تمرینات بیشتری را در کلاس حل کند.

۴) خواننده می‌تواند ایده‌های احتمالی خود را سریعتر اجرا نموده و چگونگی درستی آن مطلع شود.

۲.۷.۱ چگونه. در میان متخصصین علوم تربیتی در مورد نحوه و میزان بکارگیری ابزارهای کمک آموزشی مباحثات فراوانی وجود دارد که در همگی در اصل وجود آن متفق القولند ولی در میزان و چگونگی استفاده از آن دارای نظرات متفاوتی هستند. نکته‌ای که منتقدین استفادهٔ نامحدود ار نرم افزاها مطرح می‌کنند، این است که با بکار گیری گسترده از نرم افزارها، احتمال دور شدن متعلم از عمق مطلب و پناه بردن او ظاهر می‌رود. این مشکل که بظر به حق می‌رسد را می‌توان با شیوهٔ تدریس و ارزشیابی مرتفع نمود. بر همین اساس نویسنده بر خود دانسته است تا به شکل مبسوط در این خصوص تحقیق نموده و راهکارهای عملی برای انجام این مهم را ارائه نماید.

بر همین اساس توصیه می‌شود که خوانندهٔ محترم به نکات زیر توجه کافی داشته باشد:

۱) در ابتدای آشنایی با نرم افزار میپل تا اندازه‌ای با محیط آن آشنا شده و چند مثال ساده را نیز به کمک آن حل کنید ولی از صرف وقت بیشتر خودداری کنید و فرصت دهید تا با کتاب جلو بروید.

۲) در هر موضوع خاص ابتدا ((بحث نظری)) را بطور کامل مورد توجه قرار دهید و سپس به بخش ((استفاده از میپل)) که پایان هر فصلی آورده شده است، مراجعه کنید.

۳) سعی کنید مثالهای اولیه را ابتدا با دست و سپس آنها را به کمک میپل حل نمایید.

۴) توصیه می‌شود تا بعد از هفتهٔ دوم درس، هر هفته ۴۵ دقیقه به عنوان (آزمایشگاه ریاضی) در نظر گرفته شود و در آن استاد مسلط به میپل به آموزش چگونگی استفاده و نیز سودبخشی آن بپردازد.

۵) توصیه می‌شود که مدرس مربوطه مسایلی را همراه با حل دستی و حل با استفاده از میپل به طور منظم از شاگردان طلب کند.

۳.۷.۱ پیشنیاز. برای استفاده از میپل لازم است تا خوانندهٔ محترم با مراجعه به یکی از کتب آموزشی مربوطه، ضمن آشنایی با محیط میپل، مطالبی چون استفاده از کمک و چگونگی تایپ مطالب در آن را فربگیرد.

۴.۷.۱ دستور و اجرای آن. هر دستور در محیط میپل دنباله‌ای از حروف و نمادها است که توسط کی‌بورد قابل وارد کرن می‌باشد. در انتهای هر دستور باید از نمادهای : و یا ؛ استفاده شود. اگر از نماد ؛ استفاده شود، دستور اجرا شده و نتیجهٔ آن در خط بعدی ظاهر می‌گردد، ولی اگر از نماد : در آخر یک دستور استفاده شود، آن دستور تنها در حافظه اجرا می‌شود و نمایش داده نخواهد شد.

۵.۷.۱ طرز استفاده از سی دی همراه کتاب. آن را در درایو مخصوص سی دی قرار داده و به دایرکتوری `Maple7` بروید، فایل `Setup` را اجرا کنید. دستگاه شما به طور خودکار نرم افزار میپل را نصب خواهد نمود.

پس از نصب، یک آیکن که بر آن شکل میپل (یعنی، برگ درخت کاج) نقش بسته است، ظاهر می‌گردد. برای شروع به کار کافی است بر آن آیکن دو بار کلیک کنید. پس از این کار یک صفحهٔ سفید ظاهر می‌گردد که در گوشهٔ سمت چپ و بالای آن یک کرسر چشمکزن قرار، برای وارد نمودن دستورات کافی است بر صفحهٔ مذکور کلیلک کرده و شروع به تایپ کنید. در آخر هر دستور با انتر `Enter` زدن، دستور اجرا شده و نتیجه اعلام می‌گردد. چنانچه در حالی که کلید شیفت `Shift` را فشرده‌اید، کلید انتر را بزنید، بدون اینکه دستور اجرا شود، یک خط جدید برای وارد کردن ادامهٔ دستورات قبلی باز می شود.

برای استفاده از مثالهای موجود در سی دی، کافی است کلیدهای `File` و `Open` را بترتیب فشار داده و دایرکتوری `Examples\Volume_1` در سی دی را بیاورید. حال داخل هر یک از فصلهای مورد نظر شده و بر صفحه کار (`worksheet`) شاملِ مثال مورد نظر کلیک کنید.

چنانچه تغییراتی در محتوی مثالها انجام دادید، می‌توانید نتیجهٔ کار را دایرکتوری دیگری (که در دستگاه شما قرار دارد) ذخیره کنید.

۶.۷.۱ نمادهای و توابع معمولی. در جدول زیر برخی از نمادهای معمول ریاضیات و معادل آنها ذکر شده است:

در متن معمولی	در محیط میپل
$a+b$	$a+b$
$a-b$	$a-b$
ab	$a*b$
a/b	a/b
a^b	$a\hat{}b$
$\sin$	sin
$\cos$	cos
$\tan$	tan
$\cot$	cot
$\sec$	sec
$\csc$	csc
$\sinh$	$sinh$
$\cosh$	$cosh$
$\tanh$	$tanh$
$\coth$	$coth$
sech	$sech$
csch	$csch$
$\mathrm{arcsinh}$	$arcsinh$
$\mathrm{arccosh}$	$arccosh$
$\arcsin$	$arcsin$
$\arccos$	$arccos$
$\arctan$	$arctan$
arccot	$arccot$
$\sqrt{}(x)$	$sqrt\{x\}$
$\ln(x)$	$ln(x)$
$[x]$	$floor(x)$
$\|x\|$	$abs(x)$
$\sqrt[n]{}(x)$	$root[n]\{x\}$
$\max(x,y)$	$max\{x,y\}$
$\min(x,y)$	$min\{x,y\}$
$\log_{۱۰}(x)$	$log۱۰(x)$
$\log_n(x)$	$log[n](x)$
π	Pi
$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$	I
Re(x)	$Re(x)$
Im(x)	$Im(x)$
$\bar{x}$	$conjugate(x)$
$۱/x$	$۱/x$
$\mathrm{sgn}(x)$	$sgn(x)$
e^x	$exp(x)$

۷.۷.۱ نمادگزاری. فرض کنید دستور C را اجرا کرده و به نتیجهٔ R رسیده باشیم، در این صورت خواهیم نوشت:

$$\mathrm{C} \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{R}$$

۸.۷.۱ اعمال با اعداد صحیح. فرض کنیم n و m اعداد طبیعی باشد، در این صورت

در محیط میپل	در متن معمولی
n mod m	n به پیمانهٔ m
factor(n)	تجزیهٔ عدد n
isprime(n)	آیا n عددی اول است؟
gcd(m, n)	کوچکترین مقسوم علیه مشترک
lcm(m, n)	بزرگترین مضرب مشترک m و n
n!	n فاکتوریل
binomial(m, n)	انتخاب $\binom{n}{m}$
ithprime(n)	nامین عدد اول
sum('e(k)','k' = n..m)	مجموع $e(k)$ از n تا m

۹.۷.۱ اعمال با اعداد گویا. فرض کنیم n و m اعداد گویا باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
ifactor(n)	تجزیهٔ عدد n
simplify(n)	سادهٔ شدهٔ n
numer(n)	صورت کسر n
denom(n)	مخرج کسر n

۱۰.۷.۱ اعمال با اعداد حقیقی. در حالت عادی محیط میپل مختلط است و چنانچه بخواهید اعداد حقیقی فرض شوند بایستی ابتدا دستور `with(RealDomain)` را اجرا کنید.

فرض کنیم `n` و `m` اعداد حقیقی باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
root[k](m)	ریشهٔ k ام m
sqrt(n)	ریشهٔ n
simplify(n)	سادهٔ شدهٔ n
expand(n)	باز شدهٔ n
evalf(n, m)	نمایش اعشاری n با m رقم
rashnalize(n)	صورت گویا شدهٔ n

۱۱.۷.۱ اعمال با اعداد مختلط. در حالت عادی محیط میپل مختلط است. برای وارد نمودن عدد مختلط $x+yi = x+y\sqrt{-1}$ در محیط میپل، تایپ شود `x+y*I`. اگر بخواهیم عدد حقیقی `x` در محاسبه دخالت دهیم، کافی است دستور `assume(x,real)` را اجرا کنیم.

فرض کنیم z و w اعداد مختلط باشد، در این صورت علاوه بر دستورات قبل، داریم

در محیط میپل	در متن معمولی
Re(z)	قسمت حقیقی z
Im(z)	قسمت موهومی z
conjugate(z)	مزدوج z
abs(z)	نرم یا طول
polar(r, theta)	عدد $z=re^{\theta}$
argument(z)	آرگومان z
convert(z, polar)	نمایش قطبی z
1/z	وارون z

۱۲.۷.۱ حل معادله و نامعادله. هر معادله و یا نامعادله‌ای را با یک اسم در محیط میپل وارد می‌کنیم، این کار با دستور `eq_name:=equation` صورت می پذیرد که `eq_name` نام معادله و `equation` ضابطهٔ معادله می‌باشد. مانند `eq_1:=x^2+y^2=1` که معادلهٔ $x^2+y^2=1$ را با نام `eq_1` معرفی می‌کند.

چنانچه بخواهیم دستگاه معادلات شامل معادلات `eq_1`، ... و `eq_m` را حل کنیم، کافی است از دستود `solve({eq_1,...,eq_m},{x_1,...,x_n})` استفاده شود که `x_1`، ... و `x_n` مجهولات مسأله هستند.

۱۳.۷.۱ . در آدرس اینترنتی
http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html
مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۲

تابع

تابع پس از عدد اصلی ترین مفهوم در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. در واقع، قسمت عمده‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال را علم مطالعهٔ توابع به فرم $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ می‌توان تعریف نمود؛ البته، روشن است که برای ایجاد سحولت در بحث، ابتدا به مطالعهٔ حالت ساده‌تر $m = n = ۱$ می‌پردازیم. و حالت کلی‌تر را در جلد دوم مطالعه می‌کنیم. هدف از این فصل آشنایی خواننده با انواع خاصی از توابع، یعنی توابعی به شکل $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ است، که در مطالعات بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تا فصل ۷ توابع مورد استفادهٔ ما همین توابع خواهند بود.

۱.۲ تعریف تابع

تابع از نظر شهودی یک دستگاه است! دستگاهی که عناصر مجموعه‌ای را تحویل گرفته و پس انجام عملیاتی بخصوص بر آن، نتیجه را اعلام می‌دارد. تعریف رسمی تابع چنین است:

۱.۱.۲ تعریف. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ دلخواهند. منظور از **یک تابع از** X **به** Y، تناظری است بین اعضاء X و Y به گونه‌ای که به هر عضو از X حداکثر یک عضو از Y را نسبت می‌دهد. اگر این تناظر را با f نشان دهیم، می‌نویسیم $f : X \to Y$ و می‌خوانیم f **تابعی از** X **به** Y **است**. اگر عضو $x \in X$ توسط f به $y \in Y$ متناظر شود، y را **مقدار** f **به ازاء** x نامیده و با نماد $f(x)$ نشان می‌دهیم. از نمادگذاری $x \mapsto f(x)$ برای نشان دادن ضابطهٔ f استفاده می‌شود.

۲.۱.۲ مثال. فرض کنید $\mathbb{R} = X = Y$. در این صورت
۱) تناظر $x \mapsto x$ یک تابع است (تابع همانی). مثلاً، $f(۵) = ۵$.
۲) تناظر $x \mapsto x^۲$ یک تابع است. مثلاً، $f(۱) = ۱$، $f(۲) = ۴$ و $f(-۳) = ۹$. در این تابع $f(-x) = f(x) \geq ۰$.
۳) تناظر «$x \mapsto \sqrt{x}$ اگر و فقط اگر $x = y^۲$» تابع نیست، زیرا $x = ۱$ به دو عنصر $y = ۱$ و $y = -۱$ متناظر می‌شود.

۳.۱.۲ تعریف. فرض کنید $f : X \to Y$. **دامنهٔ تعریف** f عبارت است از مجموعهٔ همهٔ $x \in X$ هایی که به ازای آن $f(x)$ تعریف می‌شود:

$$\boxed{D_f := \{x \in X \mid f(x) \in Y\}}$$

برد تابع f عبارت از مجموعهٔ همهٔ $f(x)$ هایی است که $x \in D_f$:

$$\boxed{R_f := \{f(x) \mid x \in D_f\}}$$

تابع f را در صورتی **سراسری** گوئیم که $D_f = X$ و در صورتی برو یا **پوشا** گوئیم که $R_f = Y$. در صورتی تابع f را **یکبیک** گوئیم که به ازاء هر $x, y \in X$ ای از تساوی $f(x) = f(y)$، تساوی $x = y$ نتیجه گردد.

۴.۱.۲ مثال. ۱) فرض کنید $\mathbb{R} = X = Y$. هشت مثال زیر نشان می‌دهند که خواص یکبیک بودن، پوشا بودن و سراسری بودن مستقلند. یعنی تابع می‌تواند یکی از این خواص را داشته باشد، مستقل از اینکه خواص دیگر را دارا باشد و یا اینکه نباشد!

$f(x)$	D_f	R_f	یکبیک	پوشا	سراسری
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\log x$	$(۰;+\infty)$	$\mathbb{R}$	$\checkmark$	$\checkmark$	
۱۰^x	$\mathbb{R}$	$(۰;+\infty)$	$\checkmark$		$\checkmark$
$\sqrt{x}$	$[۰;+\infty)$	$[۰;+\infty$	$\checkmark$		
$x^۳+x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\checkmark$	$\checkmark$
$\tan x$	$\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$	$\mathbb{R}$		$\checkmark$	
$x^۲$	$\mathbb{R}$	$[۰;+\infty)$			$\checkmark$
$۱/x^۲$	$\mathbb{R}-\{۰\}$	$(۰;+\infty)$			

مثال ۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x^۲}{۱+x}$ است. ضمن تعیین دامنه و برد f، مشخص کنید که آیا f یکبیک است؟

حل. وقتی و تنها وقتی $x \in D_f$ که کسر $\frac{x^2}{1+x}$ تعریف شود، یعنی $x + 1 \neq 0$. پس، دامنهٔ f عبارت است از $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

برای تعیین برد f فرض می‌کنیم $y \in \mathbb{R}$. معادلهٔ $f(x) = y$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{x^2}{1+x}$، یا $x^2 - yx - y = 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 + 4y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{(y+2)^2 - 4}\right) \end{aligned}$$

پس اگر $(y+2)^2 - 2^2 \geq 0$، یعنی اگر $|y+2| \geq 2$، آنگاه x ای هست که $f(x) = y$. اما، این شرط معادل با این گفته است که $y + 2 \geq 2$ یا $y + 2 \leq -2$. یعنی، $y \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. بنابراین، برد f عبارت است از $R_f = (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. بعلاوه، تابع f یکبیک نیست، زیرا ملاحظه می‌شود که $f(1) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

مثال ۳) اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به ازاء هر x ای در تساوی $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ صدق می‌کند، ضابطهٔ f را مشخص می‌کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $y = \frac{x}{x+1}$، پس $xy + y = x$، یا $x = \frac{y}{1-y}$. بنابراین $f(y) = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2$. اکنون با تعویض y به x، بدست می‌آوریم $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. توجه شود که این تساوی تنها برای x های مخالف یک و منفی یک درست است. چرا؟

۵.۱.۲ تمرین. در صورتی که $y = f(x)$ بصورت زیر معرفی شده باشد، دامنهٔ f را مشخص کنید:

۱) $y = \sqrt{3x - x^3}$، ۲) $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$،

۳) $y = (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$، ۴) $y = \log(x^2 - 4)$،

۵) $y = \sin\sqrt{x}$، ۶) $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

در هر مورد، دامنه و برد $y = f(x)$ را مشخص کنید:

۷) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$، ۸) $y = (-1)^x$،

۹) $y = \ln(1 - 2\cos x)$، ۱۰) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

کدامیک از توابع $y = f(x)$ زیر یکبیک هستند:

۱۱) $y = 3x - x^3$، ۱۲) $y = 10^x + 10^{-x}$،

۱۳) $y = x^3$، ۱۴) $y = 10^x - 10^{-x}$.

تابع $y = f(x)$ را در صورتی بیابید که:

۱۵) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad (|x| \geq 2)$

۱۶) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad (x > 0)$

۱۷) نشان دهید که اگر a، b و c اعداد حقیقی دلخواه باشند و $f(x) = ax^2 + bx + c$، آنگاه

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$$

۶.۱.۲ تعریف. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $I \subseteq D_f$ یک بازه است. در صورتی می‌گوئیم f بر I **صعودی** است که به ازاء هر $x, y \in I$ ای که $x < y$ داشته باشیم $f(x) \leq f(y)$. در صورتی می‌گوئیم f بر I **اکیداً صعودی** است که به ازاء هر $x, y \in I$ ای که $x < y$ داشته باشیم $f(x) < f(y)$. به صورت مشابه **تابع نزولی** و **اکیداً نزولی** تعریف می‌گردد. تابع را در صورتی **یکنوا** گوئیم که صعودی و یا نزولی باشد؛ آن را در صورتی **اکیداً یکنوا** گوئیم که اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد. روشن است که اکیداً یکنوایی، یکبیک بودن را نتیجه می‌دهد.

۷.۱.۲ مثال. در هر مورد، دامنهٔ یکنوایی تابع داده شده را مشخص می‌کنیم:

مثال ۱) تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ را در نظر بگیریم.

حل. فرض کنیم $0 \leq x < y \leq 1$، در این صورت $x^2 < y^2$، و لذا $1 - x^2 > 1 - y^2$. بنابراین

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} > \sqrt{1 - y^2} = f(y)$$

یعنی، f بر بازهٔ $I = [0; 1]$ اکیداً نزولی است. اگر فرض کنیم $-1 \leq x < y \leq 0$، در این صورت $y^2 < x^2$ و لذا $f(x) < f(y)$. یعنی تابع f بر بازهٔ $I = [-1; 0]$ اکیداً صعودی است. با توجه به اینکه $D_f = [-1; 1]$، کار تمام است.

مثال ۲) تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را در نظر می‌گیریم.

حل. فرض کنید $2 < x < y$. شرط $f(x) < f(y)$ را بررسی می‌کنیم $\frac{y+1}{y-2} < \frac{x+1}{x-2}$. چون $y - 2$ و $x - 2$ مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را در $(y-2)(x-2)$ ضرب کنیم:

$$(x+1)(y-2) < (y+1)(x-2)$$

پس $xy - 2x + y - 2 < xy - 2y + x - 2$، و یا $y < x$. پس f بر $I = (2; +\infty)$ اکیداً نزولی است. بصورت مشابه ثابت می‌شود که f بر $I = (-\infty; 2)$ نیز اکیداً نزولی است. اکنون، با توجه به اینکه $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$، نتیجه می‌گیریم که f بر هر یک از بازه‌های دامنه‌اش نزولی است.

۸.۱.۲ تمرین. دامنه‌های یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید:

$۱)\ y = x^۲ - ۳x + ۲,$ $\qquad ۲)\ y = x - [x],$

$۳)\ y = \sqrt{۵ - ۴x^۲},$ $\qquad ۴)\ y = ۱۰^x,$

$۵)\ y = \log x,$ $\qquad ۶)\ y = \sin(x + \pi).$

به ازاء مقادیر مختلف a، b، c و d دامنه‌های یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید:

$^*۷)\ y = ax^۲ + bx + c,$ $\qquad ۸)\ y = \dfrac{ax + b}{cx + d}.$

$^*۹)\ y = \sqrt{(ax - b)(cx - d)}$

۲.۲ اعمال بر توابع

با استفاده از اعمالی که شرح آن خواهد آمد و نیز توابع ساده، می‌توان توابع پیچیده‌تر را بدست آورد. این روش بسیار مرسوم است و دارای نتایج متعددی است. از جمله اینکه اگر مثلاً بخواهیم روشی برای مشتقگیری از توابع ابداع کنیم، کافی است آن را تنها برای توابع ساده‌تر بیان نموده و نشان دهیم که مشتق توابع پیچیده‌تر را به کمک مشتق توابع ساده‌تر تشکیل دهنده‌اش چگونه می‌توان بدست آورد.

در این بخش تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هستند.

۱.۲.۲ تعریف. فرض کنید f و g تابعند و $a \in \mathbb{R}$، در این صورت توابع af، $f + g$، fg، f/g و $f \circ g$ تعریف می‌کنیم:

$$af : x \mapsto af(x), \qquad f + g : x \mapsto f(x) + g(x),$$

$$fg : x \mapsto f(x)g(x), \qquad \frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)).$$

af را **حاصلضرب** a **در** f، $f + g$ را **حاصلجمع** f **با** g، fg را **حاصلضرب** f **و** g، f/g را **خارج قسمت** f **بر** g و بالاخره $f \circ g$ را **ترکیب** f **با** g می‌نامیم. بعلاوه

$$D_{af} = D_f \qquad D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g,$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\},$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = g^{-۱}(R_g \cap R_f).$$

۲.۲.۲ مثال. ۱) توابع سادهٔ $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۲ - x$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$f(x) + ۲g(x) = (x^۲ + ۱) + ۲(۲ - x) = x^۲ - ۴x + ۵,$$

$$f(x)g(x) = (x^۲ + ۱)(۲ - x) = -x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^۲ + ۱)}{(۲ - x)} = -x - ۲ - \frac{۳}{x - ۲},$$

$$f(g(x)) = f(۲ - x) = (۲ - x)^۲ + ۱ = x^۲ - ۴x + ۵,$$

$$g(f(x)) = g(x^۲ + ۱) = ۲ - (x^۲ + ۱) = -x^۲ + ۱,$$

$$f(f(x)) = f(x^۲ + ۱) = (x^۲ + ۱)^۲ + ۱ = x^۴ + ۲x^۲ + ۲,$$

$$g(g(x)) = g(۲ - x) = ۲ - (۲ - x) = x.$$

مثال ۲) توابع سادهٔ $f(x) = ۱/x$ و $g(x) = x^۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$، $D_g = \mathbb{R}$ و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{۱}{x^۲}, \qquad D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{۰\}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\frac{۱}{x}\right)^۲ = \frac{۱}{x^۲}, \quad D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{۰\}.$$

$$(f \circ f)(x) = f(x^۲) = x^۴, \qquad D_{f\circ f} = \mathbb{R}.$$

$$(g \circ g)(x) = g\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۱}{۱/x} = ۱, \qquad D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \{۰\}.$$

مثال ۳) فرض کنید $f(x) = ۱/(۱ - x)$. در این صورت

$$\begin{aligned} f_۲(x) &:= f(f(x)) = f\left(\frac{۱}{۱ - x}\right) \\ &= \frac{۱}{۱ - ۱/(۱ - x)} = \frac{۱ - x}{۱ - x - ۱} \\ &= \frac{x - ۱}{x} = ۱ - \frac{۱}{x} \\ f_۳(x) &:= f(f_۲(x)) = f\left(۱ - \frac{۱}{x}\right) \\ &= \frac{۱}{۱ - (۱ - ۱/x)} = \frac{۱}{۱/x} = x \end{aligned}$$

و در کل، اگر n عدد طبیعی دلخواهی باشد و تعریف کنیم $f_n(x) := \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ بار}}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= f_۴(x) = f_۷(x) = \cdots = f_{۳n+۱}(x) = \frac{۱}{۱ - x} \\ f_۲(x) &= f_۵(x) = f_۸(x) = \cdots = f_{۳n+۲}(x) = ۱ - \frac{۱}{x} \\ f_۳(x) &= f_۶(x) = f_۹(x) = \cdots = f_{۳n}(x) = x \end{aligned}$$

۳.۲.۲ تمرین. در هر یک از موارد زیر، توابع $f(g(x))$، $g(f(x))$، $f(f(x))$ و $g(g(x))$ را بیابید:

$۱)\ f(x) = x^۲,$ $\qquad g(x) = ۲x + ۳.$

$۲)\ f(x) = ۱/x,$ $\qquad g(x) = x + ۱.$

۲) در صورتیکه $f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$، تابع $f_n(x)$ را بدست آورید. (f_n در قسمت (۳) از مثال ۲.۲.۲ تعریف گردیده است.)

۳) در صورتی که $f(x+1)=x^2-3x+2$، $f(x)$ را مشخص کنید.

۴.۲.۲ معکوس. تابع $f:X\to Y$ را در صورتی **معکوسپذیر** گوئیم که تابعی $g:Y\to X$ با دامنهٔ $D_g=R_f$ و برد $R_g=D_f$ چنان یافت گردد که

$$1)\ \forall x\in D_f\ :\ g(f(x))=x,$$

$$2)\ \forall y\in D_g\ :\ f(g(y))=y.$$

در این حالت g را **معکوس** f نامیده و را با نماد $y=f^{-1}(x)$ نشان می‌دهند.

برای ایجاد راحتی بیشتر در تعیین معکوسپذیری یک تابع مفروض، قضیه‌ای سودمند به شرح زیر وجود دارد.

۵.۲.۲ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f:X\to Y$ معکوسپذیر باشد، این است که یکبیک باشد.

۶.۲.۲ قضیه. دامنهٔ هر تابع با برد تابع معکوسش برابر است. برد هر تابع با دامنهٔ تابع معکوسش برابر است. معکوس هر تابع صعودی، تابعی صعودی است. معکوس هر تابع نزولی، تابعی نزولی است. معکوس هر تابع یکبیک، تابعی یکبیک است. معکوس معکوس هر تابع، با خود تابع برابر است.

۷.۲.۲ مثال. معکوس تابع $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+5}$ را مشخص کنید.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که اولاً $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{-5}{4}\right\}$. پس اگر $x\neq\frac{-5}{4}$، آنگاه $4xf(x)+5f(x)=2x+3$ و یا $(4f(x)-2)x=3-5f(x)$. بنابراین $x=\frac{(3-5f(x))}{(4f(x)-2)}$. این نشان می‌دهد که $f^{-1}(x)=\frac{3-5x}{4x-2}$. بعلاوه

$$R_f=D_f^{-1}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

۸.۲.۲ تمرین. معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید:

$$1)\ y=\frac{x-1}{2x+3},\qquad 2)\ y=10\frac{x}{x+2},$$

$$3)\ y=x^{3/5}+1,\qquad 4)\ y=\sqrt{x^3-x^2}.$$

۹.۲.۲ توابع چند ضابطه‌ای. با استفاده از دو و یا چند تابع، توابع جدیدی را می‌توان تعریف نمود. این کار با انتخاب توابع بر بازه‌های بخصوص صورت می‌پذیرد. مانند

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & \text{اگر } x<1\\ x^2+x & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$$

که بر بازهٔ $(-\infty;1)$ با ضابطهٔ $\sqrt{1-x}$ و بر بازهٔ $[1;\infty)$ با ضابطهٔ x^2+x تعریف گردیده است. تنها شرطی که برای تعریف تابع چند ضابطه‌ای وجود دارد این است که ضابطه‌ها سازگار باشند، یعنی، اگر f به ازاء $x=x_0$ با دو مقدار تعریف شود، آنگاه آن مقادیر برابر باشند.

۱۰.۲.۲ مثال. ابتدا دامنه و برد تابع

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{اگر } x<1\\ x^2 & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$$

را یافته و سپس معکوس آنرا بدست آورید.

حل. دامنهٔ تابع f عبارت است از $\mathbb{R}$. فرض کنید $1\le x<y$، در این صورت $f(x)=x^2<y^2=f(y)$. بعلاوه، اگر $x<y<1$، آنگاه $f(x)=x-1<y-1=f(y)$. همچنین، اگر $x<1\le y$، آنگاه $f(x)=x-1<0\le1\le y^2=f(y)$. پس f بر کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و هر تابع اکیداً صعودی یکبیک می‌باشد. در نتیجه، f معکوسپذیر است. برای یافتن معکوس آن به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر $x<1$، آنگاه $f(x)=x-1$ و بنابراین $x=f(x)+1$. اگر $1\le x$، آنگاه $f(x)=x^2$ و بنابراین $x=\sqrt{f(x)}$. در نتیجه، معکوس f عبارت است از

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x+1 & \text{اگر } x<0\\ \sqrt{x} & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$$

بعلاوه، برد f عبارت است از

$$R_f=D_{f^{-1}}=(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$$

۱۱.۲.۲ تمرین. دامنه و برد هر یک از توابع زیر را مشخص کنید و سپس معکوس هر یک از آنها را در صورت وجود بیابید:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x & \text{اگر } x<1\\ x^2 & \text{اگر } 1\le x\le4\\ 2^x & \text{اگر } 4<x\end{cases}$$

$$2)\ f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{اگر } x\le0\\ 2x+3 & \text{اگر } 0<x<1\\ (x+2)^2 & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$$

روش تعریف توابع به همین چهار مورد محدود نمی‌شود. سایر روشها دارای مقدمات نظری بسیار هستند و بعداً ذکر خواهند شد. مثلاً، ممکن است تابعی را بصورت $f(x)=1+x+x^2+\cdots$ تعریف کنیم!

۳.۲ نمودار تابع

۱.۳.۲ تعریف. نمودار تابع مفروض $f : X \to Y$ را بصورت $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \quad | \quad x \in D_f\}$ تعریف می‌کنیم. چون اغلب $X = Y = \mathbb{R}$، پس می‌توان $X \times Y$ را با $\mathbb{R}^2$ یکی گرفت و نقاط Γ_f را در صفحهٔ دکارتی $\mathbb{R}^2$ نشان داد.

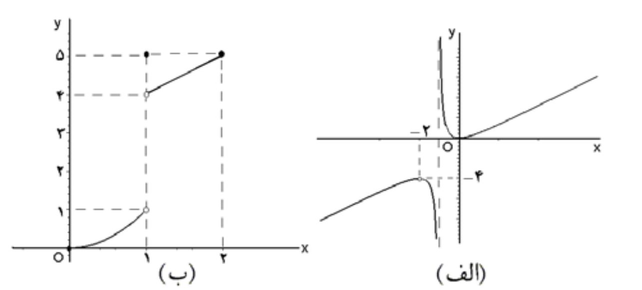
۲.۳.۲ روش نقطه‌یابی. مرسوم ترین روش در ترسیم تابع، روشی است موسوم به روش نقطه‌یابی. در این روش چند نقطه از D_f را انتخاب کرده و سپس نقاط $(x, f(x))$ را در صفحه مشخص می‌کنیم. آنگاه، این نقاط را بهم وصل می‌کنیم. این روش بسیار ساده است، ولی به هیچ وجه دقیق نیست: چه دلیلی دارد که نمودار تابع بین دو نقطهٔ مفروض متصل باشد؟ در صورت متصل بودن، آیا دارای نوسان است یا خیر؟ و بسیاری سئوالات دیگر که قابل طرح است و برای پاسخ به هر یک از آنها، نیاز به اطلاعات وسیع‌تری می‌باشد. بعداً، خواهیم دید که متصل بودن نمودار یک تابع، به معنی پیوستگی آن است و تعداد نوسانهای f نیز به تعداد صفرهای f' و f'' بستگی دارد.

۳.۳.۲ مثال. ۱) نمودار تابع $f(x) = x^2/(1+x)$ را رسم کنید.

حل. در قسمت (۲) از مثال ۴.۱.۲ نشان دادیم که $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ و $R_f = (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$. جدولی به شرح زیر تهیه می‌کنیم

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-16/3$	$-9/2$	-4	تعریف نشده	0	$1/2$	$-4/3$	$9/4$

اکنون کافی است این نقاط را در $\mathbb{R}^2$ ترسیم نموده و نقاط حاصل را بهم متصل کنید (به شکل ۱.۲—الف توجه شود).



ب) نمودار تابع در مثال ۲ $f(x) = x^2/(1+x)$شکل ۱.۲: الف) نمودار تابع

مثال ۲) نمودار تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \text{ اگر} \\ 5 & x = 1 \text{ اگر} \\ x+3 & 1 < x \le 2 \text{ اگر} \end{cases}$$

برای این منظور، ملاحظه می‌گردد که $D_f = [0; 2]$ و همچنین $R_f = [0; 1) \cup (4; 5]$ و

x	0	$1/2$		1		$3/2$	2
$f(x)$	0	$1/4$	1	5	4	$9/2$	5

بنابراین شکل ۱.۲—ب حاصل می‌گردد.

۴.۳.۲ تمرین. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

۱) $y = \sqrt{x-1}$، ۲) $y = [\sin x]$،

۳) $y = x - [x]$، ۴) $y = x^3 - 2x^2$،

۵) $y = \sqrt{\cos x}$، ۶) $y = \dfrac{1}{[x]}$،

۷) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$، ۸) $y = \arctan(x^2)$،

۹) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

هر یک از توابع چند ضابطه‌ای را رسم کنید:

۱۰) $$y = \begin{cases} 2^x & x \le -1 \text{ اگر} \\ 1/x & -1 < x < 0 \text{ اگر} \\ x^2 & x \ge 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۱۱) $$y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x < -1 \text{ اگر} \\ \arcsin x & -1 \le x \le 1 \text{ اگر} \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

نمودار هر یک از توابع زیر را با توجه به معلوم بودن نمودار تابع $y = f(x)$ رسم کنید:

۱۲) $y = f^2(x)$، ۱۳) $y = |f(x)|$،

۱۴) $y = \sqrt{f(x)}$، ۱۵) $y = \dfrac{1}{f(x)}$،

۱۶) $y = -f(x)$، ۱۷) $y = [f(x)]$.

در صورتی که نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را داشته باشیم، نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۱۸) $y = f(g(x))$، ۱۹) $y = f(x)g(x)$،

۲۰) $y = f(x) + g(x)$، ۲۱) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

۲۲) در صورتی که $y = f(x)f(x-a)$ و

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \le 1 \text{ اگر} \\ 0 & |x| > 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

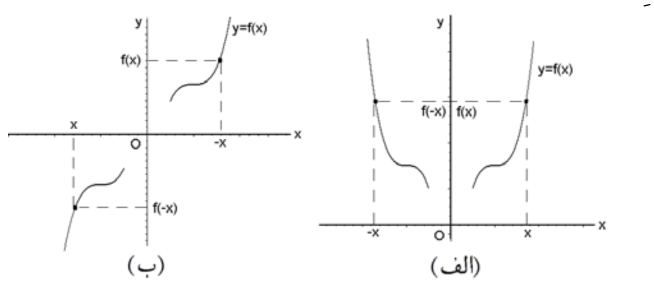
نمودار تابع y را در حالی ترسیم کنید که
الف) $a = 0$، ب) $a = 1$ و ج) $a = 2$.

۴.۲ تقارن در نمودار تابع

۱.۴.۲ تعریف. زیر مجموعهٔ $I \subseteq \mathbb{R}$ را در صورتی **متقارن** گوئیم که به ازاء هر $x \in I$ ای، $-x$ نیز به I متعلق باشد.

تابع $y = f(x)$ که دامنه‌اش متقارن است را در صورتی **زوج** گوئیم که به ازاء هر $x \in D$ ای داشته باشیم $f(-x) = f(x)$. نمودار چنین تابعی نسبت به محور y ها متقارن است (به شکل ۲.۲—الف توجه شود).

تابع $y = f(x)$ که دامنه‌اش متقارن است را در صورتی **فرد** گوئیم که به ازاء هر $x \in D$ ای داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$. نمودار چنین توابعی نسبت به مبداء متقارن است (به شکل ۲.۲—ب توجه شود).



شکل ۲.۲ : الف) نمودار یک تابع زوج ب) نمودار یک تابع فرد

۲.۴.۲ قضیه. ۱) حاصلضرب دو تابع زوج و یا دو تابع فرد، تابعی زوج است.
۲) حاصلضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است.
۳) حاصلضرب عددی در یک تابع زوج (یا فرد)، تابعی زوج (یا فرد) است.
۴) ترکیب دو تابع فرد، تابعی فرد است.
۵) ترکیب دو تابع زوج و و یا تابعی زوج و فرد، تابعی زوج است.
۶) معکوس و وارون یک تابع زوج (فرد) تابعی زوج (فرد) است.
۷) اگر $y = f(x)$ تابعی دلخواه باشد، و تعریف کنیم

$$y_۱ = \frac{f(x) + f(-x)}{۲} \quad \text{و} \quad y_۲ = \frac{f(x) - f(-x)}{۲}$$

آنگاه $y_۱$ تابعی زوج و $y_۲$ تابعی فرد است. در این صورت $f = y_۱ + y_۲$. یعنی، هر تابعی را بصورت حاصلجمع یک تابع زوج و یک تابع فرد می‌توان نوشت.

۳.۴.۲ مثال. ۱) تابع $f(x) = x \sin x$ زوج است، زیرا

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) \\ &= x \sin x = f(x) \end{aligned}$$

مثال ۲) تابع $f(x) = \ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|$ فرد است، زیرا

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left|\frac{(-x)-۱}{(-x)+۱}\right| = \ln\left|\frac{-x-۱}{-x+۱}\right| \\ &= \ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right| = -\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right| = -f(x) \end{aligned}$$

۴.۴.۲ تمرین. زوج و فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید:

۱) $y = ۲x^{۳} - x,$ ۲) $y = \sin x + \cos x,$

۳) $y = x\sin^{۲} x,$ ۴) $y = x^{۲} - |x|,$

۵) $y = \arcsin x.$ ۶) $y = x\frac{e^x - ۱}{e^x + ۱},$

۷) $y = ۵\sin ۴x,$ ۸) $y = \sin(\sin(\cos x)),$

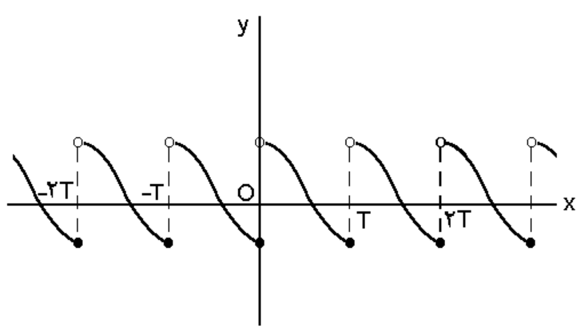
۹) $y = x + \sin x.$

۱۰) آیا تابعی که هم زوج و هم فرد باشد وجود دارد؟ چنانچه پاسخ مثبت است، ضابطه آن کدام است؟ نمودار آنرا نیز ترسم کنید!

۵.۴.۲ تعریف. تابع $y = f(x)$ با دامنهٔ $D_f = \mathbb{R}$ را در صورتی **متناوب** و با **تناوب** T گوئیم که اولاً به ازاء هر x ای $f(x+T) = f(x)$ و ثانیاً اگر $T_۱$ دارای این خاصیت باشد که به ازاء هر x ای $f(x+T_۱) = f(x)$، آنگاه $۰ < T \leq |T_۱|$. به بیان دیگر، T کوچکترین عدد مثبتی است که در تساوی

$$\forall x \;:\; f(x+T) = f(x)$$

صدق می‌کند. اگر $y = f(x)$ تابعی متناوب و با تناوب T باشد و نمودار f را در بازهٔ $[۰;T]$ رسم کرده باشیم، آنگاه با تکرار در راستای محور x ها و به اندازهٔ مضارب T، قطعات دیگری از نمودار تابع $y = f(x)$ را بدست می‌آوریم (شکل ۳.۲).



شکل ۳.۲: نمودار یک تابع متناوب

۶.۴.۲ قضیه. فرض کنید $y = f(x)$ با تناوب T و $y = g(x)$ با تناوب S است و $a \neq ۰$ عددی مخالف صفر، در این صورت

۱) $af(x)$ تابعی با تناوب T است.

۲) $f(ax)$ تابعی با تناوب $\frac{T}{|a|}$ است.

۳) اگر $\frac{S}{T}$ عددی گویا بوده و N بزرگترین عدد مثبتی باشد که $\frac{T}{N}$ و $\frac{S}{N}$ اعداد طبیعی باشند، آنگاه هر یک از توابع $f(x)+g(x)$، $f(x)-g(x)$، $f(x)g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ متناوبند و N مضربی از تناوب هر یک از آنها می‌باشد. (چنانچه $\frac{S}{T}$ عددی گویا نباشد، توابع مذکور نامتناوبند.)

۷.۴.۲ مثال. ۱) تابع $y = \sin x$ با تناوب $\text{۲}\pi$ است، در نتیجه تابع $\sin\left(\frac{x}{\text{۲}}\right)$ دارای تناوب $\text{۲}\pi \times \text{۲} = \text{۴}\pi$ است و تابع $-\text{۵}\sin x$ دارای تناوب $\text{۲}\pi$ می‌باشد.

مثال ۲) تابع $y = \cos x$ دارای تناوب $\text{۲}\pi$ است. در این صورت، $\text{۲}\cos x$ و $-\sin x$ با تناوب $\text{۲}\pi$ هستند.

مثال ۳) تابع $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ دارای تناوب π است در حالی که عدد N معرفی شده در قسمت (۳) از قضیهٔ بالا در مورد توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر $\text{۲}\pi$ است. توجه شود که $\text{۲}\pi = \text{۲} \times N$.

مثال ۴) تابع جزء کسری $((x)) = x - [x]$ دارای تناوب $T = \text{۱}$ است، زیرا اولاً

$$
\begin{aligned}
((x+\text{۱})) &= (x+\text{۱}) - [x+\text{۱}] = x + \text{۱} - ([x]+\text{۱}) \\
&= x - [x] = ((x))
\end{aligned}
$$

و در ثانی، اگر $T > \text{۰}$ و به ازای هر x ای $((x+T)) = ((x))$، آنگاه بایستی T عددی طبیعی باشد، زیرا اگر $\alpha = ((T))$ و $\text{۰} < \alpha < \text{۱}$، آنگاه بایستی $T = n + \alpha$ و با توجه به محاسبهٔ بالا مشاهده می‌شود که $\alpha + \text{۰}$ نیز می‌تواند به عنوان T انتخاب شود. بنابراین، چون باید T کوچکترین باشد، حتماً $n = \text{۰}$ و در نتیجه $\alpha = T$ که $\text{۱} > \alpha > \text{۰}$. اکنون با توجه به اینکه $((x+T)) = ((x))$، داریم

$$
\begin{aligned}
\text{۰} &= ((\text{۱} + (T - \alpha))) \\
&= ((\text{۱} - \alpha + T)) = ((\text{۱} - \alpha)) = \text{۱} - \alpha
\end{aligned}
$$

یعنی $\alpha = \text{۱}$ که مناقض است. پس T یک عدد طبیعی است. حال با توجه به اینکه یک کوچکترین عدد طبیعی صادق در رابطهٔ $((x+n)) = x$ است، نتیجه می‌گیریم که $T = \text{۱}$.

مثال ۵) اینک مثالی از یک تابع متناوب می‌آوریم که دورهٔ تناوب ندارد! فرض کنید

$$
f(x) = \begin{cases} \text{۱} & \text{اگر } x \in \mathbb{Q} \\ \text{۰} & \text{اگر } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}
$$

و نیز فرض کنید T عددی گویا باشد. در این صورت اگر $x \in \mathbb{R}$ گویا باشد، آنگاه $x + T$ نیز گویا است و در نتیجه

$$
f(x) = f(x+T) = \text{۱}
$$

اما اگر $x \in \mathbb{R}$ گنگ باشد، آنگاه $x + T$ نیز گنگ است و بنابراین $f(x) = f(x+T) = \text{۰}$. پس، به ازاء هر $x \in \mathbb{R}$ ای $f(x) = f(x+T)$، توجه داریم که $\text{۰} < T \in \mathbb{Q}$ دلخواه بود!

۸.۴.۲ تمرین. ۱) نشان دهید که $\text{۰} < T < \text{۲}\pi$ نمی‌تواند یک تناوب برای تابع $y = \sin x$ باشد.

کدام توابع زیر متناوبند، دورهٔ تناوب هر یک از توابع متناوب را بدست آورید:

۲) $y = \cos \text{۴}x$، ۳) $y = \sin(\text{۲}\pi x)$،

۴) $y = \sin^{\text{۲}} x$، ۵) $y = \tan x + \sin x$،

۶) $y = \cos\left(\frac{x-\pi}{\text{۲}}\right)$، ۷) $y = x - \text{۲}\left[\frac{x}{\text{۲}}\right]$،

۸) $y = \text{۳}\arctan(\text{۲}x)$، ۹) $y = |\cos x|$،

۱۰) $y = x^{\text{۲}} + \sin x$.

۱۱) فرض کنید $f(x)$ نزدیکترین عدد صحیح به عدد مفروض $x \in \mathbb{R}$ باشد. ضمن تعیین ضابطهٔ تابع $f(x)$، ثابت کنید $f(x)$ متناوب نیست ولی $f(x) - x$ متناوب است و سپس تناوب آنرا مشخص کنید.

۱۲) فرض کنید $y = f(x)$ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و نمودار آن نسبت به دو خط $x = a$ و $x = b$ متقارن می‌باشد. ثابت کنید که این تابع متناوب است.

نشان دهید که توابع زیر متناوبند و سپس دورهٔ تناوب هر یک از آنها را بیابید:

۱۳) $y = \sqrt{x - [x]}$ ۱۴) $y = \sin\{\text{۴}\pi(x - [x])\}$

۱۵) $y = (\text{۱۰}x - [\text{۱۰}x])^{\text{۲}}$

فصل ۳

حد و پیوستگی

هدف از این فصل ارائهٔ مفهوم حد و سپس استفاده از آن در مطالعهٔ پیوستگی تابع می‌باشد. این مبحث اولین برخورد ما با موضوع حسابان (حساب دیفرانسیل وانتگرال) است.

۱.۳ تعریف حد

۱.۱.۳ تعریف. فرض کنید $\varepsilon, x_0 \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$. منظور از یک ε–**همسایگی** از x_0 بازهٔ $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ از $\mathbb{R}$ است. منظوراز ε–**همسایگی سفته** از x_0، مجموعهٔ باز $(x_0-\varepsilon;x_0)\cup(x_0;x_0+\varepsilon) = (x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)-\{x_0\}$ می‌باشد. در واقع این مجموعه عبارت است از یک ε–همسایگی از x_0 که خود نقطهٔ x_0 را از آن برداشته‌ایم.

۲.۱.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع و x_0 عددی است که یک ε–همسایکی سفته از آن در دامنهٔ f قرار دارد، به بیان دیگر f در یک همسایگی از x_0 تعریف می‌شود و احتمالاً در خود نقطهٔ x_0 تعریف نمی‌گردد.

در صورتی می‌گوئیم **حد تابع** $y=f(x)$ وقتی x به x_0 میل می‌کند برابر عدد $\ell\in\mathbb{R}$ است که بازای هر $\varepsilon>0$ دلخواه، یک $\delta>0$ چنان یافت گردد که به ازای هر x در δ–همسایگی سفتهٔ $(x_0-\delta;x_0+\delta)-\{x_0\}$ از نقطهٔ x_0، عدد $f(x)$ به ε–همسایگی $(\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon)$ از ℓ متعلق باشد. بعبارت دیگر

$$\boxed{\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon\right)}$$

در این صورت ℓ را حد تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 نامیده و با نماد $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ نشان می‌دهیم.

چون این ادعای که "حد f وقتی x به x_0 میل می‌کند برابر ℓ است" معادل با اثبات یک حکم منطقی است، و در این حکم ادعای اصلی به وجود δ برمی‌گردد، پس کافی است که به ازای $\varepsilon>0$ دلخواه، δ را معرفی کنیم. به بیان دیگر، معمولاً مرحله چهارم الگوریتم زیر را حذف می‌کنیم. این کار را با مطالعهٔ هدف مسئله یعنی برقراری رابطهٔ زیر می‌توان انجام داد:

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

مراحل چهارگانه الگوریتم در مثال زیر ارائه شده است.

۳.۱.۳ مثال. ۱) فرض کنید $f(x)=x^2+3x$، $x_0=2$ و $\ell=10$. یعنی، ادعا می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$ این بدان معنی است که:

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\left(0<|x-2|<\delta\Rightarrow|x^2+3x-10|<\varepsilon\right)$$

مرحلهٔ ۱: یافتن ضریب δ: با $|x^2+3x-10|$ آغاز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|x^2+3x-10| &= |(x+5)(x-2)|\\ &= |x+5||x-2|<|x+5|\delta\end{aligned}$$

مرحلهٔ ۲: عددی کردن ضریب δ: فرض کنیم $\delta<1$، پس چون بنابه فرض اولیه $|x-2|<\delta$ داریم $|x-2|<1$. بنابراین $1<x<3$ یا $6<x+5<8$. درنتیجه $|x^2+3x-10|<8\delta$.

مرحلهٔ ۳: حدس مقدار δ: هدف این است که طرف دوم نامساوی بالا ε باشد، پس بایستی $8\delta<\varepsilon$ یا $\delta<\frac{\varepsilon}{8}$. اما قبلاً فرض کرده بودیم که $\delta\le 1$. بنابراین، برای برقراری همزمان این دو فرض، کافی است فرض کنیم که $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{8}\right\}$.

مرحلهٔ ۴: اثبات ادعا: نشان می‌دهیم که حدس بالا در مورد δ درست است. برای این منظور، فرض کنیم $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{8}\right\}$ و $|x-2|<\delta$. پس $|x-2|<1$ و $|x-2|<\frac{\varepsilon}{8}$. از شرط $|x-2|<1$ نتیجه می‌گردد که $-1<x-2<1$ یا $6<x+5<8$، بنابراین

$$|x^2+3x-10|=|x+5||x-2|<8\times\frac{\varepsilon}{8}=\varepsilon$$

و برهان تمام است.

مثال ۲) ثابت می‌کنیم که $\lim_{x\to ۱} \frac{x+۲}{x-۲} = -۳$؛ بنابراین، $f(x) = \frac{x+۲}{x-۲}$، $x_۰ = ۱$ و $\ell = -۳$. به بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\left(۰<|x-۱|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x+۲}{x-۲}-(-۳)\right|<\varepsilon\right)$$

مرحلهٔ ۱: یافتن ضریب δ: با $\left|\frac{x+۲}{x-۲}-(-۳)\right|$ آغاز می‌کنیم.

$$\left|\frac{x+۲}{x-۲}+۳\right| = \left|\frac{۴x-۴}{x-۲}\right| = \frac{۴}{|x-۲|}|x-۱| < \frac{۴}{|x-۲|}\delta$$

مرحلهٔ ۲: عددی کردن ضریب δ: فرض کنیم $\delta \le \frac{۱}{۲}$. چون بنابه فرض $|x-۱| < \delta$، داریم $|x-۱| < \frac{۱}{۲}$. بنابراین $-\frac{۱}{۲} < x-۱ < \frac{۱}{۲}$ یا $\frac{-۳}{۲} < x-۲ < \frac{-۱}{۲}$. پس از قدر مطلق گرفتن، داریم $\frac{۱}{۲} < x-۲ < \frac{۳}{۲}$. (چرا فرض نشد $\delta \le ۱$؟) در نتیجه $\left|\frac{x+۲}{x-۲}+۳\right| < \frac{۴}{۱/۲}\delta = ۸\delta$.

مرحلهٔ ۳: حدس مقدار δ: هدف این است که طرف دوم نامساوی بالا ε باشد، پس بایستی $۸\delta \le \varepsilon$ یا $\delta \le \frac{۱}{۸}\varepsilon$. اما قبلاً فرض کرده بودیم که $\delta \le \frac{۱}{۲}$. بنابراین، برای برقراری همزمان این دو فرض، کافی است فرض کنیم که $\delta = \min\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{\varepsilon}{۸}\right\}$.

مرحلهٔ ۴: اثبات ادعا: نشان می‌دهیم که حدس بالا در مورد ε درست است. برای این منظور، فرض کنیم $\delta = \min\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{\varepsilon}{۸}\right\}$ و $|x-۱| < \delta$. از شرط $|x-۱| < \frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌گردد که $\frac{۱}{۲} < |x-۲| < \frac{۳}{۲}$، بنابراین

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+۲}{x-۲}-(-۳)\right| &= \frac{۴}{|x-۲|}|x-۲| \\ &< \frac{۴}{۱/۲}\delta \le \frac{۴}{۱/۲}\times\frac{\varepsilon}{۸} = \varepsilon\end{aligned}$$

و برهان تمام است.

مثال ۳) می‌خواهیم ثابت کنیم که $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x} = \frac{۱}{۲}$؛ یعنی، $f(x) = \frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}$، $x_۰ = ۰$ و $\ell = \frac{۱}{۲}$. به بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\left(۰<|x-۰|<\delta\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}-\frac{۱}{۲}\right|<\varepsilon\right)$$

مرحلهٔ ۱: یافتن ضریب δ: با مطالعهٔ $\left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}-\frac{۱}{۲}\right|$ آغاز می‌کنیم؛ توجه دارید که بنا به فرض $|x| > ۰$، یعنی $x \ne ۰$ فرض شده است:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}-\frac{۱}{۲}\right| &= \\ &= \left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}-\frac{۱}{۲}\right| \\ &= \left|\frac{(x+۱)-۱}{x(\sqrt{x+۱}+۱)}-\frac{۱}{۲}\right| \\ &= \left|\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+۱}-\frac{۱}{۲}\right| = \left|\frac{۱-\sqrt{x+۱}}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)}\right| \\ &= \left|\frac{۱-\sqrt{x+۱}}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}\right| \\ &= \left|\frac{۱-(x+۱)}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)^۲}\right| \\ &= \frac{|x|}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)^۲} < \frac{\delta}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)^۲}\end{aligned}$$

مرحلهٔ ۲: عددی کردن ضریب δ: فرض کنیم $\delta \le ۱$، پس چون بنابه فرض اولیه $|x| < \delta$، داریم $-۱ < x < ۱$. بنابراین $۰ < x+۱ < ۲$ یا $۰ < \sqrt{x+۱} < \sqrt{۲}$. در نتیجه:

$$\left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}-\frac{۱}{۲}\right| = \frac{\delta}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)^۲} < \frac{\delta}{۲(۰+۱)^۲} = \frac{\delta}{۲}$$

مرحلهٔ ۳: حدس مقدار δ: هدف این است که طرف دوم نامساوی بالا ε باشد، پس بایستی $\frac{\delta}{۲} \le \varepsilon$ یا $\delta \le ۲\varepsilon$. اما قبلاً فرض کرده بودیم که $\delta \le ۱$. بنابراین، برای برقراری همزمان این دو فرض، کافی است فرض کنیم $\delta = \min\{۱, ۲\varepsilon\}$.

مرحلهٔ ۴: اثبات ادعا: نشان می‌دهیم که حدس بالا در مورد δ درست است. برای این منظور، فرض کنیم $\delta = \min\{۱, ۲\varepsilon\}$ و $۰ < |x| < \delta$. پس $x \ne ۰$، $|x| < ۱$ و $|x| < ۲\varepsilon$. از شرط $|x| < ۱$ نتیجه می‌گیریم $-۱ < x < ۱$ یا $۰ < x+۱ < ۲$ و یا $۰ < \sqrt{x+۱} < \sqrt{۲}$، لذا مطابق محاسبات در مرحلهٔ ۱، داریم:

$$\left|\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}-\frac{۱}{۲}\right| = \frac{|x|}{۲(\sqrt{x+۱}+۱)^۲} < \frac{۲\varepsilon}{۲(۰+۱)^۲} = \varepsilon$$

و برهان تمام است.

مثال ۴) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to (۰;+\infty)$ تابعی است با $\lim_{x\to ۰}\left(f(x)+\frac{۱}{f(x)}\right) = ۲$. ثابت کنید $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$.

حل. چون $f(x) > ۰$، پس $f(x)+\frac{۱}{f(x)} \ge ۲$. از طرفی $\lim_{x\to ۰}\left(f(x)+\frac{۱}{f(x)}\right) = ۲$، بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ ای وجود دارد که اگر $|x| < \delta$، آنگاه

$$۰ \le f(x)+\frac{۱}{f(x)}-۲ < \varepsilon$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که

$$\circ \leq \Big(f(x) - ۱\Big) + \Big(\frac{۱}{f(x)} - ۱\Big) < \varepsilon \qquad (۱.۳)$$

$$\circ \leq \Big(f(x) - ۱\Big)\Big(\frac{۱}{f(x)} - ۱\Big) < \varepsilon \qquad (۲.۳)$$

اگر طرفین (۱.۳) را به توان دو رسانده و حاصل را با دو برابر (۲.۳) جمع کنیم، نتیجه می‌گردد که

$$\circ \leq \Big(f(x) - ۱\Big)^۲ + \Big(\frac{۱}{f(x)} - ۱\Big)^۲ < \varepsilon^۲ + ۲\varepsilon$$

بنابراین $|f(x) - ۱| < \sqrt{\varepsilon^۲ + ۲\varepsilon}$ و حکم اثبات شده است.

۴.۱.۳ تمرین. هر یک از تساویهای زیر را ثابت کنید:

۱) $\lim_{x\to ۱}(۳x^۲ - ۵x) = -۲$ ۲) $\lim_{x\to ۲}(٦x + ۱) = ۱۳$

۳) $\lim_{x\to ۲}\frac{۵x + ۱}{۱ - x} = -۱۱$ ۴) $\lim_{x\to ۱}\frac{x - ۱}{\sqrt{x} - ۱} = ۲$

تا کنون حدهایی را مطالعه کرده‌ایم که در آنها $x_\circ$ و ℓ عدد حقیقی‌اند. بسته به اینکه $x_\circ$ و یا ℓ برابر $-\infty$ و یا $+\infty$ باشند، هشت نوع دیگر از حد قابل تعریف است. در اینجا آنها را در تعریف زیر فهرست می‌کنیم.

۵.۱.۳ تعریف. فرض کنید $y = f(x)$ تابع است و ℓ و $x_\circ$ اعداد حقیقی باشند. در این صورت،
$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = +\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists \delta \forall x \left(\circ < |x - x_\circ| < \delta \Rightarrow M < f(x)\right)$$

$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = -\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists \delta \forall x \left(\circ < |x - x_\circ| < \delta \Rightarrow f(x) < -M\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ را به شکل

$$\forall \varepsilon \exists N \forall x \left(N < x \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ را به شکل

$$\forall \varepsilon \exists N \forall x \left(x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists N \forall x \left(N < x \Rightarrow M < f(x)\right)$$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists N \forall x \left(x < -N \Rightarrow M < f(x)\right)$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists N \forall x \left(N < x \Rightarrow f(x) < -M\right)$$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ را به شکل

$$\forall M \exists N \forall x \left(x < -N \Rightarrow f(x) < -M\right)$$

تعریف می‌کنیم، که در آنها M، N، δ و ε اعداد مثبتند.

٦.۱.۳ مثال. ۱) ثابت می‌کنیم $\lim_{x\to ۱}\frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲} = +\infty$؛ به بیان دیگر

$$\forall M \exists \delta \forall x \left(\circ < |x - ۱| < \delta \Rightarrow \frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲} > M\right)$$

فرض کنیم $\circ < |x - ۱| < \delta$، پس $\circ < (x - ۱)^۲ < \delta^۲$ و لذا $\frac{۱}{(x - ۱)^۲} > \frac{۱}{\delta^۲}$. حال فرض کنیم $\delta \leq \frac{۱}{۲}$، پس $-\frac{۱}{۲} < x - ۱ < \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{۱}{۲} < x + ۱ < \frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$\frac{x + ۱}{(x - ۱)^۲} > \frac{x + ۱}{\delta^۲} > \frac{۱/۲}{\delta^۲} = \frac{۱}{۲\delta^۲}$$

اما لازم است که عبارت آخر از M بزرگتر و یا مساوی باشد، یعنی $\frac{۱}{۲\delta^۲}$. این یعنی $\frac{۱}{M} \leq ۲\delta^۲$ یا $\delta < \frac{۱}{\sqrt{۲M}}$. پس کافی است فرض شود که $\delta = \min\left\{۱, \frac{۱}{\sqrt{۲M}}\right\}$.

مثال ۲) ثابت می‌کنیم $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^x = \circ$؛ به بیان دیگر

$$\forall \varepsilon \exists M \forall x \left(x > M \Rightarrow \left|\left(\frac{۱}{۲}\right)^x - \circ\right| < \varepsilon\right)$$

برای اثبات این ادعا می‌پرسیم که در چه صورتی $\left|\left(\frac{۱}{۲}\right)^x\right| < \varepsilon$. یعنی، $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x < \varepsilon$. چون $y = \log_{۱/۲} x$ تابعی نزولی است، پس داریم $x > \log_{۱/۲}\varepsilon$. یعنی اینکه کافی است فرض شود $M = \log_{۱/۲}\varepsilon$.

مثال ۳) ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$؛ به بیان منطقی:

$$\forall M\exists N\forall x\left(x>N\Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1}>M\right)$$

برای اثبات این مدعی ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\frac{x^2+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$$

فرض بر این است که $N\geq 0$، پس از فرض اولیه $x>N$ نتیجه می‌شود $x>0$ یا $\frac{2}{x+1}>0$، بنابراین

$$\frac{x^2+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}>x-1+0=x-1>N-1$$

پس کافی است $N-1=M$ یا $N=M+1$.

۷.۱.۳ تمرین. ثابت کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}=-\infty \qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty}(1+2^x)=1$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-2^x}=+\infty \qquad 4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=-\infty$$

۲.۳ روش جبری محاسبهٔ حد

روش حدگیری $\varepsilon-\sigma$ دارای دو عیب است. اول اینکه معلوم نیست مقدار حد از کجا حدس زده می‌شود و دوم آنکه بسیار وقتگیر است. راه حل اصولی این دو مشکل، استفاده از روش «حرکت از جزء به کل و بالعکس» می‌باشد. این روش که بعداً نیز به دفعات استفاده خواهد شد، به این ترتیب است که ابتدا چند «حد اصلی» یا «پایه» اثبات می‌گردد، سپس قضایایی که قادرند حد توابع پیچیده‌تر را بر حسب توابع ساده‌تر توضیح دهند مطرح می‌شوند و دست آخر، هر مسئله‌ای را با تعداد متناهی مرحله و با استفاده از حدود دانسته شده و قضایای موجود، حل می‌کنند. برای استفاده از این روش کافی است بدانیم که مسئلهٔ پیش روی ما به چه صورتی از روی مسایل ساده‌تر ساخته شده است. مثلاً، اگر بدانیم که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ برابر یک است، آنگاه می‌توان استدلال کرد که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\div x^2}{\sin(x^2)\div x^2}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}}=\frac{1^2}{1}=1$$

۱.۲.۳ جدول حدود. روابط زیر برقرارند:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n} \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$7)\ \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}a^x=\begin{cases}0 & |a|<1 \text{ اگر }\\ 1 & a=1 \text{ اگر }\end{cases}$$

اثبات: فعلاً صحت فرمولهای ۱، ۲ و ۸ را می‌پذیریم و بعداً در قسمت «قاعدهٔ هوپیتال» این مورد را اثبات خواهیم کرد. در مورد اثبات (۳) فرض می‌کنیم $u=e^x-1$. در نتیجه $x=\ln(u+1)$) و بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\div\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u}=\frac{1}{1}=1$$

در مورد اثبات (۴)، توجه می‌کنیم که $1-\cos x=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ بنابراین فرض می‌کنیم $u=\frac{x}{2}$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2 u}{4u^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right)^2=\frac{1}{2}$$

در مورد اثبات (۶) با توجه به اینکه $X=e^{\ln X}$، داریم

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\exp(1)=e$$

در مورد اثبات (۷) فرض می‌کنیم $u=1/x$، در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

و برهان تمام است. □

۲.۲.۳ قضیه. فرض کنید $y=f(x)$ و $y=g(x)$ تابعند و $a,x_0\in\mathbb{R}$ در این صورت:

$$1)\ \lim_{x\to x_0}af(x)=a\lim_{x\to x_0}f(x)$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$3)\ \lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\div\lim_{x\to x_0}g(x)$$

۵) اگر $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=y_0$، در این صورت $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{x\to y_0}f(x)$.

اثبات: تنها (۳) را اثبات نموده و تحقیق درستی سایر موارد را به خواننده می‌سپاریم.

فرض کنیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$. به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه فرض می‌کنیم $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+|\ell|)}$ و

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(1+\max\{|\ell-1|,|\ell+1|\})}$$

در این صورت δ_1 ای وجود دارد که اگر $|x-x_0| < \delta_1$ آنگاه $|f(x)-\ell| < \varepsilon_1$ و δ_2 ای وجود دارد که اگر $|x-x_0| < \delta_2$ آنگاه $|g(x)-m| < \varepsilon_2$ و δ_3 ای وجود دارد که اگر $|x-x_0| < \delta_3$ آنگاه $|f(x)-\ell| < 1$. پس اگر $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$، آنگاه

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-\ell m| &= |f(x)g(x)-f(x)m+f(x)m-\ell m|\\
&\le |f(x)||g(x)-m|+|m||f(x)-\ell|\\
&\le \max\{|\ell-1|,|\ell+1|\}\varepsilon_2+|m|\varepsilon_1\\
&< \max\{|\ell-1|,|\ell+1|\}\frac{\varepsilon}{2(1+\max\{|\ell-1|,|\ell+1|\})}\\
&\quad +|m|\frac{\varepsilon}{2(1+|m|)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

۳.۲.۳ تابع مقدماتی.

تابع $y = f(x)$ با دامنهٔ D را در صورتی مقدماتی گوئیم که به ازاء هر $x_0 \in D$ ای یک ε–همسایگی از آن در D یافت شود که حد تابع $y = f(x)$ در x_0 برابر $f(x_0)$ باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع مقدماتی را با نماد EF نمایش می‌دهیم.

فرض کنید توابع ثابت، خطی، درجه دوم، چند جمله‌ای، مثلثاتی، هذلولی، توانی (با توان مثبت، صحیح منفی، گویای مثبت و گویای منفی)، نمایی، لگاریتمی و قدر مطلق را «توابع مجاز» بنامیم؛ همچنین فرض کنید که اعمال ضرب کردن یک عدد در یک تابع، جمع دو تابع با هم، تفریق دو تابع از هم، ضرب دو تابع در هم، تقسیم دو تابع بر هم، ترکیب دو تابع با هم، محاسبه وارون یک تابع، تحدید یک تابع (یعنی، کوچکتر کردن دامنهٔ تابع) و بالاخره تابعی را به توان تابع دیگری برسانیم را «اعمال مجاز» بنامیم. در این صورت:

۴.۲.۳ قضیه.

هر تابعی که با استفاده از تعدادی متناهی عمل مجاز و به کمک تعدادی متناهی از توابع مجاز ساخته شود، مقدماتی است؛ یعنی، اگر تابع $y = f(x)$ بصورت فوق ساخته شده باشد و یک ε–همسایگی از x_0 به دامنهٔ f متعلق باشد، آنگاه $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجود و برابر $f(x_0)$ است.

این قضیه نتیجه‌ای مستقیم از قضیهٔ قبل است.

توجه شود که لزومی ندارد تابع مقدماتی به شکل بالا ساخته شده باشد، بلکه اگر تابعی به روش بالا ساخته شود، آنگاه آن تابع مقدماتی است.

۵.۲.۳ مثال.

۱) چون تابع $f(x) = \frac{5x+1}{3x-2}$ مقدماتی است و چون یک ε–همسایگی از $x_0 = 1$ در دامنهٔ f قرار دارد (زیرا $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$)، بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x+1}{3x-2} = f(1) = \frac{6}{1} = 6$$

مثال ۲) چون $6x^2+3$ تابعی مقدماتی است، پس $\sqrt{6x^2+3}+2x$ و لذا $\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+2x}$ نیز مقدماتی است، بعلاوه یک ε–همسایگی از $x_0 = 1$ در دامنهٔ تعریف این تابع قرار دارد (زیرا، $D_f = \mathbb{R}$)، در نتیجه

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+2x} = \frac{(-1)+1}{\sqrt{6(-1)^2+3}+2(-1)} = 0$$

مثال ۳) در مورد تابع $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\\
&= 1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

مثال ۴) در مورد تابع $f(x) = \frac{e^{4x}-1}{\sin x}$، با فرض $y = 4x$، داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x} \div \frac{\sin x}{x}\\
&= 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)\div\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\\
&= 4\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right)\div 1 = 4(1)\div 1 = 4
\end{aligned}$$

مثال ۵) در مورد تابع $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x-e}$، با فرض $y = \frac{x-e}{e}$ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} &= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(ey+e)-1}{ey}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{ey}(\ln e+\ln(1+y)-1)\\
&= \frac{1}{e}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y) = \frac{1}{e}\lim_{y\to 0}\ln\left\{(1+y)^{1/y}\right\}
\end{aligned}$$

چون $\ln\left\{(1+y)^{1/y}\right\}$ تابعی مقدماتی است و $\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}$ برابر e می‌باشد، بنابراین مقدار حد برابر $\frac{1}{e}\ln e$ یا $\frac{1}{e}$ است.

مثال ۶) چون توابع $\frac{1+2x}{2+x}$ و $\frac{2x-1}{3x+2}$ مقدماتی‌اند، پس $f(x) = \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{(1+2x)/(2+x)}$ نیز مقدماتی است. بعلاوه یک ε–همسایگی از $x_0 = -1$ به دامنهٔ $y = f(x)$ تعلق دارد (زیرا، $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, -2\right\}$)، در نتیجه

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{(1+2x)/(2+x)} = \left(\frac{-3}{-1}\right)^{-1/1} = \frac{1}{3}$$

مثال ۷) با انتخاب $y = \frac{x}{4}$، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3} &= \lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y+3} \\ &= \left\{\lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right\}^{4} \times \left\{\lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)\right\}^{3} \\ &= e^4 \times 1^3 = e^4\end{aligned}$$

۶.۲.۳ تمرین. مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید

۱) $\lim_{x\to -2} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{4x}\right)$

۲) $\lim_{x\to 0} \ln(\cos^3(\ln^2(x^2+x+1)))$

۳) $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)$

۴) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$

۵) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x/2-1}$　　۶) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

۷) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}+2x}{x^2+1}$　　۸) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-1}{x^2-3x+1}$

۹) $\lim_{x\to -1} \sin^3(\pi x^2)$　　۱۰) $\lim_{x\to 3} (5x^2-3x+1)$

۱۱) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$　　۱۲) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2}$

۱۳) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$　　۱۴) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$

۱۵) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^3 x}$　　۱۶) $\lim_{x\to 0} (1+2x)^{3/x}$

۱۷) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$　　۱۸) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$

۱۹) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$　　۲۰) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

۳.۳ رفع ابهام

در بخش قبل دیدیم که اگر $y = f(x)$ مقدماتی باشد و یک ε–همسایگی از x_0 در دامنهٔ آن قرار داشته باشد، آنگاه حد تابع در x_0 برابر $f(x_0)$ است. در برخی از مواقع یک ε–همسایگی سفته از x_0 در دامنهٔ $y = f(x)$ قرار دارد، یعنی $y = f(x)$ در خود نقطهٔ مورد بحث تعریف نمی‌شود، ولی حد وجود دارد! مانند تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ که مقدماتی است و حدش در نقطهٔ $x_0 = -1$ برابر $\frac{1}{3}$ است، در حالی که $f(-1)$ تعریف نمی‌گردد! در اینگونه موارد، تابع $y = f(x)$ را با تابع دیگری $y = g(x)$ تعویض می‌کنیم طوری که: $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در یک ε–همسایگی سفته از x_0 برابر باشند و بعلاوه $y = g(x)$ در x_0 نیز تعریف گردد. اکنون بنابه قضیه اساسی زیر، حد $y = f(x)$ در x_0 برابر با حد $y = g(x)$ در x_0 است. یعنی، $y = f(x)$ در $x = x_0$ دارای بوده و حد آن برابر $g(x_0)$ می‌باشد.

۱.۳.۳ قضیه رفع ابهام. اگر عددی $\varepsilon > 0$ چنان یافت شود که به ازاء هر x صادق در نامساوی $0 < |x-x_0| < \varepsilon$ تساوی $f(x) = g(x)$ برقرار باشد، آنگاه وجود و یا عدم وجود حد $y = f(x)$ در x_0 با وجود و یا عدم وجود حد $y = g(x)$ در x_0 برابر است، بعلاوه $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

۲.۳.۳ مثال. ۱) توابع $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ در همه جا بجز در $x_0 = 1$ برابرند، بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} \\ &\overset{?}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

مثال ۲) توابع $\frac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$ و $\frac{1}{\sqrt{1-x}+3}$ در یک ε–همسایگی سفته از $x_0 = -8$ برابرند، بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{x+8} &= \lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{x+8} \times \frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3} \\ &= \lim_{x\to -8} \frac{(1-x)-9}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)} \\ &\overset{?}{=} \lim_{x\to -8} \frac{1}{\sqrt{1-x}+3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

مثال ۳) با فرض $x = y^6$ و دو بار استفاده از قضیهٔ ۱.۳.۳ داریم

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right) = \lim_{y\to 1} \left(\frac{3}{1-y^3} - \frac{2}{1-y^2}\right)$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{1+2y^2-3y^2}{(1-y^3)(1-y^2)}$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{(1-y)(-2y^2+y+1)}{(1-y)(1+y+y^2)(1-y)(1+y)}$$
$$\stackrel{?}{=} \lim_{y\to 1}\frac{-2y^2+y+1}{(1+y+y^2)(1-y)(1+y)}$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{(1-y)(2y+1)}{(1+y+y^2)(1-y)(1+y)}$$
$$\stackrel{?}{=} \lim_{y\to 1}\frac{2y+1}{(1+y+y^2)(1+y)} = \frac{3}{3\times 2} = \frac{1}{2}$$

در مورد حدهای در بینهایت، قضیهٔ رفع ابهام بصورت زیر بیان می‌گردد:

۳.۳.۳ قضیهٔ رفع ابهام حدود در بینهایت. اگر عددی مانند $M > 0$ طوری یافت شود که به ازاء هر $x \leq M$ ای $f(x) = g(x)$ و حد در بینهایت تابع g موجود باشد، آنگاه حد در بینهایت f نیز وجود دارد و با قبلی برابر است.

۴.۳.۳ مثال. ۱) با فرض $y = 1/x$ داریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{a+b+aby}{\sqrt{(1+ay)(1+by)}+1} = \lim_{y\to 0}\frac{a+b+0}{\sqrt{1+1}+1} = \frac{a+b}{2}$$

مثال ۲) با فرض $y = 1/x$ داریم

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right\} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right\}$$
$$\times\frac{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{y}}{\sqrt{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{2}{\sqrt{y^2+y+1}+\sqrt{y^2-y+1}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

۵.۳.۳ تمرین. مقدار هر یک از حدود زیر را بدست آورید:

۱) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$ ۲) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$

۳) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1}$ ۴) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^5$

۵) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ ۶) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln(\tan x)}{1-\cot x}$

۷) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{1/x^2}$ ۸) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

۹) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ۱۰) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

۱۱) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$ ۱۲) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

۱۳) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

۱۴) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$

۱۵) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$

۱۶) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left\{\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right\}$

۱۷) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left\{\sqrt{2x^2-3}+5x\right\}$

۱۸) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

۱۹) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$ ۲۰) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$

۲۱) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$

۲۲) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

۲۳) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$

۲۴) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3x+2}\right)^{1/x}$

۲۵) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})}$

۲۶) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$ ۲۷) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cos x)}$

۲۸) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left\{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right\}$

۲۹) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

۳۰) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\{\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\}$

۳۱) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+xe^{-1/x^2}\sin\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^{e^{1/x^2}}$

۳۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\left(۱+e^{-۱/x^۲}\arctan\left(\frac{۱}{x^۲}\right)+xe^{-۱/x^۲}\sin\left(\frac{۱}{x^۴}\right)\right)^{e^{۱/x^۲}}$

۳۳) نشان دهید که اگر ضرایب a_n و b_m در تابع

$$f(x)=\frac{a_nx^n+\cdots+a_۱x+a_۰}{b_mx^m+\cdots+b_۱x+b_۰}$$

مخالف صفر باشد، در این صورت

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}\infty & \text{اگر } n>m\\ a_n/b_m & \text{اگر } n=m\\ ۰ & \text{اگر } n<m\end{cases}$$

۴.۳ حدود یکطرفه

می‌دانیم که $f(x)=\sqrt{x}$ تابعی مقدماتی است و دامنهٔ آن $[۰;\infty)$ است. در نتیجه حد $y=f(x)$ در هر نقطه‌ای که دارای یک ε–همسایگی در $[۰;\infty)$ است وجود دارد و با $f(x_۰)$ برابر است. اما $x_۰=۰$ هیچ ε–همسایگی‌ای در $[۰;\infty)$ نیست! یعنی اگر $x<۰$، تعریف نمی‌گردد! در این مورد چه باید کرد؟ آیا نمی‌توان تعریف حد را تعمیم داد؟

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع است و عدد مثبتی ε چنان وجود دارد که به ازاء هر $x_۰<x<x_۰+\varepsilon$، $f(x)$ در x تعریف می‌گردد، یعنی، ε ای هست که $(x_۰;x_۰+\varepsilon)\subseteq D_f$. در صورتی می‌گوئیم حد راست $y=f(x)$ در $x=x_۰$ برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_۰}f(x)=l$ که

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x:\left(۰<x-x_۰<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

بصورت مشابه می‌توان $\lim\limits_{x\to x_۰-}f(x)=l$ را تعریف کرد (تمرین). همچنین می‌توان از حدودی چون $\lim\limits_{x\to x_۰+}f(x)=\infty$ نیز سخن گفت (تمرین).

۲.۴.۳ مثال. ۱) ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to ۰+}x[۱/x]=۱$؛ برای این منظور باید ثابت کنیم

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x:\left(۰<x-۰<\delta\Rightarrow\left|x\left[\frac{۱}{x}\right]-۱\right|<\varepsilon\right)$$

اثبات: می‌دانیم $x-۱\le[x]<x$، در نتیجه با فرض $x>۰$ داریم

$$-x=x\left(\frac{۱}{x}-۱\right)-۱<x\left[\frac{۱}{x}\right]-۱\le x\frac{۱}{x}-۱=۰$$

بنابراین $|x[۱/x]-۱|<|x|$. یعنی کافی است فرض شود $\delta=\varepsilon$. □

مثال ۲) ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{x\to ۰-}\frac{۱}{۱+e^{۱/x}}=۱$؛ برای این منظور باید ثابت شود

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x:\left(۰<۰-x<\delta\Rightarrow\left|\frac{۱}{۱+e^{۱/x}}-۱\right|<\varepsilon\right)$$

و یا، به بیان دیگر

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x:\left(-\delta<x<۰\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۱+e^{۱/x}}<\varepsilon\right)$$

اثبات: از فرض $-\delta<x<۰$ نتیجه می‌گردد که $۱/x<\frac{-۱}{\delta}$. چون $y=e^x$ تابعی صعودی است، بنابراین $e^{۱/x}<e^{-۱/\delta}$ و

$$۱-\frac{۱}{۱+e^{۱/x}}=\frac{e^{۱/x}}{۱+e^{۱/x}}<\frac{e^{۱/x}}{۱+۰}<e^{-۱/\delta}$$

پس کافی است فرض کنیم $\varepsilon=e^{-۱/\delta}$، یعنی $\ln\varepsilon=-\frac{۱}{\delta}$ یا $\delta=-\frac{۱}{\ln\varepsilon}$. □

۳.۴.۳ تمرین. هر یک از حدود یکطرفهٔ زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to ۱-}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱+}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰-}\frac{\sqrt{۱-\cos(۲x)}}{x}$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰+}\frac{\sqrt{۱-\cos(۲x)}}{x}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱-}\arctan\left(\frac{۱}{۱-x}\right)$ ۶) $\lim\limits_{x\to ۱+}\arctan\left(\frac{۱}{۱-x}\right)$

۷) $\lim\limits_{x\to ۰+}\frac{۱}{۱+e^{۱/x}}$ ۸) $\lim\limits_{x\to ۰-}x[۱/x]$

۹) $\lim\limits_{x\to ۰-}x\sqrt{|\cos(۱/x)|}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰+}\left(۲\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right)^x$

از قضیهٔ زیر برای تبدیل حدود یکطرفه به حدود معمولی و سپس حل حد معمولی حاصل استفاده می‌گردد.

۴.۴.۳ قضیه. ۱) اگر $\varepsilon>۰$ چنان یافت شود که به ازاء هر x صادق در نامساوی $۰<x-x_۰<\varepsilon$، تساوی $f(x)=g(x)$ برقرار باشد، و نیز اگر $\lim\limits_{x\to x_۰}g(x)$ موجود باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to x_۰+}f(x)$ نیز وجود دارد و با قبلی برابر است.

۲) اگر $\varepsilon>۰$ چنان یافت شود که به ازاء هر x صادق در نامساوی $۰<x_۰-x<\varepsilon$، تساوی $f(x)=g(x)$ برقرار باشد، و نیز اگر $\lim\limits_{x\to x_۰}g(x)$ موجود باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to x_۰-}f(x)$ نیز وجود دارد و با قبلی برابر است.

۵.۴.۳ نتیجه. شرط لازم و کافی برای اینکه $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ موجود باشد این است که $\lim_{x\to x_\circ} f(x)$ و $\lim_{x\to x_\circ +} f(x)$ موجود و برابر باشند.

۶.۴.۳ مثال. ۱) اگر $۱ < x - ۱ < \circ$، آنگاه $۲ < x < ۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱+} [x]\sin(\pi x) = \lim_{x\to ۱} \sin(\pi x) = \sin \pi = \circ$$

مثال ۲) فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۳ & x \le ۱ \text{ اگر } \\ ۳x - ۵ & x > ۱ \text{ اگر } \end{cases}$$

در این صورت:

$$\lim_{x\to ۱+} f(x) = \lim_{x\to ۱} (۳x - ۵) = ۳ - ۵ = -۲$$
$$\lim_{x\to ۱-} f(x) = \lim_{x\to ۱} (-۲x + ۳) = -۲ + ۳ = ۱$$

۷.۴.۳ تمرین. حدود یکطرفهٔ زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to \circ+} \frac{|\sin x|}{x}$ ۲) $\lim_{x\to \circ-} \frac{|\sin x|}{x}$

۳) $\lim_{x\to \circ+} (۱ + |x|)^{۱/x}$ ۴) $\lim_{x\to \circ-} (۱ + |x|)^{۱/x}$

حد چپ و راست هر یک از توابع داده شده را در تمام نقاطی که ضابطهٔ تابع تغییر نموده است محاسبه کنید:

۵) $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۳x + ۱ & x < \circ \text{ اگر } \\ (x+۲)/(۲x+۱) & \circ \le x \le ۱ \text{ اگر } \\ \sin(\pi/x) & ۱ < x \text{ اگر } \end{cases}$

۶) $f(x) = \begin{cases} \circ & x \le \circ \text{ اگر } \\ e^{۱/x} & \circ < x < ۱ \text{ اگر } \\ (۱ + ۱/x)^x & ۱ \le x \text{ اگر } \end{cases}$

۷) $f(x) = [x^۲]$ ۸) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$

۹) $f(x) = (-۱)^{[x^۲]}$ ۱۰) $f(x) = \text{sgn}(\sin x)$

۵.۳ قضیهٔ ساندویچ

از این قضیه برای اثبات حدودی که به روش‌های معمولی قابل حل نیستند و یا روش حل آنها دو مرحله‌ای است و یا اینکه طولانی است، می‌توان استفاده کرد. متأسفانه دامنهٔ کاربردهای آن بسیار محدود است. این قضیه دارای سه شکل به شرح زیر می‌باشد:

۱.۵.۳ قضیه ۱. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ ای هست که به ازاء هر x با $|x - x_\circ| < \varepsilon$، داریم $g(x) \le f(x) \le h(x)$. اگر $\lim_{x\to x_\circ} g(x) = \lim_{x\to x_\circ} h(x)$، آنگاه حد $y = f(x)$ در $x = x_\circ$ نیز وجود دارد و با مقدار مشترک آنها برابر است.

۲.۵.۳ قضیه ۲. فرض کنید M ای هست که به ازاء هر $x > M$ ای $g(x) \le f(x) \le h(x)$. در این صورت، اگر $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x)$، آنگاه حد $y = f(x)$ در $+\infty$ نیز وجود دارد و با مقدار مشترک آنها برابر است.

۳.۵.۳ قضیه ۳. فرض کنید M ای هست که به ازاء هر $x < -M$ داریم $g(x) \le f(x) \le h(x)$. در این صورت، اگر $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} h(x)$، آنگاه حد $y = f(x)$ در $-\infty$ نیز وجود دارد و با مقدار مشترک آنها برابر است.

قضایای مشابهی برای حدود یکطرفه نیز وجود دارد که بیان صورت آنها را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم.

۴.۵.۳ مثال ۱). چون به ازاء هر x ای $-۱ \le \sin x \le ۱$، پس به ازاء $x > \circ$ داریم $-۱ \le \sin(۱/x) \le ۱$ و بنابراین $-x \le x\sin(۱/x) \le x$. اما حد توابع $y = x$ و $y = -x$ وقتی x از راست به صفر میل می‌کند برابر صفر است، بنابراین $\lim_{x\to\circ+} x\sin(۱/x) = \circ$. به صورت مشابه ثابت می‌گردد که $\lim_{x\to\circ-} x\sin(۱/x) = \circ$. در نتیجه $\lim_{x\to\circ} x\sin(۱/x) = \circ$.

مثال ۲) مقدار حد زیر را بدست آورید:

$$\lim_{x\to\circ} x^۲\left(۱ + ۲ + \cdots + \left[\frac{۱}{|x|}\right]\right) = \frac{۱}{۲}$$

حل: فرض کنیم $۱ > |x| > \circ$، در این صورت $\frac{۱}{|x|} > ۱$ و $\frac{۱}{|x|} - ۱ \le \left[\frac{۱}{|x|}\right] < \frac{۱}{|x|}$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \ell &= x^۲\left(۱ + ۲ + \cdots + \left[\frac{۱}{|x|}\right]\right) = \frac{x^۲}{۲}.\left[\frac{۱}{|x|}\right].\left(\left[\frac{۱}{|x|}\right] + ۱\right) \\ &< \frac{x^۲}{۲}.\frac{۱}{|x|}.\left(\frac{۱}{|x|} + ۱\right) = \frac{۱}{۲}.(|x| + ۱) \end{aligned}$$

به صورت مشابه

$$\ell \ge \frac{x^۲}{۲}.\left(\frac{۱}{|x|} - ۱\right).\frac{۱}{|x|} = \frac{۱}{۲}.(۱ - |x|)$$

اما $\lim_{x\to\circ} \frac{۱}{۲}.(۱ \pm |x|) = \frac{۱}{۲}$ و حکم ثابت شده است.

مثال ۳) مقدار حد $\lim_{x\to\infty} (e^x - ۱)^{۱/x}$ را محاسبه کنید.
حل. اگر $x > ۱$، آنگاه $e^x \ge ۲$ و بنابراین $e^x \le ۲(e^x - ۱)$. در نتیجه $e \le ۲^{۱/x}(e^x - ۱)^{۱/x}$ یا

$$\frac{e}{۲^{۱/x}} \le (e^x - ۱)^{۱/x} < (e^x)^{۱/x} = e$$

اما $\lim_{x\to\infty} \frac{e}{۲^{۱/x}} = e$ و حد مورد نظر برابر e است.

۵.۵.۳ تمرین. هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

$$۱)\ \lim_{x\to ۰} x\sqrt{|\cos(۱/x)|} \qquad ۲)\ \lim_{x\to ۰} x\,[۱/x]$$

$$۳)\ \lim_{x\to +\infty}(۱/x)\sin(۱/x) \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۰+} x\ln^{۲} x$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰+} x.\Big(\Big[\frac{۱}{x}\Big]+\Big[\frac{۲}{x}\Big]+\cdots+\Big[\frac{k}{x}\Big]\Big), \quad (k\in\mathbb{N})$$

۶) فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب مثبت است. نشان دهید $\lim_{x\to\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}=۱$.

۶.۳ اثبات عدم وجود حد

تاکنون به دنبال اثبات وجود حد ونیز شیوهٔ بدست آوردن آن بودیم. در ادامه لازم می‌آید تا نشان دهیم که تابع مفروضی در یک نقطهٔ بخصوص حد ندارد. این کار به سه روش کلی انجام می‌پذیرد:

۱) با استفاده از تعریف حد، ۲) با استفاده از مفهوم حد یکطرفه، ۳) با استفاده از مفهوم حد دنباله‌ها. پشتوانهٔ هر یک از این سه روش، قضیه‌ای بخصوص می‌باشد.

۱.۶.۳ قضیه. شرط لازم برای اینکه تابع $y=f(x)$ در $x=x_۰$ حد نداشته باشد، این است که یا $y=f(x)$ در یک همسایگی از $x_۰$ تعریف نشود و یا اینکه به ازاء هر $\ell\in\mathbb{R}$ ای یک عدد $\varepsilon>۰$ ای چنان بافت شود که به ازاء هر $\delta>۰$ ای یک $x\in\mathbb{R}$ طوری وجود داشته باشد که $۰<|x-x_۰|<\delta$ و $|f(x)-\ell|\geq\varepsilon$. به بیان دیگر

$$\forall\ell\,\exists\varepsilon\,\forall\delta\,\exists x:\ \Big(۰<|x-x_۰|<\delta \quad \text{و} \quad |f(x)-\ell|\geq\varepsilon\Big)$$

۲.۶.۳ مثال. ثابت می‌کنیم که تابع دریکله

$$\mathrm{Dri}(x)=\begin{cases} ۱ & x\in\mathbb{Q}\ \text{اگر} \\ ۰ & x\notin\mathbb{Q}\ \text{اگر}\end{cases}$$

در کلیهٔ نقاط $\mathbb{R}$ فاقد حد است.

برای این منظور، فرض می‌کنیم که $x_۰\in\mathbb{R}$. دو حالت ممکن است پیش آید: الف) $x_۰$ گویا باشد و ب) $x_۰$ گنگ باشد. این دو بسیار شبیه به هم هستند و لذا ما تنها یک حالت را مورد بحث قرار می‌دهیم. بنابراین فرض می‌کنیم $x_۰\in\mathbb{Q}$، در نتیجه $\mathrm{Dri}(x_۰)=۱$.

الف) فرض کنیم $\ell=۰$؛ ε را برابر یک می‌گیریم. فرض کنیم $\delta>۰$ دلخواه است و عدد گویای x در شرط $|x-x_۰|<\delta$ صدق دارد. در این صورت $\mathrm{Dri}(x)=۱$ و بنابراین

$$|\mathrm{Dri}(x)-\ell|=|۱-۰|=۱\geq ۱=\varepsilon$$

ب) فرض کنیم $\ell\neq۰$؛ ε را برابر $|\ell|$ قرار می‌دهیم. فرض کنیم $\delta>۰$ دلخواه است و عدد گنگ x در شرط $|x-x_۰|<\delta$ صدق دارد. در این صورت $\mathrm{Dri}(x)=۰$ و بنابراین

$$|\mathrm{Dri}(x)-\ell|=|۰-l|=|\ell|\geq\varepsilon$$

و به این ترتیب برهان تمام است.

۳.۶.۳ تمرین.

۱) ثابت کنید $f(x)=x\mathrm{Dri}(x)$ در تمام نقاط $x_۰\neq۰$ فاقد حد است و حد آن در $x_۰=۰$ موجود و برابر صفر می‌باشد.

۲) ثابت کنید که تابع زیر در همهٔ نقاط مجموعهٔ $\mathbb{Z}-\{۰\}$ فاقد حد است:

$$f(x)=\begin{cases}\cot^{۲}(\pi x) & x\notin\mathbb{Z}\ \text{اگر}\\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\ \text{اگر}\end{cases}$$

نتیجه ۵.۴.۳ قبلاً بدان اشاره کرده است.

۴.۶.۳ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $\lim_{x\to x_۰} f(x)$ موجود باشد این است که حد $y=f(x)$ در $x_۰$ از راست و نیز از چپ موجود و برابر باشند.

۵.۶.۳ مثال. ثابت می‌کنیم که تابع $f(x)=x-[x]$ در $x=۱$ حد ندارد.

$$\lim_{x\to۱+}f(x)=\lim_{x\to۱+}\{x-۱\}=۱-۱=۰,$$
$$\lim_{x\to۱-}f(x)=\lim_{x\to۱-}\{x-۰\}=۱-۰\neq\lim_{x\to۱+}f(x)$$

بنابراین حد $y=f(x)$ در $x_۰=۱$ وجود ندارد.

۶.۶.۳ تمرین.

۱) ثابت کنید که تابع $f(x)=\mathrm{sgn}(x^{۲}-۳x+۲)$ در نقاط $x=۱$ و $x=۲$ حد ندارد.

۲) نشان دهید که تابع $\mathrm{sgn}(\sin(x))$ در مضارب π حد ندارد. یعنی، در نقاط مجموعهٔ $\pi\mathbf{Z}=\{n\pi\mid n\in\mathbf{Z}\}$ حد ندارد.

قسمت بعد را پس از فصل دنباله‌ها می‌توان مطالعه نمود، و موقتاً از مطالعهٔ آن خودداری کرد.

۷.۶.۳ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه حد تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ برابر ℓ باشد، این است که به ازاء هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا به $x_۰$، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n=۱}^{\infty}$ به l همگرا باشد.

۸.۶.۳ مثال. ۱) نشان می‌دهیم که تابع $y=\sin(۱/x)$ در $x_۰ = ۰$ حد ندارد. برای این منظور دنباله‌های $x_n = \frac{۱}{n\pi}$ و $z_n = \frac{۱}{۲n\pi+\pi/۲}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}\lim f(x_n) &= \lim \sin(n\pi) = ۰,\\ \lim f(z_n) &= \lim \sin\left(۲\pi n + \frac{\pi}{۲}\right) = ۱.\end{aligned}$$

بنابراین، ممکن نیست $f(x)=\sin(۱/x)$ در $x_۰ = ۰$ حد داشته باشد، زیرا $۰ \neq ۱$.

مثال ۲) نشان می‌دهیم که تابع زیر در نقاط گنگ حد ندارد:

$$f(x) = \begin{cases} n^۲/(n+۱) & \text{اگر } x=m/n\in\mathbb{Q} \text{ و } (m,n)=۱ \\ ۰ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فرض کنیم $x_۰ \notin \mathbb{Q}$. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که به $x_۰$ همگرا است و $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ بصورت کسر ساده نوشته شده باشد. در این صورت

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{n^۲}{n+۱} = +\infty$$

زیرا اگر دنباله‌ای از اعداد گویا به یک عدد گنگ میل کند، الزاماً صورت و مخرج کسرهای سازندهٔ این دنباله به بینهایت میل می‌کنند.

۹.۶.۳ تمرین. ۱) نشان دهید که تابع $f(x)=[۱/x]$ در $x_۰ = ۰$ حد ندارد.

۲)* نشان دهید که تابع زیر در تمام نقاط گنگ فاقد حد است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^m(x\pi) & \text{اگر } x=m/n\in\mathbb{Q} \text{ و } (m,n)=۱ \\ ۱ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

۷.۳ پیوستگی

در چه صورتی نمودار تابع متصل است؟ یعنی، برای ترسیم آن لزومی وجود ندارد که قلم را چند بار از روی کاغذ برداریم و مجدداً بر آن قرار دهیم؟ موضوع این بخش پاسخ به این مسئله است. سه نوع پیوستگی وجود دارد:

الف) پیوستگی (از دو سوی)؛ ب) پیوستگی از چپ؛ ج) پیوستگی از راست.

۱.۷.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ و f در $x_۰$ تعریف می‌شود. در صورتی می‌گوئیم تابع:

الف) $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ پیوسته است که حد f در $x_۰$ برابر $f(x_۰)$ باشد.

ب) $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ از راست پیوسته است که حد راست f در $x_۰$ برابر $f(x_۰)$ باشد.

ج) $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ از چپ پیوسته است که حد چپ f در $x_۰$ برابر $f(x_۰)$ باشد.

بنابراین، به سهولت نتیجه می‌گردد:

۲.۷.۳ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ پیوسته باشد، این است که این تابع از راست و نیز از چپ در $x=x_۰$ پیوسته باشد.

۳.۷.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ در $x=x_۰$ ناپیوسته است. در صورتی $x=x_۰$ را یک ناپیوستگی رفع‌شدنی $y=f(x)$ گوئیم که حد f در $x_۰$ موجود باشد. بصورت مشابه ناپیوستگی رفع‌شدنی از راست و نیز ناپیوستگی رفع‌شدنی از چپ قابل تعریف است. اگر f در $x_۰$ از چپ و راست دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی باشد، لزومی ندارد که ناپیوستگی f در $x_۰$ رفع‌شدنی باشد. (یعنی، حد چپ و راست f در $x_۰$ موجود باشند، ولی برابر نباشند.)

۴.۷.۳ قضیه. اگر توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=x_۰$ پیوسته باشند و $y=h(x)$ در $y_۰=f(x_۰)$ پیوسته باشد و $a\in\mathbb{R}$، در این صورت توابع $af(x)$، $f(x)+g(x)$، $f(x)-g(x)$، $f(x)g(x)$، $h(f(x))$ و $f(x)^{g(x)}$ در $x=x_۰$ پیوسته‌اند. اگر $g(x_۰)\neq ۰$، آنگاه $f(x)\div g(x)$ در $x=x_۰$ پیوسته است.

۵.۷.۳ قضیه. فرض کنید $y=f(x)$ تابعی مقدماتی است (به ۳.۲.۳ رجوع شود) و $x_۰\in D_f$. در این صورت:

۱) اگر $\varepsilon>۰$ ای یافت گردد که $[x_۰;x_۰+\varepsilon)\subseteq D_f$، آنگاه $y=f(x)$ در $x=x_۰$ پیوسته راست است.

۲) اگر $\varepsilon>۰$ ای یافت گردد که $(x_۰-\varepsilon;x_۰]\subseteq D_f$، آنگاه $y=f(x)$ در $x=x_۰$ پیوسته چپ است.

۳) اگر $\varepsilon>۰$ ای یافت گردد که $(x_۰-\varepsilon;x_۰+\varepsilon)\subseteq D_f$، آنگاه $y=f(x)$ در $x=x_۰$ پیوسته است.

۶.۷.۳ مثال. ۱) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. چون $y=f(x)$ مقدماتی است و دامنهٔ آن برابر با $[۰;+\infty)$ می‌باشد، پس $y=f(x)$ در تمام نقاط $x_۰\in(۰;+\infty)$ پیوسته است و در نقطهٔ $x_۰=۰$ پیوستهٔ راست می‌باشد.

مثال ۲) تابع $f(x)=\arcsin(۱-x)$ را در نظر بگیرید. چون $y=f(x)$ مقدماتی است و دامنهٔ آن برابر با

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \mid -۱ \le ۱-x \le ۱\} \\ &= \{x \mid ۰ \le x \le ۲\} = [۰;۲] \end{aligned}$$

می‌باشد، پس $y=f(x)$ در تمام نقاط $x_۰\in(۰;۲)$ پیوسته است، در نقطهٔ $x_۰=۲$ پیوستهٔ چپ می‌باشد و در نقطهٔ $x_۰=۰$ پیوستهٔ راست است.

مثال ۳) تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیرید. چون تابع $y=f(x)$ مقدماتی است و دامنهٔ آن برابر با $\mathbb{R}-\{۰\}$ می‌باشد، پس $y=f(x)$ در تمام نقاط $x_۰\in\mathbb{R}-\{۰\}$ پیوسته است. از طرفی، حد $y=f(x)$ در $x=x_۰$ موجود و برابر با یک است. پس ناپیوستگی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰=۰$ رفع‌شدنی می‌باشد. یعنی، با تعریف مجدد تابع f در $x_۰=۰$ بصورت $f(۰)=۱$، تابعی پیوسته در $x=x_۰$ بدست می آید.

مثال ۴) تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & \text{اگر } |x|\le ۱ \\ x+۱ & \text{اگر } |x|>۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر $|x_۰|<۱$، آنگاه $y=f(x)$ در یک ε−همسایگی از $x_۰$ برابر با $x^۲$ است. در حالی که تابع $y=x^۲$ مقدماتی است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ می‌باشد؛ بنابراین $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است.

اگر $|x_۰|=۱$، آنگاه $x_۰=۱$ و یا اینکه $x_۰=-۱$. در این صورت $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰=۱$ پیوستهٔ چپ است و نیز دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی از راست می‌باشد، زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۱+} f(x) &= \lim_{x\to ۱}(x+۱) \\ &= ۲\neq ۱ = f(۱) \\ \lim_{x\to ۱-} f(x) &= \lim_{x\to ۱}(x^۲) \\ &= ۱ = f(۱) \end{aligned}$$

همچنین، $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰=۱$ پیوستهٔ راست و نیز دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی از چپ می‌باشد، زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -۱+} f(x) &= \lim_{x\to -۱}(x^۲) \\ &= ۱ = f(۱) \\ \lim_{x\to -۱-} f(x) &= \lim_{x\to -۱}(x+۱) \\ &= ۰\neq ۱ = f(۱) \end{aligned}$$

اگر $|x_۰|>۱$، آنگاه $y=f(x)$ در یک ε−همسایگی از $x_۰$ برابر با $x+۱$ است. در حالی که تابع $y=x+۱$ مقدماتی است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ می‌باشد؛ بنابراین $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته است.

مثال ۵) تابع $f(x)=۱/x$ را در نظر بگیرید. چون $y=f(x)$ مقدماتی است و دامنهٔ آن برابر با $\mathbb{R}-\{۰\}$ می‌باشد، پس $y=f(x)$ در تمام نقاط $x_۰\in\mathbb{R}-\{۰\}$ پیوسته است. بعلاوه، چون $\lim\limits_{x\to ۰+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰-} f(x)=-\infty$، بنابراین، ناپیوستگی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_۰=۰$ چه از راست و چه از چپ رفع ناشدنی می‌باشد.

مثال ۶) تابع $f(x)=x\mathrm{Dri}(x)$ را در نظر بگیرید (برای ملاحظهٔ تعریف تابع دریکله Dri به ۲.۶.۳ رجوع شود). این تابع در تمام نقاط $x_۰\neq ۰$ فاقد حد است (نه چپ و نه راست). بنابراین، در تمام نقاط $x_۰\neq ۰$ ناپیوسته است. اما، حد این تابع در $x_۰=۰$ برابر $f(۰)=۰$ است، زیرا:

$$\begin{aligned} ۰ &\le \lim_{x\to ۰} x\mathrm{Dri}(x) \\ &= \lim_{x\to ۰}\begin{cases} x & \text{اگر } x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q} \end{cases} \\ &\le \lim_{x\to ۰} x = ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه $y=f(x)$ در $x_۰=۰$ پیوسته است. یعنی، این تابع تنها در $x_۰=۰$ پیوسته می‌باشد.

۷.۷.۳ تمرین. در مورد هر یک از توابع زیر، پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع داده شده را در تمام نقاط ممکن بررسی کنید:

۱) $y=x^۲$

۲) $y=\sqrt[۳]{x}$

۳) $y=\arcsin(x^۲)$

۴) $y=\dfrac{۱}{x^۲+x}$

۵) $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$

۶) $y=\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

۷) $y=x\,[۱/x]$

۸) $y=e^{x+۱/x}$

۹) $y=\tanh\left(\dfrac{۲x}{۱-x^۲}\right)$

۱۰) $y=\sin(\cos^۲(\tan^۳ x))$

۱۱) $y=((x))=x-[x]$

۱۲) $y=\mathrm{sgn}(\sin x)$

۱۳) $y=\dfrac{\cos(۱/x)}{\cos(۱/x)}$

۱۴) $y=\sqrt{\dfrac{۱-\cos\pi x}{۴-x^۲}}$

۱۵) $y=\arctan\left(\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{x-۱}\right)$

۱۶) $y=\left[\dfrac{۱}{x^۲}\right]\mathrm{sgn}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)$

۱۷) $y=\begin{cases} x^۲ & \text{اگر } x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

۱۸) $y=\begin{cases} \cos(\pi x/۲) & \text{اگر } |x|\le ۱ \\ |x-۱| & \text{اگر } |x|>۱ \end{cases}$

۱۹) $y=\begin{cases} \sin(\pi x) & \text{اگر } x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

۲۰) $y = \begin{cases} x - 3/2 & \text{اگر } |x| \le 1 \\ 1/x & \text{اگر } |x| > 2 \end{cases}$

توابع زیر در $x_0 = 0$ تعریف نمی‌شوند. در هر مورد نشان دهید که ناپیوستگی تابع داده شده در x_0 رفع‌شدنی است، سپس با تعریف مناسب $f(x_0)$، ناپیوستگی آن را رفع کنید:

۲۱) $f(x) = (1+x)^{1/x}$،   *۲۲) $f(x) = \sqrt[3]{x}|x|^x$،

۲۳) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$،   ۲۴) $f(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

۲۵) A و B را طوری تعیین کنید که تابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{اگر } x \le -\pi/2 \\ A\sin x + B & \text{اگر } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x & \text{اگر } \pi/2 \le x \end{cases}$$

۲۶) فرض کنید x_1، x_2، . . . و x_n اعداد حقیقی دلخواه و متفاوت باشند، تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مثال بزنید که تنها در این نقاط پیوسته باشد.

۸.۷.۳ قضیه. اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً یکنوا بوده و در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد، آنگاه $x = f^{-1}(y)$ در نقطهٔ $y_0 = f(x_0)$ پیوسته است.

۹.۷.۳ قضیهٔ بقاء علامت تابع پیوسته. اگر تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته باشد و $f(x_0) \neq 0$، آنگاه $\varepsilon > 0$ ای یافت می‌شود که علامت تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ تغییر نمی‌کند.

۱۰.۷.۳ قضیهٔ مقدار میانی. اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته بوده و c عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه x_0 ای بین a و b وجود دارد که $f(x_0) = c$.

۱۱.۷.۳ قضیهٔ ریشهٔ اجباری. اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته بوده و $f(a)f(b) < 0$، آنگاه $x_0 \in (a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_0) = 0$.

۱۲.۷.۳ قضیهٔ وجود ماکزیموم و مینیموم تابع پیوسته. اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته باشد، آنگاه اعداد $x_1, x_2 \in [a;b]$ به گونه‌ای یافت می‌شوند که به ازاء هر $x \in [a;b]$ ای داریم $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

۱۳.۷.۳ مثال. ۱) تابع $y = \sin x$ بر بازهٔ $[-\pi/2; \pi/2]$ اکیداً صعودی و پیوسته است. بنابراین، معکوس‌پذیر است و معکوس آن (یعنی، $y = \arcsin x$) نیز بر بازهٔ بستهٔ $\sin([-\pi/2;\pi/2]) = [-1;1]$ پیوسته است.

مثال ۲) هر چند جمله‌ای با درجهٔ فرد لااقل یک ریشه دارد. زیرا، اگر فرض شود $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ که $a_n > 0$ (حالت $a_n < 0$ مشابه است). در این صورت، حد $P(x)$ وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر $+\infty$ است، پس لااقل یک $b > 0$ ای هست که $P(b) > 0$. از طرفی، $P(x)$ وقتی x به $-\infty$ میل می‌کند برابر $-\infty$ است، پس لااقل یک $a < 0$ ای هست که $P(a) < 0$. در نتیجه $P(a)P(b) < 0$. اما، $P(x)$ تابعی مقدماتی با دامنه $\mathbb{R}$ است و لذا بر $[a;b]$ پیوسته است. بنابراین، مطابق قضیهٔ ۱۰.۷.۳، $x_0 \in (a;b)$ ای وجود دارد که به ازاء آن $P(x)$ صفر است.

۱۴.۷.۳ تمرین.

۱) ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ x-1 & \text{اگر } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

بر تمام بازهٔ $[-1;1]$ پیوسته است بجز در نقطهٔ $x = 0$، و بر بازهٔ $[-1;1]$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیموم.

۲) ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } -1 \le x \le 0 \\ -x & \text{اگر } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

بر تمام بازهٔ $[-1;1]$ بجز در $x = 0$ پیوسته است، ولی همچنان دارای ماکزیمم و مینیموم بر آن بازه می‌باشد.

۳) نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)2^{(-1/|x|+1/x)} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

بر بازهٔ $[-1;2]$ دارای خاصیت مقدار میانی است (یعنی، اگر دو مقدار را اختیار کند، آنگاه همهٔ مقادیر آن دو را نیز اختیار خواهد کرد)، در حالی که بر $[-2;2]$ پیوسته نیست.

۴) فرض کنید $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ یکنوا است و تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند. ثابت کنید که $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ پیوسته است.

۵) نشان دهید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ زوج باشد و در لااقل یک نقطهٔ x_0 ای $P(x_0)$ دارای علامتی مخالف با علامت ضریب بزرگترین توان در $P(x)$ باشد، آنگاه $P(x)$ حداقل یک ریشه دارد.

۶) نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-1-x} & \text{اگر } x \le -1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{اگر } 1 < x \end{cases}$$

بر بازهٔ $[-۱;۱]-[-۲;۲]$ پیوسته و معکوس‌پذیر است ولی معکوس آن پیوسته نیست.

۸.۳ بینهایت کوچکها

هدف از این بخش ارائه روشی نسبتاً سریع برای رفع ابهام حدود به شکل $\frac{۰}{۰}$ (مبهم) است. قبل از هر چیز متذکر می‌شویم که بجای مطالعهٔ حد $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توان حد $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x+a)}{g(x+a)}$ را مطالعه کرد. به همین دلیل در ادامه همه جا فرض می‌کنیم که $x=a$ و این امر از کلیت بحث نمی‌کاهد.

۱.۸.۳ تعریف. تابع $y=f(x)$ را در صورتی **بینهایت کوچک** (و یا، در $x=a$) می‌گوئیم که $\lim_{x\to ۰}f(x)=۰$ (و یا، $\lim_{x\to a}f(x)=۰$)؛ حد مورد نظر می‌تواند یکطرفه نیز باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع بینهایت کوچک (و یا، در $x=a$) را با نماد IF (و یا، IF_a) نشان می‌دهیم. بنا به دلیلی که در بالا ذکر شد، از این پس همواره فرض می‌کنیم که $a=۰$ است.

۲.۸.۳ مثال. توابع x، $x^۲$، $\sin x$، $۱-\cos x$ و $\ln(۱+x)$ نمونه‌هایی از توابع بینهایت کوچکند. یعنی، اعضاء IF می‌باشند و بنابراین حد هر یک از آنها در $x=۰$ برابر با صفر می‌باشد. در حالی که $\cos x$ و $۱/x$ بینهایت کوچک نیستند.

به عنوان نتایج بلافصل قضیهٔ ۲.۲.۳ داریم:

۳.۸.۳ قضیه. فرض کنید $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بینهایت کوچک باشند، $a\in\mathbb{R}$ و $y=h(x)$ تابعی کراندار است. دراین صورت، توابع $y=af(x)$، $y=f(x)+g(x)$، $y=f(x)-g(x)$، $y=f(x)g(x)$، $y=f(g(x))$، $y=f^{-۱}(x)$ و $y=f(x)h(x)$ بینهایت کوچکند.

۴.۸.۳ یادداشت. کلیهٔ موارد ادعا شده در این قضیه برای a دلخواه صحیح است، بجز مورد $y=f(g(x))$ که تنها برای حالت $a=۰$ درست است.

۵.۸.۳ مثال. در قضیهٔ بالا سخنی از $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ و یا $y=f(x)^{g(x)}$ نیامده است! دلیل آن این است که در حالت کلی ممکن است این توابع بینهایت کوچک نباشند. به عنوان مثال در حالی که توابع x و $\sin x$ بینهایت کوچکند، حد توابع $\frac{\sin x}{x}$ و $(\sin x)^x$ در صفر برابر یک است و لذا بینهایت کوچک نیستند.

حتی ممکن است که این توابع در صفر حد نداشته باشند. مثلاً، نسبت دو بینهایت کوچک $x\sin(۱/x)$ و x فاقد حد است.

بنابراین، مجموعهٔ IF نسبت به تقسیم و به توان رساندن بسته نیست! به منظور مطالعهٔ این اشیاء، معیاری برای مقایسهٔ آنها مطرح می‌کنیم. در این مورد بهترین انتخاب عبارت است از انتخاب خانواده‌ای از توابع بینهایت کوچک سادهٔ x^a و سپس مقایسهٔ بینهایت کوچک‌های دیگر با اعضاء این خانواده.

۶.۸.۳ یادداشت. حالت مبهم $۰^۰$ یا f^g که f و g بینهایت کوچک هستند، را با استفاده از خواص $\exp$ و $\ln$ به حالت $\frac{۰}{۰}$ می‌توان تبدیل نمود:

$$f^g=\exp\Big(\ln\left(f^g\right)\Big)=\exp\left(g.\ln f\right)=\exp\left(\frac{g}{\frac{۱}{\ln f}}\right)$$

پس بجای $\lim_{x\to ۰}f(x)^{g(x)}$ کافی است $\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{۱/\ln(f(x))}$ را محاسبه نموده و حاصل را به نمای e برسانیم.

۷.۸.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ یک بینهایت کوچک است. اگر عدد مثبت k و عدد مخالف صفر c طوری یافت شوند که $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x^k}=c$. دراین صورت، می‌گوئیم تابع $y=f(x)$ یک بینهایت کوچک مقایسه پذیر و از مرتبهٔ k ام است و به اختصار می‌نویسیم $O(f)=k$. مجموعهٔ همهٔ بینهایت کوچک‌های مقایسه پذیر را با نماد IF^* نمایش می‌دهیم. از این پس تنها به مطالعهٔ اعضاء IF^* خواهیم پرداخت.

۸.۸.۳ مثال. ۱) تابع $y=\sin x$ یک بینهایت کوچک مرتبهٔ یک است، یعنی، $O(\sin x)=۱$ زیرا $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$ برابر یک است و توان x در مخرج برابر یک است.

مثال ۲) تابع $y=۱-\cos x$ یک بینهایت کوچک مرتبهٔ دو است، یعنی، $O(۱-\cos x)=۲$ زیرا $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\frac{۱}{۲}$ مخالف با صفر می‌باشد و توان x در مخرج برابر دو است.

مثال ۳) تابع $y=x\sin(۱/x)$ یک بینهایت کوچک غیر قابل مقایسه است، زیرا اگر به مطالعهٔ $\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin(۱/x)}{x^k}$ بپردازیم، آنگاه سه حالت ممکن است که رخ دهد:

الف) اگر $k>۱$، آنگاه

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin(۱/x)}{x^k}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(۱/x)}{x^{k-۱}}$$

که اساساً وجود ندارد (تمرین).

ب) اگر $k=۱$، آنگاه

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin(۱/x)}{x^k}=\lim_{x\to ۰}\sin(۱/x)$$

که این حد نیز وجود ندارد (تمرین).

ج) اگر $k > 1$، آنگاه

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(1/x)}{x^k} = \lim_{x\to 0} x^{1-k}\sin(1/x) = 0$$

بنابراین، بینهایت کوچک $y = x\sin(1/x)$ غیر قابل مقایسه می‌باشد (بنابراین، $IF^\star \subset IF$).

۹.۸.۳ قضیه. فرض کنید $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو تابع بینهایت کوچک قابل مقایسه باشند و بعلاوه $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. در این صورت:

الف) اگر $c = 0$، آنگاه $O(f) > O(g)$؛

ب) اگر $c \neq 0, \infty$، آنگاه $O(f) = O(g)$؛ و

ج) اگر $c = \infty$، آنگاه $O(f) < O(g)$.

بالعکس:

الف) اگر $O(g) < O(f)$، آنگاه $c = 0$؛

ب) اگر $O(f) = O(g)$، آنگاه $c \neq 0, \infty$؛ و

ج) اگر $O(f) < O(g)$، آنگاه c بینهایت خواهد بود.

۱۰.۸.۳ مثال. باتوجه به اینکه $O(\sin x) = 1$ و $O(1 - \cos x) = 2$، با مقایسهٔ مرتبه‌ها نتیجه می‌گیریم $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = 0$. در نتیجه کسر مذکور یک بینهایت کوچک است. با توجه به اینکه

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{\sin x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{(\frac{\sin x}{x})^2} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

بنابراین $O\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = 1$.

به کمک جدول و قضیهٔ زیر، می‌توان مرتبهٔ حدود را سریعتر محاسبه نمود.

۱۱.۸.۳ جدول مرتبه‌ها.

۱) اگر $a > 0$، آنگاه $O(x^a) = a$.

۲) $O(\sin x) = 1$ ۳) $O(1 - \cos x) = 2$

۴) $O(\sin x - x) = 3$ ۵) $O(\tan x) = 1$

۶) $O(\ln(1+x)) = 1$ ۷) $O(e^x - 1) = 1$

۸) اگر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $O(\sqrt[n]{1+x} - 1) = 1$.

۹) $O(\sinh x) = 1$ ۱۰) $O(1 - \cosh x) = 2$

۱۱) $O(\sinh x - x) = 3$ ۱۲) $O(\tanh x) = 1$

۱۳) اگر $0 < a \neq 1$، آنگاه $O(\log_a(1+x)) = 1$.

۱۴) اگر $a > 1$، آنگاه $O(a^x - 1) = 1$.

۱۲.۸.۳ قضیه. فرض کنید $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بینهایت کوچکهایی قابل مقایسه باشند و $0 \neq a \in \mathbb{R}$. در این صورت:

۱) $O(af) = O(f)$ ۲) $O(fg) = O(f) + O(g)$

۳) $O(f \circ g) = O(f) . O(g)$ ۴) $O(f/g) = O(f) - O(g)$

۵) $O(f+g) \geq \min\{O(f), O(g)\}$

۶) $O(f(ax)) = O(f(x))$

البته، رابطهٔ (۴) تنها وقتی با معنی است که $y = f(x)/g(x)$ بینهایت کوچک باشد.

۱۳.۸.۳ مثال. چرا در قسمت (۵) از قضیهٔ ۱۲.۸.۳ در محاسبهٔ مرتبهٔ $y = f(x) + g(x)$ از روی مرتبهٔ $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از نامساوی استفاده شده است؟ پاسخ این است که در حالت کلی تساوی برقرار نیست. برای روشن‌تر شدن بحث، مثالهای زیر را ذکر می‌کنید:

۱) در حالی که $O(\sin x) = 1$ و $O(-x) = 1$، داریم $O(\sin x - x) = 3$. بنابراین، ممکن است که

$$O(f+g) = \min\{O(f), O(g)\}$$

۲) در حالی که $O(x) = O(\sin x) = 1$، داریم $O(\sin x + x) = 1$. بنابراین، ممکن است که

$$O(f+g) = O(f)$$

۳) در حالی که $O(\sin x - x) = 3$ و $O(x) = 1$، داریم $O(\sin x - x + x) = 1$. بنابراین، ممکن است که

$$O(f) > O(f+g)$$

۱۴.۸.۳ مثال. ۱) مرتبهٔ y را محاسبه کنید:

$y = (\sin^2 x^3)\ln(1 + \sin^2(1 - \cos x))$

حل. در این صورت $O(y)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} O(\sin^2 x^3) + O(\ln(1 + \sin^2(1-\cos x))) &= \\ &= 2O(\sin x^3) + O(\ln(1+x)) \times O(\sin^2(1 - \cos x)) \\ &= 2O(\sin x) \times O(x^3) + 1 \times 2O(\sin(1-\cos x)) \\ &= 2 \times 1 \times 3 + 2O(\sin x) \times O(1 - \cos x) \\ &= 6 + 2 \times 1 \times 2 = 10 \end{aligned}$$

مثال ۲) نشان دهید که مقدار حد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt[3]{x})\ln(1+3x)}{(\arctan(\sqrt{x}))^2}$ صفر است.

حل. برای این منظور کافی است نشان دهیم که مرتبهٔ صورت از مرتبهٔ مخرج بیشتر است.

$$\begin{aligned} O(\sin(\sqrt[3]{x})\ln(1+3x)) &= O(\sin(\sqrt[3]{x})) + O(\ln(1+3x)) \\ &= O(\sin x)\times O(\sqrt[3]{x}) + O(\ln(1+x))\times O(3x) \\ &= 1\times\frac{1}{3} + 1\times 1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\arctan(\sqrt{x})^2) &= 2O(\arctan(\sqrt{x})) \\ &= 2\times O(\arctan x)\times 2O(\sqrt{x}) \\ &= 2\times 1\times\frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

۱۵.۸.۳ تمرین. مرتبهٔ هر یک از بینهایت کوچکهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $y=\sin^2(5x^3)$
۲) $y=1-\cos^2 x$
۳) $y=\ln(\cos x)$
۴) $y=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$
۵) $y=\sqrt[4]{1+x^2}-1$
۶) $y=3\sin x - x^2 + x^3$
۷) $y=(\sin x-\tan x)^2$
۸) $y=5\sinh\left(3\sqrt[2]{x^3}\right)$
۹) $y=e^{(\sin x - x)}-1$
۱۰) $y=\ln(1+2x-3x^2+4x^3)$
۱۱) $y=\arctan^4(\sin^3(\tan^2(\arcsin x)))$

می‌دانیم که اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو بینهایت کوچک هم مرتبه باشند، آنگاه حد خارج قسمت $y=f(x)/g(x)$ وقتی x به صفر میل می‌کند، مخالف صفر و بینهایت است. اما دقیقاً چقدر است؟ برای پاسخ به این پرسش، باید رابطهٔ هم مرتبه بودن مطرح شده را قدری دقیق‌تر بررسی کنیم.

۱۶.۸.۳ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو بینهایت کوچکند. در صورتی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را **هم ارز** گوئیم که $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. در این صورت می‌نویسیم $f\sim g$. روشن است که شرط لازم برای هم ارزی، هم مرتبه بودن است.

۱۷.۸.۳ جدول هم ارزی. روابط زیر برقرارند:

۱) $\sin x \sim x$
۲) $(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$
۳) $(\sin x - x)\sim -\frac{x^3}{6}$
۴) $\tan x\sim x$
۵) $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$
۶) $\ln(1+x)\sim x$
۷) $(a^x-1)\sim x\ln a$
۸) $(e^x-1)\sim x$
۹) $(\sqrt[n]{1+x}-1)\sim\frac{x}{n}$
۱۰) $\sinh x\sim x$
۱۱) $(1-\cosh x)\sim -\frac{x^2}{2}$
۱۲) $(\sinh x - x)\sim\frac{x^3}{6}$

به عنوان نتیجه‌ای منطقی از قضیهٔ ۲.۲.۳ داریم:

۱۸.۸.۳ قضیه. فرض کنید $f\sim f_1$ و $g\sim g_1$ و بعلاوه $0\neq a\in\mathbb{R}$. در اینصورت:

۱) $af\sim af_1$
۲) $fg\sim f_1g_1$
۳) $f(g)\sim f_1(g_1)$
۴) $f/g\sim f_1/g_1$

۵) اگر $\theta = O(f)$ مرتبهٔ بینهایت کوچک f باشد، آنگاه $f(ax)\sim a^\theta f(x)$.

۱۹.۸.۳ قضیه. در محاسبهٔ حد $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ که به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ منتهی می‌گردد می‌توان بجای f و یا g و یا هر دوی آنها از هم ارزشان استفاده کرد، بی‌آنکه مقدار حد اصلی تغییر کند.

۲۰.۸.۳ مثال. ۱) چون $\sin x\sim x$، پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x^2} = 9$$

مثال ۲) چون $(1-\cos x)\sim\frac{x^2}{2}$، پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{x^2} = 2$$

مثال ۳) در استفاده از هم ارزیها باید احتیاط نمود! زیرا، با اینکه $\sin x\sim x$، اما اگر از آن استفاده شود، آنگاه بایستی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0$$

در حالی که می‌دانیم این حد برابر $\frac{1}{6}$ است. به همین دلیل است که در قضیهٔ ۱۸.۸.۳ از جمع هم ارزی دو بینهایت کوچک سخن گفته نشده است.

۲۱.۸.۳ یادداشت. چنانچه پس از بکارگیری روش هم ارزی به پاسخ صفر و یا بینهایت برسیم، استنتاج حاصل غلط است، زیرا از هم ارزی در مطالعهٔ کسرهایی از بینهایت کوچکهای هم مرتبه استفاده می‌شود.

۲۲.۸.۳ تمرین. به کمک روش هم ارزی، حدود زیر را محاسبه کنید:

$$
\begin{array}{ll}
۱)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(۱+۴x)}{\sin(۵x)} & ۲)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos\left(\frac{x}{۲}\right)}{۱-\cos x} \\[2ex]
۳)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sqrt[۴]{۱+x^۲}-۱} & ۴)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(۱+\sin(۴x))}{e^{\sin(۵x)}-۱} \\[2ex]
۵)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x^۲}-۱}{\sqrt[۳]{۱+x^۲}-۱} & ٦)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cosh x-۱}{x^۲} \\[2ex]
۷)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{e^{\sin ۲x}-e^{\sin x}}{\tanh x} & ۸)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cos x)} \\[2ex]
۹)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(x^۲+e^x)}{\ln(x^۴+e^{۲x})} & ۱۰)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱+\sin x-\cos x}{۱+\sin(px)-\cos(px)} \\[2ex]
۱۱)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(۱+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})} & ۱۲)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x+x^۲}-۱}{\sin ۴x} \\[2ex]
۱۳)\ \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۳\sin x-x^۲+x^۳}{\tan x+۲\sin^۲ x+x^۵} &
\end{array}
$$

۲۳.۸.۳ روش تولید فرمولهای هم ارزی. فرمولهای زیر را در نظر بگیرید:

$$(e^x-۱) \sim x$$

$$(e^x-۱-x) \sim \frac{x^۲}{۲}$$

$$\left(e^x-۱-x-\frac{x^۲}{۲}\right) \sim \frac{x^۳}{٦}$$

$$\left(e^x-۱-x-\frac{x^۲}{۲}-\cdots-\frac{x^n}{n!}\right) \sim \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

این فرمولها، هر یک از قبلی بهتر است، مثلاً اگر از هم ارزی دوم استفاده کنیم، آنگاه

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱-x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲/۲}{x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

در حالی که اگر از اولی استفاده می‌کردیم جواب صفر می‌شد (که غلط است!). منبع تولید؟ فرمولهای هم ارزی، قضیهٔ تیلور و به ویژه حالت خاص آن، یعنی قضیهٔ مک لورن می‌باشد.

۲۴.۸.۳ قضیهٔ تولید فرمولهای هم ارزی. فرض کنید مشتق مرتبهٔ $n+۲$ از تابع $y=f(x)$ در $x=۰$ موجود و پیوسته است، در این صورت:

$$\left(f(x)-f(۰)-f'(۰)x-\cdots\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n\right) \sim \frac{f^{(n+۱)}(۰)}{(n+۱)!}$$

۲۵.۸.۳ مثال. (۱) فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱+x}$، در این صورت

$$
\begin{aligned}
f(۰) &= \sqrt{۱+x}\Big|_{x=۰}=۰ \\
f'(۰) &= \frac{۱}{۲}(۱+x)^{-۱/۲}\Big|_{x=۰}=\frac{۱}{۲} \\
f''(۰) &= \frac{-۱}{۴}(۱+x)^{-۳/۲}\Big|_{x=۰}=\frac{-۱}{۴} \\
f'''(۰) &= \frac{۳}{۸}(۱+x)^{-۵/۲}\Big|_{x=۰}=\frac{۳}{۸}
\end{aligned}
$$

بنابراین، به کمک قضیهٔ ۲۴.۸.۳ می‌توانیم بنویسیم

$$\left(\sqrt{۱+x}-۱\right) \sim \frac{x}{۲} \qquad \left(\sqrt{۱+x}-۱-\frac{x}{۲}\right) \sim -\frac{x^۲}{۴}$$

$$\left(\sqrt{۱+x}-۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^۲}{۴}\right) \sim \frac{۳x^۳}{۸}$$

مثال ۲) فرض کنید $f(x)=e^x$، در این صورت به ازاء هر $n\in\mathbb{N}$ ای $f^{(n)}(x)=e^x$ و بنابراین $f^{(n)}(۰)=۱$. پس به ازاء هر n ای داریم:

$$\left(e^x-۱-x-\frac{x^۲}{۲}-\cdots\frac{x^n}{n!}\right) \sim \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

۲٦.۸.۳ تمرین. در مورد هر یک از توابع زیر، فرمولهای هم ارزی تولید شده توسط قضیهٔ ۲۵.۸.۳ را تا $n=۳$ بنویسید:

$$
\begin{array}{ll}
۱)\ y=\sin x & ۲)\ y=\cos x \\
۳)\ y=\ln(۱+x) & ۴)\ y=\tan x \\
۵)\ y=\sinh x & ٦)\ y=\sqrt[n]{۱+x}
\end{array}
$$

۹.۳ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۹.۳ حد گیری از تابعی مفروض. فرض کنید تابع $y=f(x)$ را قبلاً در محیط میپل تعریف نموده‌ایم. برای محاسبهٔ حد این تابع در نقطهٔ $x=c$ از دستور `limit(f(x),x=c)` استفاده می‌کنیم.

برای محاسبهٔ حد چپ و یا راست تابع y = f(x) در نقطهٔ x = c، بترتیب از دستورات `limit(f(x),x=c,left)` و `limit(f(x),x=c,right)` استفاده می‌کنیم.

برای وارد کردن ∞ در حد از دستور `infinity` استفاده می‌کنیم. چنانچه حد وجود نداشته باشد، از دستور `undefined` استفاده می‌کنیم.

۲.۹.۳ مثال. به چند مورد خاص به شرح زیر توجه کنید:

$$\mathrm{limit(x\hat{\ }2-3*x+1, x=2)} \xrightarrow{\text{میپل}} -1$$
$$\mathrm{limit((x+1)/(2*x+1), x=infinity)} \xrightarrow{\text{میپل}} \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{limit(exp(1/x), x=0, left)} \xrightarrow{\text{میپل}} 0$$
$$\mathrm{limit(exp(1/x), x=0, right)} \xrightarrow{\text{میپل}} \mathrm{infinity}$$

۳.۹.۳ تحقیق پیوستگی. با دستور

`readlib(iscont): iscont(f(x),x=a..b)`

برای تحقیق پیوستگی تابع $\mathrm{f(x)}$ بر بازهٔ $\mathrm{[a;b]}$ می‌توان تحقیقی نمود. در صورت پیوسته بودن، پاسخ true و در غیر این صورت نتیجه `false` خواهد بود.

با دستور `readlib(discont): discont(f(x),x)` برای یافتن نقاط ناپیوستگی تابع $\mathrm{f(x)}$ می‌توان استفاده نمود.

۴.۹.۳ مثال. به چند مورد خاص به شرح زیر توجه کنید:

$$\mathrm{readlib(discont): \ discont(1/(x\hat{\ }2-1), x=-2..2)}$$
$$\xrightarrow{\text{میپل}} -۱\,,\,۱$$
$$\mathrm{readlib(iscont): \ iscont(1/(x\hat{\ }2-1), x=-0..2)}$$
$$\xrightarrow{\text{میپل}} false$$

۵.۹.۳ . در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۴

مشتق و کاربردهایش

هدف از این فصل ارائهٔ مفهوم مشتق و دیفرانسیل و نیز برخی از کاربردهای متنوع آنها درریاضیات، فیزیک و صنعت می‌باشد.

۱.۴ مشتق

با تعریف مشتق به کمک حد آغاز می‌کنیم. این کار به کمک مفهوم حد میسر است.

۱.۱.۴ تعریف. فرض کنید $y = f(x)$ تابع است و $x_\circ \in D_f$. اگر حد $\lim\limits_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$ وجود داشته باشد، می‌گوئیم $y = f(x)$ در $x_\circ$ **مشتقپذیر** است و مقدار این حد را مشتق $y = f(x)$ در $x = x_\circ$ نامیده و با نماد $f'(x_\circ)$ و یا $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_\circ}$ نشان می‌دهیم:

$$\boxed{f'(x_\circ) := \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}}$$

۲.۱.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x) = x^{۲} - ۲x$ و $x_\circ = ۱$، در این صورت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} &= \lim_{x \to ۱} \frac{(x^{۲} - ۲x) - (-۱)}{x - ۱} \\ &= \lim_{x \to ۱} (x - ۱) = \circ \end{aligned}$$

بنابراین $y = f(x)$ در $x_\circ = ۱$ مشتقپذیر است و مشتق آن برابر صفر است؛ یعنی، $f'(۱) = \circ$.

مثال ۲) فرض کنید $f(x) = |x|$ و $x_\circ = \circ$، در این صورت:

$$\lim_{x \to \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \to \circ} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to \circ} \operatorname{sgn}(x)$$

که این حد وجود ندارد (چرا؟) پس $y = f(x)$ در $x_\circ = \circ$ مشتقپذیر نیست.

۳.۱.۴ قضیه. شرط لازم برای اینکه تابع $y = f(x)$ در $x = x_\circ$ مشتقپذیر باشد، این است که تابع $y = f(x)$ در $x = x_\circ$ پیوسته باشد. این شرط (همان طوری که قسمت (۲) از مثال ۲.۱.۴ نشان می‌دهد، یک شرط) کافی نیست.

اثبات: فرض کنیم $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ مشتقپذیر است. بنابراین، $f'(x_\circ)$ ای وجود دارد که به ازای آن

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \quad \left(\circ < |x - x_\circ| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) \right| < \varepsilon \right)$$

بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > \circ$ دلخواه، $\delta_\circ$ ای وجود دارد که اگر $|x - x_\circ| < \delta_\circ$، آنگاه

$$|f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)| < |x - x_\circ| \varepsilon$$

یعنی

$$(f'(x_\circ) - \varepsilon)(x - x_\circ) < f(x) - f(x_\circ) < (f'(x_\circ) + \varepsilon)(x - x_\circ)$$

و یا اینکه

$$|f(x) - f(x_\circ)| < \max \{ |f'(x_\circ) - \varepsilon|, |f'(x_\circ) + \varepsilon| \} \delta$$

اکنون، کافی است فرض شود

$$\delta = \min \left\{ \delta_\circ, \frac{\varepsilon}{|f'(x_\circ) - \varepsilon| + ۱}, \frac{\varepsilon}{|f'(x_\circ) + \varepsilon| + ۱} \right\}$$

در این صورت از فرض $|x - x_\circ| < \delta$ نتیجه می‌گردد که $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$ بنابراین تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است. □

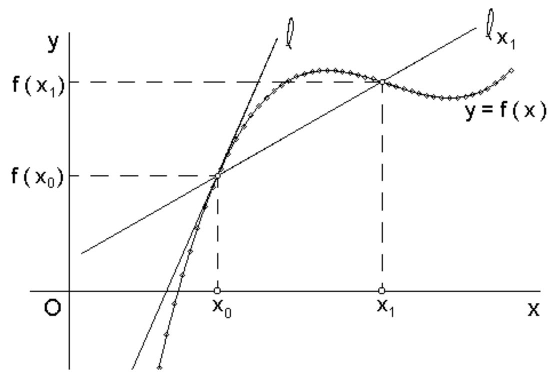
۴.۱.۴ تعبیر فیزیکی مشتق. فرض کنید متحرکی بر یک خط مستقیم حرکت می‌کند. اگر نقطهٔ آغاز حرکت را O، مکان متحرک در لحظهٔ t را با $f(t)$ بگیریم که به فاصلهٔ $y = f(t)$ از O است، آنگاه (بنابه تعریف در فیزیک) سرعت لحظه‌ای متحرک

در لحظهٔ $t=t_\circ$ برابر است با حد سرعت متوسط هنگامی که بازهٔ زمانی شامل $x_\circ$ بوده و به اندازهٔ کافی کوچک است:

$$\begin{aligned} v(x_\circ) &= \lim_{x\to x_\circ} (\text{سرعت نسبی در بازهٔ زمانی } x_\circ \text{ تا } x) \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{\text{تغییر مکان در این بازهٔ زمانی}}{\text{تغییر زمان در این بازهٔ زمانی}} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = f'(x_\circ) \end{aligned}$$

بنابراین، سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $x_\circ$ برابر با مشتق ضابطهٔ حرکت نسبت به زمان است.

۵.۱.۴ تعبیر هندسی. فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کرده‌ایم و $x_\circ \in D_f$. خط راستی را که از نقاط $(x_\circ, f(x_\circ))$ و $(x_۱, f(x_۱))$ می‌گذرد در نظر می‌گیریم؛ این خط را $l_{x_۱}$ می‌نامیم. حالت حدی این خط وقتی که $x_۱$ به $x_\circ$ میل می‌کند را خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ می‌نامند.



شکل ۱.۴: تعبیر هندسی مشتق

چون نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ از این خط معلوم است، بنابراین کافی است که شیب این خط را محاسبه کنیم. از تعریف چنین برمی‌آید که شیب خط مماس l بر $y=f(x)$ در $x_\circ$ برابر حد شیب خط $l_{x_۱}$ است، به شرطی که $x_۱$ به $x_\circ$ میل کند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} m &= \text{شیب خط مماس } l \\ &= \lim_{x_۱\to x_\circ} (\text{شیب خط } l_{x_۱}) = \lim_{x_۱\to x_\circ} \frac{\text{مقدار صعود}}{\text{مقدار پیشروی}} \\ &= \lim_{x_۱\to x_\circ} \frac{f(x_۱)-f(x_\circ)}{x_۱-x_\circ} = f'(x_\circ) \end{aligned}$$

بنابراین، $f'(x_\circ)$ با شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_\circ$ برابر است.

۶.۱.۴ تعبیر آنالیزی. فرض کنید $y=f(x)$ تابع است و $x_\circ \in D_f$. تابع $y=f(x)$ را با تابعی خطی $y=ax+b$ طوری تقریب بزنید که اولاً به ازاء x های به اندازهٔ کافی نزدیک به $x_\circ$ داشته باشیم:

$$f(x)=ax+b \qquad (۱.۴)$$

و در ثانی، نسبت $g(x)=f(x)-ax-b$ به $x-x_\circ$ (خطای خروجی به خطای ورودی) وقتی x به $x_\circ$ میل می‌کند، برابر صفر باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{g(x)}{x-x_\circ} = \circ \qquad (۲.۴)$$

از حد (۲.۴) نتیجه می‌شود که $g(x_\circ)$، بنابراین

$$f(x_\circ)=ax_\circ+b$$

و $b=f(x_\circ)-ax_\circ$. بعلاوه، از تساوی (۱.۴) و (۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{g(x)}{x-x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-ax-(f(x_\circ)-ax_\circ)}{x-x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} - a = f'(x_\circ)-a \end{aligned}$$

بنابراین، $a=f'(x_\circ)$. یعنی، تابع $y=f(x)$ در حوالی نقطهٔ $x=x_\circ$ تقریباً برابر تابع $f(x)\approx f(x_\circ)+f'(x_\circ)(x-x_\circ)$ است، که خطای حاصل نسبت به خطای ورودی یک بینهایت کوچک است.

۷.۱.۴ مثال. ۱) ضابطهٔ حرکت متحرکی که بر یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند، بر حسب زمان x به صورت $f(x)=(x+۱)/(۲x+۳)$ بیان شده است. سرعت لحظه‌ای آن را در لحظهٔ اول محاسبه می‌کنیم

$$v(۱)=\lim_{x\to ۱} \frac{\frac{x+۱}{۲x+۳}-\frac{۲}{۵}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{۵(۲x+۳)} = \frac{۱}{۲۵}$$

مثال ۲) معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=\sqrt{x^۲+۱}$ در لحظهٔ $x_\circ=\sqrt{۳}$ را می‌یابیم. برای این منظور، کافی است شیب آن خط را محاسبه کنیم، زیرا می‌دانیم که این خط از نقطهٔ $(\sqrt{۳},۲)$ می‌گذرد. اما

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\sqrt{۳}} \frac{\sqrt{x^۲+۱}-۲}{x-\sqrt{۳}} \\ &= \lim_{x\to\sqrt{۳}} \frac{\left(\sqrt{x^۲+۱}+۲\right)\left(\sqrt{x^۲+۱}+۲\right)}{\left(x-\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{x^۲+۱}+۲\right)} \\ &= \lim_{x\to\sqrt{۳}} \frac{x^۲-۳}{(x-\sqrt{۳})(\sqrt{x^۲+۱}+۲)} \\ &= \lim_{x\to\sqrt{۳}} \frac{x+\sqrt{۳}}{\sqrt{x^۲+۱}+۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{aligned}$$

بنابراین، معادلهٔ خط مورد نظر عبارت است از

$$y=f(x_\circ)+m(x-x_\circ)=۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(x-\sqrt{۳}\right)$$

یعنی، $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x+\frac{۳}{۲}$.

مثال ۳) می‌خواهیم تابع $f(x) = \ln x$ را در حوالی نقطهٔ $x_\circ = ۱$ با یک تابع خطی تقریب بزنیم. توجه می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} f'(۱) &= \lim_{x\to ۱} \frac{\ln x - \ln ۱}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x-۱} = \lim_{z\to \circ} \frac{\ln(z+۱)}{z} = ۱ \end{aligned}$$

(که $z = x - ۱$) بنابراین

$$\ln x \approx \ln(۱) + (۱)(x-۱) = x - ۱$$

۸.۱.۴ تمرین. در هر مورد با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = f(x)$ را در $x = x_\circ$ بیابید:

$$\begin{array}{ll}
۱)\ f(x) = x^۲, & x_\circ = -\sqrt{۲}, \\
۲)\ f(x) = \sqrt{x}, & x_\circ = ۴, \\
۳)\ f(x) = \cot x, & x_\circ = \frac{\pi}{۲}, \\
۴)\ f(x) = \arcsin x, & x_\circ = \frac{۱}{۲}, \\
۵)\ f(x) = \frac{۱}{x}, & x_\circ = ۱, \\
۶)\ f(x) = \frac{x+۱}{x-۱}, & x_\circ = -۱, \\
۷)\ f(x) = x^۲ \sin(x-۲), & x_\circ = ۲, \\
۸)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+۱}}, & x_\circ = ۲, \\
۹)\ f(x) = \frac{\cos x}{۲\sin^۲ x}, & x_\circ = \frac{\pi}{۴}, \\
۱\circ)\ f(x) = \sqrt{\frac{۱+x^۳}{۱-x^۳}}, & x_\circ = \circ.
\end{array}$$

۹.۱.۴ تعریف. مانند حد، که حد چپ و حد راست را بصورت تعمیم یافتهٔ آن مطرح می‌کردند، مشتق چپ و مشتق راست را بصورت زیر می‌توان به عنوان تعمیم مشتق تعریف نمود:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_\circ+) &= \lim_{x\to x_\circ+} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}, \\ f'(x_\circ-) &= \lim_{x\to x_\circ-} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}. \end{aligned}}$$

۱۰.۱.۴ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $y = f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ مشتقپذیر باشد این است که $y = f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ مشتقپذیر راست و مشتقپذیر چپ بوده و مقدار این دو مشتق برابر $f'(x_\circ)$ باشد. □

۱۱.۱.۴ مثال. فرض کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۱-x & x < ۱ \text{ اگر} \\ (۱-x)(۲-x) & ۱ \le x \le ۲ \text{ اگر} \\ -(۲-x) & ۲ < x \text{ اگر} \end{cases}$$

مشتق آن را محاسبه کرده و نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = f'(x)$ را رسم کنید.

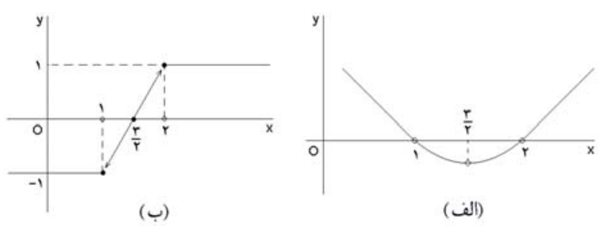
حل. با استفاده از اطلاعات فصل قبل به سادگی می‌توان نمودار تابع $y = f(x)$ را مانند شکل ۲.۴—الف ترسیم نمود. بعلاوه، ملاحظه می‌گردد که

$$f'(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۱ \text{ اگر} \\ ۲x - ۳ & ۱ < x < ۲ \text{ اگر} \\ ۱ & ۲ < x \text{ اگر} \end{cases}$$

اکنون باید $y = f'(x)$ را در نقاط $x = ۱$ و $x = ۲$ که تغییر ضابطه صورت گرفته است، محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
f'(۱-) &= \lim_{x\to ۱-} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \\
&= \lim_{x\to ۱-} \frac{(۱-x)-\circ}{x-۱} = -۱ \\
f'(۱+) &= \lim_{x\to ۱+} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \\
&= \lim_{x\to ۱+} \frac{(۱-x)(۲-x)-\circ}{x-۱} = -۱ \\
f'(۲-) &= \lim_{x\to ۲-} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \\
&= \lim_{x\to ۲-} \frac{(۱-x)(۲-x)-\circ}{x-۲} = ۱ \\
f'(۲+) &= \lim_{x\to ۲+} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \\
&= \lim_{x\to ۲+} \frac{-(۲-x)-\circ}{x-۲} = ۱
\end{aligned}$$

اکنون می‌توان از این اطلاعات استفاده نموده و نمودار $y = f'(x)$ را مانند شکل ۲.۴—ب ترسیم نمود.



شکل ۲.۴: الف) نمودار تابع $y = f(x)$ ب) نمودار تابع مشتق $y = f'(x)$

۲.۴ محاسبهٔ جبری مشتقها

هدف از این بخش محاسبه کوتاه‌تر مشتق است به نحوی که حداقل بستگی را به مفهوم حد داشته باشد. برای این منظور یک روش منسجم جبری را طرح ریزی می‌کنیم.

۱.۲.۴ قضیه. اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در $x = x_\circ$ مشتق‌پذیر باشند و $a \in \mathbb{R}$، آنگاه:

۱) $(af)'(x_\circ) = af'(x_\circ)$

۲) $(f \pm g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) \pm g'(x_\circ)$

۳) $(fg)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + g'(x_\circ)f(x_\circ)$

۴) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_\circ) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - g'(x_\circ)f(x_\circ)}{g^۲(x_\circ)}$

اثبات این قضیه به عنوان تمرین بر عهده خواننده است.

۲.۲.۴ قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق. اگر $y = g(x)$ در $x = x_\circ$ و $z = f(y)$ در $y_\circ = g(x_\circ)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

$$\boxed{(f \circ g)'(x_\circ) = g'(x_\circ)f'(g(x_\circ))}$$

اثبات: با استفاده از تعریف داریم

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_\circ) &= \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(g(x)) - f(g(x_\circ))}{x - x_\circ} \\ &= \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(g(x)) - f(g(x_\circ))}{g(x) - g(x_\circ)} \times \lim_{x \to x_\circ} \frac{g(x) - g(x_\circ)}{x - x_\circ} \\ &= \lim_{y \to y_\circ} \frac{f(y) - f(y_\circ)}{y - y_\circ} \times g'(x_\circ) = f'(y_\circ).g'(x_\circ)\end{aligned}$$

با توجه به $y_\circ = g(x_\circ)$ حکم اثبات شده است. □

۳.۲.۴ قاعدهٔ مشتق تابع معکوس. اگر $y = f(x)$ معکوس‌پذیر بوده و در $x = x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد و $y_\circ = f(x_\circ)$، آنگاه $x = f^{-۱}(y)$ در $y = y_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$\boxed{{f^{-۱}}'(y_\circ) = \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(y_\circ)\right)}}$$

اثبات: با توجه به اینکه $x = f^{-۱}(f(x))$، با مشتق گیری از طرفین این رابطه بر حسب x در نقطهٔ $x = x_\circ = f^{-۱}(y_\circ)$، و با استفاده از قضیهٔ ۲.۲.۴ داریم

$${f^{-۱}}'(f(x_\circ)).f'(x_\circ) = ۱ \;\Rightarrow\; {f^{-۱}}'(y_\circ).f'(x_\circ) = ۱$$

اکنون کافی است این معادله را بر حسب ${f^{-۱}}'(y_\circ)$ حل کنیم. □

این سه قضیه به همراه جدولی که در ادامه خواهد آمد، مبنایی برای حل سریع مسایل مشتق می‌باشند.

۴.۲.۴ جدول مشتقات. فرض کنید $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند، دراین صورت:

۱) $(a^u) = u'a^u \ln a$ ۲) $(e^u)' = u'e^u$

۳) $(u^a)' = au'u^{a-۱},$ ۴) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

۵) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ۶) $(\sin u)' = u' \cos u$

۷) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^۲ u}$ ۸) $(\cos u)' = -u' \sin u$

۹) $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^۲ u}$ ۱۰) $(\operatorname{arccot} u)' = \frac{-u'}{۱ + u^۲}$

۱۱) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ ۱۲) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-۱}}}$

۱۳) $(\sinh u)' = u' \cosh u$ ۱۴) $(\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^۲ u}$

۱۵) $(\cosh u)' = u' \sinh u$ ۱۶) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$

۱۷) $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$

۱۸) $(\arctan u)' = \frac{u'}{۱ + u^۲}$

۱۹) $\left(\frac{۱}{۲} \ln \left|\frac{۱ + u}{۱ - u}\right|\right)' = \frac{u'}{۱ - u^۲}$

۲۰) $\left(\ln \left|u + \sqrt{u^۲ \pm ۱}\right|\right)' = \frac{u'}{\sqrt{u^۲ \pm ۱}}$

۲۱) $(u^v)' = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) u^v$

اثبات: تنها برخی از این فرمولها را اثبات نموده و اثبات سایر آنها را به خواننده می‌سپاریم. برای اثبات (۲) (بنابه ۲.۲.۴) کافی است ثابت شود که $(e^x)' = e^x$.

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{y \to x} \frac{e^x - e^y}{x - y} = e^x \lim_{y \to x} \frac{e^{y-x} - ۱}{y - x} \\ &= e^x \lim_{z \to \circ} \frac{e^z - ۱}{z} = e^x \times ۱ = e^x\end{aligned}$$

که در اینجا فرض شده است $z = y - x$. برای اثبات (۱)، کافی است توجه شود که $a^u = e^{\ln(a^u)} = e^{u \ln a}$. در مورد اثبات فرمول (۱۷)، با استفاده از ۳.۲.۴ داریم:

$$(\arccos u)' = \frac{u'}{\cos'(\arccos u)} = \frac{u'}{-\sin(\arccos u)} = \frac{-u'}{\sqrt{۱ - u^۲}}$$

زیرا $\sin x = \sqrt{۱ - \cos^۲ x}$. اثبات سایر موارد را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. □

۵.۲.۴ مثال. ۱) با توجه به قسمت (۳) از ۱.۲.۴، داریم

$$(x \cos x)' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x - x \sin x$$

مثال ۲) با توجه به قسمت (۴) از ۱.۲.۴، داریم

$$\left(\frac{۱+x^۲}{x-e^x}\right)' = \frac{(۱+x^۲)'(x-e^x)-(x-e^x)'(۱+x^۲)}{(x-e^x)^۲} = \frac{(۲x)(x-e^x)-(۱-e^x)(۱+x^۲)}{(x-e^x)^۲}$$

مثال ۳) با توجه به قسمت (۲۰) از ۱.۲.۴، داریم

$$\left(\sqrt{۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}\right)' = \frac{\left(۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}\right)'}{۲\sqrt{۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}}\,\frac{(x+\sqrt{x^۲+۱})'}{۲\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}}\,\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}} \times \left(۱+\frac{(x^۲+۱)'}{۲\sqrt{x^۲+۱}}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{۱+\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}}}\,\frac{۱}{\sqrt{x+\sqrt{x^۲+۱}}} \times \left(۱+\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right)$$

مثال ۴) فرض کنیم $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$، در این صورت

$$\ln y = x(\ln a-\ln b)+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a)$$

و پس از مشتقگیری داریم $\frac{y'}{y}=\ln a-\ln b-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$. در نتیجه $y'=y\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b-a}{x}\right)$.

۶.۲.۴ تمرین.

در هر یک از موارد زیر از $y=f(x)$ نسبت به x مشتق بگیرید:

۱) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}$ ۲) $y=۲^{\tan(۱/x)}$

۳) $y=\frac{۱+x-x^۲}{۱-x+x^۲}$ ۴) $y=a\sqrt{۱+x^۲}$

۵) $y=\sin^n x\cos(nx)$ ۶) $y=\frac{x}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$

۷) $y=\sin(\sin(\sin x))$ ۸) $y=\sqrt[۳]{\frac{۱+x^۳}{۱-x^۳}}$

۹) $y=\sqrt{x+\sqrt[۳]{x+\sqrt[۴]{x}}}$ ۱۰) $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$

۱۱) $y=(x+۱)(x+۲)^۲(x+۳)^۳$

۱۲) $y=\ln\left(\frac{۱}{x}+\ln\left(\frac{۱}{x}+\ln\left(\frac{۱}{x}\right)\right)\right)$

۱۳) $y=\arctan x+\frac{۱}{۳}\arctan x^۳$

۱۴) $y=\arcsin\left(\frac{\sin\alpha\sin x}{۱-\cos\alpha\cos x}\right)$

۱۵) $y=\frac{x^۳}{۱-x}\sqrt[۳]{\frac{۳-x}{(۳+x)^۲}}$

۱۶) $y=x(x^۲-۱)\cdots(x^{n+۱}-n)$

۱۷) $f'(x)$ را در صورتی محاسبه کنید که

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-۱ & x^۴ & ۱ & ۱/x \\ x^۲-۱ & x^۳ & ۲ & x \\ x^۳-۱ & x^۲ & ۳ & ۱/x \\ x^۴-۱ & x & ۴ & x \end{vmatrix}$$

در هر مورد y' را بیابید:

۱۸) $y=\phi(x)^{\psi(x)}$ ۱۹) $y=f(e^x)+e^{f(x)}$

۲۰) $y=\log_{\phi(x)}\psi(x)$ ۲۱) $y=f(\sin^۲ x)+f(\cos^۲ x)$

۲۲) نشان دهید که تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & \text{اگر } x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ به ازاء $x=۰$ مشتقپذیر است.

۲۳) نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^۲\,|\cos(\pi/x)| & \text{اگر } x\neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر } x=۰\end{cases}$$

در هر همسایگی دلخواه از نقطهٔ $x=۰$ دارای نقاطی است که در آنها مشتق ندارد، ولی $y=f(x)$ در $x=۰$ مشتقپذیر است.

در هر یک از موارد زیر، $f'(x+)$ و $f'(x-)$ را محاسبه کنید:

۲۴) $f(x)=|x|\sin(\pi x)$ ۲۵) $f(x)=\sqrt{۱-e^{-x^۲}}$

۲۶) $f(x)=\arctan\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$ ۲۷) $f(x)=\sqrt{\sin x^۲}$

۲۸) $f(x)=|\ln|x||$ ۲۹) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲+x^۳}}{x}$

۷.۲.۴ قاعدهٔ مشتق توابع ضمنی.

فرض کنید تابع $y=f(x)$ به صورت ضمنی $F(x,y)=c$ مطرح شده باشد، که $z=F(x,y)$ تابعی دو متغیره است که نسبت به x و y مشتقپذیر است و c عددی حقیقی می‌باشد. در این صورت

$$\boxed{y'=-\frac{F_x}{F_y}}$$

که در آن F_x عبارت است از مشتق تابع $z=F(x,y)$ نسبت به x و با فرض ثابت بودن y و نیز F_y عبارت است از مشتق تابع $z=F(x,y)$ نسبت به y و با فرض ثابت بودن x. □

این قضیه را در مبحث مشتقات جزئی در جلد دوم کتاب اثبات خواهیم نمود.

۸.۲.۴ مثال. ۱) فرض کنید $x^۲+۴y^۲=xy^۳$، مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

حل. در اینجا $F(x,y)=x^۲+۴y^۲-xy^۳$ و در نتیجه

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{۲x+۰-y^۳}{۰+۸y-۳xy^۲}=\frac{y^۲-۲x}{۸y-۳xy^۲}$$

مثال ۲) فرض کنید $\sin(x+y)=x^y$، مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

حل. در اینجا $F(x,y)=\sin(x+y)-x^y$ و در نتیجه

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\cos(x+y)-yx^{y-۱}}{\cos(x+y)-x^y\ln x}$$

مثال ۳) فرض کنید $x^۲+xy^۲+yx^۲=x^۳-۲y^۳$، مشتق y نسبت به x را در نقطهٔ $(۱,۰)$ محاسبه کنید.

حل. در اینجا $x^۲+xy^۲+yx^۲=x^۳-۲y^۳$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(۱,۰)} = -\frac{۲x+y^۲+۲xy-۳x^۲+۰}{۰+۲xy+x^۲-۰+۶y^۲}\Big|_{(۱,۰)} \\ &= -\frac{۲+۰+۰-۳-۰}{۰+۰+۱-۰+۰}=۱\end{aligned}$$

۹.۲.۴ تمرین. مطلوب است مشتق $y=f(x)$ نسبت به x، مشروط به آنکه

۱) $y\sin x+x\sin y=۱$　　۲) $x^۲+y^۲=\tan(x+y)$

۳) $x^y+y^x=xy$　　۴) $\ln(x+۲y)=۲x+y$

مطلوب است مشتق $y=f(x)$ نسبت به x در نقطهٔ M، مشروط به آنکه

۵) $x^۲\sin y^۲-y^۲\cos x^۲=\pi,\quad M=(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$

۶) $(x+y)^{x-y}+(x-y)^{(x+y)}=۴,\quad M=(۲,۱)$

۱۰.۲.۴ مشتق توابع پارامتری. فرض کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد که به صورت $x=\phi(t)$ و $y=\psi(t)$ مطرح شده است. اگر ϕ و ψ در $t=t_۰$ مشتق‌پذیر باشند، $x_۰=\phi(t_۰)$، $y_۰=\psi(t_۰)$، در این صورت $y=f(x)$ نسبت به x در نقطهٔ $x=x_۰$ مشتق‌پذیر است و بعلاوه

$$\boxed{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_۰}=\frac{\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_۰}}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_۰}}=\frac{\psi'(t_۰)}{\phi'(t_۰)}}$$

اثبات: چون هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است، بنابراین $\lim_{t\to t_۰}x(t)=x(t_۰)=x_۰$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_۰} &= \lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{t\to t_۰}\frac{y(t)-y(t_۰)}{x(t)-x(t_۰)} \\ &= \lim_{t\to t_۰}\frac{\frac{y-y_۰}{t-t_۰}}{\frac{x-x_۰}{t-t_۰}}=\frac{\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_۰}}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_۰}}=\frac{\psi'(t_۰)}{\phi'(t_۰)}\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۱۱.۲.۴ مثال. ۱) اگر $x=\sin(۲t)$ و $y=۲\sin t$، در این صورت

$$y'=\frac{(۲\sin t)'}{(\sin(۲t))'}=\frac{۲\cos t}{۲\cos(۲t)}=\frac{\cos t}{\cos(۲t)}$$

مثال ۲) اگر $x=\sqrt[۳]{۱-\sqrt{t}}$ و $y=\sqrt{۱-\sqrt[۳]{t}}$، آنگاه

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\sqrt{۱-\sqrt[۳]{t}}\right)'}{\left(\sqrt[۳]{۱-\sqrt{t}}\right)'}=\frac{\frac{۱}{۲}(۱-\sqrt[۳]{t})'(۱-\sqrt[۳]{t})^{-۱/۲}}{\frac{۱}{۳}(۱-\sqrt{t})'(۱-\sqrt{t})^{-۲/۳}} \\ &= \frac{\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۳}t^{-۲/۳})(۱-\sqrt[۳]{t})^{-۱/۲}}{\frac{۱}{۳}(-\frac{۱}{۲}t^{-۱/۲})(۱-\sqrt{t})^{-۲/۳}} \\ &= \left(\frac{۱-\sqrt{t}}{t}\right)^{۲/۳}\left(\frac{t}{۱-\sqrt[۳]{t}}\right)^{۱/۲}\end{aligned}$$

۱۲.۲.۴ تمرین. در صورتی که a و b اعداد مثبت باشند، مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید:

۱) $x=\sin^۲ t,\qquad y=\cos^۲ t$

۲) $x=a\cos t,\qquad y=b\sin t+t^۲$

۳) $x=a(t-\sin t),\qquad y=at(۱-\cos t)$

۴) $x=\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\right),\ y=\arccos\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+t^۲}}\right)$

۳.۴ مشتق‌های مرتبهٔ بالا

۱.۳.۴ تعریف. فرض کنید تابع $y=f'(x)$ خود مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق آن را با نماد $y=f''(x)$ نشان می‌دهیم، به صورت مشابه می‌توان تعریف کرد که:

$$\begin{aligned} y'' &= f''(x)=(f'(x)) \\ y^{(۳)} &= f^{(۳)}(x)=(f''(x)) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x)=(f^{(n-۱)}(x))'\quad (\text{مشتق } n \text{ام } y=f(x))\end{aligned}$$

۲.۳.۴ مثال. ۱) با توجه به اینکه $(e^x)' = e^x$، داریم

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

مثال ۲) با توجه به اینکه $(a^x)' = a^x \ln a$، داریم

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

مثال ۳) در صورتی که $y = \sin x$، آنگاه

$$\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{۲}\right),\\
y'' &= -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + ۲\frac{\pi}{۲}\right)\\
&\vdots\\
y^{(n)} &= \left(y^{(n-۱)}\right)' = \left(\sin\left(x + (n-۱)\frac{\pi}{۲}\right)\right)'\\
&= \cos\left(x + (n-۱)\frac{\pi}{۲}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{۲}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۴) در صورتی که $y = \ln x$، آنگاه

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{۱}{x},\\
y'' &= \left(\frac{۱}{x}\right)' = \frac{-۱}{x^۲},\\
&\vdots\\
y^{(n)} &= \left(y^{(n-۱)}\right)' = \left(\frac{(-۱)^{n-۲}(n-۲)!}{x^{n-۱}}\right)'\\
&= (-۱)^{n-۲}(n-۲)!(۱-n)\frac{۱}{x^n}\\
&= (-۱)^{n-۱}(n-۲)!(n-۱)\frac{۱}{x^n}\\
&= \frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{x^n}
\end{aligned}$$

مثال ۵) مشتق مرتبهٔ nام تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)}$$

را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا کسر سمت راست تساوی بالا را تجزیه می‌کنیم (به ؟؟ توجه شود). بنابراین، فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)} =\\
&\quad = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+۱} + \frac{C}{x+۲} + \frac{D}{x+۳} + \frac{E}{x+۴}
\end{aligned}$$

پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده نمودن عبارت بدست آمده، اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را در عبارت بدست آمده قرار داده و نتیجه می‌گیریم که $A = \frac{۱}{۲۴}$، $B = \frac{-۱}{۶}$، $C = \frac{۱}{۴}$، $D = \frac{-۱}{۶}$ و $E = \frac{۱}{۲۴}$. اکنون کافی است که این مقادیر را در تساوی بالا قرار داده، و به این ترتیب $y = f(x)$ به مجموع پنج کسر سادهٔ به فرم $\frac{A}{x+a}$ تجزیه می‌گردد. بنابراین، کافی است از چنین کسرهایی بتوانیم مشتق بگیریم. اگر $g_a(x) := \frac{۱}{x+a}$، در این صورت

$$\begin{aligned}
g_a'(x) &= \left\{(x+a)^{-۱}\right\}' = -(x+a)^{-۲},\\
g_a''(x) &= \left\{-(x+a)^{-۲}\right\}' = ۲(x+a)^{-۳},\\
&\vdots\\
g_a^{(n+۱)}(x) &= \left\{(-۱)^n(x+a)^{-(n+۱)}\right\}'\\
&= (-۱)^{n+۱}(x+a)^{-(n+۲)}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \left(\frac{۱}{۲۴}g_۰(x) - \frac{۱}{۶}g_۱(x) + \frac{۱}{۴}g_۲(x)\right.\\
&\quad \left. -\frac{۱}{۶}g_۳(x) + \frac{۱}{۲۴}g_۴(x)\right)^{(n)}\\
&= (-۱)^n n!\left(\frac{۱}{۲۴}x^{-(n+۱)} - \frac{۱}{۶}(x+۱)^{-(n+۱)}\right.\\
&\quad +\frac{۱}{۴}(x+۲)^{-(n+۱)}\\
&\quad \left. -\frac{۱}{۶}(x+۳)^{-(n+۱)} + \frac{۱}{۲۴}(x+۴)^{-(n+۱)}\right)
\end{aligned}$$

مثال ۶) فرض کنید $x^۳ + y^۳ = ۲xy + ۱$، مطلوبست y''.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-۱)}}{dx} = \frac{\frac{dy^{(n-۱)}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

و $y' = -\frac{۳x^۲ - ۲y}{۳y^۲ - ۲x}$، بنابراین

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{۳x^۲ - ۲y}{۳y^۲ - ۲x}\right)\\
&= -\frac{(۶x - ۲y')(۳y' - ۲x) - (۶yy' - ۲)(۳x^۲ - ۲y)}{(۳y^۲ - ۲x)^۲}
\end{aligned}$$

اکنون کافی است بجای y' مقدار $-\frac{۳x^۲ - ۲y}{۳y^۲ - ۲x}$ قرار دهیم.

مثال ۷) در صورتی که $x = t\sin t$ و $y = t\cos t$، مطلوبست y''.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t\sin t}{\sin t + t\cos t}$$

بنابراین

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{۱}{\sin t + t\cos t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t - t\sin t}{\sin t + t\cos t}\right)\\
&= \frac{۱}{\sin t + t\cos t} \times \frac{(-۲\sin t - t\cos t)(\sin t + t\cos t) - (۲\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t)}{(\sin t + t\cos t)^{۲}}
\end{aligned}$$

۳.۳.۴ دستور لایبنیتز. در صورتی که توابع $u(x)$ و $v(x)$ مشتق مرتبهٔ n ام داشته باشند، آنگاه

$$\boxed{(vu)^{(n)} = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}}$$

اثبات: از استقراء بر n استفاده می‌کنیم. حکم به ازاء $n=۲$ قبلاً اثبات شده است. اگر حکم را برای n درست فرض کنیم، آنگاه

$$\begin{aligned}
(vu)^{(n+۱)} &= \left(\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}\right)'\\
&= \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(k+۱)}v^{(n-k)} + u^{(k)}v^{(n-k+۱)}\right)\\
&= \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k+۱)}v^{((n+۱)-(k+۱))} + \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{((n+۱)-k)}\\
&= \sum_{k=۱}^{n+۱}\binom{n}{k-۱}u^{(k)}v^{((n+۱)-k)} + \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{((n+۱)-k)}\\
&= uv^{(n+۱)} + \sum_{k=۱}^{n+۱}\left(\binom{n}{k-۱}+\binom{n}{k}\right)u^{(k)}v^{((n+۱)-k)}\\
&= \sum_{k=۰}^{n+۱}\binom{n+۱}{k}u^{(k)}v^{(n+۱-k)}
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۴.۳.۴ مثال. ۱) در صورتی که $y = x^{۳}\ln x$، با فرض $u = x^{۳}$ و $v = \ln x$، داریم

$$\begin{aligned}
y^{(۴)} &= \sum_{k=۰}^{۴}\binom{۴}{k}(x^{۳})^{(۴)}(\ln x)^{(۴-k)}\\
&= \binom{۴}{۰}(x^{۳})^{(۰)}(\ln x)^{(۴)} + \binom{۴}{۱}(x^{۳})^{(۱)}(\ln x)^{(۳)}\\
&\quad + \binom{۴}{۲}(x^{۳})^{(۲)}(\ln x)^{(۲)} + \binom{۴}{۳}(x^{۳})^{(۳)}(\ln x)^{(۱)}\\
&\quad + \binom{۴}{۴}(x^{۳})^{(۴)}(\ln x)^{(۰)}\\
&= (۱)(x^{۳})\left(\frac{-۶}{x^{۴}}\right) + (۴)(۳x^{۲})\left(\frac{۲}{x^{۳}}\right)\\
&\quad + (۶)(۶x)\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right) + (۴)(۶)\left(\frac{۱}{x}\right)\\
&\quad + (۱)(۰)(\ln x) = \frac{۶}{x}
\end{aligned}$$

مثال ۲) در صورتی که $y = e^{۲x}\cos x$، با فرض $u = e^{۲x}$ و $v = \cos x$، داریم

$$\begin{aligned}
y^{(۵)} &= \sum_{k=۰}^{۵}\binom{۵}{k}(e^{۲x})^{(k)}(\cos x)^{(۵-k)}\\
&= \binom{۵}{۰}(e^{۲x})^{(۰)}(\cos x)^{(۵)} + \binom{۵}{۱}(e^{۲x})^{(۱)}(\cos x)^{(۴)}\\
&\quad + \binom{۵}{۲}(e^{۲x})^{(۲)}(\cos x)^{(۳)} + \binom{۵}{۳}(e^{۲x})^{(۳)}(\cos x)^{(۲)}\\
&\quad + \binom{۵}{۴}(e^{۲x})^{(۴)}(\cos x)^{(۱)} + \binom{۵}{۵}(e^{۲x})^{(۵)}(\cos x)^{(۰)}\\
&= (۱)(e^{۲x})(-\sin x) + (۵)(۲e^{۲x})(\cos x)\\
&\quad + (۱۰)(۴e^{۲x})(\sin x) + (۱۰)(۸e^{۲x})(-\cos x)\\
&\quad + (۵)(۱۶e^{۲x})(-\sin x) + (۱)(۳۲e^{۲x})(\cos x)\\
&= -۴۱e^{۲x}\sin x - ۳۸e^{۲x}\cos x
\end{aligned}$$

۵.۳.۴ تمرین. در هر یک از موارد زیر، مشتق مرتبهٔ n ام تابع $y = f(x)$ را بدست آورید:

۱) $y = \sqrt{x},\quad n = ۱۰$ ۲) $y = \dfrac{e^{x}}{x},\quad n = ۷$

۳) $y = \dfrac{x^{۲}}{۱-x},\quad n = ۸$ ۴) $y = x^{۲}\sin x,\quad n = ۳۰$

۵) $y = \sin^{۲}x\ln x,\quad n = ۴$ ۶) $y = \dfrac{\cos(۳x)}{\sqrt[۳]{۱-۳x}},\quad n = ۳$

در هر یک از موارد زیر، مشتق از مرتبهٔ n ام را محاسبه کنید

۷) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ۸) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{۱-۲x}}$

۹) $y = x\sin x$ ۱۰) $y = \sin(ax)\cos(ax)$

۱۱) $y = (x^{۲}+x)e^{-x}$ ۱۲) $y = \dfrac{۱}{x(x-۱)}$

در هر یک از موارد زیر، مشتق مرتبهٔ n ام تابع $y = f(x)$ را بدست آورید:

۱۳) $xy^{۲} + x^{۲}y + x - y,\quad n = ۳$

۱۴) $y = x^{y} + y^{x} - x^{۲} + y^{۲},\quad n = ۲$

۱۵) $\sin(x+y) + \cos(x-y) - xy,\quad n = ۲$

۱۶) $x = a(t - \sin t),\quad y = a(۱ - \cos t),\quad n = ۲$

۱۷) $x = \sin t,\quad y = \cos t,\quad n = ۳$

۱۸) $x = \arcsin t,\quad y = \arccos(t^{۲}),\quad n = ۳$

۱۹) ثابت کنید که $f^{(n)}(۰)$ وجود دارد، ولی $f^{(n+۱)}(۰)$ موجود نیست

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲n}\sin(۱/x) & \text{اگر } x \neq ۰\\ ۰ & \text{اگر } x = ۰\end{cases}$$

۲۰) نشان دهید که تابع زیر از هر مرتبهٔ دلخواهی مشتق‌پذیر است

$$f(x)=\begin{cases} e^{-۱/x^۲} & x\neq ۰ \ \text{اگر} \\ ۰ & x=۰ \ \text{اگر} \end{cases}$$

هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

$$۲۱)\quad \left(x^{n-۱}e^{۱/x}\right)^{(n)}=\frac{(-۱)^n}{x^{n+۱}}e^{۱/x},\quad (x\neq ۰)$$

$$۲۲)\quad (x^n\ln x)^{(n)}=n!\left(\ln x+\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k}\right),\quad (x>۰)$$

$$۲۳)\quad \left(\frac{۱}{x^۲+۱}\right)^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{(x^۲+۱)^{(n+۱)/۲}}\times\sin\{(n+۱)\mathrm{arccot}\, x\}$$

۲۴) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای $f'(x)=f(x)$، آن است که به ازای عدد ثابت A ای $f(x)=Ae^x$.

۴.۴ مسألهٔ اکسترموم

یکی از مهمترین کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال در علم و فن‌آوری امروز، مسألهٔ اکسترموم و یا مسألهٔ بهینه سازی است. در این گونه مسایل، کمیت بخصوصی از یک موضوع را انتخاب کرده و بسته به شرایط داده شده، مقدار آن را حداکثر و یا حداقل می‌کنند. مثلاً، از بین تمام مسیرهای اتصال دهنده بین دو نقطه، به دنبال مسیری می‌گردند که طول آن حداقل باشد. در این بخش انواع ساده‌ای از این مسأله که به کمک توابع یک متغیره می‌توان حل نمود را مطالعه می‌کنیم.

۱.۴.۴ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع است و $x_۰\in D_f$. در صورتی می‌گوئیم تابع $y=f(x)$ دارای **ماکزیموم نسبی** در $x=x_۰$ است که عدد مثبت δ ای چنان یافت شود که به ازاء هر x در $(x_۰-\delta;x_۰+\delta)$، داشته باشیم $f(x)\leq f(x_۰)$. به صورت مشابه، در صورتی می‌گوئیم تابع $y=f(x)$ دارای **مینیموم نسبی** در $x=x_۰$ است که عدد مثبت δ ای چنان یافت شود که به ازاء هر x در $(x_۰-\delta;x_۰+\delta)$، داشته باشیم $f(x_۰)\leq f(x)$. کلمهٔ **اکسترموم** را به معنی «ماکزیموم یا مینیموم» بکار می‌بریم.

۲.۴.۴ شرط لازم برای وجود اکسترموم. اگر $y=f(x)$ در $x=x_۰$ دارای اکسترموم نسبی باشد و در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_۰)=۰$.

توجه شود که شرط $f'(x_۰)=۰$ تنها یک شرط لازم است و کافی نیست. به این معنی که ممکن است نقطه‌ای در این شرط صدق کند ولی یک نقطهٔ اکسترموم نسبی نباشد. تنها استفاده‌ای که از این حکم می‌توان کرد این است که اگر مشتق $y=f(x)$ در $x=x_۰$ موجود نباشد و یا وجود داشته و برابر صفر باشد، آنگاه احتمالاً $x=x_۰$ یک نقطه اکسترموم $y=f(x)$ است، و بعلاوه تنها چنین نقاطی می‌توانند اکسترموم تابع مورد نظر باشند. چنین نقاطی را اصطلاحاً نقاط «بحرانی» تابع می‌نامند. به بیان دقیقتر:

۳.۴.۴ تعریف. نقطهٔ $x_۰\in\mathbb{R}$ را در صورتی یک **نقطهٔ بحرانی** تابع $y=f(x)$ گوئیم که $f'(x_۰)$ موجود نباشد و یا در صورت وجود برابر با صفر باشد.

۴.۴.۴ مثال. ۱) تابع $f(x)=x^۳-x^۲$ را در نظر بگیرید. در این حالت، شرط $f'(x)=۰$ به معنی $۳x^۲-۲x=۰$ و یا $x(۳x-۲)=۰$ است. پس با توجه به قضیهٔ بالا، اکسترمومهای نسبی احتمالی تابع $y=f(x)$ نقاط بحرانی $x_۱=۰$ و $x_۲=\frac{۲}{۳}$ هستند. در این صورت

الف) $x_۱=۰$ یک ماکزیموم نسبی تابع $y=f(x)$ است، زیرا به ازاء هر $x\in(-۱;۱)$ ای داریم

$$-۱<x<۱\ \Rightarrow\ \begin{cases} x-۱<۰\\ x^۲<۱\end{cases}\ \Rightarrow\ x^۲(x-۱)\leq ۰=f(۰)$$

ب) $x_۲=\frac{۲}{۳}$ یک مینیموم نسبی تابع $y=f(x)$ است، زیرا به ازاء هر $x\in\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴};\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)$ ای داریم

$$\frac{۵}{۱۲}<x<\frac{۱۱}{۱۲}\quad ۷\Rightarrow\ \begin{cases} x<\frac{۱۱}{۱۲}\\ \frac{۵}{۱۲}<x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-۱<\frac{-۱}{۱۲}\\ \frac{۲۵}{۱۴۴}<x^۲\end{cases}\Rightarrow\ \frac{-۲۵}{۱۷۲۸}<x^۲(x-۱)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= x^۲(x-۱)>\frac{-۲۵}{۱۷۲۸}>\frac{-۴}{۲۷}\\ &= \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\left(\frac{۲}{۳}-۱\right)=f\left(\frac{۲}{۳}\right)\end{aligned}$$

.

مثال ۲) تابع $f(x)=x^۳$ را در نظر بگیرید. در این حالت، شرط $f'(x)=۰$ به معنی $x=۰$ است، بنابراین تنها نقطهٔ بحرانی تابع مورد نظر $x=۰$ می‌باشد، که ممکن است یک نقطهٔ اکسترموم

آن نیز باشد. اما این نقطه به هیچ وجه یک نقطهٔ اکسترموم تابع نیست، زیرا:

$$x<0 \Rightarrow x^3<0 \Rightarrow f(x)<f(0)$$
$$x>0 \Rightarrow x^3>0 \Rightarrow f(x)>f(0)$$

این ثابت می‌کند که شرط $f'(x)=0$ یک شرط کافی نیست.

۵.۴.۴ اولین شرط کافی برای وجود اکسترموم.

اگر $y=f(x)$ در یک همسایگی از نقطهٔ $x=x_0$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_0)=0$، آنگاه با مقایسهٔ علامت $y=f'(x)$ در همسایگی x_0 داریم:

حالت	علامت $f'(x)$ به ازاء $x<x_0$	علامت $f'(x)$ به ازاء $x>x_0$	نتیجه اینکه x_0 یک نقطهٔ
الف	$+$	$+$	اکسترموم نیست
ب	$+$	$-$	ماکزیموم است
ج	$-$	$+$	مینیموم است
د	$-$	$-$	اکسترموم نیست

۶.۴.۴ تعمیم اولین شرط کافی برای وجود اکسترموم.

اگر $y=f(x)$ در یک همسایگی از نقطهٔ $x=x_0$ دارای مشتق مرتبهٔ n ام باشد، و

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

و $f^{(n)}(x_0)\neq 0$، آنگاه اگر n فرد باشد، x_0 یک نقطهٔ غیر اکسترموم f است و اگر n زوج باشد، با مقایسهٔ علامت $f^{(n)}(x)$ در همسایگی x_0 داریم:

حالت	علامت $f^{(n)}(x)$ به ازاء $x<x_0$	علامت $f^{(n)}(x)$ به ازاء $x>x_0$	نتیجه اینکه x_0 یک نقطهٔ
الف	$+$	$+$	اکسترموم نیست
ب	$+$	$-$	ماکزیموم است
ج	$-$	$+$	مینیموم است
د	$-$	$-$	اکسترموم نیست

۷.۴.۴ دومین شرط کافی برای وجود اکسترموم.

اگر تابع $y=f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم در $x=x_0$ باشد، $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)\neq 0$، در این صورت:

الف) اگر $f''(x_0)<0$، آنگاه $x=x_0$ یک نقطهٔ ماکزیموم تابع $y=f(x)$ است.

ب) اگر $f''(x_0)>0$، آنگاه $x=x_0$ یک نقطهٔ مینیموم تابع $y=f(x)$ است.

۸.۴.۴ تعمیم دومین شرط کافی برای وجود اکسترموم.

اگر تابع $y=f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ nام در $x=x_0$ باشد، $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ و بعلاوه $f^{(n)}(x_0)\neq 0$، در این صورت اگر n عددی فرد باشد، آنگاه x_0 یک نقطهٔ غیر اکسترموم f است و اما اگر n زوج باشد، آنگاه

الف) اگر $f^{(n)}(x_0)<0$، آنگاه $x=x_0$ یک نقطهٔ ماکزیموم تابع $y=f(x)$ است.

ب) اگر $f^{(n)}(x_0)>0$، آنگاه $x=x_0$ یک نقطهٔ مینیموم تابع $y=f(x)$ است.

۹.۴.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x)=2+x-x^2$ در این صورت $f'(x)=1-2x$. بنابراین، از شرط $f'(x)=0$ نتیجه می‌گردد که $x_0=\frac{1}{2}$. پس، تنها نقطهٔ بحرانی این تابع $x_0=1/2$ است. اما، در این حالت

$$x<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=1-2x>1-1=0$$
$$x>\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=1-2x<1-1=0$$

بنابراین، $x_0=\frac{1}{2}$ یک نقطهٔ ماکزیموم با مقدار $\frac{9}{4}$ از تابع $y=f(x)$ است.

مثال ۲) فرض کنید $n\in\mathbb{R}$ عددی فرد است و

$$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-e^x$$

در این صورت

$$f_n'(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}-e^x=f_{n-1}(x)$$

که $x_0=0$ یک ریشهٔ آن است. اما، در این حالت

$$f_n'(x)=f_n''(x)=\cdots=f_n^{(n-1)}(x)=0,\quad f_n^{(n)}(x)=-e^x$$

ملاحظه می‌شود که علامت $y=f_n^{(n)}(x)$ در همسایگی $x_0=0$ ثابت (منفی) است. بنابراین، مطابق قضیهٔ ۶.۴.۴، نقطهٔ $x_0=0$ اکسترموم تابع $y=f(x)$ نیست.

مثال ۳) فرض کنید $f(x)=xe^{-x}$. در این صورت $f'(x)=0$، در نتیجه $e^{-x}-xe^{-x}=0$ و لذا $x_0=1$. پس، تنها اکسترموم احتمالی تابع $y=f(x)$ عبارت است از $x_0=1$ اما، در این صورت

$$f''(1)=\{-2e^{-x}+xe^{-x}\}_{x=1}=-e^{-1}<0$$

بنابراین، $x_0=1$ یک نقطهٔ ماکزیموم با مقدار e^{-1} از تابع $y=f(x)$ است.

مثال ۴) فرض کنید

$$f_n(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

در این صورت شرط $f'(x)=0$ به معنی $-\frac{x^n}{n!}e^{-x}=0$ است. در نتیجه $x_0=0$ تنها نتطهٔ بحرانی تابع مورد نظر می‌باشد. بعلاوه

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \left(\frac{x^n}{n!}-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}\\
f_n''(x) &= \left(2\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}-\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}\\
f_n^{(3)}(x) &= \left(\frac{x^n}{n!}-\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}-3\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}-3\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}
\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $n=1$، آنگاه $x_0=0$ یک ماکزیموم تابع $y=f(x)$ است، زیرا $f'(0)=0$ و $f''(0)=-e^{-1}<0$.

اگر $n=2$، آنگاه $x_0=0$ یک نقطهٔ غیر اکسترموم تابع $y=f(x)$ است.

اگر $n=3$، آنگاه $x_0=0$ یک نقطهٔ ماکزیموم تابع $y=f(x)$ است، زیرا $f(0)=f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$ و $f^{(4)}(0)=-e^{-1}<0$ و به همین ترتیب برای سایر مقادیر n می‌توان بحث نمود.

۱۰.۴.۴ تمرین. اکسترمومهای هر یک از توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x)=(x-1)^3$ ۲) $f(x)=(x-1)^4$

۳) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$ ۴) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$

۵) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$ ۶) $f(x)=e^x\sin x$

۷) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

۸) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$

۹) $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)$

۱۰) $f(x)=x^m(1-x)^n,\quad ;n,m\in\mathbb{N}$

۱۱.۴.۴ اکسترموم مطلق. فرض کنید $y=f(x)$ تابع است و $I\subseteq D_f$. اگر $x_0\in I$ چنان یافت شود که به ازاء هر $x\in I$ ای $f(x)\leq f(x_0)$، آنگاه گفته می‌شود که x_0 یک نقطهٔ ماکزیموم $y=f(x)$ بر I است و $f(x_0)$ را ماکزیموم $y=f(x)$ بر I می‌نامیم. بصورت مشابه، اگر $x_0\in I$ چنان یافت شود که به ازاء هر $x\in I$ ای $f(x_0)\leq f(x)$، آنگاه گفته می‌شود که x_0 یک نقطهٔ مینیموم $y=f(x)$ بر I است و $f(x_0)$ را مینیموم $y=f(x)$ بر I می‌نامند. این گونه اکسترمومها را (در مقابل اکسترمومهای نسبی) مطلق می‌نامند.

۱۲.۴.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x)=\sin x$ و نیز $I=[0;2\pi]$ در این صورت $x_1=\frac{\pi}{2}$ یک نقطهٔ ماکزیموم $y=f(x)$ بر I است. ماکزیموم $y=f(x)$ بر I برابر با $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ و مینیموم $y=f(x)$ بر I برابر $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ می‌باشد.

مثال ۲) فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x}$ و $I=(0;1]$ در این صورت $x_0=1$ یک نقطهٔ مینیموم $y=f(x)$ بر I است و $y=f(x)$ بر I برابر $f(x_0)=1$ می‌باشد. $y=f(x)$ بر I ماکزیموم مطلق ندارد!

۱۳.۴.۴ قضیه. فرض کنید $y=f(x)$ تابع است و $I=[a;b]\subseteq D_f$ و $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته است. در این صورت، ماکزیموم و مینیموم $y=f(x)$ بر I موجود می‌باشند. اکسترموم‌های $y=f(x)$ بر I یا نقاط a و b هستند و یا اینکه یک نقطهٔ بحرانی $y=f(x)$ در $(a;b)$ می‌باشند.

۱۴.۴.۴ الگوریتم حل مسألهٔ اکسترموم مطلق. با توجه به قضیهٔ ؟؟ برای حل مسئلهٔ اکسترموم تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $I=[a;b]\subseteq D_f$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) تحقیق می‌کنیم که آیا $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته است. اگر چنین بود، ادامه می‌دهیم.

ب) مشتقپذیری $y=f(x)$ بر $(a;b)$ را بررسی کرده و نقاطی را که در آنها مشتق وجود ندارد و یا مشتق موجود و برابر صفر است. (نقاط بحرانی) را مشخص می‌کنیم.

ج) مقدار تابع $y=f(x)$ را در نقاط بحرانی بدست آمده در مرحلهٔ (ب) محاسبه می‌کنیم.

د) مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه کرده، آنها را با مقادیر بدست آمده در مرحلهٔ (ج) مقایسه کرده، بزرگترین را ماکزیموم و کوچکترین را مینیموم تابع $y=f(x)$ بر I اعلام می‌کنیم.

۱۵.۴.۴ مثال. ۱) فرض کنید $f(x)=2^x$ و $I=[-1;5]$. روشن است که تابع $y=f(x)$ بر $[-1;5]$ پیوسته و بر $(-1;5)$ مشتقپذیر می‌باشد. پس مسألهٔ اکسترموم داده شده دارای جواب است و نقاط بحرانی (احتمالی) آن از نوع دومند (یعنی، $f'(x)=0$). اما، $f'(x)=2^x\ln 2$ که هیچ گاه صفر نمی‌شود. در نتیجه، $y=f(x)$ هیچ نقطهٔ بحرانی بر I ندارد. اما، $f(-1)=\frac{1}{2}$ و $f(5)=32$. بنابراین، ماکزیموم $y=f(x)$ بر I برابر ۳۲ و مینیموم آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۲) فرض کنید $f(x)=|x^۲-۳x+۲|$ و $I=[-۱۰;۱۰]$. تابع $y=f(x)$ پیوسته است، زیرا ترکیب دو تابع پیوستهٔ $x\mapsto x^۲-۳x+۲$ و $x\mapsto|x|$ می‌باشد. پس، مسألهٔ اکسترموم $y=f(x)$ بر I دارای جواب است. اما، بازای هر x ای که $x^۲-۳x+۲\neq ۰$، داریم $f'(x)=(۲x-۳)\mathrm{sgn}(x^۲-۳x+۲)$ و بازای هر x ای که $x^۲-۳x+۲=۰$ (یعنی، $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$) مشتق وجود ندارد. بعلاوه $f'(x)=۰$، در نتیجه $۲x-۳=۰$ و لذا $x_۳=\frac{۳}{۲}$. بنابراین، نقاط بحرانی $y=f(x)$ بر I عبارتند از $x_۱=۱$، $x_۲=۲$ و $x_۳=\frac{۳}{۲}$. همچنین $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$ و $f(x_۳)=\frac{۱}{۴}$. با توجه به اینکه $f(-۱۰)=۱۳۲$، $f(۱۰)=۷۲$، نتیجه می‌گیریم که مینیموم $y=f(x)$ بر I برابر صفر است که در نقاط $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$ (که نقاط بحرانی هستند) اتفاق می‌افتد؛ و ماکزیموم $y=f(x)$ بر I برابر ۱۳۲ است که در نقطهٔ $a=-۱۰$ (که نقطهٔ مرزی است) اتفاق می‌افتد.

۱۶.۴.۴ تمرین. در هر یک از موارد، اکسترمومهای تابع $y=f(x)$ را بر بازهٔ I بیابید:

۱) $f(x)=x^۲-۴x+۶,\quad I=[-۳;۱۰]$

۲) $f(x)=x+\dfrac{۱}{x},\quad I=\left[\dfrac{۱}{۱۰۰۰};۱۰۰۰\right]$

۳) $f(x)=\sqrt{۵-۴x},\quad I=[-۱;۱]$

۴) $f(x)=x^۲(x-۱)^۳,\quad I=[-۱;۲]$

هر یک از نامساویهای زیر را با بکارگیری روش محاسبهٔ اکسترموم مطلق تابعی مناسب بر بازه‌ای مناسب، ثابت کنید:

۵) اگر $p>۱$ و $۰\le x\le ۱$، آنگاه
$$\frac{۱}{۲^{p-۱}}\le x^p+(۱-x)^p\le ۱$$

۶) اگر $m,n>۰$ و $۰\le x\le ۱$، آنگاه
$$x^m(a-x)^n\le\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$$

۷) به ازاء هر a و هر b ای $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^۲+b^۲}$.

۸) به ازاء هر x ای $\dfrac{۲}{۳}\le\dfrac{x^۲+۱}{x^۲+x+۱}\le ۲$.

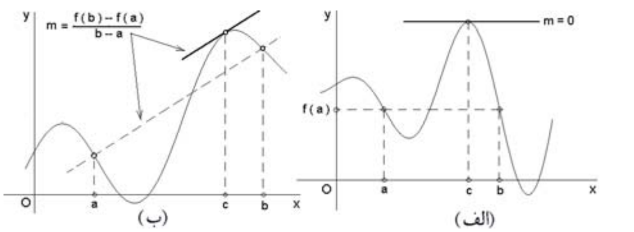
۹) نشان دهید که $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با $ad\neq bc$ نه ماکزیموم دارد و نه مینیموم.

۱۰) ضرایب p و q در $x^۳+px+q$ را طوری تعیین کنید که مینیمومی برابر ۵ در نقطهٔ $x=۳$ داشته باشد.

۱۱) نشان دهید که $f(x)=\begin{cases}-۱/x^۳ & x>۰ \text{ اگر}\\ ۳x^۳ & x\le ۰ \text{ اگر}\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ مینیموم دارد، در حالی که علامت $f'(x)$ در دو طرف $x=۰$ یکی است.

۵.۴ قضایای رول، لاگرانژ و کوشی

۱.۵.۴ قضیهٔ رول. اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته، بر بازهٔ $(a;b)$ مشتقپذیر باشد و $f(a)=f(b)$. در این صورت حداقل یک $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که $f'(c)=۰$.



شکل ۳.۴: الف) تعبیر هندسی قضیهٔ رول
ب) تعبیر هندسی قضیهٔ لاگرانژ

اثبات: سه حالت در نظر می‌گیریم:
الف) لااقل یک $x_۰\in(a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_۰)>f(a)$.
ب) لااقل یک $x_۰\in(a;b)$ ای وجود دارد که $f(x_۰)<f(a)$.
ج) به ازاء هر $x_۰\in(a;b)$ ای $f(x_۰)=f(a)$.

در هر سه مورد، چون $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته است، بنابراین، (مطابق با قضیهٔ۱۱.۷.۳) مسألهٔ اکسترموم $y=f(x)$ بر $[a;b]$ دارای جواب است. در حالت اول، ماکزیموم $y=f(x)$ بر $[a;b]$ از $f(a)$ بزرگتر است و در بازهٔ باز $(a;b)$ رخ می‌دهد. پس، (مطابق قضیهٔ ۱۳.۴.۴) یک $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که به ازاء آن $f'(c)=۰$. حالت (ب) شبیه حالت (الف) می‌باشد. در حالت (ج) تابع ثابت است و بنابراین مشتق آن در تمام نقاط $(a;b)$ صفر است. □

۲.۵.۴ تعبیر هندسی. مطابق قضیهٔ رول، اگر $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتقپذیر باشد و نیز اگر $f(a)=f(b)$، آنگاه نقطه‌ای $c\in(a;b)$ وجود دارد که خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $(c,f(c))$ موازی محور x ها است. به شکل ۳.۴—الف توجه شود.

۳.۵.۴ مثال. ۱) قضیهٔ رول را برای تابع $f(x)$ با ضابطهٔ $x^۲-x^۳$ بر $[۰;۱]$ تحقیق کنید.
حل. چون $y=f(x)$ چند جمله‌ای است، پس $y=f(x)$ بر $[۰;۱]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتقپذیر است، بعلاوه روشن است که $f'(x)=۲x-۳x^۲$ و $f(۰)=f(۱)=۰$. بنابراین، باید $c\in(۰;۱)$ ای یافت شود که $f'(c)=۰$. یعنی $۰<c<۱$ و $۲c-۳c^۲=۰$. در نتیجه باید $c=\frac{۲}{۳}$. این درستی حکم قضیهٔ رول را نشان می‌دهد.

مثال ۲) تابع $f(x) = ۱ - \sqrt[۳]{x^۲}$ به ازاء $a = -۱$ و $b = ۱$ صفر می‌شود ولی با وجود این، به ازاء هر $-۱ \le x \le ۱$، داریم $f'(x) \neq ۰$. تناقض ظاهری این مطلب با حکم قضیهٔ رول در چیست؟

حل. روشن است که $y = f(x)$ بر $[-۱;۱]$ پیوسته است، ولی $f'(x) = \frac{-۲}{۳}x^{-۱/۳}$ که در $x = ۰$ وجود ندارد. پس شرایط قضیهٔ رول برقرار نیستند. یعنی، در تضاد است.

مثال ۳) ثابت کنید که تابع $f(x) = x^۳ + ۲x - ۱$ تنها یک ریشه دارد.

حل. اولاً، $y = f(x)$ پیوسته (بر $\mathbb{R}$) است و

$$f(۰)f(۱) = (-۱)(۲) = -۲ < ۰$$

لذا $y = f(x)$ در بازهٔ $[۰;۱]$ لااقل یک ریشه دارد. این ریشه منحصر بفرد می‌باشد، چرا که اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $f(a) = f(b) = ۰$، آنگاه بنابه قضیهٔ رول، $c \in (a,b)$ ای وجود دارد که $f'(c) = ۰$. یعنی، $۳c^۲ + ۲ = ۰$ که ممکن نیست.

۴.۵.۴ تمرین.

۱) نشان دهید $xe^x = ۲$ در بازهٔ $(۰;۱)$ تنها یک جواب دارد.

۲) درستی قضیهٔ رول را برای $f(x) = x^۳ + ۴x^۲ - ۷x - ۱۰$ و بازهٔ $[-۱;۲]$ تحقیق کنید.

۳) درستی قضیهٔ رول را برای $f(x) = \ln(\sin x)$ و بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۶}; \frac{۵\pi}{۶}\right]$ تحقیق کنید.

۴) آیا تابع $f(x) = |x|$ و بازهٔ $[-۱;۲]$ دارای شرایط قضیهٔ رول هستند؟ چرا؟

۵) بدون محاسبهٔ مشتق تابع $f(x) = ۱ + x^m(x-۱)^n$ که در آن $n, m \in \mathbb{N}$، ثابت کنید که مشتق این تابع لااقل در بازهٔ $(۰;۱)$ یک ریشه دارد.

۶) فرض کنید تابع $y = f(x)$ دارای مشتق متناهی در هر نقطه از بازهٔ $(a;b)$ است و همچنین $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$. ثابت کنید که در این صورت $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که $f'(c) = ۰$.

۷) ثابت کنید که تمام ریشه‌های n **امین چند جمله‌ای لژاندر** حقیقی و محصور در بازهٔ $(-۱;۱)$ می‌باشند:

$$P_n(x) = \frac{۱}{۲^n n!}\frac{d}{dx^n}\{(x^۲ - ۱)^n\}$$

*۸) ثابت کنید که تمام ریشه‌های n **امین چند جمله‌ای چبیشف** حقیقی می‌باشند:

$$H_n(x) = (-۱)^n e^{x^۲}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^۲}\right)$$

۹) ثابت کنید ریشه‌های مشتق تابع

$$f(x) = (x^۲ - ۱)(x^۲ - ۵x + ۶)$$

همگی حقیقی هستند.

۱۰) نشان دهید که اگر تابعی دارای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد، آنگاه بین هر دو نقطهٔ اکسترمومش دارای لااقل یک نقطهٔ عطف است.

۵.۵.۴ قضیهٔ لاگرانژ. اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت حداقل یک $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که

$$\boxed{f(b) - f(b) = f'(c)(b-a)}$$

اثبات: فرض کنیم، به ازاء $x \in [a;b]$،

$$g(x) = (b-a)f(x) - x(f(b) - f(a))$$

در این صورت $y = g(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتق‌پذیر است. بعلاوه $g(a) = g(b) = bf(a) - af(b)$ لذا، بنابه قضیهٔ رول، $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که $g'(c) = ۰$. اما

$$g'(x) = (a-b)f'(x) - (f(b) - f(a))$$

بنابراین، $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که به ازای آن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

و برهان تمام است. □

۶.۵.۴ تعبیر هندسی. بنابه قضیهٔ لاگرانژ، اگر $y = f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته و بر $(a;b)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه یک $c \in (a;b)$ ای وجود دارد که شیب خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = c$ برابر با خط واصل بین نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌باشد. به شکل ۳.۴—ب توجه شود.

۷.۵.۴ مثال. ۱) قضیهٔ لاگرانژ را برای $f(x) = x^۳ + x$ و بازهٔ $[-۱;۲]$ تحقیق می‌کنیم.

چون $y = f(x)$ چند جمله‌ای است، پس بر $[-۱;۲]$ پیوسته و بر $(-۱;۲)$ مشتق‌پذیر است. یعنی، شرایط قضیهٔ لاگرانژ برقرار می‌باشد. در نتیجه، باید $c \in (-۱;۲)$ ای وجود داشته باشد که $f(۲) - f(-۱) = f'(c)(۲ - (-۱))$ یعنی، $f'(c) = ۴$. اما، $f'(c) = ۳c^۲ + ۱$، بنابراین $c = \pm ۱$. که تنها $c = ۱$ در بازهٔ $(-۱;۲)$ قرار دارد.

مثال ۲) نقطه‌ای را بر منحنی $y=x^3$ می‌یابیم که مماس در آن نقطه با وتر واصل بین نقاط $A=(-1,-1)$ و $B=(2,8)$ موازی باشد.

برای این منظور، کافی است توجه شود که طول نقطهٔ A به $x=-1$ و طول نقطهٔ B به $x=2$ است. پس بنابه ۶.۵.۴، کافی است قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $f(x)=x^3$ و بازهٔ $[-1;2]$ استفاده کنیم. یعنی، $c\in(-1;2)$ ای وجود دارد که $f(2)-f(-1)=f'(c)(2-(-1))$. در نتیجه $f'(c)=3$، در حالی که می‌دانیم $f'(c)=3c^2$. بنابراین $x=\pm1$ و چون تنها $c=1$ در بازهٔ $(-1;2)$ قرار دارد، پس نقطهٔ مورد نظر عبارت است از $(1,f(1))=(1,1)$.

مثال ۳) ثابت می‌کنیم که بازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ ای

$$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$$

برای این منظور، فرض کنیم $f(x)=\sin x$ و $a<b$ دو عدد دلخواه باشند. از قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $y=f(x)$ و بازهٔ $[a;b]$ استفاده می‌کنیم. چون تابع $f(x)=\sin x$ مقدماتی است، در نتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته است و چون $f'(x)=\cos x$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. لذا، شرایط قضیهٔ لاگرانژ برای تابع و دامنهٔ مورد نظر برقرار است. بنابراین، $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که

$$\sin b-\sin a=(\cos c)(b-a)$$

حال می‌توان از طرفین رابطه قدر مطلق گرفت. از طرفی، $|\cos c|\le 1$ و در نتیجه $|\sin b-\sin a|\le|b-a|$ اکنون کافی است فرض شود که $x=a$ و $y=b$.

۸.۵.۴ تمرین.

۱) قضیهٔ لاگرانژ را برای $f(x)=\ln x$ و بازهٔ $[1;e]$ تحقیق کنید.

۲) قضیهٔ لاگرانژ را برای تابع $f(x)=\arcsin x$ و بازهٔ $[0;1]$ تحقیق کنید.

۳) قضیهٔ لاگرانژ را برای تابع

$$f(x)=\begin{cases}(3-x^2)/2 & \text{اگر } 0\le x\le 1\\ 1/x & \text{اگر } 1<x\end{cases}$$

و بازهٔ $[0;2]$ تحقیق کنید.

در تمرینات ۴ تا ۸، هر یک از نامساویها را با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ ثابت کنید:

۴) اگر $x>y>0$ و $p>0$، آنگاه

$$py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$$

۵) به ازای هر a و b ای $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

۶) اگر $0<b<a$ آنگاه $\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}$.

۷) اگر $0<\beta\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ آنگاه

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le\tan\alpha-\tan\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

۸) توضیح دهید که چرا قضیهٔ لاگرانژ برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و بازهٔ $[-1;1]$ صحیح نیست.

۹) آیا تابع $f(x)=\begin{cases}x & \text{اگر } 0\le x<1\\ 1/x & \text{اگر } 1\le x\end{cases}$ و بازهٔ $[0;2]$ در شرایط قضیهٔ لاگرانژ صدق می‌کنند؟

۹.۵.۴ قضیهٔ کوشی.

اگر توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته، بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتق‌پذیر باشند، به ازاء هر $x\in(a;b)$ ای $(f'(x))^2+(g'(x))^2\ne 0$ و $g(a)\ne g(b)$، در این صورت یک $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

اثبات: کافی است فرض کنیم

$$h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$$

اکنون تابع $y=h(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(a;b)$ مشتق‌پذیر است، بعلاوه $h(a)=h(b)=g(b)f(a)-g(a)f(b)$. پس شرایط قضیهٔ رول برقرار است، بنابراین $c\in(a;b)$ ای وجود دارد که $h'(c)=0$. در حالی که

$$h'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)-(f(b)-f(a))g'(x)$$

و برهان تمام است. □

۱۰.۵.۴ مثال. ۱) قضیهٔ کوشی را برای توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2x-1$ و بازهٔ بستهٔ $[-1;2]$ تحقیق کنید.

حل. روشن است که توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر $[-1;2]$ پیوسته بر $(-1;2)$ مشتق‌پذیرند، $f'(x)=2x$، $g'(x)=2$ و $g(2)-g(-1)=6\ne 0$. پس باید $c\in(-1;2)$ ای باشد که $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}$ یعنی $\frac{2c}{2}=\frac{3}{6}$ یا $c=\frac{1}{2}$.

مثال ۲) نشان دهید که به ازاء هر $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ داریم $\frac{\sqrt{2}}{\pi}x^2\le\sin x$.

حل. برای اثبات این مطالب، فرض می‌کنیم $f(x)=x^2$، $g(x)=\sin x$ و از قضیهٔ کوشی در مورد $y=f(x)$، $y=g(x)$

و بازهٔ $[0;a]$ استفاده می‌کنیم، که $a \leq \frac{\pi}{4}$. پس $c \in (0;a)$ ای هست که

$$\frac{a^2-0}{\sin a - 0} = \frac{f(a)-f(0)}{g(a)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c}{\cos c}$$

ولی $a > c > 0$، بنابراین $\frac{\pi}{2} > 2a > 2c$ و $\cos a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ < $\cos c$. در نتیجه $\frac{\pi}{\sqrt{2}} > \frac{a^2}{\sin a}$. اکنون کافی است فرض شود که $x = a$.

۱۱.۵.۴ تمرین.

۱) قضیهٔ کوشی را برای توابع $f(x) = x^3$، $g(x) = \frac{1}{x}$ و بازهٔ بستهٔ $[1;3]$ تحقیق کنید.

۲) ثابت کنید اگر $0 \leq x \leq 1$، آنگاه $\arctan x \leq \arcsin x$.

۳) توضیح دهید که چرا قضیهٔ کوشی برای توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ و بازهٔ بستهٔ $[-1;1]$ قابل اجرا نیست؟

۶.۴ استفاده از مشتق در ترسیم توابع

۱.۶.۴ تعریف. فرض کنید $y + f(x)$ یک تابع است. در صورتی می‌گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ صعودی است که $\epsilon > 0$ ای چنان یافت شود که به ازاء هر $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ داشته باشیم $f(x_0) < f(x)$ و به ازاء هر $x_0 - \epsilon < x < x_0$ داشته باشیم $f(x) < f(x_0)$. بصورت مشابه، در صورتی می‌گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ نزولی است که $\epsilon > 0$ ای چنان یافت شود که به ازاء هر $x_0 < x < x_0 + \epsilon$ داشته باشیم $f(x_0) > f(x)$ و به ازاء هر $x_0 - \epsilon < x < x_0$ داشته باشیم $f(x) > f(x_0)$.

۲.۶.۴ قضیه. فرض کنید تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ مشتقپذیر است. در این صورت، اگر $f'(x_0) > 0$، آنگاه $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ صعودی است و اگر $f'(x) < 0$، آنگاه $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ نزولی است.

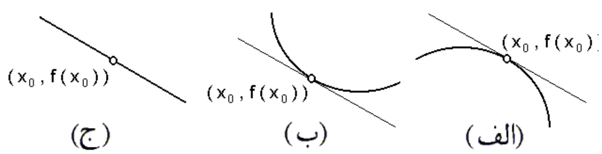
۳.۶.۴ قضیه. فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ $(a;b)$ مشتقپذیر است. در این صورت، اگر به ازاء هر $x \in (a;b)$ ای $f'(x) > 0$، آنگاه تابع $y = f(x)$ بر $[a;b]$ صعودی است و اگر به ازاء هر $x \in (a;b)$ ای $f'(x) < 0$، آنگاه تابع $y = f(x)$ بر $[a;b]$ نزولی می‌باشد.

۴.۶.۴ یادداشت. بجای بازهٔ باز $(a;b)$ در قضیهٔ بالا، هر بازهٔ دیگری را می‌توان قرار داد: $[a;b)$، $(a;b]$، $(-\infty;b)$، $(-\infty;b]$، $(a;+\infty)$، $[a;+\infty)$ و یا $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$. به عنوان مثال: وقتی و تنها وقتی $y = f(x)$ بر $[a;b]$ صعودی است که $y = f(x)$ در تمام نقاط $(a;b)$ صعودی باشد.

۵.۶.۴ مثال. فاصله‌هایی که تابع $f(x) = x - x^2$ بر آنها صعودی و یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

چون $y = f(x)$ مشتقپذیر است، کافی است علامت $f'(x)$ را بررسی کنیم. اما، $f'(x) = 2x - 1$، که بر $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ مثبت و بر $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ منفی است. بنابراین، $y = f(x)$ بر بازهٔ $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ صعودی و بر بازهٔ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ نزولی است. توجه شود که $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ نه نزولی است و نه صعودی.

با دانستن اینکه علامت مشتق تابع $y = f(x)$ در یک نقطه چه است، می‌توان شکل دقیق‌تری را نسبت به حالتی که تنها در مورد پیوستگی آن اطلاع داشتیم، ترسیم کرد. اما هنوز هم ابهام وجود دارد. زیرا اگر $f'(x_0) > 0$، آنگاه یکی از سه حالت در شکل ۴.۴ ممکن است رخ دهد.



شکل ۴.۴: الف) نقطهٔ محدب، ب) نقطهٔ مقعر و ج) نقطهٔ خطی

باید روشی برای تشخیص این سه از هم بیابیم.

۶.۶.۴ تعریف. در صورتی می‌گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ **مقعر** است که مشتق آن در نقطهٔ $x = x_0$ صعودی باشد، و در صورتی آن را در نقطهٔ $x = x_0$ **محدب** گوئیم که مشتق آن در $x = x_0$ نزولی باشد. به بیان معادل، در صورتی $y = f(x)$ را در $x = x_0$ مقعر گوئیم که مماس بر نمودار منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ زیر منحنی واقع شود و در صورتی $y = f(x)$ را در نقطهٔ $x = x_0$ محدب گوئیم که خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ بالای منحنی واقع گردد. در صورتی می‌گوئیم $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ **خطی** است که در یک همسایگی از آن نقطه با خط راستی برابر باشد. به بیان دیگر، نمودار با خط مماس بر آن برابر باشد.

۷.۶.۴ قضیه. فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ پیوسته و بر بازهٔ $(a;b)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت

الف) اگر به ازاء هر $x \in (a;b)$ ای $f''(x) > 0$، آنگاه $y = f(x)$ بر $[a;b]$ مقعر است.

ب) اگر به ازاء هر $x \in (a;b)$ ای $f''(x) < 0$، آنگاه $y = f(x)$ بر $[a;b]$ محدب است.

۸.۶.۴ قضیه. اگر $y = f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته باشد و به ازاء هر $x \in (a;b)$، $f'(x) = 0$. آنگاه $y = f(x)$ بر $[a;b]$ ثابت است، یعنی c ای وجود دارد که به ازاء هر $x \in [a;b]$، $f(x) = c$.

اگر $y = f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته باشد و به ازاء هر $x \in (a;b)$، $f''(x) = 0$. آنگاه $y = f(x)$ بر $[a;b]$ خطی است، یعنی c و d ای وجود دارند که به ازاء هر $x \in [a;b]$، $f(x) = cx + d$.

۹.۶.۴ مثال. مشخص کنید که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در کدام نقاط محدب و در کدام نقاط مقعر است.

توجه داریم که $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و بعلاوه $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. پس چون $y = f''(x)$ بر $(0;+\infty)$ مثبت است، بنابراین $y = f(x)$ بر این بازه مقعر می‌باشد و چون $y = f''(x)$ بر بازهٔ $(-\infty;0)$ منفی است، بنابراین $y = f(x)$ بر این بازه محدب می‌باشد.

۱۰.۶.۴ رفتار موضعی توابع. با توجه به مطلب فوق‌الذکر، اگر تابع $y = f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم در نقطهٔ $x = x_0$ باشد، آنگاه یک و تنها یکی از حالات زیر ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $f'(x_0) > 0$ و $f''(x_0) > 0$، آنگاه $y = f(x)$ در $x = x_0$ صعودی و مقعر است.

ب) اگر $f'(x_0) > 0$ و $f''(x_0) < 0$، آنگاه $y = f(x)$ در $x = x_0$ صعودی و محدب است.

چ) اگر $f'(x_0) > 0$ و $f''(x_0) = 0$، آنگاه $y = f(x)$ دارای نقطهٔ عطف صعودی در $x = x_0$ است.

د) اگر $f'(x_0) < 0$ و $f''(x_0) > 0$، آنگاه $y = f(x)$ در $x = x_0$ نزولی و مقعر است.

ه) اگر $f'(x_0) < 0$ و $f''(x_0) < 0$، آنگاه $y = f(x)$ در $x = x_0$ نزولی و محدب است.

و) اگر $f'(x_0) < 0$ و $f''(x_0) = 0$، آنگاه $y = f(x)$ دارای نقطهٔ عطف نزولی در $x = x_0$ است.

ز) اگر $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$، آنگاه $y = f(x)$ دارای مینیموم موضعی در $x = x_0$ است.

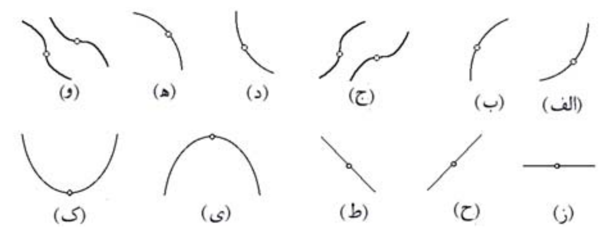
ح) اگر $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$، آنگاه $y = f(x)$ دارای ماکزیموم موضعی در $x = x_0$ است.

سه حالت خاص دیگر نیز وجود دارد که به رفتار کلی تابع بستگی دارد:

ط) اگر $y = f'(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ صفر شود، آنگاه $y = f(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ ثابت است.

ی) اگر $y = f''(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ صفر شود و $y = f'(x)$ مثبت باشد، آنگاه $y = f(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ خطی صعودی است.

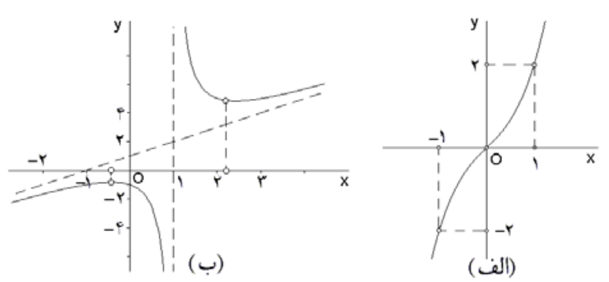
ک) اگر $y = f''(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ صفر شود و $y = f'(x)$ منفی باشد، آنگاه $y = f(x)$ در یک همسایگی از $x = x_0$ خطی نزولی است. به شکل ۵.۴ توجه شود.



شکل ۵.۴: رفتار موضعی توابع

۱۱.۶.۴ مثال. ۱) تابع $f(x) = x^3 + x$ را رسم می‌کنیم.

توجه شود که $D_f = \mathbb{R}$ و تنها ریشهٔ $y = f(x)$ عبارت است از $x = 0$، زیرا $x^3 + x = 0$، در نتیجه $x(x^2 + 1) = 0$ و لذا $x = 0$. بعلاوه، $f'(x) = 3x^2 + 1$ که همواره مثبت است. پس $y = f(x)$ در همه جا صعودی است. همچنین، $f''(x) = 6x$. پس، $y = f(x)$ بر $(0;+\infty)$ مقعر و بر $(-\infty;0)$ محدب می‌باشد. با جمعبندی این اطلاعات می‌توان نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطمینان ترسیم نمود (به شکل ۶.۴–الف توجه شود).



شکل ۶.۴: الف) نمودار تابع $f(x) = x^3 + x$
ب) نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

مثال ۲) تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ را ترسیم می‌کنیم.

توجه شود که $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $y = f(x)$ هیچ ریشه‌ای ندارد. بعلاوه $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (x - 1)\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x - 1} = 0$$

یعنی، $y = x + 1$ مجانب نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)(x-1) - (1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)2} \\ &= \frac{(x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

پس، $y = f'(x)$ بین $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ مثبت و در خارج از این بازه مثبت می‌باشد.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{4}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

پس، $y = f''(x)$ بر $(1;\infty)$ مثبت و بر $(-\infty;1)$ منفی است. در مجموع داریم

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$x+1$	$2(1-\sqrt{2})$	$-\infty$	تعریف نشده	$+\infty$	$2(1+\sqrt{2})$	$x+1$

و بنابراین می‌توان شکل ۶.۴—ب را ترسیم نمود.

مثال ۳) تابع $f(x) = \sqrt{x(1-x^2)}$ را رسم می‌کنیم.
توجه شود که $x \in D_f$ اگر و تنها اگر

$$x(1-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 1-x^2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ |x| \geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$$

بنابراین $D_f = (-\infty;-1] \cup [0;1]$، که چون $y = f(x)$ مقدماتی است، پس در $x = 1$ و $x = -1$ پیوستهٔ چپ، در $x = 0$ پیوستهٔ راست و در سایر نقاط D_f پیوسته است. بعلاوه $f'(x) = (1-3x^2)/(2\sqrt{x(1-x^2)})$. شرط $f'(x) = 0$ به معنی $1 - 3x^2 = 0$ یا $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و تنها $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ در دامنهٔ $y = f(x)$ قرار دارد. همچنین

$$f''(x) = \frac{3x^4 - 6x^2 - 1}{4\sqrt{(x(1-x^2))^3}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

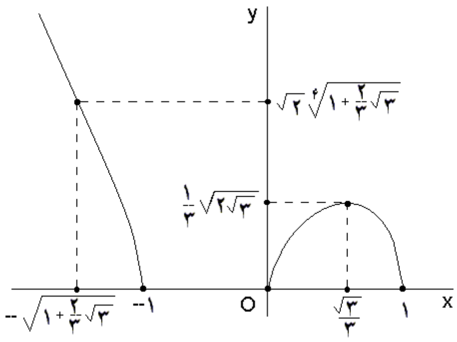
بنابراین، $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}}$ که تنها $x = -\frac{1}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}}$ مورد قبول است. پس نقاط مهم برای ترسیم این تابع، به ترتیب عبارتند از

$$-\frac{1}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}}, \quad -1, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 1$$

با جمع آوری همه این اطلاعات ملاحظه می‌شود که

x	$-\infty$	$-\sqrt{6+\sqrt{13}}$		$-\sqrt{6-\sqrt{13}}$	-1	0	$\sqrt{3}/3$	1
$f''(x)$	$+$	0		0		$-$		$-$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$						0		0

و بنابراین، می‌توان شکل ۷.۴ را ترسیم نمود.



شکل ۷.۴: نمودار تابع $f(x) = x(1-x^2)^{1/2}$

۱۲.۶.۴ تمرین. نمودار هر یک از توابع زیر را با استفاده از روش شرح داده شده در بالا، ترسیم کنید:

۱) $f(x) = 3x - x^3,$ ۲) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}},$

۳) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4,$ ۴) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos(2x)},$

۵) $f(x) = 2x - \tan x,$ ۶) $f(x) = e^2x - x^2,$

۷) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x},$ ۸) $f(x) = \sin x + \dfrac{\sin(3x)}{3},$

۹) $f(x) = x^x,$ ۱۰) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)(1-x^2)},$

۱۱) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right).$

۱۲) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1},$

۱۳) $f(x) = (1+x)^{1/x}\cos(2x),$

۱۴) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)},$

۷.۴ استفاده از مشتق در اثبات اتحادها و نامساویها

اتحادهای بسیاری را به کمک مشتق می‌توان اثبات نمود. برای این منظور از این خاصیت استفاده می‌شود که اگر مشتق تابعی بر یک بازه صفر باشد، آن تابع بر بازهٔ مورد نظر ثابت است.

۱.۷.۴ مثال. ۱) ثابت کنید که به ازای هر $x \in [-1;1]$ ای $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

حل. برای این منظور تابع $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت به ازای هر $x \in (-1;1)$ ای $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. در نتیجه، $y = f(x)$ بر

بازهٔ $(-۱;۱)$ ثابت است. اما $f(۰) = \pi/۲$ و بنابراین، به ازای هر $x \in (-۱;۱)$ ای حکم اثبات شده است. برقراری حکم داده شده به ازای $x = -۱$ و یا $x = ۱$ را مستقیماً می‌توان تحقیقی نمود.

مثال ۲) اتحاد $\cos^۴ x + \sin^۴ x = \frac{۱}{۴}(۳ + \cos(۴x))$ را ثابت کنید.

حل. برای این منظور تابع

$$f(x) = \cos^۴ x + \sin^۴ x - \frac{۱}{۴}(۳ + \cos(۴x))$$

را بر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} f'(x) &= -۴ \sin x \cos^۳ x + ۴ \cos x \sin^۳ x + \sin(۴x) \\ &= -۴ \sin x \cos x(\sin^۲ x - \cos^۲ x) + \sin(۴x) \\ &= -۲ \sin(۲x) \cos(۲x) + \sin(۴x) = ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه $f(x)$ بر بازهٔ $(-\infty;\infty) = \mathbb{R}$ ثابت است. از طرفی $f(۰) = ۱ + ۰ - ۱ = ۰$ و حکم اثبات شد.

۲.۷.۴ تمرین. هر یک از اتحادهای زیر را اثبات کنید:

۱) $۲ \sin^۲ x + \cos(۲x) = ۱$

۲) $\cos^۴ x = \sin^۴ x + \frac{۱}{۴}(۵ - \cos(۴x))$

۳) $\arccos\left(\frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲}\right) = ۲ \arctan x \qquad ۰ \leq x$

۴) $\arcsin\left(\frac{۲x}{۱ + x^۲}\right) =$

$$= \begin{cases} -\pi - ۲ \arctan x & \text{اگر } x \leq -۱ \\ ۲ \arctan x & \text{اگر } -۱ < x < ۱ \\ \pi - ۲ \arctan x & \text{اگر } ۱ \leq x \end{cases}$$

نامساویهای بسیاری را با مطالعهٔ صعودی و نزولی بودن توابع می‌توان اثبات نمود. مشکل اصلی اینگونه مسایل، انتخاب تابع مناسب است.

۳.۷.۴ مثال. ۱) ثابت کنید که به ازاء هر $x > ۱$ ای نامساوی $۲\sqrt{x} > ۳ - \frac{۱}{x}$ برقرار است.

حل. برای این منظور، فرض می‌کنیم $f(x) = -۲\sqrt{x} + ۳ - \frac{۱}{x}$ و $x > ۱$. در این صورت

$$f'(x) = \frac{-۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{x^۲} = \frac{-x\sqrt{x} + ۱}{x^۲}$$

اما، فرض $x > ۱$ به معنی $\sqrt{x} > ۱$ و لذا $x\sqrt{x} > ۱$ می‌باشد. بنابراین $f'(x) < ۰$ و لذا تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(۱;+\infty)$ نزولی است. در نتیجه به ازاء هر $x > ۱$ ای $f(x) < f(۱)$، یعنی $-۲\sqrt{x} + ۳ - \frac{۱}{x} < ۰$ یا $۲\sqrt{x} > ۳ - \frac{۱}{x}$.

مثال ۲) ثابت کنید که به ازاء هر $x > ۰$ ای $x - \frac{x^۲}{۲} < \ln(۱+x)$.

حل. برای این منظور تابع $f(x) = \ln(۱+x) - x + \frac{x^۲}{۲}$ را در نظر می‌گیریم، همچنین فرض می‌کنیم که $x > ۰$. در این صورت، چون $x > ۰$، داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۱ + x} - ۱ + x = \frac{x^۲}{۱ + x}$$

بنابراین، $y = f(x)$ بر $[۰;+\infty)$ صعودی است. پس اگر $x > ۰$، آنگاه $f(x) > f(۰)$، که همان نامساوی مورد نظر است.

مثال ۳) ثابت کنید که اگر $\beta > \alpha > ۰$، $y > ۰$، آنگاه $(x^\beta + y^\beta)^{۱/\beta} < (x^\alpha + y^\alpha)^{۱/\alpha}$.

حل. برای اثبات این نامساوی، فرض می‌کنیم α، β و y دلخواهند و از این پس ثابت می‌باشند. بعلاوه، چون دو سوی نامساوی مثبت هستند، کافی است از طرفین لگاریتم بگیریم و فرمول بدست آمده را اثبات کنیم. یعنی، فرمول

$$\frac{۱}{\alpha} \ln(x^\alpha + y^\alpha) < \frac{۱}{\beta} \ln(x^\beta + y^\beta)$$

به همین دلیل، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۱}{\alpha} \ln(x^\alpha + y^\alpha) - \frac{۱}{\beta} \ln(x^\beta + y^\beta), \qquad (x > ۰)$$

در این صورت $f'(x) = \frac{x^{\alpha-۱}}{x^\alpha + y^\alpha} - \frac{x^{\beta-۱}}{x^\beta + y^\beta}$. بنابراین $f'(x) > ۰$ به معنی $xf'(x) > ۰$ است. یعنی

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha} > \frac{x^\beta}{x^\beta + y^\beta} \quad &\Leftrightarrow \quad x^\alpha(x^\beta + y^\beta) > x^\beta(x^\alpha + y^\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad x^\alpha y^\beta > x^\beta y^\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta-\alpha} > ۱ \\ &\overset{\beta \gtrless \alpha}{\Leftrightarrow} \quad \frac{y}{x} > ۱ \quad \Leftrightarrow \quad y > x \end{aligned}$$

یعنی، اگر $y > x > ۰$، آنگاه $f'(x) > ۰$ و اگر $x > y$، آنگاه $f'(x) < ۰$ است. پس کافی است که حالت‌های خاص $\lim_{x\to ۰+} f(x)$، $f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰+} f(x) &= \frac{۱}{\alpha} \ln(y^\beta) - \frac{۱}{\beta} \ln(y^\beta) = ۰, \\ f(y) &= \ln ۲ \left(\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta}\right) > ۰ \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \frac{۱}{\alpha} \lim_{x\to +\infty} \ln(x^\alpha + y^\alpha) \\ &\quad - \frac{۱}{\beta} \lim_{x\to +\infty} \ln(x^\beta + y^\beta) \\ &= \frac{۱}{\alpha} \lim_{x\to +\infty} \ln(x^\alpha) - \frac{۱}{\beta} \lim_{x\to +\infty} \ln(x^\beta) = ۰ \end{aligned}$$

بنابراین، به ازاء هر $x > ۰$ ای داریم

$$۰ \leq f(x) \leq \ln ۲ \left(\frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta}\right)$$

که نامساوی اول برهان را ثابت می‌کند.

۴.۷.۴ تمرین. ثابت کنید که:

۱) اگر $x > 0$، آنگاه $e^x > 1$.

۲) اگر $x > 0$، آنگاه $x > \ln(x+1)$.

۳) اگر $x > 1$، آنگاه $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.

۴) اگر $x \neq 0$، آنگاه $\cosh x > 1 + \frac{x^2}{2}$.

۵) به ازاء هر x ای $|x| \geq |\sin x|$.

۶) اگر $x > 0$، آنگاه $1 + 2\ln x \leq x^2$.

۷) به ازاء هر x ای $2x\arctan x \geq \ln(1+x^2)$.

۸) به ازاء هر x ای $1 + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$.

۹) اگر $\frac{\pi}{2} > x > 0$، آنگاه $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

۱۰) اگر $x > 0$، آنگاه $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

*۱۱) اگر $\alpha > 1$ و $x > 1$، آنگاه $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$.

۱۲) اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $x > a > 0$، آنگاه $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x-a}$.

از محدب بودن تابع (یعنی، منفی بودن مشتق دوم آن) در اثبات نامساویها می‌توان استفاده نمود. به قضیهٔ زیر توجه کنید:

۵.۷.۴ قضیه. اگر $y = f(x)$ بر بازهٔ I محدب باشد و $n \in \mathbb{Z}$ دلخواه، آنگاه به ازاء هر عدد طبیعی n و هر n عدد دلخواه $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ داریم:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

(اثبات این مطلب در صفحهٔ ۱۰ از کتاب کلاسیک «تابع گاما» اثر امیل آرتین آمده است.)

۶.۷.۴ مثال. ۱) **نامساوی حسابی – هندسی** را ثابت کنید. یعنی، به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n عدد حقیقی و مثبت x_1، x_2، ... و x_n داریم

$$n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

برای اثبات این نامساوی، از تابع $f(x) = \ln x$ بر بازهٔ $I = (0;+\infty)$ استفاده می‌کنیم. اما $f(x)$ محدب است، زیرا مشتق دوم آن بر I منفی است:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

پس، مطابق قضیهٔ بالا، به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n عدد x_1، x_2، ... و x_n واقع در بازهٔ I داریم

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) &\geq \\ &\geq \left(\frac{\ln(x_1)+\ln(x_2)+\cdots+\ln(x_n)}{n}\right) \\ &\geq \ln\left((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\right)\end{aligned}$$

و با توجه به اینکه تابع $x \mapsto e^x$ صعودی است، با به توان e رساندن طرفین، نامساوی مذکور نتیجه می‌گردد.

مثال ۲) ثابت کنید که به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$ و هر n عدد مثبت x_1، x_2، ... و x_n ای

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

برای اثبات این موضوع، تابع $y = \frac{-1}{x}$ را بر بازهٔ $(0;+\infty)$ در نظر می‌گیریم. اما در این صورت اگر $x > 0$، آنگاه $f''(x) = -2x^{-3} < 0$. بنابراین به ازاء اعداد مثبت x_1، x_2 . . . و x_n داریم

$$\frac{1}{-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \geq \frac{-1/x_1 - 1/x_2 - \cdots - 1/x_n}{n}$$

بنابراین،

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \cdot \frac{1/x_1+1/x_2+\cdots+1/x_n}{n} \geq 1$$

و با ضرب کردن طرفین در n^2 نامساوی مذکور بدست می‌آید.

۷.۷.۴ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر $m, n \in \mathbb{N}$، $n > 1$ و x_1، x_2، ... و x_n اعداد مثبت دلخواهی باشند، در این صورت

$$n^{m-1}\left(x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m\right) \geq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^m$$
$$\left(x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m\right)n^{m-1} \geq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^m$$

۲) ثابت کنید که اگر $n \in \mathbb{N}$ و $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n} \geq n\,e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n}$$
$$e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n} \geq n\exp\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

۸.۴ کاربرد مشتق در مسایل کاربردی و بخش‌های دیگر علوم

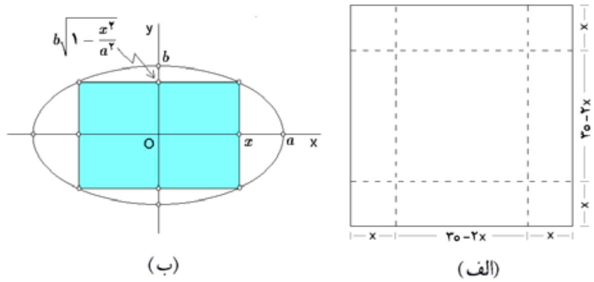
مشتق در بسیاری از مسایل کاربردی و صنعتی استفاده می‌شود. در ذیل چند نمونه خاص و ساده‌تر از آن را ارائه می‌کنیم. بدیهی است که مثالهای جدی‌تر نیاز به اطلاعات فنی دارد. قالب این مسائل، پس از صورت بندی آنها، به مسائل اکسترموم تبدیل می‌شوند.

۱.۸.۴ مثال. (۱) قطعهٔ مقوا به شکل مربع و به ضلع ۳۰ سانتی‌متر در اختیار است. می‌خواهیم با بریدن چهار مربع کوچک از چهار سوی این مربع، جعبهٔ شیرینی رو بازی را تهیه کنیم. این کار را چگونه انجام دهیم تا حجم جعبهٔ مذکور حداکثر شود.

برای این منظور، فرض می‌کنیم طول ضلع مربعهای جدا شده از چهار گوشهٔ مربع مفروض برابر x باشد (به شکل ۸.۴—الف توجه شود). حجم جعبهٔ حاصل برابر $V(x) = x \times (۳۰ - ۲x)^۲$ خواهد بود. همچنین توجه داریم که $۰ \leq x \leq ۱۵$. پس کافی است تابع $V(x)$ را بر بازهٔ $[۰;۱۵]$ اکسترموم کنیم. برای این منظور $V(x)$ را محاسبه می‌کنیم

$$V'(x) = (۳۰ - ۲x)^۲ - ۴x(۳۰ - ۲x)$$

بنابراین، $V'(x) = ۰$ به این معنی است که



الف) جعبهٔ شیرینی ب) مستطیل محاط شده در بیضی

$$V'(x) = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} ۳۰ - ۲x = ۰ \\ ۳۰ - ۲x - ۴x = ۰ \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = ۱۵ \\ x = ۵ \end{array} \right.$$

در نتیجه، $x = ۵$ نقطهٔ تکین این تابع در بازهٔ مذکور می‌باشد. بنابراین کافی است مقادیر $V(۰)$، $V(۵)$ و $V(۱۵)$ را مقایسه کنیم. در نتیجهٔ، حداکثر مقدار $V(x)$ بر بازهٔ $[۰;۱۵]$ برابر $V(۵) = ۲۰۰۰$ سانتی متر مکعب است که به ازاء $x = ۵$ حاصل می‌شود.

مثال ۲) در بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ مستطیل محاط می‌کنیم که اضلاع آن موازی محورهای بیضی و دارای بیشترین مساحت باشد.

فرض کنیم که محل برخورد ضلع عمودی واقع در سمت راست، با محور x ها برابر x است. بنابراین، شکل ۸.۴—ب را می‌توان ترسیم نمود. در نتیجه $y = \pm b\sqrt{۱ - x^۲/a^۲}$. در این صورت، مساحت مستطیل حاصل برابر است با $A(x) = ۲x \times ۲b\sqrt{۱ - x^۲/a^۲}$ و نیز توجه داریم که $۰ \leq x \leq a$. اما، در این صورت

$$\begin{aligned} A'(x) = ۰ \quad &\Leftrightarrow \quad ۴b\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}} + ۴bx\frac{\frac{-۲x}{a^۲}}{۲\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲}}} = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad \left(۱ - \frac{x^۲}{a^۲}\right) - \frac{x^۲}{a^۲} = ۰ \\ &\Leftrightarrow \quad x^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow x = a\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{aligned}$$

که تنها نقطهٔ تکین تابع بر بازهٔ مذکور است. با توجه به اینکه $A(۰) = ۰$، $A\left(a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۲ab$ و $A(a) = ۰$ نتیجه می‌گیریم که حداکثر مقدار $A(x)$ در این بازه برابر $۲ab$ است به ازاء $x = a\sqrt{۲}/۲$ رخ می‌دهد.

مثال ۳) فانوسی باید مستقیماً بالای یک میدان مدور به شعاع R آویزان شود. می‌خواهیم بدانیم که در چه ارتفاعی باید آن را نصب کنیم تا بهترین روشنایی را برای جاده اطراف این میدان فراهم آورد؟ توضیح اینکه شدت تنویر یک سطح با کسینوس زاویهٔ شعاعهای نورانی تناسب مستقیم و با مربع فاصله از منبع نور، تناسب معکوس دارد.

اگر فاصله یک نقطه واقع در جادهٔ دور میدان تا منبع نور را l بنامیم، آنگاه $l^۲ = x^۲ + R^۲$ و لذا $l = \sqrt{x^۲ + R^۲}$ که در آن x فاصلهٔ منبع نور تا مرکز میدان است. اگر مقدار نوری که به این نقطه می‌رسد را $A(x)$ بنامیم، آنگاه بنابه فرض مسئله

$$A(x) \approx \cos\theta = \frac{R}{l} = \frac{R}{\sqrt{x^۲ + R^۲}}$$

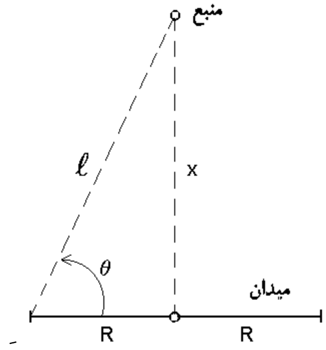
و نیز $A(x) \approx ۱/l^۲ = ۱/(x^۲ + R^۲)$، در نتیجه عددی k ای چنان یافت می‌شود که

$$A(x) = k \times \frac{R}{\sqrt{x^۲ + R^۲}} \times \frac{۱}{x^۲ + R^۲}$$

پس کافی است تابع $A(x)$ را با فرض $x \geq ۰$ اکسترموم کنیم. برای این منظور

$$\begin{aligned} A'(x) = ۰ \quad &\Leftrightarrow \quad kR\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۲x)(x^۲ + R^۲)^{-۵/۲} \\ &\Leftrightarrow \quad x = ۰ \end{aligned}$$

یعنی اگر منبع نوری به پائین‌ترین نقطهٔ ممکن بیاید، میزان نور بخشی آن حداکثر خواهد بود. به شکل ۹.۴ توجه شود.



شکل ۹.۴ : فانوس و میدان روشنایی دور آن

مثال ۴) کمترین مقدار مجموع دو عدد مثبت x و y را که حاصلضرب آنها برابر ثابت a است، تعیین می‌کنیم.

چون $xy = a$، بنابراین $y = a/x$. تابع حاصل جمع را در نظر می‌گیریم $f(x) = x + a/x$. در این صورت شرط $f'(x) = 0$ به معنی $1 - a/x^2 = 0$ است، در نتیجه $x^2 = a$ یا $x = \pm\sqrt{a}$ که چون $x > 0$ فرض شده است، پس $x = \sqrt{a}$ تنها نقطهٔ تکین مسئله می‌باشد. اما

$$f''(\sqrt{a}) = \frac{2a}{x^3}\Big|_{x=\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} > 0$$

. پس $x = \sqrt{a}$ یک مینیموم موضعی $y = f(x)$ است. یعنی مجموع مورد نظر به ازاء $x = y = \sqrt{a}$ دارای حداقل مقدار می‌باشد و این مقدار برابر $2\sqrt{a}$ است.

۲.۸.۴ تمرین.

۱) عدد ۸ را به صورت مجموع دو عدد چنان بنویسید که مجموع مکعبات آنها کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۲) از جمیع مستطیل‌های با مساحت مفروض S، آن یکی را که دارای کمترین محیط است تعیین کنید.

۳) منشور مثلث القائده‌ای را در نظر بگیرید که قائدهٔ آن متساوی الضلاع است، دارای حجم V است. طول ضلع قاعدهٔ آن چقدر باید باشد تا مساحت کل آن کمترین مقدار ممکن باشد؟

۴) در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای با بیشترین حجم محاط کنید.

۵) یک قیف مخروطی با مولدی به طول ۲۰ سانتی‌متر باید ساخته شود. ارتفاع این مخروط چقدر باید باشد تا بزرگترین حجم ممکن حاصل شود؟

۶) مصرف سوخت یک کشتی بخار با مکعب سرعت آن متناسب است. می‌دانیم که در سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت، قیمت سوخت ۶۰ تومان در ساعت است و مخارج دیگر (مستقل از سرعت) بالغ بر ۴۸۰ تومان در ساعت می‌شود. در چه سرعتی از کشتی مجموع مخارج در هر کیلومتر از سفر بهترین خواهد بود؟ مجموع کل مخارج در هر ساعت چقدر خواهد بود؟

۷) از نقطهٔ $P = (1, 4)$ خط راستی چنان رسم کنید که مجموع قطعات مثبتی را که روی محورهای مختصات جدا می‌کند کمترین باشد.

۸) یک قیف مخروطی با شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع H پر از آب شده است. یک گلوله سنگین در این قیف می‌افتد. شعاع این گلوله چقدر باید باشد تا بزرگترین حجم ممکن آب، به سبب بخش غوطه‌ور شدهٔ این گلوله، از قیف نامبرده خارج شود؟

۹.۴ قاعده هوپیتال

در قسمت حد دیدیم که حد کسر توابع را به راحتی می‌شود تعیین کرد، مشروط به اینکه حالت ابهام رخ ندهد. در این گونه موارد از روشهایی بنام روش هم ارزی و مرتبه استفاده شد. این روش‌ها نیز دارای محدودیت هستند و دستهٔ وسیعی از مسائل بدون پاسخ خواهد ماند. قائده هوپیتال که نتیجه‌ای منطقی از قضیهٔ کوشی است، پاسخ این مسئله است.

۱.۹.۴ قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیانجامد و $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد، آنگاه حد اولی نیز وجود دارد و با دومی برابر می‌باشد.

اثبات: در حالت $\frac{0}{0}$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\end{aligned}$$

در مورد حالت $\frac{\infty}{\infty}$ داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}\times\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = \ell^2.\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}\end{aligned}$$

بنابراین $\ell = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. توضیح اینکه در (۱) از حالت $\frac{0}{0}$ استفاده نموده‌ایم. □

۲.۹.۴ مثال. در عبارتهای زیر، نماد (ه) به معنی «استفاده از روش هوپیتال» می‌باشد و $a > 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}\overset{\text{ه}}{=}\cdots\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!}=+\infty$$

مثال ۴) برای محاسبه $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ که حالت مبهم $\infty-\infty$ می‌انجامد، به روش زیر عمل می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\,1/x-1}{\ln x+(x-1)\,1/x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

$$\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

مثال ۵) برای محاسبه $\lim_{x\to 0}x^{\sin x}$ که به حالت مبهم 0^0 می‌انجامد، به روش زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنیم $\ell=\lim_{x\to 0}x^{\sin x}$، پس به دلیل پیوستگی $\ln x$، داریم

$$\ln\ell=\ln(\lim_{x\to 0}x^{\sin x})=\lim_{x\to 0}\ln(x^{\sin x})=\lim_{x\to 0}\sin x\ln x$$

که به حالت مبهم $\infty\times 0$ تبدیل شده است. اکنون

$$\begin{aligned}\ln\ell &= \lim_{x\to 0}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\overset{\text{ه}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x}\times\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}x=0\end{aligned}$$

بنابراین $\ln\ell=0$ یا $\ell=1$.

۳.۹.۴ تمرین. مقدار هر یک از حدود زیر را بدست آورید:

۱) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$، ۲) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\arctan x}$،

۳) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$، ۴) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$،

۵) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}$، ۶) $\lim_{x\to 0}x^n e^{-1/x^2}$،

۷) $\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{arccot}x-\frac{1}{x}\right)$، ۸) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$،

۹) $\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$، ۱۰) $\lim_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$،

۱۱) $\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-\ln x}}{(-\ln x)^x}$، ۱۲) $\lim_{x\to\pi/2-}(\tan x)^{2x-\pi}$،

۱۳) $\lim_{x\to 0+}x^{1/\ln(e^x-1)}$، ۱۴) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\arctan x}$،

۱۵) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$، ۱۶) $\lim_{x\to 0+}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$،

۱۷) $\lim_{x\to 0+}\left(x^{x^x}-1\right)$، ۱۸) $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan(2x)}$،

۱۹) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$،

۲۰) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$، ۲۱) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x^2}$

۲۲) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right)$،

۲۳) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\times\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right\}.$$

۱۰.۴ قضیهٔ تیلور

توابع دارای انواع مختلفی هستند، این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان بجای توابع پیچیده‌تر از توابع ساده‌تر استفاده کرد؟ یا حداقل به شکل تقریبی. با توجه به اینکه چند جمله‌ایها ساده‌ترین نوع توابع هستند، این سوال را مطرح می‌کنیم که آیا می‌توان تابع مفروض $y=f(x)$ را در همسایگی نقطهٔ مفروض $x=x_0$ با یک چند جمله‌ای از مرتبهٔ n تقریب زد؟ اگر چنین است، بهترین تقریب ممکن کدام است؟

۱.۱۰.۴ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ و $y=g(x)$ توابعی باشند که در همسایگی نقطهٔ $x=x_0$ تعریف می‌گردند و $n\in\mathbb{N}$. در صورتی می‌گوئیم $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=x_0$ دارای برخورد مرتبهٔ n ام هستند که $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n}=0$. در این حالت می‌نویسیم $f(x)=g(x)+O\left((x-x_0)^n\right)$. در برخی مواقع از نماد اختصاری $f(x)\approx g(x)$ نیز استفاده می‌شود.

۲.۱۰.۴ قضیهٔ تیلور. اگر تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی از نقطهٔ $x=x_0$ دارای مشتقات تا مرتبهٔ $(n-1)$ ام باشد و $f^{(n)}(x_0)$ نیز وجود داشته باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\\ &\quad+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\\ &\quad\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+O\left((x-x_0)^n\right)\end{aligned}$$

و این تقریب در نوع خود بهترین است.

عبارت سمت راست فرمول بالا رابطهٔ تیلور مرتبهٔ n ام تابع $y=f(x)$ در $x=x_۰$ می‌نامیم. اگر $x_۰=۰$، این عبارت را بسط مک لورن می‌نامیم.

۳.۱۰.۴ مثال. ۱) بسط تیلور مرتبهٔ چهارم تابع $f(x)=\sqrt{۳+x}$ را در $x=۱$ بیابید.

حل. برای این منظور، مشتقات تا مرتبهٔ چهارم $y=f(x)$ در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
f(۱) &= (۳+x)^{۱/۲}\Big|_{x=۱}=۲\\
f'(۱) &= \frac{۱}{۲}(۳+x)^{-۱/۲}\Big|_{x=۱}=\frac{۱}{۴}\\
f''(۱) &= \frac{-۱}{۴}(۳+x)^{-۳/۲}\Big|_{x=۱}=\frac{-۱}{۳۲}\\
f^{(۳)}(۱) &= \frac{۳}{۸}(۳+x)^{-۵/۲}\Big|_{x=۱}=\frac{۳}{۲۵۶}\\
f^{(۴)}(۱) &= \frac{-۱۵}{۱۶}(۳+x)^{-۷/۲}\Big|_{x=۱}=\frac{-۱۵}{۲۰۴۸}
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ۲+\frac{۱}{۴}(x-۱)+\frac{-۱}{۲\times ۳۲}(x-۱)^۲\\
&\quad +\frac{۳}{۶\times ۲۵۶}(x-۱)^۳+\frac{-۱۵}{۲۴\times ۲۰۴۸}(x-۱)^۴\\
&\quad +O\Big((x-۱)^۴\Big)
\end{aligned}$$

مثال ۲) بسط مک لورن تا مرتبهٔ دلخواه تابع $f(x)=\sin x$ را بدست آورید.

حل. با توجه به اینکه $f'(x)=\cos x$، $f''(x)=-\sin x$، $f^{(۳)}(x)=-\cos x$ و $f^{(۴)}(x)=f(x)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
f(۰) &= f^{(۴)}(۰)=\cdots=f^{(۴n)}(۰)=۰\\
f'(۰) &= f^{(۵)}(۰)=\cdots=f^{(۴n+۱)}(۰)=۱\\
f''(۰) &= f^{(۶)}(۰)=\cdots=f^{(۴n+۲)}(۰)=۰\\
f^{(۳)}(۰) &= f^{(۷)}(۰)=\cdots=f^{(۴n+۳)}(۰)=-۱
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\sin x &= ۰+x+۰-\frac{x^۳}{۳!}+۰+\frac{x^۵}{۵!}+۰-\frac{x^۷}{۷!}+\cdots\\
&= x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}+\cdots\\
&\quad \cdots+(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}+O\Big(x^{۲n+۱}\Big)
\end{aligned}$$

۴.۱۰.۴ تمرین. ۱) بسط تیلور مرتبهٔ سوم تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ را در $x=۲$ بدست آورید.

۲) بسط تیلور تا مرتبهٔ سوم تابع $f(x)=xe^x$ را در نقطهٔ $x=-۱$ بدست آورید.

۳) بسط مک لورن تابع $f(x)=\sqrt[۳]{\sin x^۳}$ تا مرتبهٔ دهم را بدست آورید.

۴) بسط مک لورن تابع $f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ را تا مرتبهٔ ششم بدست آورید.

به کمک بسط مک لورن، هر یک از تساویهای زیر را اثبات کنید:

$$\begin{aligned}
&۵)\quad e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O\Big(x^n\Big)\\
&۶)\quad \cos x=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-\cdots\\
&\qquad\qquad \cdots+(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}+O\Big(x^{۲n+۱}\Big)\\
&۷)\quad (۱+x)^m=۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۲}x^۲+\cdots\\
&\qquad\qquad \cdots+\frac{m(m-۱)\cdots(m-n+۱)}{n!}x^n+O\Big(x^n\Big)\\
&۸)\quad \frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^۲+\cdots+x^n+O\Big(x^n\Big)\\
&۹)\quad \ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\cdots\\
&\qquad\qquad \cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{n}+O\Big(x^n\Big)
\end{aligned}$$

از اطلاعات بدست آمده می‌توان استفاده کرد و برخی از مسایل را به صورت ساده‌تری حل نمود.

۵.۱۰.۴ مثال. ۱) بسط مک لورن تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x+۱}$ را تا مرتبهٔ پنجم محاسبه کنید.

حل. از تمرین (۱) و (۸) از ۴.۱۰.۴ و مثال (۳) از ۳.۱۰.۴ استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x+۱} &= (\sin x)\frac{۱}{۱-(-x)}\\
&= \left(x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\cdots\right)(۱-x+x^۲-\cdots)\\
&= x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\cdots-x^۲+\frac{x^۴}{۳!}-\cdots\\
&\quad \cdots+x^۳-\frac{x^۵}{۳!}+\cdots-x^۴+\cdots\\
&= x-x^۲+\frac{۵}{۶}x^۳-\frac{۵}{۶}x^۴-\frac{۱۰۱}{۱۲۰}x^۵+O\Big(x^۵\Big)
\end{aligned}$$

مثال ۲) بسط مک لورن تابع $\sqrt{۱+x^۲}$ را تا مرتبهٔ زوج دلخواه $۲n$ بدست آورید.

حل. با توجه به تمرین ۷ از ۴.۱۰.۴ ذاریم

$$\sqrt{۱+x^۲}=(۱+x^۲)^{۱/۲}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(1/2)(1/2-1)}{2}(x^2)^2\\
&\quad+\frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{2}(x^2)^3+\cdots\\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\cdots\\
&\quad+\left(\frac{1}{n!}\centerdot\frac{1}{2}\centerdot\frac{-1}{2}\centerdot\frac{-3}{2}\centerdot\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdots\centerdot\frac{-(2n-1)}{2}\right)x^{2n}+O(x^{2n})\\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{(-1)^n(2n-3)!}{2^{2n-1}\centerdot(n-2)!}x^{2n}+O(x^{2n})
\end{aligned}
$$

۶.۱۰.۴ تمرین.

۱) بسط مک لورن مرتبهٔ دهم $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ را بیابید.

۲) بسط مک لورن مرتبهٔ سیزدهم تابع $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ را بیابید.

۳) بسط مک لورن مرتبهٔ سوم تابع $f(x)=\sin(\sin x)$ را بیابید.

هر یک از عبارتهای تقریبی زیر را اثبات کنید:

۴) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}\approx\frac{2x}{R^2}$

۵) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\approx\frac{4}{3}x$

۶) $\frac{\ln 2}{\ln(1+x/100)}\approx\frac{70}{x}$

از بسط تیلور در محاسبهٔ حدود می‌توان استفاده کرد. دلیل امر قضیه زیر است که قبلاً در قسمت حد از آن یاد کردیم.

۷.۱۰.۴ روش تولید فرمولهای هم ارزی. اگر مشتقات جزئی تا مرتبهٔ $(n-1)$ ام تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی از $x=x_0$ موجود باشند و $f^{(n)}(x_0)$ نیز وجود داشته باشد، آنگاه:

$$
f(x)-\left\{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots\right.
\left.\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)x^{n-1}\right\}\sim\frac{1}{n!}f^{n}(0)x^n
$$

۸.۱۰.۴ مثال. ۱) با استفاده از بسط مک لورن توابع $\cos x$ و e^x، داریم

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O\left(x^4\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O\left(x^4\right)\right)\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+O(x^4)\right)\\
&= \frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{-1}{12}
\end{aligned}
$$

مثال ۲) با استفاده از بسط مک لورن توابع $\sin x$ و e^x، داریم

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+O\left(x^3\right)\right)\times\right.\\
&\qquad\left.\times\left(x-\frac{x^3}{6}+O\left(x^3\right)\right)-x(1+x)\right\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+O\left(x^3\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

۹.۱۰.۴ تمرین. هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ ۲) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x+2^{-x}-2}{x^2}$

۳) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

۴) $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

۱۱.۴ دیفرانسیل

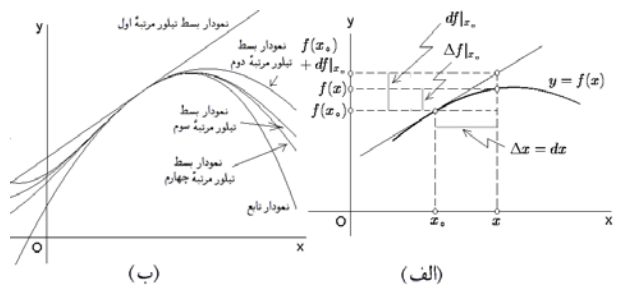
۱.۱۱.۴ تعریف. فرض کنید $y=f(x)$ در $x=x_0$ مشتقپذیر است، در این صورت می‌گوئیم تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ دیفرانسیل پذیر است و دیفرانسیل آن در نقطهٔ $x=x_0$ را به صورت $df|_{x_0}=f'(x_0)dx$ تعریف می‌کنیم، که

$$dx=\triangle x=x-x_0$$

بنابراین df تابعی دو متغیره است:

$$df:(x,x_0)\mapsto f'(x_0)(x-x_0)$$

۲.۱۱.۴ تعبیر هندسی. اگر خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ را رسم نموده و در امتداد آن حرکت کنیم، به یک مقدار تقریبی برای $y = f(x)$ می‌رسیم: $f(x) \approx f(x_۰) + df|_{x_۰}$. یعنی، $df|_{x_۰}$ میزان صعود بر خط مماس بر تابع است، هنگامی که متغیر از $x_۰$ به اندازهٔ Δx تغییر می‌کند. به شکل ۱۰.۴—الف توجه شود.



الف) تعبیر هندسی دیفرانسیل　ب) بسطهای مرتبهٔ بالای یک تابع مفروض

۳.۱۱.۴ قضیه. اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مشتقپذیر باشند، در این صورت

۱) $d(af) = adf,$　　۲) $d(f \pm g) = df \pm dg,$

۳) $d(fg) = gdf + fdg,$　　۴) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{۱}{g^۲}(gdf - fdg),$

۵) $d(f(g)) = f'(g)dg.$

مفهوم دیفرانسیل را به شکل زیر می‌توان تعمیم داد.

۴.۱۱.۴ تعریف. اگر تابع $y = f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ n ام باشد، دیفرانسیل مرتبهٔ n ام آن را با نماد $d^n f$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$. با استفاده از این مفهوم، قضیهٔ تیلور را به صورت ساده‌تری می‌توان نوشت:

۵.۱۱.۴ بیان مجدد قضیهٔ تیلور. اگر $y = f(x)$ در یک همسایگی از $x = x_۰$ مشتق مرتبهٔ n ام داشته باشد و $f^{(n)}(x_۰)$ موجود باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_۰) + df|_{x_۰} + \frac{۱}{۲}\, df^۲\Big|_{x_۰} + \cdots \\ &\quad + \frac{۱}{n!}\, df^n|_{x_۰} + O\left((x - x_۰)^n\right) \end{aligned}$$

چنانچه $g(x)$ بسط تیلور مرتبهٔ k ام تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ باشد، آنگاه $d^k f\Big|_{x_۰}$ عبارت است از نمو تابع $y = g(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$. به بیان دیگر، $\Delta g\Big|_{x_۰} = g'(x_۰)\,dx$. توجه شود که در حالت $k = ۱$، $y = g(x)$ یک خط راست است، در حالت $k = ۲$، $y = g(x)$ یک سهمی است و . . .

۶.۱۱.۴ مثال. فرض کنیم $f(x) = \cos x$ و $x_۰ = ۰$، در این صورت اگر $y = g_k(x)$ را بسط مرتبهٔ k ام f در نقطهٔ $x_۰$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} g_۱(x) &= ۱, \\ g_۲(x) &= g_۳(x) = ۱ - \frac{x^۲}{۲}, \\ g_۴(x) &= g_۵(x) = ۱ - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۴}{۲۴}, \end{aligned}$$

در شکل ۱۰.۴—ب توابع f و g_k با $۱ \le k \le ۴$ را ترسیم نموده‌ایم.

۷.۱۱.۴ تمرین. در هر مورد بسط تیلور تا مرتبهٔ k ام تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ را یافته و آنها را در یک همسایگی از $x = x_۰$ ترسیم کنید:

۱) $f(x) = x \sin x,$　　$x_۰ = ۰,\quad k = ۴.$

۲) $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱,$　　$x_۰ = ۱,\quad k = ۳.$

۳) $f(x) = x^۲ - \sin x,$　　$x_۰ = ۰,\quad k = ۴.$

۴) $f(x) = \frac{x - ۱}{x + ۱},$　　$x_۰ = ۲,\quad k = ۲.$

۱۲.۴　استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۱۲.۴ محاسبهٔ مشتق یک تابع مفروض. فرض کنید تابع $y = f(x)$ را قبلاً در محیط میپل تعریف نموده‌ایم. برای محاسبهٔ مشتق این تابع از دستور `diff(f(x),x)` استفاده می‌کنیم.

برای محاسبهٔ مشتق n ام تابع $f(x)$ از دستور `diff(f(x),x$n)` استفاده می‌کنیم.

چنانچه بجای `diff` از `Diff` استفاده کنیم، فقط نماد مشتقگیری حاصل خواهد شد و محاسبه‌ای صورت نخواهد پذیرفت.

۲.۱۲.۴ مثال. به چند مورد خاص به شرح زیر توجه کنید:

$$\mathrm{diff(x\hat{}2 - 3 * x + 1, x)} \xrightarrow{\text{میپل}} \mathrm{2x - 3}$$

$$\mathrm{diff(sin(1 - 2 * x), x\$3)} \xrightarrow{\text{میپل}} \mathrm{8\cos(1 - 2x)}$$

$$\mathrm{Diff(sin(1 - 2 * x), x\$3)} \xrightarrow{\text{میپل}} \frac{\partial^3}{\partial \mathrm{x}^3} \mathrm{sin(1 - 2x)}$$

۳.۱۲.۴ مشتق تابع ضمنی.

اگر تابع $y = f(x)$ به کمک رابطهٔ $F(x, y) = c$ به شکل ضمنی معرفی شده باشد، برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ n ام y بر حسب x از دستور `implicitdiff(F(x,y)=c,y,x$n)` استفاده می‌کنیم. برای نمونه، اگر $x^۲ + y^۲ = ۱$، در این صورت مشتق سوم y نسبت به x برابر است با

$$\mathrm{implicitdiff(x\hat{\ }2+y\hat{\ }2=1, y, x\$3)} \xrightarrow{\text{میپل}} -3\frac{\mathrm{x(x^2+y^2)}}{\mathrm{y^5}}$$

۴.۱۲.۴ مشتق تابع پارامتری.

اگر تابع $y = f(x)$ به کمک روابط $x = U(t)$ و $y = V(t)$ به شکل پارامتری معرفی شده باشد، برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ n ام y بر حسب x از دستور `implicitdiff({x=U(t),y=V(x)},{y,t},y,x$ n)` استفاده می‌کنیم. برای نمونه، اگر $x = \sin(t)$ و $y = t^۲ - ۱$، در این صورت مشتق سوم y نسبت به x برابر است با

$$\mathrm{implicitdiff(\{x=\sin(t), y=t\hat{\ }2-1\}, \{y,t\}, y, x\$3)}$$
$$\xrightarrow{\text{میپل}} ۲\frac{۳\sin t\cos t + t\cos^۲ t + ۳\sin^۲ t}{\cos^۵ t}$$

۵.۱۲.۴ اکسترموم تابع.

برای محاسبهٔ ماکزیموم $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a; b]$ از دستور

`maximize(f(x),{x},{x=a..b})`

استفاده می‌کنیم.

به صورت مشابه برای محاسبهٔ مینیموم تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a; b]$ از دستور `minimize(f(x),{x},{x=a..b})` استفاده می‌کنیم. برای نمونه، ماکزیموم و مینیموم تابع $y = x^۲ - ۳x$ بر بازهٔ $[-۱; ۱]$ بترتیب عبارتند از

$$\mathrm{maximize(x\hat{\ }2-3x, \{x\}, \{x=-1..1\})} \xrightarrow{\text{میپل}} 4$$
$$\mathrm{minimize(x\hat{\ }2-3x, \{x\}, \{x=-1..1\})} \xrightarrow{\text{میپل}} -2$$

۶.۱۲.۴ بسط تیلور یک تابع.

برای محاسبهٔ بسط تیلور مرتبهٔ n ام تابع مفروض $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ از دستور `taylor(f(x),x=a,n+1)` استفاده می‌کنیم. برای نمونه، بسط تیلور مرتبهٔ دوم تابع $۱/x$ در نقطهٔ $x = ۱$ عبارت است از

$$\mathrm{taylor(1/x, x=1, 3)} \xrightarrow{\text{میپل}} 1-(\mathrm{x}-1)+(\mathrm{x}-1)^2+\mathrm{O(x^3)}$$

توجه شود نماد $O\Big((x-x_۰)^n\Big)$ در میپل به این معنی است که:

$$O\Big((x-x_۰)^{n-۱}\Big)$$

۷.۱۲.۴ .

در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۵

انتگرال نامعین

هدف از این فصل حل این مسأله است که

«اگر تابع $y = f(x)$ مفروض باشد، آیا تابعی $y = F(x)$ می‌توان یافت که $F'(x) = f(x)$؟».

این مسأله آغاز یک نظریهٔ بسیار جالب و کاربردی بنام «نظریهٔ معادلات دیفرانسیل» است. حد اقل اینکه در فصل بعد بدون آن کار چندانی نمی‌توان انجام داد.

۱.۵ تعریف

۱.۱.۵ تابع اولیه. فرض کنید $y = f(x)$ و $(a;b) \subseteq D_f$. تابع $y = F(x)$ را در صورتی **تابع اولیه برای** $y = f(x)$ **بر** $(a;b)$ گوئیم که به ازای هر $x \in (a;b)$ ای $F'(x) = f(x)$.

۲.۱.۵ مثال. ۱) $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ بر بازهٔ $(-1;1)$ است.
مثال ۲) $F(x) = -\sin x$ یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = \cos x$ بر $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$ است.
مثال ۳) $F(x) = \ln x$ یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = 1/x$ بر بازهٔ $(0;+\infty)$ است.
مثال ۴) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right|$ یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$ بر $\mathbb{R}$ است.
مثال ۵) تابع $f(x) = [x]$ بر $\mathbb{R}$ هیچ تابع اولیه‌ای ندارد، چرا که مشتق هر تابع دارای خاصیت مقدار میانی است، به این معنی که اگر مشتق دو را بگیرد، همهٔ مقادیر بین آنها را نیز خواهد گرفت. در حالی که $[x]$ مقادیر ۰ و ۱ را می‌گیری ولی مقدار ۱/۲ را خیر.

۳.۱.۵ قضیه. اگر $y = F_1(x)$ و $y = F_2(x)$ دو تابع اولیه برای تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(a;b)$ باشد، آنگاه عدد ثابتی C ای وجود دارد که به ازای هر $x \in (a;b)$ ای $F_1(x) = F_2(x) + C$.

اثبات: فرض کنیم $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$، که $x \in (a;b)$. در این صورت بدلیل مشتقپذیری $F_1(x)$ و $F_2(x)$، $g(x)$ نیز بر $(a;b)$ مشتقپذیر است. بعلاوه، مطابق فرض به ازاء هر $x \in (a;b)$ ای

$$\begin{aligned} g'(x) &= F_1'(x) - F_2'(x) \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

پس $y = f(x)$ بر $(a;b)$ ثابت است. □

۴.۱.۵ نتیجه. اگر $y = f(x)$ یک تابع اولیه برای تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(a;b)$ باشد، آنگاه مجموعهٔ تمام توابع اولیهٔ $y = f(x)$ بر $(a;b)$ عبارت است از $\{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$.

۵.۱.۵ قرارداد. اگر $y = F(x)$ یک تابع اولیه برای تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $(a;b)$ باشد، در این صورت مجموعهٔ همهٔ توابع اولیهٔ $y = f(x)$ بر بازهٔ $(a;b)$ را بجای $\{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$ با نماد $F(x) + C$ نشان می‌دهیم. یعنی می‌نویسیم:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (a < x < b)$$

۶.۱.۵ مثال. شرط یکپارچه بودن بازهٔ $(a;b)$ در نتیجه بالا الزامی است. زیرا، به عنوان مثال

$$F_1(x) = \begin{cases} 1/x + 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 1/x & \text{اگر } x < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad F_2(x) = \frac{1}{x}$$

توابع اولیه‌ی تابع $f(x) = \ln|x|$ بر مجموعهٔ $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$ هستند، در حالی که

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

۷.۱.۵ انتگرال نامعین. گیریم $y=f(x)$ و $(a;b)\subseteq D_f$. مجموعهٔ همهٔ توابع اولیهٔ تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $(a;b)$ را **انتگرال نامعین** $y=f(x)$ بر $(a;b)$ نامیده و با نماد

$$\int f(x)\,dx \qquad (a<x<b)$$

نشان می‌دهیم. اگر $(a;b)$ بزرگترین مجموعهٔ ممکن باشد، از ذکر آن خودداری کرده و تنها می‌نویسیم $\int f(x)\,dx$.

عبارت $\omega=f(x)\,dx$ را **المان انتگرال** می‌نامیم. روشن است که اگر $y=F(x)$ یک تابع اولیه برای $y=f(x)$ باشد، آنگاه دیفرانسیل $F(x)$ با ω برابر می‌شود.

۸.۱.۵ مثال. به سهولت می‌توان نشان داد

۱) $\int x^5\,dx=\frac{1}{6}x^6+C,$

۲) $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+C, \quad (x\neq 0)$

۳) $\int [x]dx=\emptyset,$

۴) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C, \quad (-1<x<1).$

۲.۵ مسألهٔ انتگرالگیری

در بخش قبل مسأله مشتق مطرح شد. متأسفانه به همان اندازه که مشتقگیری موفق است، انتگرالگیری سخت و معمولاً ناموفق است! زیرا این مسأله نمونه‌ای از مسایل معادلات دیفرانسیل است ($y'=f(x)$)، به همین دلیل حتی در صورت اطمینان از وجود جواب، یافتن آن ممکن است محال باشد! مثلاً، با اینکه می‌دانیم تابع $y=\sin x/x$ دارای تابع اولیه است، ولی هیچ تابع مقدماتی‌ای مشتق آن برابر $\sin x/x$ شود را نمی‌شناسیم.

حل مسأله انتگرالگیری به روش بازگشت به مشتق است. یعنی، از اطلاعات قبلی استفاده کرده و اطلاعاتی راجع به انتگرال بدست می آوریم. این کار با طرح یک جدول از فرمولهای پایه و تعدادی قضیه که توابع پیچیده را بر حسب توابع ساده‌تر توضیح می‌دهند، انجام می‌پذیرد.

۱.۲.۵ جدول انتگرال نامعین. با مشتقگیری، داریم

۱) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C, \ \left(-1\neq a\in\mathbb{R}\right)$

۲) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C, \qquad \left(x\neq 0\right)$

۳) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, \qquad \left(a>0\right)$

۳') $\int e^x dx=e^x+C,$

۴) $\int \sin x dx=-\cos x+C,$

۵) $\int \cos x dx=\sin x+C,$

۶) $\int \sec x dx=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C,$
$\left(x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right)$

۷) $\int \csc x dx=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C,$
$(x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$

۸) $\int \sec^2 x dx=\tan x+C,$
$\left(x\neq k\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

۹) $\int \csc^2 x dx=-\cot x+C,$
$\left(x\neq k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

۱۰) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C,$
$\left(a\neq 0\ ,\ x\neq k\frac{a\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

۱۱) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$
$(a\neq 0, x\neq \pm a)$

۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,$
$\left(|a|<|x|\right)$

۱۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C,$
$\left(a\neq 0\ ,\ -a<x<a\right)$

۱۵) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$
$+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$

۱۶) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$
$-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C, \quad \left(|a|\leq|x|\right)$

۱۷) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$
$+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C, \quad \left(a\neq 0\ ,\ |a|\leq|x|\right)$

۱۸) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}=\frac{n}{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{1-n}}}+C, \qquad \left(0<x\right)$

۱۹) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}} = \frac{۱}{a}\sec^{-۱}\left|\frac{x}{a}\right| + C,$

$\left(|x|>|a|\ ,\ a\neq ۰\right)$

۲۰) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} = -\frac{۱}{a}\mathrm{sech}^{-۱}\left|\frac{x}{a}\right| + C,$

$\left(۰<|x|<|a|\ ,\ a\neq ۰\right)$

۲۱) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}} = -\frac{۱}{a}\mathrm{csch}^{-۱}\left|\frac{x}{a}\right| + C,$

$\left(x\neq ۰\ ,\ a\neq ۰\right)$

۲.۲.۵ قضیه. در صورتی که $\int f(x)\,dx = F(x)+C$، $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ و a عددی مخالف صفر باشد، آنگاه

۱) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+C$

۲) $\displaystyle\int af(x)\,dx = aF(x)+C$

۳) $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{۱}{a}F(ax+b)+C$

۳.۲.۵ یادداشت. توجه شود که در سمت راست عبارت اول، شکل کلی یک مجموعه نشان داده شده است. در واقع اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصلجمع آنها را به صورت $A+B := \{a+b\,|\,a\in A, b\in B\}$ تعریف می‌کنیم. حاصلضرب یک عدد در یک مجموعه به صورت $\alpha A := \{\alpha a\,|\,a\in A\}$ تعریف می‌گردد. توصیه می‌شود که در حل مسایل انتگرال، از ذکر C تا مرحلهٔ پایانی خودداری می‌شود و در خط آخر C ذکر گردد. این کار توجیه برقراری تساویهای حاصل را ساده‌تر می‌سازد.

۴.۲.۵ مثال. با توجه به مطالب فوق الذکر، داریم

مثال ۱) اگر $x\neq ۰$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int \frac{۳x^{۲}+۵x-۱}{x}\,dx &= ۳\int x\,dx + ۵\int dx - \int\frac{dx}{x}\\ &= ۳\frac{x^{۲}}{۲}+۵x-\ln|x|+C\end{aligned}$$

مثال ۲) اگر $x\neq ۰$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۳}dx &= \int\left(x^{۳}+۳x+\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^{۳}}\right)dx\\ &= \int x^{۳}dx+۳\int x\,dx+۳\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^{۳}}\\ &= \frac{x^{۴}}{۴}+۳\frac{x^{۲}}{۲}+۳\ln|x|-\frac{۱}{۲x^{۲}}+C\end{aligned}$$

مثال ۳) اگر $x>۲$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۲}} &=\\ &= \int\frac{۱}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۲}}\,\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}}\,dx\\ &= \int\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}}{(x+۱)-(x-۲)}\,dx\\ &= \frac{۱}{۳}\int\left(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}\right)dx\\ &= \frac{۲}{۹}\sqrt{(x+۱)^{۳}}+\frac{۲}{۹}\sqrt{(x-۲)^{۳}}+C\end{aligned}$$

مثال ۴) اگر $x\neq -۱$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{۳}dx}{x+۱} &= \int\left(x^{۲}-x+۱-\frac{۱}{x+۱}\right)dx\\ &= \int(x^{۲}-x+۱)\,dx-\int\frac{dx}{x+۱}\\ &= \frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲}+x-\ln|x+۱|+C\end{aligned}$$

مثال ۵) اگر $x\neq ۲k\pi+\pi/۲$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int\tan^{۲}x\,dx &= \int\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}\,dx\\ &= \int\frac{۱-\cos^{۲}x}{\sin^{۲}x}\,dx\\ &= \int(\sec^{۲}x-۱)\,dx\\ &= \int\sec^{۲}x\,dx-\int dx\\ &= \tan x-x+C\end{aligned}$$

مثال ۶) به ازای هر x ای

$$\begin{aligned}\int\sin^{۲}x\,dx &= \int\frac{۱-\cos(۲x)}{۲}\,dx\\ &= \frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}\sin(۲x)+C\end{aligned}$$

مثال ۷) اگر $k\pi-\pi/۲<x<k\pi+\pi/۲$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{۱+\sin x} &= \int\frac{dx}{۱+\sin x}\,\frac{۱-\sin x}{۱-\sin x}\,dx\\ &= \int\frac{۱-\sin x}{۱-\sin^{۲}x}\,dx\\ &= \int\frac{۱-\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx\\ &= \int\sec^{۲}x\,dx+\int\frac{-\sin x}{\cos^{۲}x}\,dx\\ &= \int-(\ln|\cos x|)'\,dx+\int-\left(\frac{۱}{\cos x}\right)'dx\\ &= -\ln|\cos x|-\frac{۱}{\cos x}+C\end{aligned}$$

مثال ۸) به ازای هر x ای

$$\begin{aligned}\int\sqrt{۱+\cos x}\,dx &= \int\sqrt{۲\cos^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)}\,dx\\ &= \sqrt{۲}\int\mathrm{sgn}\left(\cos\left(\frac{x}{۲}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{۲}\right)dx\\ &= ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{sgn}\left(\cos\left(\frac{x}{۲}\right)\right)\sin\left(\frac{x}{۲}\right)+C\end{aligned}$$

مثال ۹) به ازای هر x ای

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx &= \\ &= \int \frac{1}{2}(\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int(\sin(5x)-\sin x)\,dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos(5x)+\frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

مثال ۱۰) اگر $x > -1$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx \\ = \int \left((x+1)^{3/2}-(x+1)^{1/2}\right)\,dx \\ = \frac{(x+1)^{5/2}}{5/2}-\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}+C \\ = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

۵.۲.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$, ۲) $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx$,

۳) $\int (\sin x+\cos x)^2 dx$, ۴) $\int (\tan x+\cot x)^2 dx$,

۵) $\int \tanh^2 x dx$ ۶) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$,

۷) $\int 3x\sqrt{x+1}\,dx$, ۸) $\int (2-x)^4 dx$,

۹) $\int \sin x\sin(2x)\,dx$, ۱۰) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.

۱۱) $\int \frac{dx}{x^2-9}$, ۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$,

۱۳) $\int 3^x e^x dx$, ۱۴) $\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx$,

۱۵) $\int \sqrt{2-3x}\,dx$, ۱۶) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$,

۱۷) $\int 4^{2-3x}\,dx$, ۱۸) $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}\,dx$,

۱۹) $\int \sin^4 x dx$, ۲۰) $\int \sin^3 x dx$,

۲۱) $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx$, ۲۲) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$,

۲۳) $\int \sqrt{x}(x^2-3x+1)\,dx$,

۲۴) $\int \sin x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$,

۳.۵ انتگرالگیری به روش تغییر متغیر

۱.۳.۵ قرار داد. منظور از $\int f(x)\,du(x) = \int f\,du$ انتگرال $\int f(x)u'(x)\,dx$ است. در ادامه، $u(x)$ تابعی مشتقپذیر و دلخواه است.

۲.۳.۵ قضیه. اگر $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ و $u(x)$ تابعی مشتقپذیر باشد، در این صورت $\int f(u)\,du = F(u)+C$.

اثبات: کافی است توجه کنیم که

$$\{F(u)\}' = u'(x)F'(u) = u'(x)f(x)$$

و نیز $f(u)\,du = u'(x)f'(u(x))\,dx$. □

این قضیه، بزرگترین دستآویز ما برای حل مسایل انتگرال نامعین است.

۳.۳.۵ مثال. ۱) اگر فرض کنیم $u = x^2+3x+7$ آنگاه $du = (2x+3)\,dx$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx &= \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C \\ &= \ln|x^2+3x+7|+C\end{aligned}$$

مثال ۲) اگر فرض کنیم $u = \ln|\sec x|$ آنگاه $du = \tan x dx$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x dx}{\ln|\sec x|} &= \int u du = \frac{u^2}{2}+C \\ &= \frac{1}{2}\ln^2|\sec x|+C\end{aligned}$$

مثال ۳) اگر فرض کنیم $u = 1-2e^x$ آنگاه $du = -2e^x dx$، یا $e^x dx = -du/2$، بنابراین

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(1-2e^x)\,dx &= \int \sin u\left(\frac{-1}{2}\,du\right) \\ &= \frac{-1}{2}\int \sin u du = \frac{1}{2}\cos u + C \\ &= \frac{1}{2}\cos(1-2e^x)+C\end{aligned}$$

مثال ۴) اگر فرض کنیم $u = \tan x$ آنگاه $du = dx/\cos^2 x$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx &= \int \sqrt[3]{u}\,du = \frac{3}{4}u^{4/3}+C \\ &= \frac{3}{4}(\tan x)^{4/3}+C\end{aligned}$$

مثال ۵) اگر فرض کنیم $u = \sin^2 x$ آنگاه

$$du = 2\sin x\cos x dx = \sin(2x)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\int e^{\sin^۲ x}\sin(۲x)\,dx &= \int e^x du = e^u + C\\ &= e^{\sin^۲ x}+C\end{aligned}$$

مثال ۶) اگر فرض کنیم $u = ۱+\sqrt{x}$ آنگاه $x=(u-۱)^۲$، بنابراین $dx = ۲(u-۱)\,du$ و

$$\begin{aligned}\int \frac{۱+x}{۱+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{۱+(u-۱)^۲}{u}۲(u-۱)\,du\\ &= ۲\int \frac{(u^۲-۲u+۲)(u-۱)}{u}\,du\\ &= ۲\int \left(u^۲-۳u+۴-\frac{۲}{u}\right)du\\ &= ۲\frac{u^۳}{۳}-۳u^۲+۸u-۴\ln|u|+C\\ &= \frac{۲}{۳}(۱+\sqrt{x})^۳-۳(۱+\sqrt{x})^۲\\ &\quad +۸(۱+\sqrt{x})-۴\ln|۱+\sqrt{x}|+C\end{aligned}$$

مثال ۷) اگر فرض کنیم $u=۱+e^x$ آنگاه $e^x=u-۱$ یا $x=\ln|u-۱|$. در نتیجه $dx=du/(u-۱)$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{۱+e^x} &= \int \frac{du}{u(u-۱)} = \int \frac{du}{u^۲-u}\\ &= \int \frac{du}{(u-۱/۲)^۲-(۱/۲)^۲}\end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم $u-۱/۲=v/۲$ آنگاه $du=dv/۲$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{۱+e^x} &= \int \frac{dv/۲}{(v/۲)^۲-(۱/۲)^۲} = ۲\int \frac{dv}{v^۲-۱}\\ &= \ln\left|\frac{v-۱}{v+۱}\right|+C = \ln\left|\frac{۲u-۲}{۲u}\right|+C\\ &= \ln\left|\frac{e^x}{e^x+۱}\right|+C\end{aligned}$$

مثال ۸) اگر فرض کنیم $u=x+۱/x$، در این صورت داریم $du=(۱-۱/x^۲)\,dx$ و بنابراین

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{(x^۲-۱)\,dx}{(x^۴+۳x^۲+۱)\arcsin(x+۱/x)}\\ &= \int \frac{(۱-۱/x^۲)\,dx}{((x+۱/x)^۲+۱)\arcsin(x+۱/x)}\\ &= \int \frac{du)\,dx}{(u^۲+۱)\arcsin u}\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $v=\arctan u$، آنگاه $dv=du/(u^۲+۱)$ و بنابراین

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dv}{v} = \ln|v|+C\\ &= \ln|\arctan u|+C\\ &= \ln\left|\arctan\left(x+\frac{۱}{x}\right)\right|+C\end{aligned}$$

مثال ۹) اگر فرض کنیم $u=\frac{a}{b}\tan x$، در این صورت $du=\frac{a\,du}{b\cos^۲ x}$ و بنابراین

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{a^۲\sin^۲ x+b^۲\cos^۲ x}\\ &= \frac{۱}{b^۲}\int \frac{dx}{(a^۲/b^۲)\tan^۲ x+۱}\cdot\frac{dx}{\cos^۲ x}\\ &= \frac{۱}{ab}\int \frac{du}{u^۲+۱} = \frac{۱}{ab}\arctan u + C\\ &= \frac{۱}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C\end{aligned}$$

۴.۳.۵ تمرین.

هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

۱) $\displaystyle\int \frac{x^۲}{۱+x^۶}\,dx,$ ۲) $\displaystyle\int \frac{x+۳}{\sqrt{x^۲-۴}}\,dx,$

۳) $\displaystyle\int \frac{dx}{۷x^۲+۸},$ ۴) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x/۲)}{x^۲+۴}\,dx,$

۵) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{۱-x^۲}}\,dx,$ ۶) $\displaystyle\int \frac{\ln(۲x)\,dx}{x\ln(۴x)},$

۷) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x-۱},$ ۸) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt{۱-e^{۲x}}},$

۹) $\displaystyle\int \frac{۱}{x}\sin(\ln|x|)\,dx,$ ۱۰) $\displaystyle\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx,$

۱۱) $\displaystyle\int \frac{۱+\sin(۳x)}{\cos^۲(۳x)}\,dx,$ ۱۲) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x},$

۱۳) $\displaystyle\int \tanh x dx,$ ۱۴) $\displaystyle\int x\sqrt[۵]{۵-x^۲}\,dx,$

۱۵) $\displaystyle\int xe^{-x^۲}\,dx,$ ۱۶) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^۲ x+۱},$

۱۷) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx,$ ۱۸) $\displaystyle\int \sin^۳ x\sqrt{\cos x}\,dx,$

۱۹) $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx,$ ۲۰) $\displaystyle\int x.۲^{x^۲}\,dx,$

۲۱) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x},$ ۲۲) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x+۱}-۱\right)^۲ dx,$

۲۳) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan(۲x)}}{۴x^۲+۱}\,dx,$

۲۴) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^۲},$ ۲۵) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}\,dx,$

۲۶) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})}{x^۲+۱}}\,dx,$

۲۷) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(۱+x^۲)\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})}},$

۲۸) $\displaystyle\int \tan^۲(۳x)\sec^۲(۳x)\,dx.$

واقعیت این است که انتخاب تغییر متغیر مناسب برای محاسبه یک انتگرال خاص، کار ساده‌ای نیست؛ بر همین اساس در بخشهای بعدی، بطور جداگانه به مطالعه خانواده‌هایی از انتگرالها می‌پردازیم که هر یک با تغییر متغیر بخصوصی قابل محاسبه هستند. قبل از آن لازم است که قدری از روش جزء به جزء و تفکیک کسر اطلاع داشته باشیم.

۴.۵ انتگرالگیری به روش جزء به جزء

۱.۴.۵ قضیه. فرض کنید $u=u(x)$ و $v=v(x)$ دو تابع مشتقپذیر بر $(a;b)$ هستند و انتگرال نامعین $\int udv$ موجود است. در این صورت $\int vdu$ نیز موجوداست و

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

اثبات: با توجه به مفروضات مسأله و اینکه

$$d(uv) = udv + vdu$$

داریم $udv = d(uv) - vdu$ و بنابراین کافی است که از طرفین این تساوی انتگرال بگیریم. □

۲.۴.۵ مثال. ۱) فرض کنیم $u=x$ و $dv=e^x$، در نتیجه $du=dx$ و $v=\int e^x dx = e^x + C$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int udv\\ &= uv - \int vdu\\ &= xe^x - \int e^x dx\\ &= xe^x - e^x + C\\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $u=\arctan x$ و $dv=dx$، در نتیجه $du = dx/(1+x^2)$ و نیز $v=\int dx = x+C$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= \int udv = uv - \int vdu\\ &= x\arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

با فرض $t = 1+x^2$ داریم $dt = 2xdx$ و

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{dt}{2t}\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|t| + C\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $u=\ln x$ و $dv = dx/x^2$، در نتیجه $du = dx/x$ و $v=-1/x$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2}dx &= \int udv = uv - \int vdu\\ &= \frac{-1}{x}\ln x - \int \frac{-1}{x}\frac{dx}{x}\\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx\\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید $u=\arctan x$ و $dv = x^3 dx$، در نتیجه $du = dx/(1+x^2)$ و $v = x^4/4$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int x^3 \arctan x dx &= \frac{x^4}{4}\arctan x - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x^2+1}\\ &= \frac{x^4}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{x^4-1}{4}\arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C\end{aligned}$$

مثال ۵) فرض کنید $t=\arcsin x$، در این صورت $x=\sin t$ و $dx = \cos tdt$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{t\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt\\ &= \int t\sin tdt\end{aligned}$$

اکنون اگر فرض کنیم $u=t$ و $dv = \sin tdt$، در نتیجه $du=dt$ و $v=-\cos t$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -t\cos t - \int -\cos tdt\\ &= -t\cos t + \sin t + C\\ &= -(\arcsin x)\cos(\arcsin x) + x + C\\ &= -(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} + x + C\end{aligned}$$

مثال ٦) فرض کنید $u=\sin(3x)$ و $dv = e^{2x}dx$، در نتیجه $du = 3\cos(3x)dx$ و $v=\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$ بنابراین

$$\begin{aligned}I &= \int e^{2x}\sin(3x)dx\\ &= (\sin(3x))\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)(3\cos(3x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)dx\end{aligned}$$

بار دیگر، فرض کنید $u=\cos(3x)$ و $dv = e^{2x}$، در نتیجه $du = -3\sin(3x)dx$ و $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$. بنابراین

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{2}\left\{(\cos(3x))\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{۱}{۲}\int (e^{۲x})(-۳\sin(۳x)\,dx)\Big\} \\
=\ & \frac{۱}{۲}e^{۲x}\sin(۳x)-\frac{۳}{۴}e^{۲x}\cos(۳x) \\
& -\frac{۹}{۴}\int e^{۲x}\sin(۳x)\,dx \\
=\ & \frac{۱}{۲}e^{۲x}(۲\sin(۳x)-۳\cos(۳x))-\frac{۹}{۴}I
\end{aligned}
$$

در نتیجه، به معادلهٔ

$$I+\frac{۹}{۴}I=\frac{۱}{۴}e^{۲x}(۲\sin(۳x)-۳\cos(۳x))+C$$

می‌رسیم. بنابراین

$$I=\frac{۱}{۱۳}e^{۲x}(۲\sin(۳x)-۳\cos(۳x))+C$$

مثال ۷) فرض کنید $u=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و $dv=dx$، در نتیجه $du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$ و $v=x$. بنابراین

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^۲-x^۲}\,dx \\
&= x\sqrt{a^۲-x^۲}-\int x\frac{-x}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^۲-x^۲}-\int \frac{a^۲-x^۲+a^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^۲-x^۲}-\int \sqrt{a^۲-x^۲}\,dx-a^۲\int\frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}} \\
&= x\sqrt{a^۲-x^۲}-I-a^۲\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}
$$

در نتیجه $I+I=x\sqrt{a^۲-x^۲}-a^۲\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ و بنابراین

$$I=\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲-x^۲}-\frac{a^۲}{۲}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

مثال ۸) از خواص اعداد مختلط برای محاسبهٔ انتگرالها می‌توان استفاده نمود به عنوان مثال در مورد انتگرال $\int xe^{-x}\cos(۲x)\,dx$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\int xe^{-x}\cos(۲x)\,dx &= \mathrm{Re}\left(\int xe^{-x}e^{۲xi}\,dx\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int xe^{(۲i-۱)x}\,dx\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{۱}{۲i-۱}\int x\,de^{(۲i-۱)x}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-۱-۲i}{۵}\left[xe^{(۲i-۱)x}-\int e^{(۲i-۱)x}\,dx\right]\right) \\
&= \frac{-۱}{۵}\mathrm{Re}\left((۱+۲i)\left[xe^{(۲i-۱)x}-\int e^{(۲i-۱)x}\,dx\right]\right) \\
&= \frac{-۱}{۵}\mathrm{Re}\left((۱+۲i)\left[xe^{(۲i-۱)x}-\frac{۱}{۲i-۱}e^{(۲i-۱)x}\right]\right) \\
&= \frac{-۱}{۲۵}e^{-x}\mathrm{Re}\left(\left[۵(۱+۲i)x+(۱+۲i)^۲\right]e^{۲xi}\right) \\
&= \frac{-۱}{۲۵}e^{-x}\mathrm{Re}\Big(\left[۵(۱+۲i)x+(۴i-۳)\right] \\
&\qquad \times\left(\cos(۲x)+i\sin(۲x)\right)\Big) \\
&= -\frac{e^{-x}}{۲۵}\Big((۵x-۳)\cos(۲x) \\
&\qquad -(۱۰x+۴)\sin(۲x)\Big)+C
\end{aligned}
$$

۳.۴.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

۱) $\int \arcsin x dx,$ ۲) $\int x\cos^۲ x\,dx,$

۳) $\int x\sin x dx,$ ۴) $\int \frac{x}{e^x}\,dx,$

۵) $\int x\cos(۳x)\,dx,$ ۶) $\int x^۲e^{۳x}\,dx,$

۷) $\int ۲^{-x}\,dx,$ ۸) $\int \ln^۲ x dx,$

۹) $\int x^۲\ln x dx,$ ۱۰) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx,$

۱۱) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx,$ ۱۲) $\int \ln\left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right)dx,$

۱۳) $\int ۳^x\cos x dx,$ ۱۴) $\int \sin(\ln x)\,dx,$

۱۵) $\int (x+۱)\arctan x dx,$ ۱۶) $\int x\ln\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)\,dx,$

۱۷) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx,$ ۱۸) $\int x\arctan^۲ x dx,$

۱۹) $\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{۱-x}}\,dx,$ ۲۰) $\int \cos^۲(\ln x)\,dx,$

۲۱) $\int \frac{\sin^۲ x}{e^x}\,dx,$ ۲۲) $\int \sqrt{a^۲+x^۲}\,dx,$

۲۳) $\int xe^x\sin x dx,$ ۲۴) $\int \arcsin\left(\sqrt{x}\right)\,dx,$

۲۵) $\int \sin x\ln(\tan x)\,dx,$ ۲۶) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^۲ x}\,dx,$

۲۷) $\int \frac{۱}{x^۳}\cos(\frac{۱}{x})\,dx,$ ۲۸) $\int \frac{x^۲\,dx}{(x^۲+۱)^۲}\,dx,$

۲۹) $\int \frac{x^۳\,dx}{\sqrt{x^۲-۱}},$ ۳۰) $\int \tan x\,\ln(\cos x)\,dx,$

۳۱) $\int \sqrt{\frac{۱}{x}-۱}\,dx,$ ۳۲) $e^{۲x}e^{e^x}\,dx.$

۵.۵ انتگرالگیری از توابع کسری

موضوع این بخش انتگرالگیری از توابع به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ است که $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند. قبلاً در فصل دوم گفته شد

که هر چنین تابعی را به مجموع یک چند جمله‌ای و تعدادی تابع کسری ساده می‌توان تجزیه نمود. توابع کسری ساده به یکی از دو فرم کلی زیر می‌باشند:

الف) $\frac{A}{(ax+b)^k}$، که در آن $a,b,A \in \mathbb{R}$ و $a \neq ۰$.

ب) $\frac{Ax+B}{(ax^۲+bx+c)^k}$، که در آن $a,b,c,A,B \in \mathbb{R}$، $a \neq ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$.

بنابراین کافی است که انتگرالگیری از چنین کسرهایی را بتوان انجام داد.

۱.۵.۵ انتگرالگیری از توابع کسری سادهٔ نوع الف.

برای انتگرالگیری از تابع کسری ساده $\frac{A}{(ax+b)^k}$ که $a \neq ۰$، از تغییر متغیر $u = ax+b$ استفاده می‌کنیم، بنابراین

$$\int \frac{A}{(ax+b)^k} = \frac{A}{a}\int \frac{du}{u^k}$$

۲.۵.۵ انتگرالگیری از توابع کسری سادهٔ نوع ب.

برای انتگرالگیری از تابع کسری سادهٔ $\frac{Ax+B}{(ax^۲+bx+c)^k}$ که $a \neq ۰$ و $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$، دو روش کلی وجود دارد:

روش ۱) ابتدا $Ax+B$ را بر $۲ax+b$ تقسیم می‌کنیم

$$Ax+B = \frac{A}{۲a}(۲ax+b) + \left(\frac{Ab}{۲a} + B\right)$$

سپس می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\frac{Ax+B}{(ax^۲+bx+c)^k} &= \left(\frac{A}{۲a}\right)\frac{۲ax+b}{(ax^۲+bx+c)^k}\\ &\quad + \left(\frac{Ab}{۲a}+B\right)\frac{۱}{(ax^۲+bx+c)^k}\end{aligned}$$

در مورد انتگرال اول فرض می‌کنیم $u = ax^۲+bx+c$، بنابراین

$$\int \frac{۲ax+b}{(ax^۲+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{du}{u^k}$$

در مورد انتگرال دوم، به رابطهٔ

$$ax^۲+bx+c = \frac{۱}{۴a}\left\{(۲ax+b)^۲ + \left(\sqrt{۴ac-b^۲}\right)^۲\right\}$$

توجه کرده و فرض می‌کنیم $۲ax+b = \sqrt{۴ac-b^۲}\tan u$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(ax^۲+bx+c)^k} &= \int \frac{\frac{۱}{۲a}\sqrt{۴ac-b^۲}(۱+\tan^۲ u)\,du}{\{\frac{۱}{۴a}(۴ac-b^۲)(۱+\tan^۲ u)\}^k}\\ &= ۲^{۲k-۱}a^{k-۱}(۴ac-b^۲)^{۱/۲-k}\int(۱+\tan^۲ u)^{۱-k}\,du\\ &= ۲^{۲k-۱}a^{k-۱}(۴ac-b^۲)^{(۱-۲k)/۲}\int(\cos u)^{۲(k-۱)}\,du\end{aligned}$$

برای حل مسأله بدست آمده، کافی است از فرمول

$$\cos^۲ u = \frac{۱+\cos(۲u)}{۲}$$

استفاده کنیم. ممکن است در ادامه حل مسأله به دفعات از این فرمول استفاده شود.

روش ۲) چند جمله‌ای مرتبهٔ $۲(k-۱)$ ام با ضرایب دلخواه $P(x)$ و عدد ثابت دلخواه α را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(ax^۲+bx+c)^k}\,dx &= \frac{P(x)}{(ax^۲+bx+c)^{k-۱}}\\ &\quad +\alpha\int\frac{dx}{ax^۲+bx+c}\end{aligned}$$

و سپس با مشتقگیری از طرفین این تساوی و برابر قرار دادن چند جمله‌ایهای در دو طرف تساوی، ضرایب $P(x)$ و عدد α را پیدا می‌کنیم. بنابراین، در نهایت تنها انتگرالی که باید محاسبه شود انتگرال $\int \frac{dx}{ax^۲+bx+c}$ است.

۳.۵.۵ مثال. ۱) انتگرال تابع کسری $\frac{۳x+۲}{۲x^۲+x-۳}$ را محاسبه کنید.

حل. چون درجهٔ صورت کمتر از مخرج است، نیازی به تقسیم نیست. بعلاوه، $۲x^۲+x-۳$ برابر $(۲x+۳)(x-۱)$ است. پس فرض می‌کنیم

$$\frac{۳x+۲}{۲x^۲+x-۳} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{۲x+۳}$$

در این صورت $۳x+۲ = A(۲x+۳)+B(x-۱)$. حال اگر در این تساوی مقدار x را یک بگیریم، بدست می‌آوریم $A = ۱$. با قرار دادن $x = \frac{-۳}{۲}$، بدست می‌آوریم $B = ۱$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int\frac{۳x+۲}{۲x^۲+x-۳}\,dx &= \int\left\{\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{۲x+۳}\right\}dx\\ &= \int\frac{dx}{x-۱}+\int\frac{dx}{۲x+۳} = \int\frac{dt}{t}+\frac{۱}{۲}\int\frac{ds}{s}\\ &= \ln|t|+\frac{۱}{۲}\ln|s|+C\\ &= \ln|x-۱|+\frac{۱}{۲}\ln|۲x+۳|+C\end{aligned}$$

که در اینجا فرض شده است $t = x-۱$ و $s = ۲x+۳$.

مثال ۲) انتگرال تابع کسری $\frac{x^۳}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را محاسبه کنید.

حل. ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{x^۳}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)} &= \frac{x^۳}{x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶}\\ &= ۱+\frac{۶x^۲-۱۱x+۶}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}\end{aligned}$$

سپس تابع کسری بدست آمده را به مجموعی از کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{۶x^۲ - ۱۱x + ۶}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x-۲} + \frac{C}{x-۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۶x^۲ - ۱۱x + ۶ &= A(x-۲)(x-۳) \\ &\quad + B(x-۱)(x-۳) + C(x-۱)(x-۲) \end{aligned}$$

اکنون با فرض $x = ۱$، $x = ۲$ و $x = ۳$، به ترتیب بدست می‌آوریم که $۲A = ۱$، $-B = ۸$ و $۲C = ۲۷$. در نتیجه $A = ۱/۲$، $B = -۸$ و $C = ۲۷/۲$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^۳ dx}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)} &= \\ &= \int \left\{ ۱ + \frac{۱/۲}{x-۱} + \frac{-۸}{x-۲} + \frac{۲۷/۲}{x-۳} \right\} dx \\ &= \int dx + \frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{x-۱} - ۸\int \frac{dx}{x-۲} + \frac{۲۷}{۲}\int \frac{dx}{x-۳} \\ &= x + \frac{۱}{۲}\ln|x-۱| - ۸\ln|x-۲| + \frac{۲۷}{۲}\ln|x-۳| + C \end{aligned}$$

مثال ۳) انتگرال تابع کسری $\frac{x-۱}{(x+۱)^۲(x-۲)}$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به تکرار عامل خطی $x + ۱$ در مخرج، می‌نویسیم:

$$\frac{x-۱}{(x+۱)^۲(x-۲)} = \frac{A}{x+۱} + \frac{B}{(x+۱)^۲} + \frac{C}{x-۲}$$

در نتیجه $x - ۱ = A(x+۱)(x-۲ + B(x-۲) + C(x+۱)^۲$.
اکنون با فرض $x = -۱$، $x = ۲$ و $x = ۰$ داریم $-۳B = -۲$، $۹C = ۱$ و $-A - B + C = -۱$. در نتیجه $B = ۲/۳$، $C = ۱/۹$ و $A = C - B + ۱ = -۱/۹$. بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{x-۱}{(x+۱)^۲(x-۲)} dx &= \\ &= \int \left\{ \frac{-۱/۹}{x+۱} + \frac{۲/۳}{(x+۱)^۲} + \frac{۱/۹}{x-۲} \right\} dx \\ &= -\frac{۱}{۹}\int \frac{dx}{x+۱} + \frac{۲}{۳}\int \frac{dx}{(x+۱)^۲} + \frac{۱}{۹}\int \frac{dx}{x-۲} \\ &= -\frac{۱}{۹}\int \frac{dt}{t} + \frac{۲}{۳}\int \frac{dt}{t^۲} + \frac{۱}{۹}\int \frac{ds}{s} \\ &= -\frac{۱}{۹}\ln|t| + \frac{۲}{۳}\frac{-۱}{t} + \frac{۱}{۹}\ln|s| + C \\ &= -\frac{۱}{۹}\ln|x+۱| - \frac{۲}{۳(x+۱)} + \frac{۱}{۹}\ln|x-۲| + C \end{aligned}$$

که در اینجا فرض شده است $t = x + ۱$ و $s = x - ۲$.

مثال ۴) انتگرال تابع کسری $\frac{۱}{(x-۱)^۲(x-۲)^۳}$ را محاسبه می‌کنیم.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{(x+۱)^۲(x-۲)^۳} &= \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{(x-۱)^۲} + \frac{C}{(x-۲)} \\ &\quad + \frac{D}{(x-۲)^۲} + \frac{E}{(x-۲)^۳} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} ۱ &= A(x-۱)(x-۲)^۳ + B(x-۲)^۳ \\ &\quad + C(x-۱)^۲(x-۲)^۲ + D(x-۱)^۲(x-۲) + E(x-۱)^۲ \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $x = ۱$، $x = ۲$، $x = -۱$، $x = -۲$ و $x = ۰$، بدست می‌آوریم $-B = ۱$، $E = ۱$ و

$$\begin{cases} ۵۴A - ۲۷B + ۳۶C - ۱۲D + ۴E = ۱ \\ ۱۹۲A - ۶۴B + ۱۴۴C - ۳۶D + ۹E = ۱ \\ ۸A - ۸B + ۴C - ۲D + E = ۱ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۹A + ۶C - ۲D = -۵ \\ ۱۶A + ۱۲C - ۳D = -۶ \\ ۴A + ۲C - D = -۴ \end{cases}$$

در نتیجه $A = -۳$، $C = ۳$ و $D = -۲$. بنابراین $\int \frac{dx}{(x-۱)^۲(x-۲)^۳} dx$ برابر است با

$$\begin{aligned} &= \int \left\{ \frac{-۳}{x-۱} + \frac{-۱}{(x-۱)^۲} + \frac{۳}{x-۲} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-۲}{(x-۲)^۲} + \frac{۱}{(x-۲)^۳} \right\} dx \\ &= -۳\int \frac{dx}{x-۱} - \int \frac{dx}{(x-۱)^۲} + ۳\int \frac{dx}{x-۲} \\ &\quad - ۲\int \frac{dx}{(x-۲)^۲} + \int \frac{dx}{(x-۲)^۳} \\ &= -۳\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^۲} + ۳\int \frac{ds}{s} - ۲\int \frac{ds}{s^۲} + \int \frac{ds}{s^۳} \\ &= -۳\ln|t| + \frac{۱}{t} + ۳\ln|s| + \frac{۱}{s} + \frac{s^{-۲}}{-۲} + C \\ &= -۳\ln|x-۱| + \frac{۱}{x-۱} + ۳\ln|x-۲| \\ &\quad + \frac{۲}{x-۲} - \frac{۱}{۲(x-۲)^۲} + C \end{aligned}$$

در اینجا فرض شده است $t = x - ۱$ و $s = x - ۲$.

مثال ۵) انتگرال تابع کسری $\frac{x}{(x-۱)(x^۲+۴)}$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم

$$\frac{x}{(x-۱)(x^۲+۴)} = \frac{A}{x-۱} + \frac{Bx+C}{x^۲+۴}$$

در نتیجه $x = A(x^۲+۴) + (Bx+C)(x-۱)$. اکنون با فرض $x = ۱$ و $x = ۲i$، بترتیب بدست می‌آوریم که $۵A = ۱$ و $۲i = (۲Bi + C)(۲i - ۱)$. در نتیجه، $A = ۱/۵$ و همچنین $۲i = (-C - ۴B) + (-۲B + ۲C)i$ و یا به عبارت دیگر

$$\begin{cases} -C - ۴B = ۰ \\ -۲B + ۲C = ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -۴B \\ -۱۰B = ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} C = \frac{۴}{۵} \\ B = \frac{-۱}{۵} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)} \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{5}\int \frac{x-4}{x^2+4}\,dx \end{aligned}$$

اما $x-4 = \frac{1}{2}(2x) - 4$، بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

در مورد انتگرال دوم، از تغییر متغیر $t = x^2+4$ استفاده شده است.

مثال ۶) انتگرال تابع کسری $\frac{x^2}{(x^2+1)(2x^2+1)}$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(2x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{2x^2+1}$$

بنابراین $x^2 = (Ax+B)(2x^2+1) + (Cx+D)(x^2+1)$.
اکنون با فرض $x = i$ و $x = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ بترتیب بدست می‌آوریم که $(Ai+B)(-2+1) = -1$ و

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}Ci + D\right)\left(\frac{-1}{2}+1\right) = \frac{-1}{2}$$

بنابراین، $Ai+B = 1$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}Ci + D = -1$. در نتیجه $B = 1$، $A = 0$، $D = -1$ و $C = 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(2x^2+1)} \\ &= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{2x^2+1} \end{aligned}$$

با فرض $\sqrt{2}x = \tan u$ در انتگرال دوم داریم

$$\begin{aligned} I &= \arctan x - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\tan^2 u)\,du}{\tan^2 u + 1} \\ &= \arctan x - \frac{\sqrt{2}}{2}\int du \\ &= \arctan x - \frac{\sqrt{2}}{2}u + C \\ &= \arctan x - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x) + C \end{aligned}$$

مثال ۷) انتگرال تابع کسری $\frac{1}{(x^2+4)^3}$ را محاسبه کنید.

حل. نیازی به تفکیک کسر نیست. بنابراین کافی است فرض کنیم $x = 2\tan u$، بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} &= \int \frac{2(1+\tan^2 u)\,du}{(4\tan^2 u + 4)^3} \\ &= \frac{1}{32}\int \frac{du}{(1+\tan^2 u)^2} = \frac{1}{32}\int (\cos^2 u)^2 du \\ &= \frac{1}{32}\int \left(\frac{1+\cos(2u)}{2}\right)^2 du \\ &= \frac{1}{128}\int (1 + 2\cos(2u) + \cos^2(2u))\,du \\ &= \frac{1}{128}\int du + \frac{1}{64}\int \cos(2u)\,du \\ &\qquad + \frac{1}{128}\int \cos^2(2u)\,du \\ &= \frac{u}{128} + \frac{\sin(2u)}{128} + \frac{1}{128}\int \frac{1+\cos(4u)}{2}\,du \\ &= \frac{u}{128} + \frac{\sin(2u)}{128} + \frac{u}{256} + \frac{\sin(4u)}{1024} + C \end{aligned}$$

اما با توجه به اینکه $\tan u = x/2$، داریم

$$\begin{aligned} \sin(2u) &= \frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} \\ &= \frac{x}{1+x^2/4} = \frac{4x}{4+x^2} \\ \cos^2(2u) &= 1 - \sin^2(2u) \\ &= 1 - \frac{16x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{(x^2-4)^2}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} &= \frac{2}{256}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{128}\frac{x}{x^2+4} \\ &\qquad + \frac{1}{128}\frac{x(x^2-4)}{(x^2+4)^2} + C \end{aligned}$$

مثال ۸) انتگرال تابع کسری $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+2)^2}$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا صورت و مخرج کسر را در x ضرب می‌کنیم و سپس فرض می‌کنیم $z = x^2$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+2)^2} &= \int \frac{x\,dx}{x^2(x^2+1)(x^2+2)^2} \\ &= \int \frac{dz}{z(z+1)(z+2)^2} \end{aligned}$$

انتگرال حاصل نیز شامل یک تابع کسری است، اما با عوامل خطی، سپس فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2} + \frac{D}{(z+2)^2}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 1 &= A(z+1)(z+2)^2 + Bz(z+2)^2 \\ &\quad + Cz(z+1)(z+2) + Dz(z+1) \end{aligned}$$

اکنون با فرض $z=0$، $z=-1$، $z=-2$ و $z=1$ بدست می‌آوریم $4A=1$، $-B=1$، $2D=1$ و $18A+9B+6C+2D=1$. بنابراین $A=1/4$، $B=-1$، $C=3/4$ و $D=1/2$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+2)^2}=\\
&=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+1}+\frac{3}{4}\int\frac{dz}{z+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z+2)^2}\\
&=\frac{1}{4}\ln|z|-\ln|z+1|+\frac{3}{4}\ln|z+2|+\frac{1}{2}\frac{-1}{z+2}+C\\
&=\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x^2+1|+\frac{3}{4}\ln|x^2+2|-\frac{1}{2x^2+4}+C
\end{aligned}$$

مثال ۹) انتگرال تابع کسری $\frac{x^2+1}{x^4+1}$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2\\
&= (x^2-1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\
&= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)
\end{aligned}$$

می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x^4+1} &= \frac{x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}x}{x^4+1}\\
&= \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}x}{x^4+1}
\end{aligned}$$

در این صورت با فرض $\frac{\sqrt{2}}{2}t=x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $s=x^2$ داریم

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx &= \int\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^4+1}\,dx-\sqrt{2}\int\frac{xdx}{x^4+1}\\
&= \int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\sqrt{2}\int\frac{xdx}{(x^2)^2+1}\\
&= \int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt}{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{2}\,ds}{s^2+1}\\
&= \sqrt{2}\arctan t-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan s+C\\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)-\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C
\end{aligned}$$

مثال ۱۰) انتگرال تابع کسری $\frac{x^{12}}{(x^2+1)^5}$ را محاسبه کنید.

حل. ابتدا صورت را بر حسب x^2+1 بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{12}}{(x^2+1)^5} &= \frac{((x^2+1)-1)^6}{(x^2+1)^5}\\
&= \frac{1}{(x^2+1)^5}\Big((x^2+1)^6-6(x^2+1)^5\\
&\quad +15(x^2+1)^4-20(x^2+1)^3\\
&\quad +15(x^2+1)^2-6(x^2+1)+1\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2-5+\frac{15}{x^2+1}-\frac{20}{(x^2+1)^2}+\frac{15}{(x^2+1)^3}\\
&\quad -\frac{6}{(x^2+1)^4}+\frac{1}{(x^2+1)^5}
\end{aligned}$$

در ادامه لازم است که از کسرهای حاصله انتگرال بگیریم. برای این منظور فرض می‌کنیم $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ در این صورت، با استفاده از روش جزء به جزء، داریم

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\frac{dx}{(x^2+1)^n}\\
&= \frac{1}{(x^2+1)^n}x+\int\frac{2nx^2\,dx}{(x^2+1)^{n+1}}\\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int\frac{(x^2+1-1)\,dx}{(x^2+1)^{n+1}}\\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n}+\int\frac{2n\,dx}{(x^2+1)^n}-\int\frac{2n\,dx}{(x^2+1)^{n+1}}\\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n}+2nI_n-2nI_{n+1}
\end{aligned}$$

بنابراین $I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{x}{2n(x^2+1)^n}$ و

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\frac{dx}{x^2+1}=\arctan x+C\\
I_2 &= \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}I_1+\frac{x}{2(x^2+1)}\\
&= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C\\
I_3 &= \int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{3}{4}I_2+\frac{x}{4(x^2+1)^2}\\
&= \frac{3}{8}\arctan x+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+C\\
I_4 &= \int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{5}{6}I_3+\frac{x}{6(x^2+1)^3}\\
&= \frac{5}{16}\arctan x+\frac{5x}{16(x^2+1)}+\frac{5x}{24(x^2+1)^2}\\
&\quad +\frac{x}{6(x^2+1)^3}+C\\
I_5 &= \int\frac{dx}{(x^2+1)^5}=\frac{7}{8}I_4+\frac{x}{8(x^2+1)^4}\\
&= \frac{35}{128}\arctan x+\frac{35x}{128(x^2+1)}+\frac{35x}{192(x^2+1)^2}\\
&\quad +\frac{7x}{48(x^2+1)^3}+\frac{x}{8(x^2+1)^4}+C
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^{12}}{(x^2+1)^5}\,dx &= \frac{x^3}{3}-5x+15I_1-20I_2\\
&\quad +15I_3-6I_4+I_5\\
&= \frac{x^3}{3}-5x+\frac{1155}{128}\arctan(x)-\frac{765x}{128(x^2+1)}\\
&\quad +\frac{515x}{192(x^2+1)^2}-\frac{41x}{48(x^2+1)^3}+\frac{x}{8(x^2+1)^4}+C
\end{aligned}$$

مثال ۱۱) به کمک روش (۲) از ۲.۵.۵، انتگرال $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} = \frac{P(x)}{(x^2+x+1)^2} + \alpha \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

که $P(x)$ یک چند جمله‌ای مرتبهٔ $4 = 2(3-1)$ می‌باشد. بنابراین، فرض می‌کنیم که

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

با مشتقگیری از طرفین رابطهٔ فرض شده، داریم

$$\begin{aligned} 1 &= (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)(x^2+x+1) \\ &\quad -2(2x+1)(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) \\ &\quad +\alpha(x^2+x+1)^2 \end{aligned}$$

بنابراین، با قرار دادن ضرایب توانهای برابر x در دو سوی تساوی بالا، داریم

$$\begin{cases} 2A - B + \alpha = 0 \\ 4A + B - 2C + 2\alpha = 0 \\ 3B - 3D + 3\alpha = 0 \\ 2C - D - 4E + 2\alpha = 0 \\ -2E + D + \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 + E \\ B = -1/3 + 2E \\ C = -1/2 + 3E \\ D = 1/3 + 2E \\ \alpha = 2/3 \end{cases}$$

که چون E دلخواه است، پس می‌توانیم فرض کنیم $E = 0$. بنابراین $A = -1/2$، $B = -1/3$، $C = -1/2$، $D = 1/3$ و $\alpha = 2/3$. اکنون با توجه به فرض اولیه و این مقادیر، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} &= \frac{-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x}{(x^2+x+1)^2} \\ &\quad + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x}{(x^2+x+1)^2} \\ &\quad + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C \end{aligned}$$

مثال ۱۲) انتگرال $\int \frac{x^4+1}{(x^2-x+2)^2}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. چون درجهٔ صورت کمتر از درجهٔ مخرج نیست، صورت را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^4+1}{(x^2-x+2)^2} = 1 + \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 3}{(x^2-x+2)^2}$$

سپس، به منظور رسیدن به کسرهای ساده، $2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ را به $x^2 - x + 2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &2x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = \\ &\quad = (2x-3)(x^2-x+2) + 3 - 3x. \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $(x^2 - x + 2)' = 2x - 1$، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{x^4+1}{(x^2-x+2)^2} &= 1 - 3\frac{x-1}{(x^2-x+2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-x+2} \\ &= 1 - 3\frac{x-1}{(x^2-x+2)^2} + \frac{2x-1}{x^2-x+2} \\ &\quad -2\frac{1}{x^2-x+2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int \frac{x^4+1}{(x^2-x+2)^2}\,dx = x - 3I_1 + \ln|x^2-x+2| - 2I_2$$

که در آن $I_1 = \int \frac{dx}{x^2-x+2}$ و $I_2 = \int \frac{x-1}{(x^2-x+2)^2}\,dx$.
به سهولت مشاهده می‌گردد که

$$I_1 = 2\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2x-1)\right) + C$$

و در مورد I_2 باید از روش (۲) در ۲.۵.۵ استفاده کنیم. بنابراین، فرض می‌کنیم

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+2)^2} = \frac{P(x)}{x^2-x+2} + \alpha\int \frac{dx}{x^2-x+2}$$

که $P(x)$ یک چند جمله‌ای مرتبهٔ $2 = 2(2-1)$ می‌باشد. بنابراین، فرض می‌کنیم که $P(x) = Ax^2 + Bx + C$. با مشتقگیری از طرفین رابطهٔ فرض شده، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} x - 1 &= (2Ax+B)(x^2-x+2) \\ &\quad -(2x-1)(Ax^2+Bx+C) + \alpha(x^2-x+2) \end{aligned}$$

بنابراین، با قرار دادن ضرایب توانهای برابر x در دو سوی تساوی بالا، داریم

$$\begin{cases} -A - B + \alpha = 0 \\ 4A - 2C - \alpha = 1 \\ 2B + C + 2\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3B+5}{7} \\ C = -\frac{8B+11}{7} \\ \alpha = \frac{4B-5}{7} \end{cases}$$

که چون B دلخواه است، پس می‌توانیم فرض کنیم $B = 0$. بنابراین $A = -5/7$، $B = 0$، $C = -11/7$، $\alpha = -5/7$.
بنابراین، با توجه به فرض اولیه در مورد I_2 داریم

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{-\frac{5}{7}x^2 - \frac{11}{7}}{x^2-x+2} - \frac{5}{7}\int \frac{dx}{x^2-x+2} \\ &= -\frac{1}{7}\int \frac{5x^2+11}{x^2-x+2} - \frac{5}{7}I_1 \end{aligned}$$

و در مجموع داریم

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^4+1}{(x^2-x+2)^2} = \\ &= x + \ln\left|x^2-x+2\right| + \frac{1}{7}\frac{3x+9}{x^2-x+2} \\ &\quad -\frac{38}{49}\sqrt{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2x-1)\right) + C \end{aligned}$$

۴.۵.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \frac{12\,dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$,

۲) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$,

۳) $\int \frac{x^2-x+7}{(x^2-3x+10)^2}\,dx$,

۴) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$,

۵) $\int \frac{260\,dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$,

۶) $\int \frac{9\,dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$,

۷) $\int \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}\,dx$,

۸) $\int \frac{2\,dx}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$,

۹) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+3)}$,

۱۰) $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}\,dx$,

۱۱) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^3}$, ۱۲) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$,

۱۳) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$, ۱۴) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$,

۱۵) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$, ۱۶) $\int \frac{4x^4}{x^4-1}\,dx$,

۱۷) $\int \frac{6\,dx}{x^3+1}$, ۱۸) $\int \frac{dx}{x^4+4}$,

۱۹) $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$, ۲۰) $\int \frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}$,

۲۱) $\int \frac{xdx}{x^4+x^2+1}$, ۲۲) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^3}$,

۲۳) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$, ۲۴) $\int \frac{5x^2+1}{x(x^4-1)}\,dx$,

۲۵) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$, ۲۶) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$,

۲۷) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^5}$, ۲۸) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$,

۲۹) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$, ۳۰) $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$,

۳۱) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$, ۳۲) $\int \frac{x^9dx}{(x^2+x+1)^4}$,

۳۳) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$, ۳۴) $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$,

۳۵) $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^3}$, ۳۶) $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

۶.۵ روش استروگرادسکی برای توابع کسری

فرض کنید بخواهیم از تابع کسری $P(x)/Q(x)$ انتگرال بگیریم که در آن درجهٔ $Q(x)$ بزرگتر از درجهٔ $P(x)$ می‌باشد. فرض کنیم تجزیهٔ $Q(x)$ به عوامل درجهٔ یک و یا درجهٔ دوم با دلتای منفی به شکل $Q(x)=(R_1(x))^{n_1}(R_2(x))^{n_2}\cdots(R_m(x))^{n_m}$ باشد. به کمک روش استروگرادسکی[1] می‌توان انتگرالگیری تابع کسری $P(x)/Q(x)$ را به انتگرالگیری از یک تابع کسری دیگر تبدیل نمود که مخرج آن $R_1(x)R_2(x)\cdots R_m(x)$ می‌باشد. روشن است که انتگرالگیری از چنین تابع کسری بسیار ساده‌تر می‌باشد. اصول این روش بر قضیهٔ زیر استوار است.

۱.۶.۵ قضیهٔ استروگرادسکی برای توابع کسری. فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای با

$$\deg(P(x))<\deg(Q(x))$$

هستند و تجزیهٔ $Q(x)$ به صورت حاصلضربی از عوامل درجهٔ یک و یا درجهٔ دوم با دلتای منفی به شکل

$$Q(x)=(R_1(x))^{n_1}(R_2(x))^{n_2}\cdots(R_m(x))^{n_m}$$

می‌باشد، که n_i ها اعداد صحیح و مثبتند. آنگاه، چند جمله‌ایهای $P_1(x)$، $P_2(x)$، $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ طوری وجود دارند که

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

و بعلاوه

۱) $Q_1(x)=(R_1(x))^{n_1-1}(R_2(x))^{n_2-1}\cdots(R_m(x))^{n_m-1}$

۲) $Q_2(x)=R_1(x)R_2(x)\cdots R_m(x)$

۳) $\deg(P_1(x))<\deg(Q_1(x))$

۴) $\deg(P_2(x))<\deg(Q_2(x))$

۲.۶.۵ مثال. ۱) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx$$

[1] Strogradsky، ریاضیدان روس که بین سالهای ۱۸۰۱ تا ۱۸۶۲ می‌زیسته است.

حل. نظر به اینکه مخرج تابع کسری داده شده را به شکل

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x^2-x+1)^2$$

می‌توان تجزیه نمود و نیز با توجه به قضیهٔ استروگرادسکی، فرض می‌کنیم:

$$\int \frac{6-7x-x^2}{(x^2-x+1)^2}\,dx=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,dx$$

پس از مشتقگیری از طرفین و مخرج مشترک گرفتن، به تساوی

$$\begin{aligned}6-7x-x^2 &= A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)\\ &\quad +(Cx+D)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

می‌رسیم. اکنون ضرایب توانهای برابر x در دو سوی تساوی بالا را برابر قرار داده و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases}C=0\\ -A+D-C=-1\\ -2B-D+C=-7\\ A+B+D=6\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=2\\ B=3\\ C=0\\ D=1\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{6-7x-x^2}{(x^2-x+1)^2}\,dx &= \frac{2x+3}{x^2-x+1}+\int\frac{dx}{x^2-x+1}\\ &= \frac{2x+3}{x^2-x+1}+2\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C\end{aligned}$$

مثال ۲) انتگرال $\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x^2+1)^2}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به تجزیهٔ مخرج تابع کسری داده شده و قضیهٔ استروگرادسکی، فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x^2+1)^2}\,dx &=\\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\frac{Cx^2+Dx+E}{(x+2)(x^2+1)}\,dx\end{aligned}$$

پس از مشتقگیری از طرفین و مخرج مشترک گرفتن، به تساوی

$$\begin{aligned}x^3+1 &= (x+2)(-Ax-2Bx+A)\\ &\quad +(x^2+1)(Cx^2+Dx+E)\end{aligned}$$

می‌رسیم. اکنون ضرایب توانهای برابر x در دو سوی تساوی بالا را برابر قرار داده و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases}C=0\\ D-A=1\\ E+C-2A-2B=0\\ D-4B+A=0\\ E+2A=1\end{cases}$$

در نتیجه $A=1/10$، $B=3/5$، $C=0$، $D=11/10$ و $E=4/5$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x^2+1)^2}\,dx &=\\ &= \frac{x+3}{10(x^2+1)}+\frac{1}{10}\int\frac{11x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,dx\end{aligned}$$

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست، به کمک روش تفکیک کسر می‌نویسیم:

$$\frac{11x+8}{(x+2)(x^2+1)}=-\frac{14}{5(x+2)}+\frac{14x+27}{5(x^2+1)}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x^2-x+1)}\,dx &=\\ &= \frac{x+3}{10(x^2+1)}-\frac{14}{5}\ln|x+2|\\ &\quad +\frac{7}{5}\ln(x^2+1)+\frac{27}{5}\arctan(x)+C\end{aligned}$$

مثال ۳) انتگرال $\int \frac{x^4-3x+2}{x^3(x^2-x+1)^2}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. با توجه به تجزیهٔ مخرج تابع کسری داده شده و قضیهٔ استروگرادسکی، فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3x+2}{x^3(x^2-x+1)^2}\,dx &=\\ &= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2-x+1)}\\ &\quad +\int\frac{Ex^2+Fx+G}{x(x^2-x+1)}\,dx\end{aligned}$$

پس از مشتقگیری از طرفین و مخرج مشترک گرفتن، به تساوی

$$\begin{aligned}x(x^4-3x+2) &= (3Ax^2+2Bx+C)x^2(x^2-x+1)\\ &\quad -(4x^3-3x^2+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\\ &\quad +x^3(x^2-x+1)(Ex^2+Fx+G)\end{aligned}$$

می‌رسیم. اکنون ضرایب توانهای برابر x در دو سوی تساوی بالا را برابر قرار داده و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases}-2D=2\\ F-E-A=0\\ E=0\\ A+B-3C+F-G=0\\ 3D-C=-3\\ 2C-4D+G=0\\ -2B+E-F+G=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=-1\\ B=-2\\ C=0\\ D=-1\\ E=0\\ F=-1\\ G=-4\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3x+2}{x^3(x^2-x+1)^2}\,dx &=\\ &= \frac{-x^3-2x^2-1}{x^2(x^2-x+1)}+\int\frac{-x-4}{x(x^2-x+1)}\,dx\end{aligned}$$

اکنون برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست، به کمک روش تفکیک کسر می‌نویسیم:

$$\frac{-x-4}{x(x^2-x+1)} = -\frac{4}{x} + \frac{4x-5}{x^2-x+1}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3x+2}{x^3(x^2-x+1)^2}\,dx &= \\ &= -\frac{x^3+2x^2+1}{x^2(x^2-x+1)} - 4\ln|x| + 2\ln(x^2-x+1) \\ &\quad -2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right) + C\end{aligned}$$

۳.۶.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را به روش استروگرادسکی محاسبه کنید:

$$1)\ \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}, \qquad 2)\ \int \frac{16x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2},$$

$$3)\ \int \frac{x^3-1}{x^2(x^2+1)^3}\,dx. \qquad 4)\ \int \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^3},$$

$$5)\ \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+x+1)^2}\,dx,$$

۷.۵ انتگرالگیری از توابع شامل جذری از یک عامل درجه دوم

۱.۷.۵ روش. برای محاسبهٔ انتگرالهای به شکل کلی $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ و یا $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) با فاکتورگیری از $|a|$ در زیر رادیکال، ضریب x^2 را یک یا ۱− می‌کنیم.

۲) عبارت حاصل در زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم.

۳) بسته به علامت a و $\triangle = b^2 - 4ac$، عبارت زیر رادیکال به یکی از سه صورت $(x+\alpha)^2+\beta^2$، $(x+\alpha)^2-\beta^2$ و یا $\beta^2-(x+\alpha)^2$ خواهد شد. اکنون با فرض $x+\alpha=\beta t$، انتگرال به یکی از شش فرم زیر تبدیل می‌گردد که قبلاً در جدول ۱.۲.۵ معرفی شده‌اند:

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

۲.۷.۵ مثال. ۱) با فرض $x+1=3t$، داریم

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+4x+10}\,dx &= \sqrt{2}\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx \\ &= \sqrt{2}\int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx = \sqrt{2}\int \sqrt{(2t)^2+2^2}\,dx \\ &= 4\sqrt{2}\int \sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= 4\sqrt{2}\left\{\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right\} + C \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{2}\,\frac{x+1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \\ &\quad + \frac{4\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x+1}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\right| + C \\ &= \frac{x+1}{2}\sqrt{2x^2+4x+10} \\ &\quad + 2\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+10}\right| + C\end{aligned}$$

مثال ۲) با فرض $u=x^3$ و سپس $u+1=t$، داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+2x^3+2}} &= \int \frac{du/3}{\sqrt{u^2+2u+2}} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(u+1)^2+1}} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1+\sqrt{x^6+2x^3+2}\right| + C\end{aligned}$$

۳.۷.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \int \sqrt{4x^2+8x+5}\,dx, \quad 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+5}},$$

$$3)\ \int \sqrt{x^2+6x+13}\,dx, \quad 4)\ \int \sqrt{4x^2+12x+8}\,dx,$$

$$5)\ \int x\sqrt{x^4+2x^2-3}\,dx, \quad 6)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}},$$

$$7)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, \qquad 8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{8-4x+x^2}}.$$

$$9)\ \int 2\sin x\sqrt{2\cos x+\sin^2 x-1}\,dx,$$

$$10)\ \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+6\sin^2 x-\cos^2 x}},$$

$$11)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{4\ln^2 x+12\ln x+8}},$$

$$12)\ \int e^x\sqrt{15+2e^x-e^{2x}}\,dx,$$

۴.۷.۵ روش. برای محاسبهٔ انتگرال به شکل $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ n ام است. فرض می‌کنیم:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

که $Q_{n-1}(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ $(n-1)$ ام با ضرایب مجهول می‌باشد و λ نیز عددی مجهول است. سپس از طرفین مشتق می‌گیریم و با متحد قرار دادن طرفین تساوی، ضرایب $Q_{n-1}(x)$ و عدد λ را بدست می‌آوریم. سرانجام انتگرال سمت راست را به روش۱.۷.۵ محاسبه می‌کنیم.

۵.۷.۵ مثال. ۱) انتگرال $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ را محاسبه کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\sqrt{1-x^2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

با مشتق گیری از طرفین تساوی بالا، داریم

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)\sqrt{1-x^2}\\ &+(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &+\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

و یا اینکه

$$\begin{aligned}x^5 &= (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(1-x^2)\\ &-x(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+\lambda\end{aligned}$$

اکنون با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مساوی در دو طرف تساوی بالا، داریم $-5A=1$، $-4B=0$، $4A-3C=0$، $3B-2D=0$، $2C-E=0$ و $D+\lambda=0$. در نتیجه $A=-1/5$، $B=0$، $C=-4/15$، $D=0$، $E=-8/15$ و $\lambda=0$. بنابراین

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{15}(3x^4+4x^2+8)\sqrt{1-x^2}+C$$

مثال ۲) انتگرال $\int\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$ را محاسبه کنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$\int\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی بالا، داریم

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} &= A\sqrt{x^2+x+1}\\ &+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}\end{aligned}$$

و یا اینکه

$$\begin{aligned}x^2+2x+3 &= 2A(x^2+x+1)\\ &+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda\end{aligned}$$

اکنون با برابر قرار دادن ضریب توانهای مساوی در دو طرف تساوی بالا، داریم $4A=2$، $3A+2B=4$، و $2A+B+2\lambda=6$. در نتیجه، $A=1/2$، $B=5/4$ و $\lambda=15/8$. بنابراین

$$\int\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac12x+\frac54\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{15}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

در مورد انتگرال سمت راست ،با فرض $x+\frac12=\frac{\sqrt3}{2}t$ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}}\\ &= \int\frac{\frac{\sqrt3}{2}\,dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt3}{2}t)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}}\\ &= \int\frac{dx}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C\\ &= \ln\left|\frac{2\sqrt3}{3}\left(x+\frac12\right)+\sqrt{\frac43\left(x+\frac12\right)^2+1}\right|+C\\ &= \ln\left|x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C\end{aligned}$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac14(2x+5)\sqrt{x^2+x+1}\\ &+\frac{15}{8}\ln\left|x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C\end{aligned}$$

۶.۷.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$ ۲) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

۳) $\int\frac{48x^6\,dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ۴) $\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

۵) $\int 6\frac{x^3-2x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$ ۶) $\int\frac{3x^5\,dx}{\sqrt{x^6+2x^3+2}}$

۷) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$ ۸) $\int\frac{x^3+x}{\sqrt{3-2x+x^2}}dx$

۷.۷.۵ روش. برای محاسبهٔ انتگرال به شکل $\int P(x)\sqrt{ax^۲+bx+c}\,dx$ صورت و مخرج عبارت داخل انتگرال را در $\sqrt{ax^۲+bx+c}$ ضرب می‌کنیم، حاصل به شکل انتگرال مشروح در ۴.۷.۵ خواهد بود.

۸.۷.۵ مثال. ۱) انتگرال $\int x^۲\sqrt{x^۲+۴}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. در این صورت داریم

$$\int x^۲\sqrt{x^۲+۴}\,dx=\int\frac{x^۴+۴x^۲}{\sqrt{x^۲+۴}}\,dx$$

پس، فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}\int x^۲\sqrt{x^۲+۴}\,dx &= (Ax^۳+Bx^۲+Cx+D)\sqrt{x^۲+۴}\\ &\quad+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۴}}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}x^۲\sqrt{x^۲+۴}&=(۳Ax^۲+۲Bx+C)\sqrt{x^۲+۴}\\ &\quad+(Ax^۳+Bx^۲+Cx^{+}D)\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^۲+۴}}\\ &= (۳Ax^۲+۲Bx+C)(x^۲+۴)\\ &\quad+x(Ax^۳+Bx^۲+Cx+D)+\lambda\end{aligned}$$

در نتیجه $۴A=۱$، $۳B=۰$، $۱۲A+۲C=۴$، $۸B+D=۰$ و $۴C+\lambda=۰$. بنابراین $A=۱/۴$، $B=۰$، $C=۱/۲$، $D=۰$ و $\lambda=-۲$. در نتیجه

$$\begin{aligned}&\int x^۲\sqrt{x^۲+۴}\,dx=\\ &=\left(\frac{x^۳}{۴}+\frac{x}{۲}\right)\sqrt{x^۲+۴}-۲\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۴}}\\ &=\frac{x}{۴}(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۴}-۲\ln\left|x+\sqrt{x^۲+۴}\right|+C\end{aligned}$$

مثال ۲) انتگرال $\int(x+۱)\sqrt{۱-x^۲}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\int(x+۱)\sqrt{۱-x^۲}\,dx &= \int\frac{(x+۱)(۱-x^۲)}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx\\ &= \int\frac{-x^۳-x^۲+x+۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx\end{aligned}$$

پس، فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}\int(x+۱)\sqrt{۱-x^۲}\,dx &= (Ax^۲+Bx+C)\sqrt{۱-x^۲}\\ &\quad+\int\lambda\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}(x+۱)\sqrt{۱-x^۲}&=(۲Ax+B)\sqrt{۱-x^۲}\\ &\quad+(Ax^۲+Bx+C)\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}+\frac{\lambda}{\sqrt{۱-x^۲}}\end{aligned}$$

در نتیجه $-۳A=-۱$، $-۲B=-۱$، $۲A-C=۱$ و $B+\lambda=۱$. بنابراین $A=-۱/۳$، $B=۱/۲$، $C=-۱/۳$ و $\lambda=۱/۲$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}&\int(x+۱)\sqrt{۱-x^۲}\,dx=\\ &=-\frac{۱}{۳}\left(x^۲-۶x+۱\right)\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}\\ &=-\frac{۱}{۳}\left(x^۲-۶x+۱\right)+\frac{۱}{۲}\arcsin x+C\end{aligned}$$

۹.۷.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned}&۱)\ \int(x+۱)\sqrt{x^۲+۱}\,dx,\quad ۲)\ \int(x+۲)\sqrt{x^۲+۴}\,dx,\\ &۳)\ \int(x^۲-۱)\sqrt{x^۲+۱}\,dx,\ ۴)\ \int(۲x+۳)\sqrt{x^۲-۱}\,dx,\\ &۵)\ \int(۲x+۱)^۲\sqrt{x^۲+۲x+۲}\,dx,\\ &۶)\ \int(x^۲+۲x+۲)\sqrt{x^۲+۲x-۱}\,dx.\end{aligned}$$

۱۰.۷.۵ روش. برای محاسبهٔ انتگرال به شکل $\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^n\sqrt{ax^۲+bx+c}}$ از تغییر متغیر $\alpha x+\beta=۱/t$ استفاده می‌کنیم. حاصل انتگرالی شبیه انتگرال مطرح شده در قسمت۴.۷.۵ خواهد بود.

۱۱.۷.۵ مثال. ۱) با فرض $x+۱=۱/t$ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x+۱)^۲\sqrt{x^۲+۱}} &= \frac{-dt/t^۲}{(۱/t)^۲\sqrt{(۱/t-۱)^۲+۱}}\\ &= \int\frac{-t\,dt}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}}\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}\int\frac{-tdt}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}} &= A\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}\\ &\quad+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{-t}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}}=\frac{A(۲t-۱)}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}}+\frac{\lambda}{\sqrt{۲t^۲-۲t+۱}}$$

یا $-t = A(2t-1)+\lambda$. بنابراین $-1 = 2A$ و $0 = -A+\lambda$. پس $A=\lambda=-1/2$ و

$$\begin{aligned}
\int \frac{-t\,dx}{\sqrt{2t^2-2t+1}} =& \\
=&\ -\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\\
=&\ -\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}}\\
=&\ -\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1}\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|2t-1+\sqrt{2t^2-2t+1}\right|+C
\end{aligned}$$

پس در مجموع

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} =& \\
=&\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{2}{x+1}-1+\sqrt{\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+1}\right|\\
&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+1}+C\\
=&\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right|+C
\end{aligned}$$

مثال ۲) با فرض $x = 1/t$ داریم

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} &= \int\frac{-dt/t^2}{(1/t)^6\sqrt{(1/t)^2-1}}\\
&= -\int\frac{t^5dt}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم $u = 1-t^2$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} &= -\int\frac{(t^2)^2t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
&= -\int\frac{(1-u)^2(\frac{-1}{2}du)}{\sqrt{u}}\\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}(u-1)^2du\\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}(u^2-2u+1)du\\
&= \frac{1}{2}\int\left(u^{3/2}-2u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du\\
&= \frac{u^{5/2}}{5}-\frac{2u^{3/2}}{3}+u^{1/2}+C\\
&= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{5/2}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\\
&\quad+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}+C\\
&= \frac{8x^4+4x^2+3}{15x^5}\sqrt{x^2-1}+C
\end{aligned}$$

۱۲.۷.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{4x^2+4x+2}}$,

۲) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$,

۳) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt{x^2+1}}$,

۴) $\displaystyle\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2-3x+2)^3\sqrt{x^2-1}}$.

۵) $\displaystyle\int\frac{15\,dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-1}}$, ۶) $\displaystyle\int\frac{8\,dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$,

۷) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$, ۸) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{4-x^2}}$,

۹) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2x^3\sqrt{x^2-1}}$, ۱۰) $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}$,

۱۱) فرض کنید $\displaystyle V_m := \int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. نشان دهید که در این صورت:

الف) $\displaystyle V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2a}V_0$

ب) $\displaystyle V_2 = \frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)V_0$

ج) به ازای هر m ای، عدد ثابت α_m و چند جمله‌ای مرتبهٔ $(m-1)$ ام $P_{m-1}(x)$ طوری وجود دارند که $V_m = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha_m V_0$.

د) به ازای هر m ای

$$\begin{aligned}
&x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} =\\
&\quad= maV_m+(m-1)bV_{m-1}+(m-1)cV_{m-2}
\end{aligned}$$

۸.۵ انتگرالگیری از توابع به شکل

۱.۸.۵ روش. برای محاسبه انتگرالهای به شکل

$$\int P\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2},\cdots\right)dx$$

که $ad\neq bc$ و $\frac{p_i}{q_i}$ کسرهای از اعداد صحیح هستند، از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ استفاده می‌کنیم، که n کوچکترین مضرب مشترک q_1، q_2 و . . . است.

۲.۸.۵ مثال. ۱) در مورد انتگرال زیر، $\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $2x-3$ است، $q_1=2$ و $q_2=3$. بنابراین $n=6$ و فرض می‌کنیم $z^6=2x-3$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{2x-3}\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}} &= \int \frac{z^3}{z^2}3z^5\,dz = 3\int z^6 dz\\ &= \frac{3}{7}z^7+C=\frac{3}{7}(2x-3)^{7/6}+C\end{aligned}$$

مثال ۲) در مورد انتگرال زیر $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{1+x}{1-x}$ و $q_1=2$. بنابراین $n=2$ و فرض می‌کنیم $z^2=\frac{1+x}{1-x}$. بنابراین $x=\frac{z^2-1}{z^2+1}$ و $dx=\frac{4zdz}{(z^2+1)^2}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x} &= \int z\frac{\frac{4zdz}{(1+z^2)^2}}{1-\frac{z^2-1}{z^2+1}}\\ &= 2\int\left\{1-\frac{1}{z^2+1}\right\}dz=2z-2\arctan z+C\\ &= 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+C\end{aligned}$$

۳.۸.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx,\qquad 2)\ \int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx,$$

$$3)\ \int\frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)},\quad 4)\ \int\frac{2\,dx}{(x-2)^2\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}},$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}},\ 6)\ \int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$7)\ \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^2(x-1)^4}},\ 8)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}},$$

$$9)\ \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}},\qquad 10)\ \int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$$

۹.۵ انتگرالگیری از دو جمله‌ای دیفرانسیلی

۱.۹.۵ روش. فرض کنیم m، n و p اعداد گویا هستند و $I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$. در این صورت، انتگرال I تنها در یکی از چهار حالت زیر قابل محاسبه است:

الف) اگر p عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه $a+bx^n$ را به توان p رسانیده و مطابق معمول ادامه می‌دهیم.

ب) اگر p عدد صحیح منفی باشد، آنگاه فرض می‌کنیم $x=t^k$، که در آن k مخرج مشترک دو کسر m و n است. حاصل، انتگرال یک تابع کسری خواهد بود.

ج) اگر $\frac{m+1}{n}$ عدد صحیح باشد، آنگاه فرض می‌کنیم $a+bx^n=t^k$، که در آن k مخرج کسر p است. حاصل، انتگرال یک تابع کسری خواهد بود.

د) اگر $\frac{m+1}{n}+p$ عدد صحیح باشد، آنگاه فرض می‌کنیم $a+bx^n=x^nt^k$، که در آن k مخرج کسر p است. حاصل، انتگرال یک تابع کسری خواهد بود.

۲.۹.۵ مثال. ۱) در مورد انتگرال زیر $p=2$ یک عدد صحیح مثبت است. یعنی حالت (الف) پیش آمده است. بنابراین

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\left(2-3\sqrt[3]{x^2}\right)^2dx &= \int x^{1/2}\left(2-3x^{2/3}\right)^2dx\\ &= \int x^{1/2}\left(4-12x^{2/3}+9x^{4/3}\right)dx\\ &= \frac{8}{3}x^{3/2}-\frac{72}{13}x^{13/6}+\frac{54}{17}x^{17/6}+C\end{aligned}$$

مثال ۲) در مورد انتگرال زیر $p=-2$ یک عدد صحیح منفی است. یعنی (ب) پیش آمده است. پس چون مخرج مشترک $n=1/3$ و $m=-1$ برابر $k=3$ است، فرض می‌کنیم که $1+x=t^3$، در نتیجه $x=t^3-1$ و $dx=3t^2\,dt$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2} &= \int x^{-1}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx\\ &= \int\frac{1}{t}(t+1)^{-2}.3t^2\,dt=3\int\frac{dt}{t(t+1)^2}\\ &= 3\int\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right\}\\ &= 3\ln|t|-3\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}+C\\ &= \ln|x|-3\ln(\sqrt[3]{x}+1)+\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+C\end{aligned}$$

مثال ۳) در مورد انتگرال زیر $p=\frac{1}{3}$ که صحیح نیست، اما $\frac{m+1}{n}=\frac{-1/2+1}{1/4}=2$ صحیح است. یعنی، حالت (ج) پیش آمده است. پس با توجه به اینکه مخرج p برابر $k=3$ است، فرض می‌کنیم $1+\sqrt[4]{x}=t^3$. در نتیجه $x=(t^3-1)^4$ و $dx=12t^2(t^3-1)^3$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx\\ &= \int(t^3-1)^{-2}(t^3)^{1/3}12t^2(t^3-1)^3\,dt\\ &= 12\int(t^3-1)t^3dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C\\ &= \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}+C\end{aligned}$$

مثال ۴) در مورد انتگرال زیر $p=-\frac{1}{2}$ و $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{2}$ اعداد صحیح نیستند، اما $\frac{m+1}{n}+p=-3$ صحیح است.

یعنی، حالت (د) پیش آمده است. پس با توجه به اینکه مخرج p برابر ۲ است، فرض می‌کنیم $x^{۴}t^{۲} = x^{۴} + ۱$. در نتیجه $x = (t^{۲} - ۱)^{-۱/۴}$ و $dx = -\frac{t}{۲}(t^{۲} - ۱)^{-۵/۴}dt$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^{۱۱}\sqrt{۱ + x^{۴}}} &= \int x^{-۱۱}(۱ + x^{۴})^{-۱/۲}\\ &= \int (t^{۲} - ۱)^{۱۱/۴}\left(\frac{t^{۲}}{t^{۲} - ۱}\right)^{-۱/۲}\frac{-t}{۲}(t^{۲} - ۱)^{-۵/۴}\,dt\\ &= -\frac{۱}{۲}\int (t^{۲} - ۱)^{۲}\,dt = -\frac{t^{۵}}{۱۰} + \frac{t^{۳}}{۳} - \frac{t}{۲} + C\end{aligned}$$

که در اینجا $t = \sqrt{\frac{۱ + x^{۴}}{x^{۴}}} = \frac{\sqrt{۱ + x^{۴}}}{x^{۲}}$.

۳.۹.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \sqrt[۳]{x}(۲ - ۳\sqrt{x})^{۵}dx$، ۲) $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^{۲}}(۱ + \sqrt[۳]{x^{۲}})}$،

۳) $\int \frac{\sqrt{۱ + \sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\,dx$، ۴) $\int \frac{\sqrt[۳]{۱ + \sqrt[۴]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$،

۵) $\int x^{۳}\sqrt{۱ + x^{۲}}\,dx$، ۶) $\int \frac{dx}{x^{۴}\sqrt{۱ + x^{۲}}}$،

۷) $\int \sqrt[۳]{x}\sqrt[۷]{۱ + \sqrt[۳]{x^{۴}}}\,dx$، ۸) $\int \frac{dx}{x^{۳}\sqrt[۵]{۱ + \frac{۱}{x}}}$،

۹) $\int \frac{dx}{\sqrt[۴]{۱ + x^{۴}}}\,dx$، ۱۰) $\int \frac{x^{۳}\,dx}{\sqrt{(۱ + ۲x^{۲})^{۳}}}$،

۱۱) $\int \frac{dx}{x^{۳}\sqrt{۱ + x^{۵}}}$، ۱۲) $\int \frac{dx}{x^{۴}\sqrt{۱ + x}}$،

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{۳}}\sqrt[۳]{۱ + \sqrt[۴]{x^{۳}}}}$، ۱۴) $\int \frac{dx}{x^{۲}(۲ + x^{۳})^{۵/۳}}$،

۱۵) $\int \frac{x^{۶}dx}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$، ۱۶) $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{۱ + x^{۳}}}$،

۱۷) $\int \frac{x + ۱}{\sqrt{(۱ + x^{۲})^{۳}}}\,dx$، ۱۸) $\int \sqrt{x^{۶} - x^{۲}}\,dx$،

۱۹) $\int \frac{dx}{x\sqrt{۱ + x^{۶}}}$، ۲۰) $\int \sqrt{۳x - x^{۲}}\,dx$.

۲۱) $\int \sqrt{\tan x}\,dx$

۲۲) نشان دهید که $\int \sqrt{\sin x}\,dx$ قابل حل نیست.

۱۰.۵ تغییر متغیرهای اولر

۱.۱۰.۵ روش. برای محاسبه انتگرالهای به شکل $\int P\left(x, \sqrt{ax^{۲} + bx + c}\right)\,dx$ که $y = P(x)$ تابعی گویا است، به یکی از سه روش زیر عمل می‌کنیم:

۱) اگر $a > ۰$، آنگاه فرض می‌کنیم

$$\sqrt{ax^{۲} + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

۲) اگر $c > ۰$، آنگاه فرض می‌کنیم

$$\sqrt{ax^{۲} + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

۳) اگر α، یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ باشد، آنگاه فرض می‌کنیم $\sqrt{ax^{۲} + bx + c} = (x - \alpha)t$.

۲.۱۰.۵ مثال. ۱) در مورد انتگرال زیر ملاحظه می‌گردد که $a = ۱ > ۰$، پس فرض می‌کنیم

$$\sqrt{x^{۲} + ۲x + ۲} = t - x$$

در نتیجه $x^{۲} + ۲x + ۲ = (t - x)^{۲}$، $۲x + ۲ = t^{۲} - ۲xt$ و بنابراین $x = \frac{t^{۲} - ۲}{۲(t + ۱)}$ و $dx = \frac{t^{۲} + ۲t + ۲}{۲(t + ۱)^{۲}}\,dt$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{۱ + \sqrt{x^{۲} + ۲x + ۲}} &= \int \frac{\frac{t^{۲} + ۲t + ۲}{۲(t + ۱)^{۲}}dt}{۱ + t - \frac{t^{۲} - ۲}{۲(t + ۱)}}\\ &= \int \frac{t^{۲} + ۲t + ۲}{(t + ۱)(t + ۲)^{۲}}dt = \int \left\{\frac{۱}{t + ۱} + \frac{-۲}{(t + ۲)^{۲}}\right\}dt\\ &= \ln|t + ۱| + \frac{۲}{t + ۲} + C\\ &= \ln\left|x + ۱ + \sqrt{x^{۲} + ۲x + ۲}\right|\\ &\quad + \frac{۲}{x + ۲ + \sqrt{x^{۲} + ۲x + ۲}} + C\end{aligned}$$

مثال ۲) در مورد انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲} + x + ۱}}$ ملاحظه می‌گردد که $c = ۱ > ۰$ بنابراین می‌توانیم فرض می‌کنیم $\sqrt{x^{۲} + x + ۱} = tx + ۱$ در نتیجه $x^{۲} + x + ۱ = (xt + ۱)^{۲}$، یا $x + ۱ = xt^{۲} + ۲t$ و بنابراین $۱ - ۲t = x(t^{۲} - ۱)$. در نتیجه $x = \frac{-۲t + ۱}{t^{۲} - ۱}$ و $dx = ۲\frac{t^{۲} - t + ۱}{(t^{۲} - ۱)^{۲}}\,dt$. که در اینجا $t = \frac{۱}{x}(\sqrt{x^{۲} + x + ۱} - ۱)$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲} + x + ۱}} &= \int \frac{۲\frac{t^{۲} - t + ۱}{(t^{۲} - ۱)^{۲}}\,dt}{\left(\frac{۱ - ۲t}{t^{۲} - ۱}\right)\left(t\frac{۱ - ۲t}{t^{۲} - ۱} + ۱\right)}\\ &= ۲\int \frac{dt}{۲t - ۱} = \int \ln|۲t - ۱| + C\\ &= \ln\left|۲\sqrt{x^{۲} + x + ۱} - ۲ - x\right| - \ln|x| + C\end{aligned}$$

مثال ۳) در مورد انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{(۷x - ۱۰ - x^{۲})^{۳}}}$ ملاحظه می‌گردد که $x = ۲$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۷x - ۱۰ - x^{۲}$ است، بنابراین فرض می‌کنیم $\sqrt{۷x - ۱۰ - x^{۲}} = (x - ۲)t$. در نتیجه

$t^2(x-2)^2=(x-2)(5-x)$، یا $(x-2)t^2=5-x$. بنابراین $x=\frac{2t^2+5}{t^2+1}$ و $dx=\frac{-6t\,dt}{(t^2+1)^2}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}} &= \int\frac{dx}{((x-2)t)^3}\\
&= \int\frac{\frac{-6t\,dx}{(t^2+1)^2}}{\{(\frac{2t^2+5}{t^2+1}-2)t\}^3} = -\frac{6}{27}\int\frac{2t^2+5}{t^2}\,dt\\
&= -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C\\
&= \frac{10}{9}\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}-\frac{4}{9}\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}+C
\end{aligned}$$

که در آن $t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}=\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$.

۳.۱۰.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}, & 2)\ \int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+2}},\\
3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}, & 4)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1},\\
5)\ \int\frac{(x+\sqrt{x^2+3})^5}{\sqrt{x^2+3}}\,dx, & 6)\ \int\left(\sqrt{x^2+2x}-1\right)^3 dx,\\
7)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}, & 8)\ \int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx,\\
9)\ \int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx, & 10)\ \int\frac{dx}{(1+\sqrt{x^2+x})^2},\\
11)\ \int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}, & \\
12)\ \int\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx. &
\end{array}$$

۱۱.۵ انتگرالگیری از توانهای صحیح سینوس و کسینوس

مسأله انتگرالگیری از $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ را در چند حالت مجزا مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱۱.۵ اگر از بین m و n لااقل یکی فرد باشد. اگر n فرد باشد، فرض کنیم $u=\sin x$ و اگر m فرد باشد، فرض کنیم $u=\cos x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\sin^m x\cos^{2k+1}x\,dx &= \int\sin^m x(\cos^2 x)^k\cos x\,dx\\
&= \int\sin^m x(1-\sin^2 x)^k\,d(\sin x)\\
&= \int u^m(1-u^2)^k\,du=\int\sin^{2k+1}x\cos^n x\,dx\\
&= \int(\sin^2 x)^k\cos^n x\sin x\,dx\\
&= \int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\,d(\cos x)\\
&= -\int(1-u^2)^k u^n\,du
\end{aligned}$$

اکنون کافی است که از تابع کسری حاصل انتگرال بگیریم.

۲.۱۱.۵ مثال. ۱) در مورد انتگرال زیر $n=10$ و $m=3$ است. بنابراین فرض می‌کنیم $u=\cos x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\sin^3 x\cos^{10}x\,dx &= \int\sin^2 x\cos^{10}x\sin x\,dx\\
&= \int(1-u^2)u^{10}(-du)=\int u^{10}(u^2-1)du\\
&= \frac{u^{13}}{13}-\frac{u^{11}}{11}+C=\frac{1}{13}\cos^{13}x-\frac{1}{11}\cos^{11}x+C
\end{aligned}$$

مثال ۲) در مورد انتگرال زیر $n=5$ و $m=4$ است. بنابراین فرض می‌کنیم $u=\sin x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\sin^4 x\cos^5 x\,dx &= \int\sin^4 x(\cos^2 x)^2\cos x\,dx\\
&= \int u^4(1-u^2)^2du=\int u^4(u^4-2u^2+1)du\\
&= \frac{u^9}{9}-2\frac{u^7}{7}+\frac{u^5}{5}+C\\
&= \frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C
\end{aligned}$$

مثال ۳) در مورد انتگرال زیر $n=-5$ و $m=4$ است. بنابراین فرض می‌کنیم $u=\sin x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\,dx &= \int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\cos x\,dx\\
&= \int\frac{\sin^4 x}{(\cos^2 x)^3}\cos x\,dx=\int\frac{u^4du}{(1-u^2)^3}du\\
&= -\int\frac{u^4du}{(u-1)^3(u+1)^3}\\
&= -\int\Big\{\frac{1}{8}\frac{1}{(u-1)^3}+\frac{5}{16}\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{u-1}\\
&\quad -\frac{1}{8}\frac{1}{(u+1)^3}+\frac{5}{16}\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{3}{16}\frac{1}{u+1}\Big\}\,du\\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{5}{16}\frac{1}{u-1}-\frac{3}{16}\ln|u-1|\\
&\quad -\frac{1}{16}\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{5}{16}\frac{1}{u+1}+\frac{3}{16}\ln|u+1|+C\\
&= \frac{5u^3-3u}{16(u^2-1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C
\end{aligned}$$

مثال ۴) در مورد انتگرال زیر $m=-3$ و $n=-4$ است. بنابراین فرض می‌کنیم $u=\cos x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x} &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x\cos^4 x}\\
&= \int \frac{-d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2\cos^4 x} = -\int \frac{du}{u^4(u^2-1)^2}\\
&= -\int \left\{\frac{1}{u^4}+\frac{2}{u^2}+\frac{1}{4(u-1)^2}\right.\\
&\qquad \left. -\frac{5}{4(u-1)}+\frac{1}{4(u+1)^2}-\frac{5}{4(u+1)}\right\}\\
&= \frac{1}{3u^3}+\frac{2}{u}+\frac{1}{4(u-1)}+\frac{1}{4(u+1)}\\
&\qquad +\frac{5}{4}\ln|u-1|-\frac{5}{4}|u+1|+C\\
&= \frac{15u^4-10u^2-2}{6u^3(u^2-1)}+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C
\end{aligned}$$

۳.۱۱.۵ اگر m و n هر دو زوج و نا منفی باشند.

از فرمولهای زیر استفاده نموده و در صورت لزوم، به مراحل قبل رجوع می‌کنیم:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2},\qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2},$$
$$\sin x\cos x=\frac{\sin(2x)}{2}.$$

۴.۱۱.۵ مثال.

۱) در این حالت $n=2$ و $m=4$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx &= \int (\cos x\sin x)^2\sin^2 x\,dx\\
&= \int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\
&= \frac{1}{8}\int \left\{\sin^2(2x)-\sin^2(2x)\cos(2x)\right\}\,dx\\
&= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx-\frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\frac{1}{2}\,d(\sin(2x))\\
&= \frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\int \cos(4x)dx-\frac{1}{16}\frac{\sin^3(2x)}{3}+C\\
&= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin(4x)-\frac{1}{48}\sin^3(2x)+C
\end{aligned}$$

مثال ۲) در این حالت $n=0$ و $m=4$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left\{\cos^2(2x)-\cos(2x)+1\right\}\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int \left\{\frac{1+\cos(4x)}{2}-2\cos(2x)+1\right\}\,dx\\
&= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C
\end{aligned}$$

۵.۱۱.۵ اگر $m+n$ یک عدد صحیح زوج و منفی باشد.

در این حالت از تغییر متغیر $u=\tan x$ استفاده می‌کنیم.

۶.۱۱.۵ مثال.

۱) در این حالت $m=2$، $n=-4$ و $m+n=-2$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx &= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int u^2 du\\
&= \frac{u^3}{3}+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+C
\end{aligned}$$

مثال ۲) در این حالت $m=-4$، $n=-2$ و $m+n=-6$ و بنابراین

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x} &= \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\times\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\times\frac{dx}{\cos^2 x}\\
&= \int \frac{1}{u^2}(1+u^2)^2 du = \int \frac{u^4+2u^2+1}{u^2}du\\
&= \int \left(u^2+2+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{u^3}{3}+2u-\frac{1}{u}+C\\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C
\end{aligned}$$

مثال ۳) در این حالت $m=-\frac{1}{2}$، $n=-\frac{3}{2}$ و $m+n=-2$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos x\sin x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\frac{\sin x}{\cos x}\times\cos^2 x}\,dx\\
&= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{\tan x}+C
\end{aligned}$$

۷.۱۱.۵ اگر $m=-n$ و صحیح باشند.

در این حالت انتگرال مورد نظر $\int \tan^n x\,dx$ یا $\int \cot^m x\,dx$ است. در مورد اول از تغییر متغیر $u=\tan x$ و فرمول $\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ استفاده می‌کنیم و در مورد دوم از تغییر متغیر $u=\cot x$ و فرمول $\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$ استفاده می‌کنیم.

۸.۱۱.۵ مثال.

۱) در مورد تابع $\tan^4 x$ داریم

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\,dx &= \int \tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\
&= \int \tan^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int \tan^2 x\,dx\\
&= \int u^2du-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\
&= \int u^2du-\int du+\int dx=\frac{u^3}{3}-u+x+C\\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C
\end{aligned}$$

مثال ۲) در مورد تابع $\tan^5 x$ داریم

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,dx &= \int \tan^3 x \tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\ &= \int \tan^3 x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int \tan^3 x\,dx\\ &= \int u^3 du-\int \tan x\tan^2 x\,dx\\ &= \int u^3 du-\int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\ &= \int u^3 du-\int udu+\int \tan x\,dx\\ &= \frac{u^4}{4}-\frac{u^2}{2}-\ln|\cos x|+C\\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

مثال ۳) در مورد تابع $\cot^4 x$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x\,dx &= \int \cot^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx\\ &= \int \cot^2 x\frac{dx}{\sin^2 x}-\int \cot^2 x\,dx\\ &= \int u^2(-du)-\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)du\\ &= -\int u^2 du-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int dx\\ &= -\int u^2 du-\int udu+\int dx\\ &= -\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+x+C\\ &= -\frac{1}{3}\cot^3 x+\frac{1}{2}\cot^2 x+x+C\end{aligned}$$

۹.۱۱.۵ تمرین. هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$, ۲) $\int \cos^5 x\,dx$,

۳) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$, ۴) $\int \sin^5 x\cos^7 x\,dx$,

۵) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$, ۶) $\int \sin^8 x\,dx$,

۷) $\int \cos^6 x\,dx$, ۸) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$,

۹) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$, ۱۰) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$,

۱۱) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$, ۱۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$,

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$, ۱۴) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$,

۱۵) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}$, ۱۶) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}$,

۱۷) $\int \tan^6 x\,dx$ ۱۸) $\int \cot^6 x\,dx$,

۱۹) $\int \tan^3 x\,dx$, ۲۰) $\int \cot^3 x\,dx$,

۲۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$, ۲۲) $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$,

۲۳) $\int x\sin^4 x^2 dx$, ۲۴) $\int \cot^4(3x)dx$,

۲۵) $\int\left(\tan^2\frac{x}{3}+\tan^4\frac{x}{3}\right)dx$,

۲۶) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$.

۱۲.۵ انتگرالگیری از توابع گویای مثلثاتی

۱.۱۲.۵ روش. در محاسبه انتگرالهای به شکل $\int P\left(\sin x,\cos x\right)dx$، که در آن $P(x,y)$ تابعی گویا است، فرض می‌کنیم $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. در این صورت با جایگذاریهای زیر به انتگرالی از یک تابع کسری می‌رسیم:

$$\sin x=\frac{2u}{u^2+1},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{u^2+1},\quad dx=\frac{2\,du}{u^2+1},$$

۲.۱۲.۵ مثال. ۱) به کمک ۱.۱۲.۵ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} &= \int\frac{\frac{2du}{u^2+1}}{1+\frac{2u}{u^2+1}+\frac{1-u^2}{u^2+1}}\\ &= \int\frac{du}{u+1}=\ln|u+1|+C\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C\end{aligned}$$

مثال ۲) به کمک ۱.۱۲.۵ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx &= \int\frac{\frac{2u}{u^2+1}}{1-\frac{2u}{u^2+1}}\frac{2du}{u^2+1}\\ &= \int\frac{4udu}{(u+1)^2(u^2+1)}\\ &= \int\left\{\frac{2}{(u-1)^2}+\frac{-2}{u^2+1}\right\}du\\ &= \frac{-2}{u-1}-2\arctan u+C\\ &= \frac{-2}{\tan(x/2)-1}-x+C\end{aligned}$$

۳.۱۲.۵ روش. اگر در انتگرال $\int P(\sin x,\cos x)dx$ رابطهٔ تقارنی به شرح $P(-\sin x,\cos x) = P(\sin x,\cos x)$

برقرار باشد، فرض می‌کنیم $u=\tan x$. در این صورت با استفاده از جایگذاریهای زیر به انتگرال یک تابع کسری می‌رسیم:

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{u^{۲}+۱}},\quad \cos x=\frac{۱}{\sqrt{u^{۲}+۱}},\quad dx=\frac{du}{u^{۲}+۱},$$

۴.۱۲.۵ مثال. ۱) به کمک ۳.۱۲.۵ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sin^{۲}x+۱}&=\int\frac{\frac{du}{u^{۲}+۱}}{\frac{u^{۲}}{u^{۲}+۱}+۱}\\&=\int\frac{du}{۲u^{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\int\frac{d(\sqrt{۲}u)}{(\sqrt{۲}u)^{۲}+۱}\\&=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\arctan(\sqrt{۲}u)+C\end{aligned}$$

مثال ۲) به کمک ۳.۱۲.۵ داریم

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sin x^{۲}+۳\sin x\cos x-\cos^{۲}x}&=\\=\int\frac{\frac{du}{u^{۲}+۱}}{\frac{u^{۲}}{u^{۲}+۱}+۳\frac{u}{u^{۲}+۱}-\frac{۱}{u^{۲}+۱}}\\=\int\frac{du}{u^{۲}+۳u-۱}&=\int\frac{du}{(u+\frac{۳}{۲})^{۲}-(\frac{\sqrt{۱۳}}{۲})^{۲}}\\=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}\ln\left|\frac{u+\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{u+\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}\right|+C\\=\frac{\sqrt{۱۳}}{۱۳}\ln\left|\frac{۲\tan x+۳-\sqrt{۱۳}}{۲\tan x+۳+\sqrt{۱۳}}\right|+C\end{aligned}$$

۵.۱۲.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$, ۲) $\int\frac{dx}{۳+۵\cos x}$,

۳) $\int\frac{\sin x\,dx}{۱-\sin x}$, ۴) $\int\frac{\cos x\,dx}{۱+\cos x}$,

۵) $\int\frac{dx}{\cos x+۲\sin x+۳}$, ۶) $\int\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$,

۷) $\int\frac{dx}{۳\sin^{۲}x+۵\cos^{۲}x}$, ۸) $\int\frac{dx}{۳\cos^{۲}x+۱}$,

۹) $\int\frac{\sin^{۲}x\,dx}{۱+\sin^{۲}x}$, ۱۰) $\int\frac{dx}{\sin^{۴}x+\cos^{۴}x}$,

۱۱) $\int\frac{dx}{\sin^{۶}x+\cos^{۶}x}$, ۱۲) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$,

۱۳) $\int\frac{dx}{(\sin^{۲}x+۲\cos^{۲}x)^{۲}}$, ۱۴) $\int\frac{dx}{(۲\sin x+۳\cos x)^{۲}}$,

۱۵) $\int\frac{dx}{(۲+\cos x)\sin x}$, ۱۶) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^{۳}x+\cos^{۳}x}$.

۱۳.۵ انتگرالگیری از توابع مثلثاتی با زوایای متفاوت

۱.۱۳.۵ روش. در اینگونه موارد، از فرمولهای زیر استفاده می‌شود

$$\begin{aligned}\sin(mx)\cos(nx)&=\frac{۱}{۲}\Big(\sin\big((m-n)x\big)+\sin\big((m+n)x\big)\Big)\\\sin(mx)\sin(nx)&=\frac{۱}{۲}\Big(\cos\big((m-n)x\big)-\cos\big((m+n)x\big)\Big)\\\cos(mx)\cos(nx)&=\frac{۱}{۲}\Big(\cos\big((m-n)x\big)+\cos\big((m+n)x\big)\Big)\end{aligned}$$

۲.۱۳.۵ مثال. ۱) به کمک اولین فرمول داریم

$$\begin{aligned}\int\sin(۷x)\cos(۳x)dx&=\int\frac{۱}{۲}\Big(\sin(۴x)+\sin(۱۰x)\Big)\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\int\sin(۴x)\,dx+\frac{۱}{۲}\int\sin(۱۰x)\,dx\\&=-\frac{۱}{۸}\cos(۴x)-\frac{۱}{۲۰}\cos(۱۰x)+C\end{aligned}$$

مثال ۲) به کمک دومین فرمول داریم

$$\begin{aligned}&\int\sin(۱۰x)\sin(۱۵x)\,dx=\\&=\int\frac{۱}{۲}\left(\sin(-۵x)-\cos(۲۵x)\right)\,dx\\&=-\frac{۱}{۲}\int\sin(۵x)\,dx-\frac{۱}{۲}\int\cos(۲۵x)\,dx\\&=\frac{۱}{۱۰}\cos(۵x)-\frac{۱}{۵۰}\sin(۲۵x)+C\end{aligned}$$

مثال ۳) به کمک سومین فرمول داریم

$$\begin{aligned}\int\cos x\cos^{۲}(۳x)\,dx&=\int\cos x\frac{۱+\cos(۶x)}{۲}\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\int\cos x\,dx+\frac{۱}{۲}\int\cos x\cos(۶x)\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{۲}\left(\cos(۵x)+\cos(۷x)\right)\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{۴}\int\cos(۵x)\,dx+\frac{۱}{۴}\int\cos(۷x)\,dx\\&=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲۰}\sin(۵x)+\frac{۱}{۲۸}\sin(۷x)+C\end{aligned}$$

۳.۱۳.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int\sin(۳x)\cos(۵x)dx$, ۲) $\int\sin(۹x)\sin x\,dx$,

۳) $\int\sin x\sin(۲x)\sin(۳x)dx$, ۴) $\int\cos\left(\frac{x}{۲}\right)\sin\left(\frac{x}{۳}\right)\,dx$.

۱۴.۵ استفاده از تبدیلات مثلثاتی و هذلولوی برای انتگرالهای اصم

۱.۱۴.۵ روش. برای محاسبهٔ انتگرال به شکل $\int P(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ که $P(x,y)$ تابعی کسری است، بسته به اینکه عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c پس از مربع کامل کردن به یکی از سه صورت

$$1)\quad \int P\left(x,\sqrt{a^2-(cx+d)^2}\right)dx,$$

$$2)\quad \int P\left(x,\sqrt{a^2+(cx+d)^2}\right)dx,$$

$$3)\quad \int P\left(x,\sqrt{(cx+d)^2-a^2}\right)dx,$$

تبدیل گردد، می‌توان مفروضات زیر را انجام داد

۱) $cx+d=a\sin t$ یا $cx+d=a\tanh t$،

۲) $cx+d=a\tan t$ یا $cx+d=a\sinh t$،

۳) $cx+d=a\sec t$ یا $cx+d=a\cosh t$.

و پس از جایگذاری آن، به یک تابع کسری مثلثاتی و یا هذلولوی می‌رسیم.

۲.۱۴.۵ مثال. ۱) با فرض $x+1=\tan t$ داریم:

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$=\int\frac{(1+\tan^2 t)\,dt}{(\tan t)^2\sqrt{(\tan t)^2+1}}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\frac{1}{\cos t}}$$

$$=\int\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=\frac{-1}{\sin t}+C$$

$$=\frac{-1}{\frac{\tan t}{\sqrt{\tan^2 t+1}}}+C=\frac{-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$$

مثال ۲) با فرض $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t$ داریم:

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t-\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t dt$$

$$=\frac{3}{8}\int\left(\sqrt{3}\sinh t-1\right)\cosh^2 t dt$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\sinh t\cosh^2 t dt-\frac{3}{8}\int\cosh^2 dt$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\cosh^2 t d(\sinh t)-\frac{3}{8}\int\frac{1+\cosh(2t)}{2}dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cosh^3 t-\frac{3}{16}\sinh t\cosh t-\frac{3}{16}t+C$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}(1+\sinh^2 t)^{3/2}-\frac{3}{16}\sinh t(1+\sinh^2 t)^{1/2}$$

$$-\frac{3}{16}t+C$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(1+\frac{(2x+1)^2}{3}\right)^{3/2}$$

$$-\frac{3}{16}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\left(1+\frac{(2x+1)^2}{3}\right)^{1/2}$$

$$-\frac{3}{16}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

۳.۱۴.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\ \int\sqrt{x^2+2}\,dx,\qquad 2)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}},$$

$$3)\ \int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx,\quad 4)\ \int\sqrt{x^2-4}\,dx,$$

$$5)\ \int\sqrt{(x^2+x+1)^3}\,dx,\ 6)\ \int\sqrt{x^2-6x-7}dx,$$

$$7)\ \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}},\ 8)\ \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}},$$

$$9)\ \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}},\ 10)\ \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

۱۵.۵ انتگرالگیری توابع به شکل $P(x)\sin(ax)$ یا $P(x)\cos(ax)$

۱.۱۵.۵ روش. برای حل انتگرالهای به شکل $\int P(x)\cos(ax)\,dx$ یا $\int P(x)\sin(ax)\,dx$ که $P(x)$ یک چندجمله‌ای از مرتبهٔ n است، فرض می‌کنیم

$$I=Q(x)\cos(ax)+R(x)\sin(ax)+C$$

که در آن $Q(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ایهای مرتبهٔ n ام هستند. پس از فرض این تساوی و مشتقگیری از طرفین آن، ضرایب $\sin(ax)$ در دو طرف و نیز ضرایب $\cos(ax)$ در دو طرف را با هم برابر قرار می‌دهیم.

۲.۱۵.۵ مثال ۱). انتگرال $\int(x^2+3x+5)\cos(2x)\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم

$$\int(x^2+3x+5)\cos(2x)\,dx=$$

$$=(A_0x^2+A_1x+A_2)\cos(2x)$$

$$+(B_0x^2+B_1x+B_2)\sin(2x)+C$$

با مشتقگیری از طرفین این تساوی، داریم

$$\begin{aligned}(x^2+3x+5)\cos(2x) &= (2A_0x+A_1)\cos(2x)\\ &\quad -2(A_0x^2+A_1x+A_2)\sin(2x)\\ &= (2B_0x+B_1)\sin(2x)\\ &\quad +2(B_0x^2+B_1x+B_2)\cos(2x)\\ &= (2B_0x^2+2(A_0+B_1)x+A_0+2B_2)\cos(2x)\\ &\quad +(-2A_0x^2+2(B_0-A_1)x+B_1-2A_2)\sin(2x)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{array}{lll} 2B_0=1 & 2(A_1+B_1)=3 & A_1+2B_2=5\\ -2A_0=0 & 2(B_0-A_1)=0 & B_1-2A_2=0\end{array}$$

که از حل این دستگاه نتیجه می‌شود: $A_0=0$، $B_0=1/2$، $A_1=1/2$، $B_1=3/2$، $A_2=3/4$ و $B_2=9/4$. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}\int(x^2+3x+5)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{4}(2x+3)\cos(2x)\\ &\quad +\frac{1}{4}(2x^2+6x+9)\sin(2x)+C\end{aligned}$$

مثال ۲) انتگرال $\int x^3\sin x\,dx$ را محاسبه کنید.
حل. فرض کنیم

$$\begin{aligned}\int x^3\sin x\,dx &= (A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\cos x\\ &\quad +(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)\sin x+C\end{aligned}$$

با مشتقگیری از طرفین این تساوی، داریم

$$\begin{aligned}x^3\sin x &= (3A_0x^2+2A_1x+A_2)\sin x\\ &\quad +(A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\cos x\\ &\quad +(3B_0x^2+2B_1x+B_2)\cos x\\ &\quad -(B_0x^3+B_1x^2+B_2x+B_3)\sin x\\ &= (-B_0x^3+(3A_0-B_0)x^2\\ &\quad +(2A_1-B_2)x+(A_2-B_3))\sin x\\ &\quad +(-A_0x^3+(A_1+3B_0)x^2\\ &\quad +(A_2-2B_1)x+(A_3-B_2))\cos x\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{array}{lll} -B_0=1 & A_2-B_3=0 & A_2+2B_1=0\\ 3A_0-B_1=0 & A_0=0 & A_3+B_2=0=0\\ 2A1-B_2=0 & A_1+3B_0=0 & \end{array}$$

که از حل این دستگاه نتیجه می‌شود: $A_0=0$، $A_1=3$، $A_2=0$، $A_3=-6$، $B_0=-1$، $B_1=0$، $B_2=6$ و $B_3=0$. در نتیجه

$$\int x^3\sin x\,dx = 3(x^2-2)\sin x + x(6-x^2)\cos x + C$$

۳.۱۵.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای داده شده را حل کنید:

۱) $\int(x-1)^2\cos(3x)\,dx$ ۲) $\int x^4\cos x\,dx$

۳) $\int(x^3+5x+6)\cos x\,dx$ ۴) $\int x^2\sin x\cos(2x)\,dx$

۵) $\int(2x^3+3x^2-8x+1)\sin(2x)\,dx$

۶) $\int(x^2+2x-1)\sin^2 x\,dx$

۷) $\int(x^2+1)\cos(x-1)\,dx$

۸) $\int(x^3-1)\sin^2 x\cos(2x)\,dx$

۱۶.۵ فرمول جزء به جزء تعمیم یافته

قضیهٔ زیر را با استفادهٔ پی در پی از قضیهٔ جزء به جزء می‌شود اثبات نمود. این قضیه و نیز نتیجهٔ آن دارای کاربردهای فراوانی می‌باشند.

۱.۱۶.۵ قضیه. اگر $y=u(x)$ و $y=v(x)$ دو تابع باشند و تعریف کنیم

$$v_1(x)=\int v(x)dx, \qquad v_2(x)=\int v_1(x)dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad v_n(x)=\int v_{n-1}(x)dx$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\int u(x)v(x)dx &= u(x)v_1(x)-u'(x)v_2(x)\\ &\quad +u''(x)v_3(x)-\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v_n(x)\\ &\quad +(-1)^n\int u^{(n)}(x)v_n(x)\,dx\end{aligned}$$

۲.۱۶.۵ نتیجه. اگر $y=P(x)$ یک چند جمله‌ای مرتبهٔ n ام باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}&\int P(x)e^{ax}\,dx =\\ &= e^{ax}\left\{\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right\}+C\end{aligned}$$

$$\int P(x)\cos(ax)dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(ax)}{a}\left\{P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right\} \\ &\quad + \frac{\cos(ax)}{a}\left\{P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^3} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^5} - \cdots\right\} + C \end{aligned}$$

$$\int P(x)\sin(ax)dx =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\cos(ax)}{a}\left\{P(x) - \frac{P''x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right\} \\ &\quad + \frac{\sin(ax)}{a}\left\{P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^3} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^5} - \cdots\right\} + C \end{aligned}$$

۳.۱۶.۵ مثال. ۱) به کمک اولین فرمول ۲.۱۶.۵ داریم

$$\int x^3 e^{3x}\, dx = e^{3x}\left\{\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9} + \frac{6x}{27} - \frac{6}{81}\right\} + C$$

مثال ۲) به کمک دومین فرمول ۲.۱۶.۵ داریم

$$\begin{aligned} \int x^5\cos(2x)dx &= \frac{\sin(2x)}{2}\left\{x^5 - \frac{20x^3}{4} + \frac{120x}{16}\right\} \\ &\quad + \frac{\cos(2x)}{2}\left\{5x^4 - \frac{60x^2}{8} + \frac{120}{32}\right\} + C \\ &= \frac{1}{4}(2x^5 - 10x^3 + 15x)\sin(2x) \\ &\quad + \frac{5}{8}(4x^4 - 6x^2 + 3)\cos(2x) + C \end{aligned}$$

مثال ۳) به کمک اولین فرمول ۲.۱۶.۵ و با فرض $u = \ln x$، داریم

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^4 dx &= \int u^4 e^u du \\ &= e^u\left\{u^4 - 4u^3 + 12u^2 - 24u + 24\right\} + C \\ &= x\left\{\ln^4 x - 4\ln^3 x + 12\ln^2 x - 24\ln x + 24\right\} + C \end{aligned}$$

مثال ۴) به کمک سومین فرمول ۲.۱۶.۵ و با فرض $u = \sqrt{x}$، داریم

$$\begin{aligned} \int x^2\sin\sqrt{x}\,dx &= \int u^4 \sin u\, 2u dx \\ &= 2\int u^5 \sin u du \\ &= 2\Big\{-\cos u(u^5 - 20u^3 + 120u) \\ &\quad + \sin u(5u^4 - 60u^2 + 120)\Big\} + C \\ &= -2\sqrt{x}\Big\{(x^2 - 20x + 120)\cos\left(\sqrt{x}\right) \\ &\quad + 10(x^2 - 12x + 24)\sin\left(\sqrt{x}\right)\Big\} + C \end{aligned}$$

۴.۱۶.۵ تمرین. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int x^2 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx,$	۲) $\int (x^3 - 2x + 2)\sin x\, dx,$
۳) $\int xe^x \sin x\, dx,$	۴) $\int e^{ax}\cos^2(bx)dx,$
۵) $\int (1 + x^2)^2 \cos dx,$	۶) $\int x^2 e^x \cos x\, dx,$
۷) $\int x^7 e^{-x^2}\, dx,$	۸) $\int xe^x \sin^2 x\, dx.$

۱۷.۵ روش بازگشت

۱.۱۷.۵ محاسبهٔ $\int \tan^n x\, dx$. با توجه به اینکه $d(\tan x) = (1 + \tan^2 x)dx$، با فرض $I_n = \int \tan^n x\, dx$ داریم

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x(\tan^2 x + 1)\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \\ &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2} \end{aligned}$$

بعلاوه $I_0 = \int dx = x$ و

$$I_1 = \int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

۲.۱۷.۵ مثال. ۱) به کمک ۱.۱۷.۵ داریم

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x\, dx = I_5 &= \frac{1}{4}\tan^4 x - I_3 \\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x - \left(\frac{1}{2}\tan^2 x - I_1\right) \\ &= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + I_1 \\ &= \frac{1}{12}\tan^2 x(3\tan x + 4) - \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

مثال ۲) به کمک ۱.۱۷.۵ داریم

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x\, dx = I_6 &= \frac{1}{5}\tan^5 x - I_4 \\ &= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + I_2 \\ &= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - I_0 \\ &= \frac{1}{15}\tan x(3\tan^4 x - 5\tan^2 x + 15) + x + C \end{aligned}$$

۳.۱۷.۵ محاسبهٔ $\int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^n}$. فرض کنیم $a > ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ و $I_n = \int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^n}$. در این صورت با فرض $u = \frac{۱}{(x^۲+a^۲)^n}$ و $dv = dx$ و با استفاده از روش جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^۲+a^۲)^n} - \int x \frac{-۲nx}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^۲+a^۲)^n} + ۲n \int \frac{(x^۲+a^۲)-a^۲}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}} dx \\ &= \frac{x}{(x^۲+a^۲)^n} + ۲n \int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^n} \\ &\quad -۲na^۲ \int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^{n+۱}} \\ &= \frac{x}{(x^۲+a^۲)^n} + ۲nI_n - ۲na^۲ I_{n+۱} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$I_{n+۱} = \frac{۱}{۲na^۲} \frac{x}{(x^۲+a^۲)^n} + \frac{۲n-۱}{۲n} \frac{۱}{a^۲} I_n$$

و بعلاوه به ازای $n = ۱$ داریم

$$I_۱ = \int \frac{dx}{x^۲+a^۲} = \frac{۱}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

۴.۱۷.۵ مثال. با توجه به بحث بالا، با فرض $a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $u = x + \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^۲+x+۱)^۳} = I_۳ &= \frac{۱}{۴a^۲} \frac{u}{(u^۲+a^۲)^۲} + \frac{۳}{۴} \frac{۱}{a^۲} I_۲ \\ &= \frac{u}{۴a^۲(u^۲+a^۲)^۲} + \frac{۳}{۴a^۲} \left\{ \frac{۱}{۲a^۲} \frac{u}{u^۲+a^۲} + \frac{۱}{۲} \frac{۱}{a^۲} I_۱ \right\} \\ &= \frac{u}{۴a^۲(u^۲+a^۲)^۲} + \frac{۳u}{۸a^۴(u^۲+a^۲)} + \frac{۳}{۸a^۴} I_۱ \\ &= \frac{u}{۴a^۲(u^۲+a^۲)^۲} + \frac{۳u}{۸a^۴(u^۲+a^۲)} \\ &\quad + \frac{۳}{۸a^۴} . \frac{۱}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \\ &= \frac{۲x+۱}{۶(x^۲+x+۱)^۲} + \frac{۲x+۱}{۳(x^۲+x+۱)} \\ &\quad + \frac{۴\sqrt{۳}}{۹} \arctan\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۲x+۱)\right) + C \end{aligned}$$

۵.۱۷.۵ محاسبهٔ $\int \sin^n x\,dx$. فرض کنیم I_n انتگرال $\int \sin^n x\,dx$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-۱} x \sin x\,dx \\ &= -\int \sin^{n-۱} x d(\cos x) \\ &= -\sin^{n-۱} x \cos x + \int (n-۱) \sin^{n-۲} x \cos^۲ x\,dx \\ &= -\sin^{n-۱} x \cos x \\ &\quad +(n-۱) \int \sin^{n-۲} x(۱-\sin^۲ x) dx \\ &= -\sin^{n-۱} x \cos x + (n-۱) I_{n-۲} - (n-۱) I_n \end{aligned}$$

در نتیجه

$$I_n = \frac{-۱}{n} \sin^{n-۱} x \cos x + \frac{n-۱}{n} I_{n-۲}$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} I_۰ &= \int \sin x\,dx = \int dx = x + C \\ I_۱ &= \int \sin x\,dx = -\cos x + C \end{aligned}$$

۶.۱۷.۵ محاسبهٔ $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$**، که** m **و** n **اعداد صحیح مثبتند.** فرض کنیم $I_{m,n}$ نمایشگر انتگرال $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ باشد. در این صورت با فرض اینکه $P = \sin^{m-۱} x \cos^{n+۱} x$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= (m-۱) \cos x \sin^{m-۲} x \cos^{n+۱} x \\ &\quad -(n+۱) \sin x \sin^{m-۱} x \cos^n x \\ &= (m-۱) \sin^{m-۲} x \cos^{n+۲} x - (n+۱) \sin^m x \cos^n x \\ &= (m-۱) \sin^{m-۲} x \cos^n x(۱-\sin^۲ x) \\ &\quad -(n+۱) \sin^m x \cos^n x \\ &= (m-۱) \sin^{m-۲} x \cos^n x - (m+n) \sin^m x \cos^n x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sin^{m-۱} x \cos^{n+۱} x = (m-۱) I_{m-۲,n} - (m+n) I_{m,n}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{-۱}{m+n} \sin^{m-۱} x \cos^{n+۱} x \\ &\quad + \frac{m-۱}{m+n} I_{m-۲,n} \qquad (۱.۵) \end{aligned}$$

بصورت مشابه با فرض $P = \sin^{m+۱} x \cos^{n-۱} x$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= (m+۱) \cos x \sin^m x \cos^{n-۱} x \\ &\quad -(n-۱) \sin x \sin^{m+۱} x \cos^{n-۲} x \\ &= (m+۱) \sin^m x \cos^n x \\ &\quad -(n-۱) \sin^{m+۲} x \cos^{n-۲} x \\ &= (m+۱) \sin^m x \cos^n x \\ &\quad -(n-۱) \sin^m x(۱-\cos^۲ x) \cos^{n-۲} x \\ &= (m+n) \sin^m x \cos^n x \\ &\quad -(n-۱) \sin^m x \cos^{n-۲} x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x = (m+n) I_{m,n} - (n-1) I_{m,n-2}$$

و بنابراین

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \qquad (۲.۵)$$

بنابراین برای حل مسأله $I_{m,n}$، با استفادهٔ مکرر از فرمولهای (۱.۵) و (۲.۵) و کاستن مضارب دو از m و n، به یکی از چهار حالت زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
I_{0,0} &= \int dx = x + C \\
I_{1,0} &= \int \sin x\, dx = -\cos x + C \\
I_{0,1} &= \int \cos x\, dx = \sin x + C \\
I_{1,1} &= \int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C
\end{aligned}$$

۷.۱۷.۵ مثال. با استفاده از فرمولهای مشروح در بالا داریم:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = I_{4,2} &\overset{(1)}{=} \frac{-1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{2} I_{2,2} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{-1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{1}{4} I_{2,0} \right\} \\
&= \frac{-1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{8} \sin^3 x \cos x + \frac{1}{8} I_{2,0} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{-1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{8} \sin^3 x \cos x \\
&\quad + \frac{1}{8} \left\{ \frac{-1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_{0,0} \right\} \\
&= \frac{-1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{8} \sin^3 x \cos x \\
&\quad - \frac{1}{16} \sin x \cos x + \frac{1}{16} x + C
\end{aligned}$$

۸.۱۷.۵ محاسبهٔ $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$، که m و n اعداد صحیح‌اند و لااقل یکی از آنها منفی است. از فرمولهای (۱) و (۲) در قسمت ۶.۱۷.۵، می‌توان نتیجه گرفت که

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n} \qquad (۳.۵)$$

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m,n+2} \qquad (۴.۵)$$

با استفاده از این فرمولها می‌توان $I_{m,n}$ را به $I_{m',n'}$ تبدیل کرد که در آن m' و n' نامنفی‌اند.

۹.۱۷.۵ مثال. با استفاده از فرمولهای بالا داریم

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= I_{-4,-2} \\
&\overset{3.5}{=} \frac{-1}{3} \sin^{-3} x \cos^{-1} x + \frac{-4}{-3} I_{-2,-2} \\
&\overset{3.5}{=} \frac{-1}{3} \sin^{-3} x \cos^{-1} x \\
&\quad + \frac{4}{3} \left\{ -\sin^{-1} x \cos^{-1} x + 2 I_{0,-2} \right\} \\
&= \frac{-1}{3} \sin^{-3} x \cos^{-1} x \\
&\quad - \frac{4}{3} \sin^{-1} x \cos^{-1} x + \frac{8}{3} I_{0,-2} \\
&\overset{4.5}{=} \frac{-1}{3} \sin^{-3} x \cos^{-1} x - \frac{3}{4} \sin^{-1} x \cos^{-1} x \\
&\quad + \frac{8}{3} \left\{ \sin x \cos^{-1} x + (0) I_{0,0} \right\} \\
&= \frac{-1}{3 \sin^3 x \cos x} - \frac{4}{3 \sin x \cos x} - \frac{8 \sin x}{3 \cos x} + C
\end{aligned}$$

۱۰.۱۷.۵ تمرین. در هر مورد، یک فرمول بازگشتی ارائه دهید:

۱) $\int \cos^n x\, dx,$ ۲) $\int \sec^n x\, dx,$

۳) $\int \csc^n x\, dx,$ ۴) $\int x^n e^{ax}\, dx,$

۵) $\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ٦) $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n},$

۷) $\int x^a (\ln x)^n\, dx,$ ۸) $\int x^n e^{ax} \cos(bx)\, dx.$

۱۸.۵ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۱۸.۵ محاسبهٔ انتگرال. صورت کلی دستور محاسبهٔ انتگرال `int(f(x),x)` است، که در آن `f(x)` تابع مورد انتگرال و `x` متغیر انتگرالگیری است. اگر بجای `int` از `Int` استفاده شود، انتگرال به شکل نمادین نشان داده می‌شود و محاسبه نخواهد شد. برای محاسبهٔ آن کافی است از دستور `value` استفاده می‌کنیم. برای نمونه

$$\mathtt{int(x*sin(a*x),x)} \xmapsto{\text{میپل}} \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2}$$

$$\mathtt{int(x/(x^2-3*x+1),x)} \xmapsto{\text{میپل}}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+1\right)-\frac{3\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctanh}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}(2\mathrm{x}-3)\right)$$

$$\mathtt{Int(u*tan(u^2),u)} \xmapsto{\text{میپل}} \int \mathrm{u}\tan\left(\mathrm{u}^2\right)\mathrm{du}$$

$$\mathtt{value(Int(u*tan(u^2),u))} \xmapsto{\text{میپل}} -\frac{1}{2}\cos\left(\mathrm{u}^2\right)$$

۲.۱۸.۵ تغییر متغیر در انتگرال. صورت کلی دستور تغییر متغیر در انتگرال به شکل

`student[changevar](R(x,u),I(x),u)` است، که در آن `I(x)` انتگرالی است بر حسب متغیر x که می‌خواهیم تغییر متغیر در آن انجام دهیم، `R(x,u)` رابطه‌ای است که در آن u را بر حسب x بیان نموده‌ایم و u متغیر جدیدی است که باید انتگرال را بر حسب آن بنویسیم. برای نمونه، به کمک دستور

$$\mathtt{student[changevar](u=sin(x),Int((sin(x))\wedge 3cos(x),x),u)} \xmapsto{\text{میپل}} \int \mathrm{u}^3\,\mathrm{du}$$

در انتگرال $\int \sin^{3}(x)\cos(x)\,dx$ از تغییر متغیر $u=\sin x$ ایجاد نموده و به $\int u^{3}\,du$ می‌رسیم.

۳.۱۸.۵ روش جزء به جزء. صورت کلی دستور جزء به جزء در انتگرال به شکل

`student[intpart](I(x),u(x))` است، که به کمک آن در انتگرال I(x) فرض می‌شود `u=u(x)` و سپس از قاعدهٔ جزء به جزء $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ استفاده می‌شود. برای نمونه به کمک دستور

$$\mathtt{student[intpart](Int(x^k*In(x),x),ln(x))} \xmapsto{\text{میپل}} \frac{\ln(\mathrm{x})\mathrm{x}^{(\mathrm{k}+1)}}{\mathrm{k}+1}-\frac{\mathrm{x}^{(\mathrm{k}+1)}}{\mathrm{x}(\mathrm{k}+1)}\,\mathrm{dx}$$

در انتگرال $\int x^{k}\ln(x)\,dx$ از روش جزء به جزء با فرض $u=\ln(x)$ و $dv=x^{k}\,dx$ استفاده می‌شود.

۴.۱۸.۵ . در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۶

انتگرال معین

۱.۶ انتگرالپذیری

فرض کنید $y = f(x)$ تابعی است که بر بازهٔ $[a;b]$ تعریف می‌گردد. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = f(x)$، محور x ها، خط $x = a$ و خط $x = b$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم. مشکل از اینجا ناشی می‌شود که فعلاً تعریف دقیقی برای «مساحت» نداریم. پس باید ابتدا منظورمان از مساحت را کاملاً مشخص کنیم.

۱.۱.۶ تعریف. منظور از یک **افراز** برای بازهٔ $[a;b]$، دنباله‌ای صعودی از نقاط مانند

$$P \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

است. هر چنین افرازی، بازهٔ $[a;b]$ را به n قسمت بنام **زیر بازه** تقسیم می‌کند: $I_i = [x_{i-1};x_i]$ که $i = 1,2,\cdots,n$. طول بازهٔ i ام را با نماد $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ نشان می‌دهیم. در این صورت، n را **طول افراز** P نامیده و با نماد $\#P$ نشان می‌دهیم و **ظرافت افراز** P را با نماد $|P|$ نشان داده و به صورت

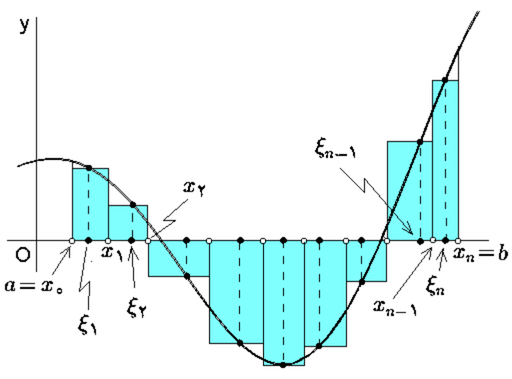
$$|P| := \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\right\}$ اعدادی دلخواه باشند که به ازاء هر i ای $\xi_i \in I_i$، در این صورت تعریف می‌کنیم $I(P,\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. این عدد را **مجموع انتگرالی** نظیر به افراز P و **نقاط میانی** ξ می‌نامیم.

۲.۱.۶ تعریف. در صورتی می‌گوئیم تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ **انتگرالپذیر** است و **انتگرال** آن برابر I است که بازاء هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای یافت شود که بازاء هر افراز $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ از $[a;b]$ که $|P| < \delta$ و بازاء هر انتخاب از نقاط میانی $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ داشته باشیم $\left|I(P,\xi) - I\right| < \varepsilon$. در این حالت I را **انتگرال** f **از** a **تا** b نامیده و با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم (به شکل ۱.۶ توجه شود)؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} I\Big(P,\xi\Big)$$

توجه شود که وقتی $|P|$ به صفر میل می‌کند، آنگاه $\#P$ خود به خود به بینهایت میل خواهد نمود.



شکل ۱.۶: تعریف انتگرال معین

مقدار یک انتگرال را در صورت وجود می‌توان از بالا و پائین تقریب زد. این کار با انتخاب مناسب نقاط میانی ξ صورت می‌پذیرد. روشن است که اگر $\xi_i \in I_i$ را طوری بگیریم که $f(\xi_i)$ حد اکثر شود، آنگاه $I(P,\xi)$ تقریب بالای انتگرال خواهد بود، و اگر $\xi_i \in I_i$ را طوری بگیریم که $f(\xi_i)$ حد اقل شود، آنگاه $I(P,\xi)$ تقریب پائین انتگرال خواهد بود. برای دقیقتر شدن بحث، تعریف زیر را می آوریم:

۳.۱.۶ تعریف. فرض کنیم $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ افرازی از بازهٔ $[a;b]$ است و

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\left\{f(x)\,\middle|\,x_{i-1} \le x \le x_i\right\} \\ m_i &= \inf\left\{f(x)\,\middle|\,x_{i-1} \le x \le x_i\right\} \end{aligned}$$

به ترتیب سوپرموم و اینفیموم مقدار تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $I_i = [x_{i-1}; x_i]$ باشند. (توجه شود که اگر f پیوسته باشد، آنگاه سوپرموم همان ماکزیموم و اینفیموم همان مینیموم می‌باشد.) اکنون **مجموع بالایی** و **مجموع پائینی** تابع f نسبت به افراز $[a;b]$ را به ترتیب، به صورت

$$\underline{I}(P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{و} \quad \overline{I}(P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که به ازای هر انتخاب دلخواه از اعداد میانی $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$، داریم

$$\underline{I}(P) \le I\big(P,\xi\big) \le \overline{I}(P).$$

انتگرال پائینی و **انتگرال بالایی** $y = f(x)$ از a تا b را بترتیب

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \lim_{|P|\to 0} \overline{I}(P) \quad \text{و} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \lim_{|P|\to 0} \underline{I}(P)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که اگر f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

ارتباط تنگاتنگی بین این سه مفهومِ انتگرال وجود دارد:

۴.۱.۶ قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود باشد این است که $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ و $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ موجود و برابر باشند. در این صورت مقدار هر سه انتگرال یکی می‌شود.

اثبات: الف) فرض کنیم $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$. فرض کنیم مقدار مشترک آنها ℓ است. بنابراین،

$$\ell = \lim_{|P|\to 0} \overline{I}(P) = \lim_{|P|\to 0} \underline{I}(P)$$

پس، به ازای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ ای وجود دارد که به ازای هر افراز P از $[a;b]$ که $|P| < \delta$ داریم

$$0 < \overline{I}(P) - \ell < \varepsilon \quad , \quad 0 < \ell - \underline{I}(P) < \varepsilon$$

اکنون به ازای هر انتخاب از نقاط میانی $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ برای افراز مفروض $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ که $|P| < \varepsilon$، داریم

$$\underline{I}(P) < \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le I(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{I}(P)$$

و در نتیجه

$$-\varepsilon = \underline{I}(P) - \ell < I(P,\xi) \le \overline{I}(P) - \ell < \varepsilon$$

و بنابراین $|I(P,\xi) - \ell| < \varepsilon$. در نتیجه $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ موجود و برابر ℓ است.

ب) فرض کنیم $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود و برابر ℓ است. اکنون به ازای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ ای وجود دارد که به ازای هر افراز $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ از $[a,b]$ با $|P| < \delta$ و هر انتخاب از نقاط میانی $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ برای P داریم $|I(P,\xi) - \ell| < \varepsilon$. به عبارت دیگر

$$-\frac{\varepsilon}{2} < I(P,\xi) - \ell < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.6}$$

با توجه به تعریف M_i، بازای $\varepsilon > 0$، یک $\xi \in [x_{i-1}; x_i]$ چنان وجود دارد که

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(\xi_i) < M_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i &< \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &< \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \end{aligned}$$

و بنابراین، با توجه به خاصیت سوپرموم، داریم

$$\overline{I}(P) - \frac{\varepsilon}{2} < I(P,\xi) < \overline{I}(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

و در نتیجه

$$-\frac{\varepsilon}{2} < I(P,\xi) - \overline{I}(P) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

اکنون، با توجه به (۱.۶) و (۲.۶) داریم $-\varepsilon < \overline{I}(P) - \ell < \varepsilon$. بنابراین $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim\limits_{|P|\to 0} \overline{I}(P) = \ell$. به صورت مشابه، اثبات می‌گردد که $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim\limits_{|P|\to 0} \underline{I}(P) = \ell$. □

۵.۱.۶ مثال ۱). فرض کنید $f(x) = x$. نشان دهید که f بر $[0;1]$ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال آن برابر ۱/۲ می‌باشد.

حل. فرض کنیم $P : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ افرازی برای $[0;1]$ است. در این صورت

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{x \,|\, x_{i-1} < x < x_i\} = x_{i-1} \\ M_i &= \sup\{x \,|\, x_{i-1} < x < x_i\} = x_i \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \overline{I}(P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 - x_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \le \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}\\
\underline{I}(P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i-\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2\\
&= 1-\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i\right\}\\
&\le 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

از طرفی، همواره $\underline{I}(P) \le \overline{I}(P)$. بنابراین، اثبات گردید که $\underline{I}(P)=\overline{I}(P)=1/2$ و بنابراین $f(x)=x$ بر $[0;1]$ انتگرالپذیر است و انتگرال آن برابر ۱/۲ می‌باشد.

مثال ۲) ثابت کنید که **تابع دریکله**

$$
\mathrm{Dri}(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}
$$

بر بازهٔ $[0,1]$ انتگرالپذیر نیست.

حل. برای این منظور، فرض کنیم P یک افراز دلخواه برای $[0,1]$ است. در بازهٔ $I_i=[x_{i-1};x_i]$ لااقل یک عدد گویا و لااقل یک عدد گنگ وجود دارد، بنابراین $M_i=1$ و $m_i=0$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_0^1}\mathrm{Dri}(x)\,dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i=(1-0)=1\\
\underline{\int_0^1}\mathrm{Dri}(x)\,dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i=0
\end{aligned}
$$

بنابراین، $y=\mathrm{Dri}(x)$ بر بازهٔ $[0;1]$ انتگرالپذیر نیست.

روشن است که تعریف بالا پیچیده‌تر از آن است که در این سطح از مطالعه بگنجد. در واقع مسألهٔ انتگرالپذیری (یعنی، وجود انتگرال) بسیار تکنیکی است و به همین دلیل با ذکر چند قضیه و یک قرارداد، موقتاً آنرا رفع نموده و در فصل هفتم (که به انتگرالهای ناسره می‌پردازد) مجدداً به آن باز خواهیم گشت. این کار باعث می‌شود که بتوانیم تمام نیرویمان را برای حل مسألهٔ انتگرالگیری (یعنی، یافتن انتگرال) معطوف کنیم.

۶.۱.۶ قضیه. اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ یکنوا و کراندار باشد، آنگاه انتگرالپذیر است.

اثبات: فرض کنید f بر بازهٔ $[a;b]$ صعودی و کراندار است. (اثبات حالت نزولی، مشابه است.) فرض کنید $P=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ افرازی برای $[a;b]$ است. در این صورت، اگر $|P|<\delta$، چون f صعودی است، داریم

$$
\begin{aligned}
\overline{I}(P)-\underline{I}(P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i\\
&< \delta\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\
&= \delta(f(b)-f(a))
\end{aligned}
$$

پس کافی است فرض شود $\delta=\varepsilon/(f(b)-f(a)+1)$ و برهان تمام است. □

۷.۱.۶ قضیه. اگر تابع $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته باشد، آنگاه انتگرالپذیر است.

اثبات: چون f بر $[a;b]$ پیوسته است، بر این بازه پیوستهٔ یکشکل است. در نتیجه، به ازای هر $\varepsilon>0$، یک $\delta>0$ وجود دارد که اگر $x,y\in[a;b]$ و $|x-y|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. حال فرض کنیم $P=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ افرازی برای $[a;b]$ با $|P|<\delta$ است. در این صورت، به دلیل پیوستگی f بر $[x_{i-1};x_1]$، اعداد $y_i,z_i\in[x_{i-1},x_i]$ ای وجود دارند، به گونه‌ای که $m_i=f(z_i)$ و $M_i=f(y_i)$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\overline{I}(P)-\underline{I}(P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}(f(y_i)-f(z_{i-1}))\Delta x_i\\
&\le \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i\\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon
\end{aligned}
$$

و برهان تمام است. □

۸.۱.۶ قضیه. اگر تابع $y=f(x)$ بر $[a;b]$ کراندار باشد و بجز در تعدادی متناهی نقطهٔ پیوسته باشد، آنگاه انتگرالپذیر است.

۹.۱.۶ نتیجه. اگر $y=f(x)$ یک تابع مقدماتی ۵.۷.۳ بر بازهٔ $[a;b]$ باشد، و نیز اگر $y=f(x)$ بر $[a;b]$ کراندار باشد، آنگاه انتگرالپذیر است.

این نتیجه شامل اکثر مثالهای این کتاب است. پس همهٔ آنها انتگرالپذیرند!؟ حکم کلی زیر در آنالیز ریاضی اثبات می‌گردد:

۱۰.۱.۶ قضیه. فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ کراندار است. شرط لازم و کافی برای اینکه f بر $[a;b]$ انتگرالپذیر باشد این است که بازاء هر $\varepsilon>0$ ای یک خانواده از بازه‌های بستهٔ

I_i چنان یافت شوند که $I_i \subseteq [a;b]$، مجموع طول I_i ها کمتر از ε شود و $\bigcup I_i$ شامل تمام نقاط ناپیوستگی f بر $[a;b]$ باشد.

۱۱.۱.۶ مثال ۱). فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\in\mathbb{Q} \text{ اگر} \\ ۰ & x\notin\mathbb{Q} \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت نشان دهید که $y=f(x)$ بر $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

حل. فرض کنیم $x_۰\neq ۰$، در این صورت $y=f(x)$ در $x_۰$ ناپیوسته است، زیرا دنباله‌ای از اعداد گنگ مانند $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ وجود دارد که به $x_۰$ همگرا است (چرا؟) در حالی که

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} ۰ = ۰\neq x_۰^۲=f(x_۰)$$

اما اگر $x_۰=۰$، آنگاه بازای هر $\varepsilon>۰$ ای و هر x ای که $|x-۰|<\delta=\sqrt{\varepsilon}$، داریم

$$\begin{aligned} |f(x)-f(۰)| &= f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\in\mathbb{Q} \text{ اگر} \\ ۰ & x\notin\mathbb{Q} \text{ اگر} \end{cases} \\ &\le x^۲<\delta^۲=\varepsilon \end{aligned}$$

در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۱۰.۱.۶، چون $y=f(x)$ در همه جا بجز $x_۰=۰$ ناپیوسته است و در نتیجه بر $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۲) نشان دهید که تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ بر هر بازهٔ بسته و متناهی، انتگرال‌پذیر است.

حل. فرض کنیم $I=[a;b]$، در این صورت ناپیوستگیهای $y=f(x)$ بر I عبارتند از نقاط صحیح در بازهٔ I، یعنی

$$I\cap\mathbb{Z}=\{n_۰,n_۰+۱,\cdots,n_۱\}$$

در این صورت مشاهده می‌گردد که اگر $\varepsilon>۰$ دلخواه باشد و بازای هر i ای

$$I_i:=\left[i-\frac{۱}{۲(n_۱-n_۰)\varepsilon}; i+\frac{۱}{۲(n_۱-n_۰)\varepsilon}\right]$$

آنگاه $I\cap\mathbb{Z}\subseteq I_{n_۰}\cup\cdots\cup I_{n_۱}$ و مجموع طول این بازه‌ها برابر است با $\varepsilon=\frac{۱}{(n_۱-n_۰)\varepsilon}\times(n_۱-n_۰)$. در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۱۰.۱.۶ تابع $y=f(x)$ بر I انتگرال‌پذیر است.

این مسأله را اینطور نیز می‌توان حل نمود که: $f(x)=[x]$ یکنوا است و لذا بنابه نتیجهٔ ۶.۱.۶ بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر است.

مثال ۳) نشان دهید تابع

$$f(x)=\begin{cases} \frac{n}{n+۲} & \frac{۱}{n+۱}<x\le\frac{۱}{n} \text{ اگر} \\ ۰ & x=۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

بر بازهٔ $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر است و بعلاوه $\int_۰^۱ f(x)\,dx=۱/۲$.

حل. روشن است که تابع f تنها در نقاط به شکل $۱/n$ که $n\in\mathbb{N}$، ناپیوسته است. بعلاوه $۰\le f(x)\le ۱$. بازه‌هایی به شرح زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} I_۱ &= \left[۱-\frac{۱}{۲m};۱\right], \\ I_۲ &= \left[\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶m};\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲m}\right]\cdots \\ I_n &= \left[\frac{۱}{n}-\frac{۱/n-۱/(n+۱)}{m};\frac{۱}{n}+\frac{۱/(n-۱)-۱/n}{m}\right] \\ I_{n+۱} &= \left[۰;\frac{۱}{n}-۲\frac{۱/n-۱/(n+۱)}{m}\right] \end{aligned}$$

در این صورت، به وضوح $۱/i\in I_i$، به ازای هر $i=۱,\cdots,n$. بعلاوه $۱/i\in I_{n+۱}$ به ازای هر $i>n$. همچنین

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{n+۱}(I_i \text{ طول}) &= \frac{۱}{۲m}+\frac{۲}{۳m}+\cdots \\ &\quad +\frac{۲}{m(n^۲-۱)}+\left(\frac{۱}{n}-\frac{۲}{mn(n+۱)}\right) \\ &\le \frac{۱}{۲m}+\frac{۱}{n}+\frac{۲}{m}\sum_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^۲-۱} \end{aligned}$$

اکنون با فرض $m\ge\varepsilon/(۴\sum_{k=۲}^{n}۱/(k^۲-۱))$، $n\ge ۴/\varepsilon$ و $m\ge ۲n$، داریم $\sum_{i=۱}^{n+۱}(I_i \text{ طول})<\frac{۳}{۴}\varepsilon<\varepsilon$. یعنی، شرایط قضیهٔ ۱۰.۱.۶ برقرار است. پس، f بر $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر است. بعلاوه

$$\begin{aligned} \int_۰^۱ f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{۱/(n+۱)}^{۱} f(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\int_{۱/(n+۱)}^{۱/n}\frac{n}{n+۲}\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n+۲}\right)=\frac{۱}{۲} \end{aligned}$$

۱۲.۱.۶ تمرین.

۱) با استفاده از ۷.۱.۶ ثابت کنید تابع $f(x)=۳x-۱$ بر بازهٔ $[۰;۳]$ انتگرال‌پذیر است، سپس مقدار انتگرال آن را با استفاده از ۱۴.۱.۶ محاسبه کنید.

۲) ثابت کنید تابع:

$$f(x)=\begin{cases} [\sin(۱/x)] & x\neq۰ \text{ اگر} \\ ۰ & x=۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

بر بازهٔ $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۳) ثابت کنید تابع $f(x)=x^۲$ بر بازهٔ $[۰;۱]$ انتگرال‌پذیر است، سپس مقدار انتگرال آن را محاسبه کنید.

۴) ثابت کنید $f(x) = \sin x$ بر $[0;2\pi]$ انتگرالپذیر است و انتگرال آن برابر صفر است.

۵) نشان دهید که تابع زیر بر هر بازهٔ بستهٔ دلخواه انتگرالپذیر است:
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x\notin\mathbb{Q}\\ 1/n & \text{اگر } x=m/n\in\mathbb{Q},\ (m,n)=1\end{cases}$$

۶) نشان دهید که تابع زیر بر بازهٔ $[0;1]$ انتگرالپذیر است:
$$f(x)=\begin{cases} 1/x-[1/x] & \text{اگر } x\neq 0\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$

۷) با فرض اینکه $\sum_{i=1}^{\infty} 1/n^2=\pi^2/6$، نشان دهید تابع
$$f(x)=\begin{cases} 1/n & \text{اگر } 1/(n+1)<x\leq 1/n\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$
بر بازهٔ $[0;1]$ انتگرالپذیر است و بعلاوه $\int_0^1 f(x)\,dx$ برابر $\pi^2/6-1$ است.

۸) با فرض $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$، نشان دهید که تابع
$$f(x)=\begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{اگر } 1/(n+1)<x\leq 1/n\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$
بر بازهٔ $[0;1]$ انتگرالپذیر است و بعلاوه $\int_0^1 f(x)\,dx$ برابر $2\ln 2-1$ است.

۹) فرض کنید a یک عدد طبیعی بزرگتر از یک است. نشان دهید که تابع
$$f(x)=\begin{cases} a^{1-n} & \text{اگر } a^{-n}<x\leq a^{1-n}\\ 0 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$
بر بازهٔ $[0;1]$ انتگرالپذیر است و بعلاوه $\int_0^1 f(x)\,dx$ برابر $a/(a+1)$ است.

۱۳.۱.۶ قرارداد. از این پس، تا پایان فصل حاضر، فرض بر این است که تمام انتگرالهای مطرح شده موجودند.

در صورتی که وجود انتگرال تضمین شده باشد، قضیهٔ زیر روش ساده‌تری را برای محاسبهٔ انتگرال ارائه می‌دهد. اثبات این قضیه به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده.

۱۴.۱.۶ قضیه. اگر تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\end{aligned}$$

۱۵.۱.۶ مثال. ۱) با فرض انتگرالپذیر بودن تابع $f(x)=2x+3$ بر بازهٔ $[-1;2]$، انتگرال $y=f(x)$ از -1 تا ۲ را محاسبه کنید.

حل. به کمک اولین فرمول ۱۴.۱.۶ داریم
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2-(-1)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(-1+i\frac{2-(-1)}{n}\right)\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{2\left(-1+\frac{3i}{n}\right)+3\right\}\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1+18\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}n+18\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= 3+9=12\end{aligned}$$

مثال ۲) با فرض انتگرالپذیر بودن تابع $f(x)=x^2$ بر بازهٔ $[0;1]$، انتگرال $y=f(x)$ از ۰ تا ۱ را محاسبه کنید.

حل. به کمک دومین فرمول ۱۴.۱.۶ داریم
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(0+i\frac{1-0}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

عمده‌ترین کاربرد این قضیه در محاسبهٔ حد مجموعها است، که البته برای معرفی آن نیاز به تکمیل اطلاعات در خصوص انتگرال دارد (به ۵.۳.۶ توجه شود).

۱۶.۱.۶ تمرین. با فرض وجود انتگرالهای داده شده، مقدار هر یک از آنها را بکمک ۱۴.۱.۶ محاسبه کنید:

۱) $\int_0^1 x\,dx$, ۲) $\int_1^3 (2x-1)\,dx$,

۳) $\int_1^2 x^2\,dx$, ۴) $\int_0^1 (x^2-3x+1)\,dx$.

۲.۶ خواص انتگرال معین

۱.۲.۶ تعریف. در صورتی که $a<b$، تعریف می‌کنیم $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ بعلاوه، اگر $a=b$، آنگاه تعریف می‌کنیم $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

۲.۲.۶ قضیهٔ. به ازای توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و عداد دلخواه a، b، c (که $a<b<c$) و α، داریم

۱) $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$

۲) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$

۳) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$

۴) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

۵) اگر M و m بترتیب ماکزیموم مینیموم f بر $[a;b]$ باشند، آنگاه
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

۶) اگر به ازای هر $x\in[a;b]$ ای $f(x)\le g(x)$، آنگاه
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

۷) اگر f و g بر $[a;b]$ انتگرالپذیر باشند، آنگاه fg نیز بر $[a;b]$ انتگرالپذیر است.

اثبات: تنها احکام (۲) و (۵) را اثبات می‌کنیم و سایر موارد را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. روشن است که اگر حکم (۲) را برای حالت $+$ اثبات کنیم و سپس از حکم (۱) استفاده کنیم، حالت $-$ نیز اثبات می‌گردد. فرض کنیم f و g بر $[a;b]$ انتگرالپذیرند و $\varepsilon>0$ دلخواه است. بنابراین، عدد $\delta_1>0$ ای چنان یافت می‌شود که به ازای هر افراز P از $[a;b]$ با $|P|<\delta_1$ داریم $\overline{I}_f(P)-\underline{I}_f(P)<\varepsilon/2$. به صورت مشابه، $\delta_2>0$ ای چنان یافت می‌شود که به ازای هر افراز P از $[a;b]$ با $|P|<\delta_2$ داریم $\overline{I}_g(P)-\underline{I}_g(P)<\varepsilon/2$. در این صورت، به ازای هر افراز P از $[a;b]$ با $|P|<\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ داریم

$$\begin{aligned}
\overline{I}_{f+g}(P)-\underline{I}_{f+g}(P) &= \sup\left\{f(x)+g(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}\\
&\quad -\inf\left\{f(x)+g(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}\\
&\le \sup\left\{f(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}+\sup\left\{g(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}\\
&\quad -\inf\left\{f(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}-\inf\left\{g(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}\\
&= \left(\overline{I}_f(P)-\underline{I}_f(P)\right)+\left(\overline{I}_g(P)-\underline{I}_g(P)\right)\\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

و به این ترتیب (۲) اثبات شد.

برای اثبات (۵) کافی است توجه شود که اگر P افرازی برای $[a;b]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \overline{I}(P) = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n M\Delta x_i$$
$$= M\sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a)$$

به صورت مشابه اثبات می‌گردد که $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

۳.۲.۶ قضیهٔ مقدار میانگین. ۱) اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر $[a;b]$ انتگرالپذیر، M و m به ترتیب ماکزیموم و مینیموم g بر $[a;b]$ باشند و f بر $[a;b]$ تغییر علامت ندهد، آنگاه عددی مانند ℓ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \ell\int_a^b f(x)\,dx,\quad m\le\ell\le M$$

۲) اگر g پیوسته باشد، عددی مانند c وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(c)\int_a^b f(x)\,dx,\quad a\le c\le b$$

۳) اگر f و g بر $[a;b]$ انتگرالپذیر و g بر آن بازه مثبت و اکیداً نزولی باشد، آنگاه عدد c ای وجود دارد که $a\le c\le b$ و

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx$$

در حالت f نزولی، داریم

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

۴) اگر $y=f(x)$ بر $[a;b]$ انتگرالپذیر و $y=g(x)$ بر آن بازه یکنوا باشد، آنگاه عدد c ای وجود دارد که $a\le c\le b$ و

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

اثبات: (۱) بدون کاسته شدن از کلیت بحث، فرض می‌کنیم f بر $[a;b]$ نامنفی است. در این صورت، اگر M و m بترتیب حد اقل و حد اکثر مقدار تابع g بر $[a;b]$ باشند، آنگاه به ازای هر x ای $n\le g(x)\le M$ یا $mf(x)\le f(x)g(x)\le Mf(x)$. پس بنابه قسمت (۶) از قضیهٔ ۳.۲.۶ داریم

$$m\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b f(x)\,dx$$

بنابراین عدد $\mu := \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)\div\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$ بین m و M قرار دارد.

(۲) بنابه قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته، از پیوستگی g بر $[a;b]$ نتیجه می‌گیریم که $c\in[a;b]$ ای چنان وجود دارد که $\mu=g(c)$.

(۳) اثبات این حکم از حوصلهٔ این کتاب خارج است و در آنالیز ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد.

(۴) از حکم (۳) در مورد انتگرال $\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,dx$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، عددی c وجود دارد که $a \leq c \leq b$ و

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,dx = (g(a)-g(b))\int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx - g(b)\int_a^b f(x)\,dx = $$
$$= (g(a)-g(b))\int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

و برهان تمام است. □

۴.۲.۶ مثال. ۱) فرض کنیم $f(x) = \sqrt{۳+x^۲}$، $a=-۱$ و $b=۰$. در این صورت

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{\sqrt{۳+x^۲} \mid -۱ \leq x \leq ۰\right\} \\ &= \sqrt{۳+۱} = ۲ \\ m &= \min\left\{\sqrt{۳+x^۲} \mid -۱ \leq x \leq ۰\right\} \\ &= \sqrt{۳+۰^۲} = \sqrt{۳} \end{aligned}$$

در نتیجه، با استفاده از فسمت (۶) از قضیهٔ ۲.۲.۶ داریم

$$\sqrt{۳} \leq \int_{-۱}^{۰} \sqrt{۳+x^۲}\,dx \leq ۲$$

مثال ۲) فرض کنید $f(x) = \sin x$، $g(x) = ۱/(۱+x^۲)$، $a=۰$ و $b = ۲\pi$. بنابراین، مطابق قسمت اول از قضیهٔ ۳.۲.۶ یک c ای هست که $۰ \leq c \leq \pi$ و

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{\sin x}{۱+x^۲}\,dx = \frac{۱}{۱+c^۲}\int_۰^{۲\pi} \sin x\,dx$$

اما $\int_۰^{۲\pi} \sin x\,dx = ۰$، در نتیجه $\int_۰^{۲\pi} \frac{\sin x}{۱+x^۲} = ۰$.

مثال ۳) مقدار $\int_۰^۲ [۲x]\,dx$ را محاسبه کنید. با توجه به قسمت (۳) از قضیهٔ ۱.۲.۶ داریم

$$\begin{aligned} \int_۰^۲ [۲x]\,dx &= \int_۰^{۱/۲} [۲x]\,dx + \int_{۱/۲}^{۱} [۲x]\,dx \\ &\quad + \int_۱^{۳/۲} [۲x]\,dx + \int_{۳/۲}^{۲} [۲x]\,dx \\ &= \int_۰^{۱/۲} ۰\,dx + \int_{۱/۲}^{۱} dx \\ &\quad + \int_۱^{۳/۲} ۲\,dx + \int_{۳/۲}^{۲} ۳\,dx \\ &= ۰\left(\frac{۱}{۲}-۰\right) + ۱\left(۱-\frac{۱}{۲}\right) \\ &\quad + ۲\left(\frac{۳}{۲}-۱\right) + ۳\left(۲-\frac{۳}{۲}\right) = ۳ \end{aligned}$$

مثال ۴) نشان دهید که به ازای هر $x > ۰$ ای

$$\frac{x}{x+۱} < \ln(x+۱) < x$$

حل. در قسمت (۲) از ۳.۲.۶ فرض کنیم $f(x) = ۱/(x+۱)$، $g(x) = ۱$، $a = ۰$ و $b = x$. در این صورت، داریم

$$\begin{aligned} m &= \inf\left\{\frac{۱}{t+۱} \,\middle|\, ۰ < t \leq x\right\} = \frac{۱}{x+۱} \\ M &= \sup\left\{\frac{۱}{t+۱} \,\middle|\, ۰ < t \leq x\right\} = ۱ \end{aligned}$$

و لذا λ ای هست که $m \leq \lambda \leq M$ و $\int_۰^x \frac{dt}{t+۱} = \lambda \int_۰^x dt$. یعنی $\ln(x+۱) = \lambda x$ و $۱/x+۱ \leq \lambda \leq ۱$. بنابراین حکم مورد نظر نتیجه می‌شود.

۵.۲.۶ تمرین. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را با استفاده از تعریف و خواص گفته شدهٔ انتگرال محاسبه کنید:

۱) $\int_۰^{۲\pi} \cos x\,dx$　　۲) $\int_۲^۱ \sqrt{۴-x^۲}\,dx$

۳) $\int_۰^۱ \left[۳x^۲+۱\right]\,dx$　　۴) $\int_۰^{\pi} [۲\sin x]\,dx$

مقدار تقریبی هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۵) $\int_{\pi/۴}^{\pi/۳} \frac{\sin x}{x}\,dx$　　۶) $\int_۰^۲ \frac{x^۲+۵}{x^۲+۲}\,dx$

۷) $\int_۰^۱ \frac{x^۷\,dx}{\sqrt[۳]{۱+x^۸}}$　　۸) $\int_۰^۱ e^{x^۲}\,dx$

۹) (نامساوی بنیاکفسکی ــ شوارتز) ثابت کنید که اگر f و g بر $[a;b]$ انتگرالپذیر باشند، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^۲(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^۲(x)\,dx\right)}$$

۱۰) ثابت کنید که اگر تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ صعودی و مقعر باشد، آنگاه

$$(b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{۲}$$

و نیز اگر f صعودی و محدب باشد، آنگاه

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{۲} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)f(b)$$

علامت هر یک از انتگرالهای زیر را مشخص کنید:

۱۱) $\int_۰^{\pi/۲} \sin^{۱۰} x\,dx$　　۱۲) $\int_۰^{\pi} e^{-x^۲}\cos^۲ x\,dx$

۱۳) $\int_۰^۱ e^{-x}\,dx$　　۱۴) $\int_۰^{\pi} e^{-x^۲}\cos x\,dx$

هر یک تساویهای زیر را ثابت کنید که

۱۵) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = 0$

۱۶) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$

۱۷) $\lim_{4\to 0^+}\int_0^{1}\frac{dx}{3x^3+1} = 1$

۱۸) $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۱۹) قسمت (۱) از قضیهٔ ۳.۲.۶ را اثبات کنید.

۲۰) قسمت (۳) از قضیهٔ ۳.۲.۶ را اثبات کنید.

۲۱) قسمت (۴) از قضیهٔ ۳.۲.۶ را اثبات کنید. (راهنمایی: از این نکته استفاده کنید که اگر فرض شود $f^+ := (|f|+f)/2$ و $f^- := (|f|-f)/2$، آنگاه $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$.)

۲۲) قسمت (۶) از قضیهٔ ۳.۲.۶ را اثبات کنید.

۲۳) قسمت (۷) از قضیهٔ ۳.۲.۶ را اثبات کنید. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که اگر f انتگرالپذیر باشد، آنگاه f^2 نیز هست و سپس $fg = \left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)/2$)

۳.۶ قضیهٔ نیوتن – لایبنیتز

هدف از این بخش، ایجاد ارتباط بین مفهوم انتگرال معین و انتگرال نامعین است.

۱.۳.۶ قضیهٔ وجود پاد مشتق یک تابع پیوسته.

فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;b]$ پیوسته است و بازای هر $x \in [a;b]$ ای $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

در این صورت $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ بر $(a;b)$ است، یعنی بازای هر $x \in (a;b)$ ای $F'(x) = f(x)$.

اثبات: گیریم $c \in [a;b]$ و $\varepsilon > 0$. چون f انتگرالپذیر است، پس کراندار می‌باشد و بنابراین عددی مانند M به گونه‌ای وجود دارد که به ازای هر $x \in [a;b]$ ای $|f(x)| \le M$. فرض کنیم $\delta = \varepsilon/(M+1)$. در این صورت، اگر $|y-c| < \delta$ و $y \in [a;b]$، آنگاه

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(c)| &= \left|\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^y f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_c^y f(x)\,dx\right| \\
&\le M|y-c| \le M\delta \\
&= \frac{M\varepsilon}{M+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

و در نتیجه F در c پیوسته است.

حال فرض کنیم f در $c \in (a;b)$ پیوسته باشد. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه، یک $\delta > 0$ ای وجود دارد که اگر $y \in [a;b]$ و $|y-c| < \delta$، آنگاه $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. در این صورت، اگر $c < y < c+\delta$، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(y)-F(c)}{y-c} - f(c)\right| = \\
&= \frac{1}{y-c}\left|F(y) - F(c) - (y-c)f(c)\right| \\
&= \frac{1}{y-c}\left|\int_c^y f(x)\,dx - (y-c)f(c)\right| \\
&= \frac{1}{y-c}\left|\int_c^y f(x)\,dx - \int_c^y f(c)\,dx\right| \\
&= \frac{1}{y-c}\left|\int_c^y \Big(f(x) - f(c)\Big)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{y-c}\int_c^y \Big|f(x) - f(c)\Big|\,dx \\
&< \frac{1}{y-c}\int_c^y \varepsilon\,dx \\
&= \frac{1}{y-c}(y-c)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

به صورت مشابه حالت $c - \delta < y < c$ اثبات می‌گردد و برهان تمام است. □

۲.۳.۶ قضیهٔ نیوتن – لایبنیتز. اگر $F(x)$ یک تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ بر بازهٔ $(\alpha;\beta)$ باشد و $[a;b] \subseteq (\alpha;\beta)$، آنگاه

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

عبارت سمت راست تساوی بالا را با نماد $\Big[F(x)\Big]_a^b$ و یا $F(x)\Big|_a^b$ نمایش می‌دهند.

اثبات: فرض کنید $P = \{x_i\}_{i=1}^n$ افرازی برای بازهٔ $[a;b]$ است. در این صورت، به ازای هر $i = 1,\cdots n$ ای بنابه قضیهٔ لاگرانژ، عددی مانند t_i وجود دارد که $x_{i-1} < t_i < x_i$ و

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

پس، در مجموع داریم

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

بنابراین، اگر فرض شود $\xi=\{t_i\}_{i=1}^{n}$، آنگاه

$$F(b)-F(a)=L(P,\xi)$$

در نتیجه $\underline{I}(P)\leq F(b)-F(a)\leq \overline{I}(P)$. اکنون، با حد گیری از طرفین برای $|P|\to 0$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \lim_{|P|\to 0}\overline{I}(P) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۳.۳.۶ مثال. ۱) با توجه به $\int \cos x\,dx=\sin x+C$، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx &= \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin 0 = 1 \end{aligned}$$

مثال ۲) با توجه به $\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x}\,dx &= \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -e^{-1}+e^{0} = 1-\frac{1}{e} \end{aligned}$$

مثال ۳) با توجه به $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(x)+C$، داریم

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \Big[\arcsin x\Big]_{1/2}^{1} \\ &= \arcsin(1)-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

مثال ۴) با توجه به $\int x\cos x\,dx = x\sin x+\cos x+C$، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\cos x\,dx &= \Big[x\sin x+\cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= (-1)-(1)=-2 \end{aligned}$$

۴.۳.۶ قضیه. اگر توابع $f(x,t)$، $a(x)$ و $b(x)$ نسبت به x مشتقپذیر باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) &= b'(x)\ f(x,b(x)) \\ &\quad -a'(x)\ f(x,a(x))+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt \end{aligned}$$

که در اینجا $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ مشتق $f(x,t)$ نسبت به x و با فرض ثابت بودن t است.

۵.۳.۶ مثال. ۱) به کمک ۴.۳.۶ داریم

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\sin(xt)\,dt = \\ &= 2x\sin(xx^2)-\sin(xx)+\int_x^{x^2} t\cos(xt)\,dt \\ &= 2x\sin(x^3)-\sin(x^2)+\int_x^{x^2} t\cos(tx)\,dx \end{aligned}$$

مثال ۲) به کمک ۴.۳.۶ و قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\ln(x+t)\,dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(x+\sqrt{x}\right) \\ &\quad -\frac{-1}{x^2}\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)+\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\frac{dt}{x+t} \\ &= \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}+\frac{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^2}+\Big[\ln(x+t)\Big]_{1/x}^{\sqrt{x}} \\ &= \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

مثال ۳) به کمک ۴.۳.۶ و قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3} &\overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال ۴) به کمک ۴.۳.۶ و قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(\arctan t)^2\,dt}{x^3\sqrt{x^2+1}} &\overset{\text{ه}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}+3x^2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)^2}{3x^2}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال ۵) با فرض $f(x) = ۱/(x+۱)$ بر بازهٔ $[۰;۱]$ و با استفاده از ۱۴.۱.۶ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{n+n}\right\} &= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left\{\frac{۱}{۱+\frac{۱}{n}}+\frac{۱}{۱+\frac{۲}{n}}+\cdots+\frac{۱}{۱+\frac{n}{n}}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{k}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(۰+k\frac{۱-۰}{n})} \\
&= \int_۰^۱\frac{dx}{۱+x} = \Big[\ln|۱+x|\Big]_۰^۱ = \ln ۲
\end{aligned}$$

مثال ۶) با فرض $p>۰$، $f(x)=x^p$، $b=۱$ و $a=۰$ در ۱۴.۱.۶ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{۱^p+۲^p+\cdots+n^p}{n^{p+۱}} &= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left\{\left(\frac{۱}{n}\right)^p+\left(\frac{۲}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left(۰+k\frac{۱-۰}{n}\right)^p \\
&= \int_۰^۱ x^p\,dx \\
&= \left[\frac{x^{p+۱}}{p+۱}\right]_۰^۱ = \frac{۱}{p+۱}
\end{aligned}$$

مثال ۷) مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+n)}$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم

$$a_n := \frac{۱}{n}\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+n)}$$

و $\ell := \lim_{n\to\infty} a_n$. در این صورت به دلیل پیوستگی $y=\ln x$، داریم

$$\begin{aligned}
\ln\ell &= \ln\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\ln(a_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۱}{n}(\ln(n+۱)+\ln(n+۲)+\cdots \right.\\
&\qquad \left. +\ln(n+n)) - \ln n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\Big\{\ln(n+۱)+\ln(n+۲)+\cdots \\
&\qquad \cdots+\ln(n+n)-n\ln n\Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\Big\{\ln\left(\frac{n+۱}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+۲}{n}\right)+\cdots \\
&\qquad \cdots+\ln\left(\frac{n+n}{n}\right)\Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{۱-۰}{n}\sum_{k=۱}^{\infty}\ln\left(۱+\left\{۰+k\frac{۱-۰}{n}\right\}\right) \\
&= \int_۰^۱\ln(۱+x)\,dx \\
&= \Big[x\ \ln(۱+x)\Big]_۰^۱ - \int_۰^۱ x\frac{۱}{x+۱}\,dx \\
&= \ln ۲ - \int_۰^۱\left\{۱-\frac{۱}{x+۱}\right\}dx \\
&= \ln ۲ - \Big[x-\ln(۱+x)\Big]_۰^۱ = ۲\ln ۲ - ۱
\end{aligned}$$

بنابراین $\ell = \exp(۲\ln ۲ - ۱) = ۴/e$.

۶.۳.۶ تمرین. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int_{-۱/۲}^{۱/۲}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۲) $\int_{-۱}^{۸}\sqrt[۳]{x}\,dx$

۳) $\int_{\sinh ۱}^{\sinh ۳}\frac{dx}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۴) $\int_{\pi/۲}^{۳\pi/۲}\sin x\,dx$

۵) $\int_۰^۲|۱-x|\,dx$ ۶) $\int_{\sqrt{۳}/۳}^{\sqrt{۳}}\frac{dx}{x^۲+۱}$

۷) $\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^۲+x+۱}$ ۸) $\int_۰^{۲\pi}\frac{dx}{\cos x+۱}$

۹) $\int_۰^۱\arctan x\,dx$ ۱۰) $\int_۱^۲\frac{dx}{x^۳+x^۲}$

۱۱) $\frac{d}{dx}\int_a^b\sin x^۲t\,dt$ ۱۲) $\frac{d}{dx}\int_a^x\sin t\,dt$

۱۳) $\frac{d}{dx}\int_{x^۲}^{x^۳}\ln(x^۲+t^۲)\,dt$ ۱۴) $\frac{d}{dx}\int_x^۲\frac{x\,dt}{\sqrt{x^۲+t^۴}}$

۱۵) $\frac{d}{dx}\int_۰^۲\frac{\arctan(xt)}{t}\,dt$

مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

۱۶) $\lim_{x\to۰}\frac{\int_۰^x(\arctan t)^۳\,dt}{x\sqrt{x^۲+۱}}$ ۱۷) $\lim_{x\to۰}\frac{\int_۰^x\cos t^۲\,dt}{x}$

۱۸) $\lim_{x\to۰}\frac{\left(\int_۰^x e^{t^۲}\,dt\right)^۲}{\int_۰^x e^{۲t^۲}\,dt}$ ۱۹) $\lim_{x\to۰}\frac{۱}{x}\int_۰^x\frac{\sin t}{t}\,dt$

۲۰) $\lim_{x\to۰}\frac{\int_۰^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_۰^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$ ۲۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

۲۲) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n-۱}{n^۲}\right\}$

۲۳) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۴}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲}\right\}$

۲۴) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}$

۲۵) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right\}$

۲۶) فرض کنید $y=f(x)$ بر بازهٔ $[a;a+h]$ مثبت و انتگرال‌پذیر است، در این صورت نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(a+\frac{1}{n}\right).f\left(a+\frac{h}{n}\right)\cdots f\left(a+n\frac{h}{n}\right)} = \exp\left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h}\ln\Big[f(x)\Big]\,dx\right)$$

سپس به عنوان مثال نشان دهید که مقدار حد زیر برابر $2\exp\left((\pi-4)/2\right)$ است:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right).\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

هر یک از تساویهای زیر را اثبات کنید:

۲۷) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}$

۲۸) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=\frac{\pi}{2}$

۴.۶ تغییر متغیر در انتگرال معین

۱.۴.۶ قضیه. فرض کنید $y=f(x)$ بر $[a;b]$ پیوسته است و $y=g(x)$ تابعی است با $g([\alpha;\beta])=[a;b]$ و دارای مشتق پیوسته بر $(\alpha;\beta)$. در این صورت

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\Big(g(x)\Big)g'(t)\,dt}$$

اثبات: بنابه قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق

$$\{f(g(x))\}=f'(g(x))g'(x)$$

گیریم $t\in[a;b]$ و تعریف کنیم $F(t)=\int_a^t f(g(x))g'(x)\,dx$. در این صورت، به ازای هر $t\in(a;b)$ ای $F'(t)=f(g(t))\,g'(t)$. حال فرض کنیم به ازای هر $x\in[\alpha;\beta]$ ای $G(x):=\int_\alpha^x f(t)\,dt$. در این صورت، به ازای هر $[\alpha;\beta]$ ای $G'(x)=f(x)$. حال فرض کنیم $x=g(t)$، در این صورت

$$G(g(t))=\int_\alpha^{g(t)} f(u)\,du$$

در نتیجه $\{G(g(t))\}'=f(g(t))\,g'(t)$. بنابراین $F(t)$ و $G(g(t))$ بر $(a;b)$ دارای مشتق برابرند. بنابراین، عددی مانند C وجود دارد که به ازای هر $t\in[a;b]$ ی دلخواه $F(t)=G(g(t))+C$. از طرفی به ازای $t=a$ داریم

$$F(a)=\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt=0$$
$$G(g(a))=G(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(u)\,du$$

بنابراین $C=0$ و برهان تمام است. □

۲.۴.۶ مثال. ۱) با فرض $t=\ln x$، ملاحظه می‌کنیم که $dt=\frac{dx}{x}$ و $\begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline t & 0 & \ln 2\end{array}$. بنابراین

$$\int_1^2 \ln x\frac{dx}{x} = \int_0^{\ln 2} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}\ln^2 2$$

مثال ۲) با فرض $x=2\sin t$، ملاحظه می‌کنیم که $dx=2\cos t\,dt$ و $\begin{array}{c|cc} x & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \hline t & -\pi/3 & \pi/3\end{array}$. بنابراین

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(2\cos t)\,(2\cos t)\;dt = 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos(2t))\;dt = 2\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$$

مثال ۳) با فرض $t=\tan(x/2)$، ملاحظه می‌کنیم که $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & 1\end{array}$ بنابراین

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x+2}=\int_0^1\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}=\int_0^1\frac{2\,dt}{t^2+3} = \left[2\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\right]_0^1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

مثال ۴) با فرض $t=\arcsin(\sqrt{x})$، ملاحظه می‌شود که $x=\sin^2 t$، $dx=2\sin t\cos t\,dt$ و $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/2\end{array}$. در نتیجه

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{t\times 2\cos t\sin t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}} = \int_0^{\pi/2}2t\,dt=\left[t^2\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۵) با فرض $t = \pi/2 - x$، ملاحظه می‌شود که $dt = -dx$،

x	0	$\pi/2$
t	$\pi/2$	0

و بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t}(-dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t + \sin^3 t}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} dx = \Big[x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

و بنابراین $I = \pi/4$.

مثال ۶) با فرض $t = \pi - x$، ملاحظه می‌شود که $dx = -dt$،

x	0	π
t	π	0

و بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx \\ &= \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + (-\cos t)^2}(-dt) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{1 + \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\, dt \\ &= -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1 + \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx \\ &= \Big[-\pi \arctan(\cos t)\Big]_0^{\pi} - I \\ &= -\pi \times \frac{-\pi}{4} + \pi \times \frac{\pi}{4} - I = \frac{\pi^2}{2} - I \end{aligned}$$

بنابراین $2I = \pi^2/2$ یا $I = \pi^2/4$.

مثال ۷) ثابت کنید $\int_0^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x\, dx$ صفر است.

حل. فرض کنیم انتگرال داده شده I باشد، برای نشان دادن اینکه $I = 0$ کافی است اثبات گردد که $I = -I$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} \sin^{2m}(\pi - x) \cos^{2n+1}(\pi - x) d(\pi - x) \\ &= \int_0^{\pi} (\sin^{2m} x)(-\cos^{2n+1} x)\, dx = -I \end{aligned}$$

مثال ۸) با فرض $x = a \sin\theta$ داریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a} \frac{a\, dx}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos\theta d\theta}{(a\sin\theta + a\cos\theta)^2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos(\pi/2 - \theta)\, d\,(\pi/2 - \theta)}{(\sin(\pi/2 - \theta) + \cos(\pi/2 - \theta))^2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \end{aligned}$$

پس با فرض $t = \tan(\theta/2)$، داریم

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{1} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1} \frac{2\, dt}{-t^2 + 2t + 1} \\ &= \int_0^{1} \frac{dt}{(\sqrt{2})^2 - (t-1)^2} \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{2} - (t-1)}{\sqrt{2} + (t-1)}\right|\right]_0^{1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\sqrt{2} + 1\right| \end{aligned}$$

مثال ۹) برای محاسبهٔ مقدار انتگرال زیر، از اعداد مختلط استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ax} \cos bx\, dx &= \int_0^{2\pi} e^{ax} \mathrm{Re}(e^{bix})\, dx \\ &= \mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{(a+bi)x}\, dx\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\left[\frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x}\right]_0^{2\pi}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{a - bi}{a^2 + b^2}(e^{(a+bi)2\pi} - 1)\right\} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \mathrm{Re}\Big\{(a - bi)(e^{2\pi a}\cos(2\pi b) \\ &\qquad -1 + e^{2\pi a}\sin(2\pi b) i)\Big\} \\ &= \frac{e^{2a\pi}}{a^2 + b^2}\Big\{a(\cos(2\pi b) - 1) + b \sin(2\pi b)\Big\} \end{aligned}$$

۳.۴.۶ تمرین. مقدار هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^{۲}+۱}}$ ‏ ۲) $\int_{۰}^{\ln ۲} \sqrt{e^{x}-۱}\,dx$

۳) $\int_{۰}^{a} x^{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$ ‏ ۴) $\int_{۰}^{۹} x\sqrt[۳]{۱-x}\,dx$

۵) $\int_{۰}^{\ln ۲} \sinh^{۴} x\,dx$ ‏ ۶) $\int_{۰}^{\pi} (x\sin x)^{۲}\,dx$

۷) $\int_{۰}^{a} x^{۲}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ ‏ ۸) $\int_{\pi/۴}^{\pi/۲} \frac{dx}{۱-\sin x}$

۹) $\int_{۰}^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}$ ‏ ۱۰) $\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{x(۱+x^{۴})}$

۱۱) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{\cos^{۴} x+\sin^{۴} x}$ ‏ ۱۲) $\int_{-۷}^{۷} \frac{x^{۴}\sin x}{x^{۶}+۲}\,dx$

۱۳) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{(۲+\cos x)(۳+\cos x)}$

۱۴) $\int_{\pi}^{۵\pi/۴} \frac{\sin(۲x)\,dx}{\cos^{۴} x+\sin^{۴} x}$ ‏ ۱۵) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx$

هر یک از تساویهای زیر را اثبات کنید:

۱۷) $\int_{۰}^{\pi/۲} f(\sin x,\cos x)\,dx = \int_{۰}^{\pi/۲} f(\cos x,\sin x)\,dx$

۱۸) $\int_{۰}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi^{۲}}{۲}\int_{۰}^{\pi} f(\sin x)\,dx$

۱۹) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\int_{۰}^{۱} f(a+(b-a)x)\,dx$

۲۰) $\int_{۰}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} f(\cos x)\,dx$

۲۱) $\int_{۰}^{t} f(x)g(t-x)\,dx = \int_{۰}^{t} f(t-x)g(x)\,dx$

۲۲) فرض کنید p و q اعداد ثابتند، در این صورت نشان دهید $\int_{۰}^{۱}(۱-x^{p})^{۱/q}\,dx = \int_{۰}^{۱}(۱-x^{q})^{۱/p}\,dx$.

۲۳) کجای محاسبهٔ $\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}} = \left[\frac{-۱}{x}\right]_{-۱}^{۱} = -۲$ غلط است؟

۲۴) فرض کنید $a > b > ۰$، نشان دهید $\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}$.

۲۵) فرض کنید $a > b > ۰$، نشان دهید $\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^{۲}} = \frac{a\pi}{(a^{۲}-b^{۲})^{۳/۲}}$.

۲۶) فرض کنید a و b اعدادی مخالف صفر باشند، نشان دهید
$$\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{dx}{a^{۲}\sin^{۲} x+b^{۲}\cos^{۲} x} = \frac{\pi}{۲ab}$$

۲۷) فرض کنید a و b اعدادی مخالف صفر باشند، نشان دهید
$$\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{dx}{(a^{۲}\sin^{۲} x+b^{۲}\cos^{۲} x)^{۲}} = \frac{\pi(a^{۲}+b^{۲})}{۴a^{۲}b^{۲}}$$

۵.۶ جزء به جزء در انتگرال معین

۱.۵.۶ قضیه. اگر $u(x)$ و $v(x)$ بر یک بازهٔ باز شامل بازهٔ $[a;b]$ دارای مشتق پیوسته باشند، در این صورت

$$\boxed{\int_{a}^{b} u(x)dv(x) = \Big[u(x)v(x)\Big]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)du(x)}$$

اثبات: با توجه به اینکه $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ حکم بدیهی است. □

۲.۵.۶ مثال ۱). فرض کنیم $u = \ln x$ و $dv = dx$، بنابراین $du = dx/x$ و $v = x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{۱}^{۲} \ln x\,dx &= \Big[x\ln x\Big]_{۱}^{۲} - \int_{۱}^{۲} x\frac{dx}{x}\\ &= ۲\ln ۲ - \Big[x\Big]_{۱}^{۲} = ۲\ln ۲ - ۱\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنیم $u = x$ و $dv = \cos x\,dx$، بنابراین $du = dx$ و $v = \sin x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\pi/۲} x\cos x\,dx &= \Big[x\sin x\Big]_{۰}^{\pi/۲} - \int_{۰}^{\pi/۲} \sin x\,dx\\ &= \frac{\pi}{۲} + \Big[\cos x\Big]_{۰}^{\pi/۲} = \frac{\pi}{۲} - ۱\end{aligned}$$

مثال ۳) فرض کنید $u = e^{x}$ و $dv = \cos x\,dx$، بنابراین $du = e^{x}\,dx$ و $v = \sin x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}I &= \int_{۰}^{۱} e^{x}\cos x\,dx\\ &= \Big[e^{x}\sin x\Big]_{۰}^{۱} - \int_{۰}^{۱} e^{x}\sin x\,dx\end{aligned}$$

مجدداً با فرض $u = e^{x}$ و $dv = \sin x\,dx$، داریم $du = e^{x}\,dx$ ، و بنابراین $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}I &= e\sin(۱) - \left\{\Big[-e^{x}\cos x\Big]_{۰}^{۱} - \int_{۰}^{۱} -e^{x}\cos x\,dx\right\}\\ &= e\sin(۱) + e\cos(۱) - ۱ - I\end{aligned}$$

در نتیجه $۲I = e(\sin(۱)+\cos(۱)) - ۱$، یا

$$I = \frac{e}{۲}(\sin(۱)+\cos(۱)) - \frac{۱}{۲}$$

مثال ۴) با فرض $t=\ln x$ داریم $x=e^t$. بنابراین $dx=e^t\,dt$، و در نتیجه

x	1	e
t	0	1

$$\int_1^e \ln^3 x\,dx=\int_0^1 t^3e^t\,dt$$

اکنون با سه بار جزء به جزء گرفتن داریم

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln^3 x\,dx &= \int_0^1 t^3 de^t\\ &= \left[t^3e^t\right]_0^1-\int_0^1 3t^2e^t\,dt\\ &= e-3\int_0^1 t^2de^t\\ &= e-3\left(\left[t^2e^t\right]_0^1-\int_0^1 2te^t\,dt\right)\\ &= -2e+6\int_0^1 tde^t\\ &= -2e+6\left(\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt\right)\\ &= 4e-6\left[e^t\right]_0^1=6-2e\end{aligned}$$

مثال ۵) می‌خواهیم ثابت کنیم که بازاء هر عدد طبیعی n ای

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx=\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\,a^{2n+1}$$

برای این منظور، فرض می‌کنیم انتگرال سمت چپ برابر I_n باشد. در این صورت با فرض $u=x$ و $dv=(a^2-x^2)^{n-1}x\,dx$، I_n برابر است با

$$\begin{aligned}&\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx=\\ &= \int_0^a a^2(a^2-x^2)^{n-1}\,dx-\int_0^a x^2(a^2-x^2)^{n-1}\,dx\\ &= a^2I_{n-1}-\int_0^a udv\\ &= a^2I_{n-1}-\left[(x)\frac{(a^2-x^2)^n}{-2n}\right]_0^a+\int_0^a\frac{(a^2-x^2)^n}{-2n}\,dx\\ &= a^2I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n\end{aligned}$$

بنابراین بازای هر $n\geq 2$ ای $I_n=a^2\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. از طرفی

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^a (a^2-x^2)\,dx\\ &= \left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}I_n &= a^2\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\\ &= a^2\frac{2(n-1)}{2n-1}a^2\frac{2n}{2n+1}I_{n-2}\\ &\ \ \vdots\\ &= a^2\frac{2(n-1)}{2n-1}a^2\frac{2n}{2n+1}\cdots a^2\frac{4}{5}I_1\end{aligned}$$

و پس از جاگذاری I_1 و ساده کردن، فرمول مورد نظر استنتاج می‌گردد.

مثال ۶) فرض کنید $0\leq b\leq a$. مقدار $\int_0^b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم $u=\sqrt{a^2-x^2}$ و $dv=dx$، بنابراین $du=\dfrac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$، $v=x$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}I &= \int_0^b\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\ &= \left[x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^b-\int_0^b\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\\ &= b\sqrt{a^2-b^2}-\int_0^b\frac{a^2+a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\\ &= b\sqrt{a^2-b^2}-\int_0^b\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ &= b\sqrt{a^2-b^2}-I+a^2\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b\end{aligned}$$

در نتیجه $I=b\sqrt{a^2-b^2}-I+a^2\arcsin(b/a)$ پس از حل این معادله بر حسب I، داریم

$$I=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$$

مثال ۷) ثابت کنید که بازاء هر عدد طبیعی n ای

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\times 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\times 2}\frac{\pi}{2}$$

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم انتگرال سمت چپ I_n است و $u=\cos^{n-1}x$ و $dv=\cos x\,dx$، لذا

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\cos x\,dx\\ &= \left[\cos^{n-1}x\sin x\right]_0^{\pi/2}\\ &\quad -\int_0^{\pi/2}-(n-1)\sin^2x\cos^{n-2}x\,dx\\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\sin^2x\,dx\\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x(1-\cos^2x)\,dx\end{aligned}$$

بنابراین $I_n = (n-۱)I_{n-۲} - (n-۱)I_n$ یا $I_n = \frac{n-۱}{n}I_{n-۲}$. در نتیجه

$$\begin{aligned} I_{۲n} &= \frac{۲n-۱}{۲n}I_{۲(n-۱)} \\ &= \frac{۲n-۱}{۲n}\frac{۲n-۳}{۲(n-۱)}I_{۲(n-۲)} = \cdots \\ &= \frac{۲n-۱}{۲n}\frac{۲n-۳}{۲(n-۱)}\cdots\frac{۳\times ۱}{۴\times ۲}I_۰ \\ &= \frac{(۲n-۱)(۲n-۳)\cdots\times ۳\times ۱}{(۲n)(۲n-۲)\cdots\times ۴\times ۲}\int_۰^{\pi/۲} dx \\ &= \frac{(۲n-۱)(۲n-۳)\cdots ۳\times ۱}{(۲n)(۲n-۲)\cdots ۴\times ۲}\frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

و برهان تمام است.

۳.۵.٦ تمرین.

۱) $\int_۰^{\pi/۲} x\cos x\,dx$ ۲) $\int_۰^{e} \ln x\,dx$

۳) $\int_۰^{۱} x^۲e^{۲x}\,dx$ ۴) $\int_۰^{\pi} e^x\sin x\,dx$

۵) $\int_۰^{\pi/۲} \cos^{۲n+۱} x\,dx$ ٦) $\int_۰^{\pi} x\sin^n x\,dx$

۷) $\int_۰^{۱} \arctan\left(\sqrt{x}\right)\,dx$ ۸) $\int_{\pi/۴}^{\pi/۳} \frac{x\,dx}{\sin^۲ x}$

۹) $\int_۰^{۱} x\ln(۱+x^۲)\,dx$ ۱۰) $\int_۰^{\pi} \cos^n x\cos nx\,dx$

۱۱) $\int_۰^{۱} (\arccos x)^n\,dx$ ۱۲) $\int_۰^{\pi} \cos^n x\,dx$

۱۳) $\int_۰^{\pi} \sin^n x\sin(nx)\,dx$ ۱۴) $\int_۰^{۲\pi} e^{-ax}\cos^{۲n} x\,dx$

۱۵) $\int_۰^{۱} x^m(۱-x)^n\,dx$ ۱٦) $\int_۰^{\pi/۲} \cos^n x\sin^m x\,dx$

۱۷) $\int_۱^{۱٦} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-۱}\right)\,dx$

۱۸) $\int_a^{b} (x-a)^m(b-x)^n\,dx$

۱۹) $\int_۰^{۲a} x^m\sqrt{۲ax-x^۲}\,dx$

۲۰) $\int_۰^{a} (a^۲+x^۲)^{(۲n+۱)/۲}\,dx$

۲۱) تابع لگاریتم طبیعی $\ln : (۰;+\infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت $\ln x := \int_۱^x dx/x$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، صرفاً با استفاده از این تعریف نشان دهید که اگر a و b اعداد مثبت باشند، آنگاه

a) $\ln ۱ = ۰$ b) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

c) $\ln\left(a^b\right) = b\ln a$ d) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

e) نشان دهید عددی e وجود دارد که $۲ < e < ۳$ و $\ln e = ۱$. (راهنمایی: از پیوستگی تابع $y = \ln x$ بر بازهٔ $[۲;۳]$ استفاده کنید.)

f) با تعریف $\log_b a := (\ln a)/(\ln b)$ خواص مشابه (a) تا (e) را برای $\log_b x$ ثابت کنید.

g) نشان دهید که $\log_b a = (\log_c a)/(\log_c b)$.

۲۲) فرض کنید $f(x)$ تابعی انتگرالپذیر، $f_۱(x) = \int_۰^x f(x)\,dx$ و به ازای هر $n \geq ۲$ ای تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \int_۰^x f_{n-۱}(x)\,dx$$

در این صورت، نشان دهید که به ازای هر n ای

$$f_n(x) = \frac{۱}{(n-۱)!}\int_۰^x (x-t)^{n-۱}f(t)\,\,dt$$

۲۳) ثابت کنید که به ازای هر $n,m \in \mathbb{N}$ ای

$$\int_۰^۱ (۱-x)^n x^m\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+۱)!}$$

(راهنمایی: از تمرین ۲۲ با $f(x) = x^m$ استفاده کنید.)

٦.٦ روش المانگیری

۱.٦.٦ . فرض کنید $y = f(x)$ کمیتی است که بر بازهٔ $[a;b]$ توزیع شده است. در نتیجه قطعهٔ کوچک $[x;x+dx]$ دارای ظرفیت تقریبی $df = f(x)\,dx$ است. پس اگر بازهٔ $[a;b]$ را توسط $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{n-۱}$ به n قسمت تقسیم کنیم

$$P : a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b$$

در این صورت، ظرفیت کل بازهٔ $[a;b]$ تقریباً برابر است با $\sum_{i=۱}^n f(x_i)\Delta x_i$. پس از حدگیری از این مجموع، ظرفیت کل بازهٔ $[a;b]$ دقیقاً برابر خواهد بود با

$$\lim_{|P|\to ۰}\sum_{i=۱}^n f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

۲.٦.٦ مثال. ۱) حجم تیوب حاصل از دوران دایرهٔ $(x-b)^۲ + y^۲ = a^۲$ حول محور y ها که $۰ < a < b$، را محاسبه کنید.

حل. روشن است که تصویر دایرهٔ مذکور بر محور x ها بازهٔ $[b-a;b+a]$ است. حجم جسم حاصل از دوران قطعه‌ای از دایره را می‌یابیم که تصویر آن بر محور x ها برابر بازهٔ $[x;x+\Delta x]$ است.

اگر این قطعه را مستطیلی با قاعدهٔ Δx و ارتفاع $۲y$ بدانیم، (به شکل ۲.۶—الف توجه شود.) در این صورت حجم استوانهٔ حاصل از دوران این مستطیل برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} dV &= (\pi(x+\Delta x)^۲ - \pi x^۲) \times ۲y \\ &= ۲\pi(۲x\Delta x + \Delta x^۲)۲\sqrt{a^۲-(x-b)^۲} \\ &\approx ۴\pi x\sqrt{a^۲-(x-b)^۲}\, dx \end{aligned}$$

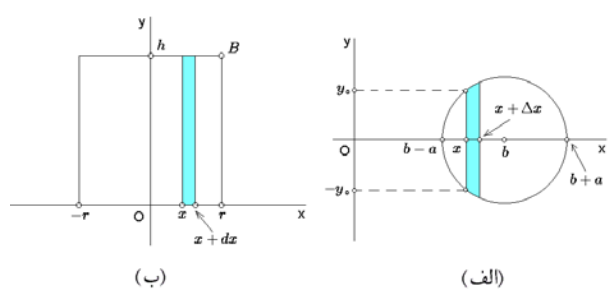
بنابراین، حجم کل جسم حاصل برابر است با

$$V = \int_{b-a}^{b+a} dV = \int_{b-a}^{b+a} ۴\pi x\sqrt{a^۲-(x-b)^۲}\, dx$$

اکنون با فرض $x - b = a\sin t$ داریم

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} ۴\pi(b+a\sin t)\sqrt{a^۲-a^۲\sin^۲ t}\,(a\cos t)\ dt \\ &= ۴\pi a^۲\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}(b+a\sin t)\cos^۲ t\, dt \\ &= ۴\pi a^۲\left[\frac{b}{۲}t + \frac{b}{۴}\sin(۲t) - \frac{a}{۳}\cos^۳ t\right]_{-\pi/۲}^{\pi/۲} = ۲\pi^۲a^۲b \end{aligned}$$

جالب توجه است که بر اساس این محاسبت، اگر دایره‌ای به شعاع a را عمود بر دایره‌ای به شعاع b و در امتداد آن بچرخانیم، در این صورت حجم جسم حاصل برابر حاصلضرب مساحت آن دو دایره می‌گردد.



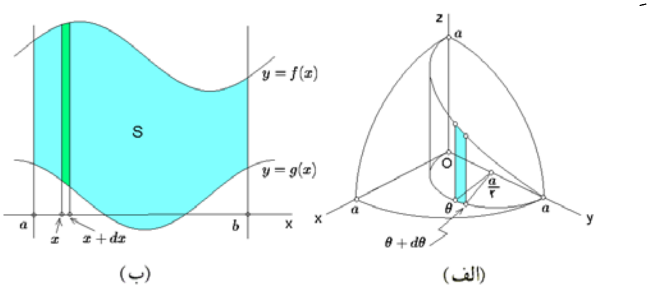
شکل ۲.۶: الف) محاسبهٔ حجم تیوب ب) محاسبهٔ انرژی جنبشی

مثال ۲) فرض کنید استوانهٔ همگن با چگالی δ، شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h را با سرعت زاویه‌ای ثابت w حول محورش دوران می‌دهیم. انرژی جنبشی استوانه را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنیم مقطع استوانه را ترسیم کرده‌ایم، محور استوانه را محور y ها و قاعده را بر محور x ها قرار داده‌ایم. روشن است که در این حالت، از دوران استوانهٔ $OrBh$ مستطیل مورد نظر ساخته می‌شود.

اکنون استوانه‌ای را که از دوران نوار استوار بر بازهٔ $[x; x+dx]$ حاصل شده است را محاسبه می‌کنیم. جرم این قطعه برابر $dm = ۲\pi xh\delta dx$ است و فاصلهٔ آن تا محور دوران برابر x است، پس سرعت نقاط آن برابر $v = xw$ است. (به شکل ۲.۶—ب توجه شود.) در نتیجه، انرژی این قطعه برابر $dK = \frac{۱}{۲}V^۲\, dm$ است، یعنی $dK = \pi x^۳ w^۲ \delta\, dx$. بنابراین، انرژی کل آن برابر است با

$$K = \int_۰^r dK = \pi w^۲ h\delta\int_۰^r x^۳\, dx = \frac{\pi}{۴}w^۲h\delta r^۴$$



شکل ۳.۶: الف) محاسبهٔ قسمتی از سطح یک کره ب) مساحت ناحیهٔ محدود بین نمودار دو تابع

مثال ۳) مساحت قسمتی از سطح استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ay$ که توسط کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲ = a^۲$ بریده شده است را محاسبه کنید.
حل. یک چهارم از سطح مورد نظر را در شکل روبرو ترسیم کرده‌ایم. فرض کنیم O زاویه بین محور y ها و شعاع صادره از نقطهٔ $(۰, a/۲)$ در دایرهٔ مورد نظر باشد. در این صورت $۰ \le \theta \le \pi$. اکنون قطعهٔ جدا شده از سطح که تصویرش بر صفحهٔ xOy قوس θ تا $\theta + d\theta$ است را در نظر می‌گیریم. (به شکل ۳.۶—الف توجه شود.) در این صورت، مختصات نقطهٔ نظیر به θ برابر $\left(\frac{a}{۲}\sin\theta, \frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos\theta\right)$ است؛ لذا، ارتفاع نوار استوار در آن نقطه برابر با

$$z = \sqrt{a^۲-x^۲-y^۲} = \frac{a}{\sqrt{۲}}\sqrt{۱-\cos\theta} = a\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

است. از طرفی طول قطعهٔ θ تا $\theta + d\theta$ برابر $dl = a\,d\theta/۲$ است. بنابراین، مساحت نوار مورد نظر برابر $dA = zdl$ است، یعنی $dA = (a^۲/۲)\sin(\theta/۲)\, d\theta$. در نتیجه

$$\begin{aligned} A &= ۴\int_۰^\pi d\theta = ۴a^۲\int_۰^\pi \sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)\frac{d\theta}{۲} \\ &= \left[-۴a^۲\cos\frac{\theta}{۲}\right]_۰^\pi = ۴a^۲ \end{aligned}$$

۳.۶.۶ تمرین.

۱) چه مقدار انرژی لازم است تا جسم به جرم m را تا ارتفاع h از سطح کرهٔ زمین به شعاع r ببریم؟ اگر جسم تا بینهایت دور شود، مقدار چقدر است؟

۲) مساحت ناحیهٔ محدود به آستروئید $x^{۲/۳} + y^{۲/۳} = a^{۲/۳}$ را بیابید.

۳) سرعت انهدام رادیوم در هر لحظهٔ زمان با کمیت آن متناسب است. مطلوبست تعیین ضابطهٔ انهدام رادیوم در صورتی که در مبداء زمان ($t = ۰$) مقدار کمیت m گرم و پس از گذشت $T = ۱۰۰$ سال مقدار آن نصف شود.

۴) مساحت آن قسمتی از استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ را بیابید که توسط صفحهٔ $y = z$ برش خورده است و به صفحهٔ xOy محدود است.

۵) مطلوبست نیروی فشار وارد بر سطح نیم‌دایره‌ای به شعاع r که قطر آن بر سطح آب منطبق است و بصورت قائم در آب غوطه‌ور است.

۶) با تجربه معلوم شده است که حرارت ویژه آب در t درجهٔ سانتی‌گراد برابر
$۰/۹۹۸۳ - ۵/۱۸۴ \times ۱۰^{-۵}t + ۶/۹۱۲ \times ۱۰^{-۷}t^۲$
است. مشخص کنید که برای گرم کردن یک گرم آب با دمای صفر درجه و رساندن دمای آن به صد درجه چه میزان حرارت لازم است.

۷) کار انجام شده توسط راکتی که از ارتفاع صفر به ارتفاع h پرتاب می‌شود را محاسبه کنید.

۸) در صورتی که برای فشردن یک سانتی‌متری یک فنر به یک کیلوگرم نیرو نیاز داشته باشیم و این فنر شش سانتی‌متر طول داشته باشد، چه میزان انرژی برای فشردن کامل آن نیاز است؟

۷.۶ محاسبهٔ مساحت

۱.۷.۶ مساحت بین نمودار دو تابع از x.

فرض کنید $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو تابع پیوسته بر بازهٔ $[a;b]$ اند بعلاوه و بر این بازه $g(x) \leq f(x)$.

در این صورت، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ برابر

$$\boxed{S = \int_a^b \Big\{f(x) - g(x)\Big\}\, dx}$$

است. زیرا مساحت مستطیل استوار بر بازهٔ $[x; x+dx]$ برابر است با $dS = \Big(f(x) - g(x)\Big)\, dx$. (به شکل ۳.۶—ب توجه شود.)

۲.۷.۶ مثال. ۱) مساحت بین دو سهمی $ax = y^۲$ و $ay = x^۲$ که $a > ۰$ را بدست آورید.

حل. از برخورد این دو منحنی، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} ay = x^۲ \\ ax = y^۲ \end{cases} \Rightarrow ax = \left(\frac{x^۲}{a}\right)^۲ \Rightarrow x^۳ = a^۳ \Rightarrow x = a$$

پس محل برخورد آنها در $x = a$ است (به شکل ۴.۶—الف توجه شود). پس در این مسئله می‌خواهیم مساحت محدود بین $y = \sqrt{ax}$ و $y = \frac{x^۲}{a}$ را از $x = ۰$ تا $x = a$ محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} S &= \int_۰^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^۲}{a}\right) dx \\ &= \left[\sqrt{a}\frac{x^{۳/۲}}{۳/۲} - \frac{۱}{a}\frac{x^۳}{۳}\right]_۰^a = \frac{a^۲}{۳} \end{aligned}$$

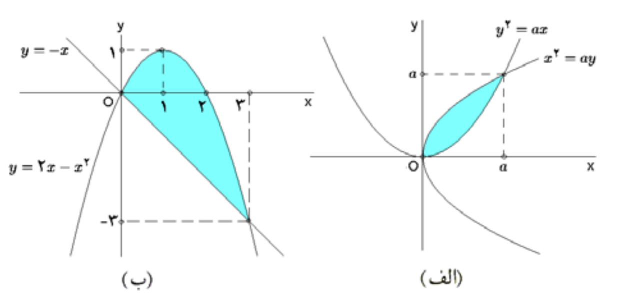
مثال ۲) مساحت محدود بین خط $x + y = ۰$ و سهمی $y = ۲x - x^۲$ را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور، ابتدا خط و سهمی را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} x + y = ۰ \\ y = ۲x - x^۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲ = ۳x \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۳$$

سپس با توجه به اینکه رأس سهمی در $x = ۱$، شکل ناحیهٔ مورد نظر را ترسیم می‌کنیم (به شکل ۴.۶—ب توجه شود). پس مسئله ما عبارتست از محاسبهٔ مساحت بین $y = ۲x - x^۲$ و $y = -x$ از $x = ۰$ تا $x = ۳$:

$$\begin{aligned} S &= \int_۰^۳ \Big\{(۲x - x^۲) - (-x)\Big\}\, dx \\ &= \left[\frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳\right]_۰^۳ = \frac{۹}{۲} \end{aligned}$$



شکل ۴.۶: الف) مثال ۱ ب) مثال ۲

۳.۷.۶ تمرین. در هر مورد، مساحت محدود بین منحنیهای داده شده را بدست آورید:

۱) $y = ۴ - ۲x^۲/۳, \qquad y = x^۲/۳,$

۲) $y = x^۲, \qquad x + y = ۲,$

۳) $y = ۸/(x^۲ + ۴), \qquad x^۲ = ۴y,$

۴) $x^۲ + y^۲ = ۱۶, \qquad x^۲ = ۱۲(y - ۱),$

۵) $(x/۵)^۲ + (y/۴)^{۱/۳} = ۱, \qquad y = ۰,$

۶) $y = x, \quad y = x + \sin^۲ x, \quad ۰ \leq x \leq \pi.$

مساحت محدود به هر یک از منحنیهای بستهٔ داده شده را محاسبه کنید:

۷) $x^۲+y^۲=a^۲$, ۸) $y^۲=x(x-۱)^۲$,

۹) $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=a^{۲/۳}$, ۱۰) $y^۲=(x-۱)(x-۲)^۲$,

۱۱) $\left(\frac{x}{۵}\right)^{۲/۳}+\left(\frac{y}{۴}\right)^{۲/۳}=۱$, ۱۲) $x^۴+y^۴=x^۲+y^۲$.

۴.۷.۶ مساحت بین دو نمودار تابع از y.

فرض کنید $x=f(y)$ و $x=g(y)$ بر بازهٔ $[a;b]$ پیوسته‌اند و $g(y)\le f(y)$. در این صورت مساحت محدود بین نمودار تابع f، تابع g، خط $y=a$ و $y=b$ برابر است با

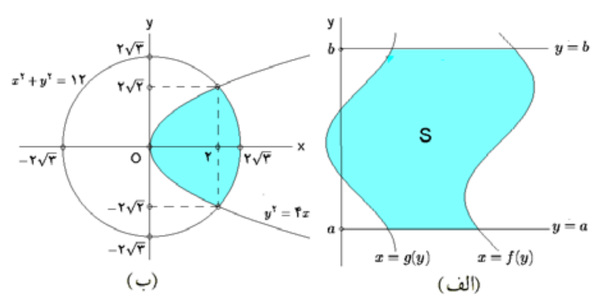
$$\boxed{S=\int_a^b\Big\{f(y)-g(y)\Big\}dy}$$

به شکل ۵.۶—الف توجه شود.

۵.۷.۶ مثال. ۱) مساحت محدود بین محور y ها و منحنی $x=y^۲(۱-y)$ را محاسبه کنید.

حل. توجه شود که تابع x (برحسب y) از درجهٔ سوم است که از $y=۱$ می‌گذرد و در $y=۰$ مماس است (چرا؟). بنابراین کافی است مساحت بین $x=y^۲(۱-y)$ و $x=۰$ را از $y=۰$ تا $y=۱$ بدست بیاوریم:

$$\begin{aligned}S&=\int_۰^۱\{y^۲(۱-y)-۰\}dy\\&=\left[\frac{y^۳}{۳}-\frac{y^۴}{۴}\right]_۰^۱=\frac{۱}{۱۲}\end{aligned}$$



شکل ۵.۶: الف) مساحت بین نمودار دو تابع
ب) مثال ۱

مثال ۲) مساحت قسمتی از دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۲$ که توسط $y^۲=۴x$ بریده می‌شود را محاسبه کنید.

حل. برای این منظور ابتدا دایره و سهمی را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲=۱۲\\ y^۲=۴x\end{cases}\Rightarrow\frac{y^۲}{۱۶}+y^۲=۱۲\Rightarrow y^۲=-۸\pm۱۶$$

پس $y^۲=۸$ یا $y=\pm۲\sqrt{۲}$. به شکل ۵.۶—ب توجه شود. یعنی، کافی است مساحت بین $x=\sqrt{۱۲-y^۲}$ و $x=y^۲/۴$ را از $y=-۲\sqrt{۲}$ تا $y=۲\sqrt{۲}$ محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}S&=\int_{-۲\sqrt{۲}}^{۲\sqrt{۲}}\left\{\sqrt{۱۲-y^۲}-\frac{y^۲}{۴}\right\}dx\\&=\int_{-۲\sqrt{۲}}^{۲\sqrt{۲}}\sqrt{۱۲-y^۲}dy-\left[\frac{۱}{۴}\frac{y^۳}{۳}\right]_{-۲\sqrt{۲}}^{۲\sqrt{۲}}\\&=\left[\frac{y}{۲}\sqrt{۱۲-y^۲}+۶\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{۱۲}}\right)\right]_{-۲\sqrt{۲}}^{۲\sqrt{۲}}-\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}\\&=۲\sqrt{۲}\sqrt{۴}+۱۲\arcsin\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)-\frac{۸}{۳}\sqrt{۲}\\&=\frac{۴}{۳}\sqrt{۲}+۱۲\arcsin\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)\end{aligned}$$

۶.۷.۶ تمرین. در هر مورد، مساحت محدود به دو منحنی داده شده را محاسبه کنید:

۱) $x+y=۱$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$,

۲) $x=y^۲$, $x=\frac{۳}{۴}y^۲+۱$,

۳) $x=۴-۲y^۲/۳$, $x=y^۲/۳$,

۴) $x^۲+y^۲=۸$, $y^۲=۲x$,

۵) $x^۲-۳y^۲=۱$, $x^۲+۴y^۲=۸$,

۶) $x=a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^۲-y^۲}}{y}\right)-\sqrt{a^۲-y^۲}$, $y=۰$,

مساحت محدود به هر یک از منحنیهای داده شده را محاسبه کنید:

۷) $a^۲x^۲=y^۲(a^۲-y^۲)$, ۸) $۴(x^۲-y^۲)+y^۳=۰$,

۹) $x^۲=(۱-y^۲)^۳$, ۱۰) $x^۳=y^۲(a^۲-y^۲)$.

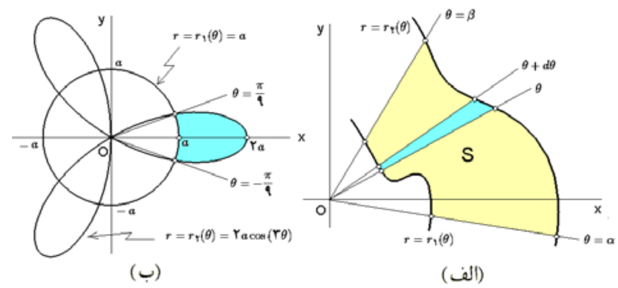
۷.۷.۶ مساحت محدود به دو نمودار در صفحهٔ قطبی.

فرض کنید $r=r_۱(\theta)$ و $r=r_۲(\theta)$ دو تابع پیوسته بر بازهٔ $[\alpha;\beta]$ هستند، که $r_۱(\theta)\le r_۲(\theta)$. (به شکل ۶.۶ توجه شود.) در این صورت مساحت محدود به نمودار تابع $r=r_۲(\theta)$، نمودار تابع $r=r_۱(\theta)$، خط $\theta=\alpha$ و خط $\theta=\beta$ برابر است با

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}\int_\alpha^\beta\Big\{(r_۱(\theta))^۲-(r_۲(\theta))^۲\Big\}d\theta}$$

زیرا مساحت قسمت جدا شده از بین نمودار دو تابع مفروض توسط شعاع‌های نظیر θ و $\theta+d\theta$، بنابه تقارن در دایره‌ها، برابر است با $dS=\frac{۱}{۲}\Big\{(r_۲(\theta))^۲-(r_۱(\theta))^۲\Big\}d\theta$ یا

$$\frac{dS}{\pi(r_۱(\theta))^۲-\pi(r_۲(\theta))^۲}=\frac{d\theta}{۲\pi}$$



شکل ۶.۶: الف) مساحت بین نمودار دو تابع قطبی
ب) قسمت ۱ از ۸.۷.۶

۸.۷.۶ مثال. ۱) مساحت ناحیهٔ محدود بین دو منحنی $r_۱ = a$ و $r_۲ = ۲a\cos(۳\theta)$ را بدست می‌آوریم.
$r_۱ = a$ دایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع a است. بعلاوه $r_۲ = ۲a\cos(۳\theta)$ با تناوب $۲\pi/۳$ است، لذا کافی است آن را در بازهٔ $[-\pi/۶;\pi/۲]$ ترسیم کنیم. اما، در بازهٔ $[\pi/۶;\pi/۲]$ کسینوس ۳θ منفی است، پس کافی است آن را در بازهٔ $[-\pi/۶;\pi/۲]$ رسم کنیم. با توجه به اینکه $\begin{array}{c|ccc} \theta & -\pi/۶ & ۰ & \pi/۶ \\ \hline r_۲(\theta) & ۰ & ۲a & ۰ \end{array}$ شکل ۶.۶—ب حاصل می‌گردد. محل برخورد دو منحنی عبارتست از

$$\begin{cases} r = a \\ r = ۲a\cos(۳\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos(۳\theta) = \frac{۱}{۲}$$

یعنی $۳\theta = \pi/۳ + ۲k\pi$ یا $\theta = \pi/۹ + ۲k\pi/۳$؛ که $\theta = \pi/۹$ و $\theta = -\pi/۹$ در بازهٔ $[-\pi/۶;\pi/۶]$ قرار دارند. بنابراین

$$\begin{aligned} S &= ۳S_۱ = \frac{۳}{۲}\int_{-\pi/۹}^{\pi/۹}\left\{(۲a\cos(۳\theta))^۲ - (a)^۲\right\}d\theta \\ &= \frac{۳a^۲}{۲}\int_{-\pi/۹}^{\pi/۹}\left\{۴\cos^۲(۳\theta) - ۱\right\}d\theta \\ &= \frac{۳a^۲}{۲}\int_{-\pi/۹}^{\pi/۹}\left\{۲ + ۲\cos(۶\theta) - ۱\right\}d\theta \\ &= \frac{۳a^۲}{۲}\left[\theta - \frac{۱}{۳}\sin(۶\theta)\right]_{-\pi/۹}^{\pi/۹} \\ &= \frac{a^۲}{۴}\left(۲\pi - ۳\sqrt{۳}\right) \end{aligned}$$

مثال ۲) مساحت محدود به برگ دکارت $x^۳ + y^۳ = ۳axy$ را محاسبه کنید.
حل. ابتدا منحنی را به صفحهٔ قطبی می‌بریم:

$$r^۳\cos^۳\theta + r^۳\sin^۳\theta = ۳a(r\cos\theta)(r\sin\theta)$$

در نتیجه

$$r^۳(\cos\theta + \sin\theta)\left(\cos^۲\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^۲\theta\right) = \\ = \frac{۳}{۲}ar^۲\sin(۲\theta)$$

و بنابراین

$$r(\theta) = \frac{۳a\sin(۲\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)(۲ - \sin(۲\theta))}$$

شرط مثبت بودن $r(\theta)$ به این معنی است که در بازهٔ $[-\pi;\pi]$ داریم

$$\left[\begin{cases} \sin(۲\theta) \geq ۰ \\ \sin\theta + \cos\theta \geq ۰ \end{cases} \atop \begin{cases} \sin(۲\theta) \leq ۰ \\ \sin\theta + \cos\theta \leq ۰ \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} ۲k\pi \leq ۲\theta \leq (۲k+۱)\pi \\ ۲l\pi - \frac{\pi}{۴} \leq \theta \leq ۲l\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \atop \begin{cases} (۲k-۱)\pi \leq ۲\theta \leq ۲k\pi \\ ۲l\pi + \frac{۳\pi}{۴} \leq \theta \leq ۲l\pi + \frac{۷\pi}{۴} \end{cases}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۴} \\ \frac{\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{۳\pi}{۴} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{-\pi}{۴} \leq \theta \leq \frac{۳\pi}{۴}$$

اگر $۳\pi/۴ \leq \theta \leq \pi/۲$، آنگاه $r(\theta) \geq ۰$ و چنانچه $۰ \geq \theta \geq -\pi/۴$، آنگاه $r(\theta) \leq ۰$. بعلاوه $r(\pi/۲)$ و $r(۰)$ برابر صفرند، پس منحنی در نقاط نظیر به $\theta = ۰$ و $\theta = \pi/۲$ خود را قطع می‌کند (به شکل ۷.۶—الف توجه شود). بنابراین باید مساحت بین دو منحنی $r_۱(\theta) = ۰$ و نیز

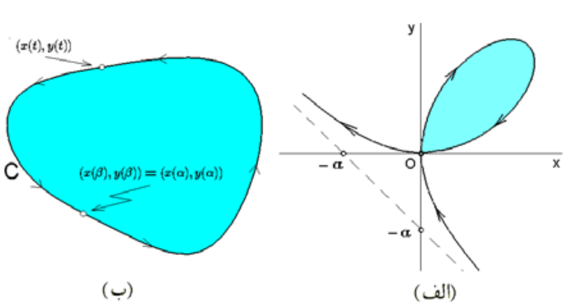
$$r_۲(\theta) = \frac{۳a\sin(۲\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)(۲ - \sin(۲\theta))}$$

را از $\theta = ۰$ تا $\theta = \pi/۲$ محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} S &= \frac{۱}{۲}\int_۰^{\pi/۲}\left\{\frac{۳a\sin(۲\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)(۲ - \sin(۲\theta))}\right\}^۲ d\theta \\ &= ۹\frac{a^۲}{۲}\int_۰^{\pi/۴}\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{(\cos^۳\theta + \sin^۳\theta)^۲}d\theta \end{aligned}$$

با فرض $u = \tan\theta$ داریم:

$$\begin{aligned} S &= ۹a^۲\int_۰^۱\frac{z^۲dz}{(۱+z^۳)^۲} \\ &= \left[\frac{-۳a^۲}{۱+z^۳}\right]_۰^۱ = \frac{۳}{۲}a^۲ \end{aligned}$$



شکل ۷.۶: الف) مساحت محدود به برگ دکارتی
ب) مساحت محدود در یک منحنی بسته

۹.۷.۶ تمرین.

۱) مساحت محدود به دو منحنی $r = a(1-\cos\theta)$ و نیز $r = a\cos\theta$ را محاسبه کنید.

۲) مساحت محدود به منحنی $r = a\cos^2\theta$ را محاسبه کنید.

۳) مساحت آن حلقهٔ محدود به دو منحنی

$$r = a\cos\theta \qquad \text{و} \qquad r = a(\cos\theta + \sin\theta)$$

را که نقطهٔ $(a/2, 0)$ را در بر دارد، محاسبه کنید.

مساحت ناحیهٔ محدود به هر یک از منحنیهای بستهٔ داده شده را محاسبه کنید:

$$\text{۴)}\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \qquad \text{۵)}\ x^4 + y^4 = ax^2y,$$

$$\text{۶)}\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2xy, \qquad \text{۷)}\ x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2).$$

۸) مساحت یک برگ از منحنی $r = a\cos(2\theta)$ را محاسبه کنید.

۹) مساحت محدود به منحنی $r^2 + \theta^2 = 1$ را محاسبه کنید.

۱۰) مساحت محدود به خطوط $\theta = 0$ و $\theta = 4r - r^3$ را محاسبه کنید.

۱۰.۷.۶ مساحت محدود به یک منحنی پارامتری.

فرض کنید C یک منحنی پارامتری بسته به شکل

$$C\ :\ x = x(t)\,,\ y = y(t)\,;\ \alpha \le t \le \beta$$

است. در این صورت، مساحت محدود به C برابر است با

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt \\ &= -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \Big\{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\Big\}\,dt \end{aligned}$$

اثبات این فرمول در فصل ۸ از جلد دوم و با استفاده از قضیهٔ گرین مطرح می‌گردد. به جهت حرکت نقطه بر منحنی C توجه شود. اگر جهت برعکس باشد، جواب $-S$ خواهد شد (۷.۶—ب توجه شود).

۱۱.۷.۶ مثال.

۱) مساحت محدود به آستروئید

$$C\ :\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

را محاسبه کنید.

حل. باید ابتدا منحنی C را پارامتره کنیم برای این منظور می‌نویسیم

$$\Big\{(x/a)^{1/3}\Big\}^2 + \Big\{(y/a)^{1/3}\Big\}^2 = 1$$

پس می‌توان فرض کرد که $(x/a)^{1/3} = \cos t$ و $(y/b)^{1/3} = \sin t$ و $0 \le t \le 2\pi$. یعنی

$$C\ :\ x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\,,\ 0 \le t \le 2\pi$$

به شکل ۸.۶—الف توجه شود. در نتیجه با استفاده از سومین فرمول ۱۰.۷.۶ داریم

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big\{(a\cos^3 t)(3a\cos t\sin^2 t) \\ &\qquad -(a\sin^3 t)(-3a\sin t\cos^2 t)\Big\}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big\{3a^2\cos^2 t\sin^2 t\Big\}\,dt \\ &= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2 \end{aligned}$$

مثال ۲) مساحت محدود به یک سیکل از منحنی $x = a(t-\sin t)$، $y = a(1-\cos t)$ و محور x ها را محاسبه کنید.

حل. بازاء $t = 2k\pi$ مقدار y صفر می‌شود، یعنی منحنی بازاء $t = 2k\pi$ محور x ها را قطع می‌کند. پس یک سیکل از منحنی به معنی $0 \le t \le 2\pi$ است. بنابراین با استفاده از اولین فرمول ۱۰.۷.۶ داریم

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^{2\pi}\Big(a(1-\cos t)\Big)\Big(a(1-\cos t)\Big)\,dt \\ &= -a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt \\ &= -a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt \\ &= -a^2\left[\frac{3t}{2} - 2\sin t - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = -3\pi a^2 \end{aligned}$$

که البته، جواب برابر $3\pi a^2$ می‌شود. علامت منفی به دلیل بر عکس بودن جهت حرکت نقطه بر منحنی است.

مثال ۳) مساحت محدود به منحنی $x = t(6-t)/3$ و $y = t^2(6-t)/8$ که $0 \le t \le 6$ محاسبه کنید.

حل. با استفاده از دومین فرمول ۱۰.۷.۶ داریم

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6\left(\frac{t}{3}(6-t)\right)\left(\frac{t}{4}(6-t) + \frac{t^2}{8}\right)dt \\ &= \frac{1}{24}\int_0^6 t(6-t)(6t-t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{24}\int_0^6 t^2(36-12t+t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{24}\left[12t^3 - 3t^4 + \frac{t^5}{5}\right]_0^6 = \frac{27}{5} \end{aligned}$$

۱۲.۷.۶ تمرین. فرض کنید a، b و c اعداد مثبتند. در هر مورد، مساحت محدود به منحنیهای داده شده را محاسبه کنید:

۱) $x=t^2-1,\quad y=t^3-t$

۲) $x=a-b\sin t,\quad y=a-b\cos t$

۳) $x=2t-t^2,\quad y=2t^2-t^3$

۴) $x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t$

۵) $x=t^2,\quad y=t(3-t^2)/3$

۶) $x=a\cos t,\quad y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$

۷) $x=a(2\cos t-\cos(2t))\ ,\ y=a(2\sin t-\sin(2t))$

۸) $x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\ ,\ y=-\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\ ,\ c^2=a^2-b^2$

مساحت محدود به هر یک از منحنیهای بستهٔ داده شده را محاسبه کنید:

۹) $x^4+y^4=ax^2y$ ۱۰) $x^{2/5}+y^{2/5}=a^{2/5}$

۸.۶ محاسبهٔ طول قوس

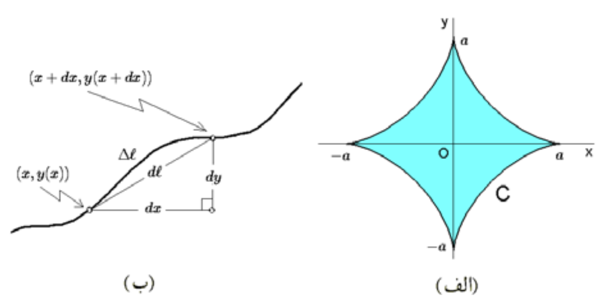
۱.۸.۶ محاسبهٔ طول قوس نمودار یک تابع از x. اگر $y=y(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بر بازهٔ $[a;b]$ باشد، طول قوس نمودار این تابع برابر است با

$$\boxed{\ell=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx}$$

زیرا طول قوس محدود به نقاط $(x,y(x))$ و $(x+dx,y(x+dx))$ برابر

$$\begin{aligned} d\,\ell &= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \end{aligned}$$

است. به شکل ۸.۶ توجه شود.



شکل ۸.۶: الف) قسمت ۱ از مثال ۱۱.۷.۶.
ب) محاسبه طول قوس

۲.۸.۶ مثال. ۱) طول قوس نمودار تابع $y=x^{3/2}$ بر بازهٔ $[0;4]$ را محاسبه کنید.

حل. به کمک ۱.۸.۶ داریم

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx\\ &= \int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx\\ &= \left[\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4\\ &= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) \end{aligned}$$

مثال ۲) طول قوسی از نمودار $y=x^2/2-1$ که توسط محور x ها برش می‌خورد را محاسبه کنید.

حل. شرط $y=0$ به معنی $x^2=2$ یا $x=\pm\sqrt{2}$ است. بنابراین طول مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx\\ &= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

۳.۸.۶ تمرین. طول هر یک از قوسهای داده شده را محاسبه کنید:

۱) $y=\ln x,\ a=\sqrt{3},\ b=2\sqrt{2}$

۲) $y=\arcsin(e^{-x}),\ a=0,\ b=1$

۳) $y=\ln|\coth(x/2)|\ ,\ a=1,\ b=10$

۴) $y=c\ln\left(\dfrac{c^2}{c^2-x^2}\right),\ a=0,\ 0<b<c.$

۵) $y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right),$
$a=1,\ b=a+1$

۴.۸.۶ محاسبهٔ طول قوس نمودار یک تابع از y. اگر $x=x(y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر بازهٔ $[a;b]$ باشد، طول قوس نمودار این تابع برابر است با

$$\boxed{\ell=\int_a^b\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy}$$

۵.۸.۶ مثال. ۱) طول قوس نمودار تابع $x=(y+1)^{3/2}$ از $y=-1$ تا $y=4$ را محاسبه کنید.
حل. به کمک ۴.۸.۶ داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\{\frac{3}{2}(y+1)^{1/2}\}^{2}}\,dy\\ &= \int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(y+1)}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{4}\sqrt{13+9y}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}\times(13+9y)^{3/2}\right]_{-1}^{4}=\frac{335}{27}\end{aligned}$$

مثال ۲) فرض کنید $0\leq a<\pi/2$، طول قوس نمودار تابع $x=\ln(\cos y)$ از $y=0$ تا $y=a$ را محاسبه کنید.
حل. به کمک ۴.۸.۶ داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{0}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin y}{\cos y}\right)^{2}}\,dy\\ &= \int_{0}^{a}\frac{dy}{\cos y}\\ &= \left[\ln\left|\frac{1}{\cos y}+\tan y\right|\right]_{0}^{a}\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{a}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

۶.۸.۶ تمرین. در هر مورد، طول قوس نمودار تابع $x=x(y)$ را از a تا b محاسبه کنید:

۱) $x=y^{3/2},\ a=0,\ b=4$

۲) $x=\dfrac{y}{\sqrt{2c-y}},\ a=0,\ b=\dfrac{5c}{3}$

۳) $x=\dfrac{1}{2}\left(y\sqrt{y^{2}-1}-\ln\left|y+\sqrt{y^{2}-1}\right|\right),$
$a=1,\ b=c+1$

۴) $x=\dfrac{y^{2}}{4}-\dfrac{1}{2}\ln y,\ a=1,\ b=e$

۵) $x=b\ln\left|\dfrac{b+\sqrt{b^{2}-y^{2}}}{y}\right|-\sqrt{b^{2}-y^{2}},\ \ (0<a)$

۷.۸.۶ محاسبهٔ طول قوس نمودار یک تابع قطبی.

اگر $r=r(\theta)$ تابعی مشتق‌پذیر از θ در بازهٔ $[\alpha;\beta]$ باشد، آنگاه طول قوس نمودار تابع قطبی $r=r(\theta)$ برابر است با

$$\boxed{\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\Big(r(\theta)\Big)^{2}+\Big(r'(\theta)\Big)^{2}}\,d\theta}$$

زیرا در اینجا $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و بنابراین

$$\begin{aligned}d\ell &= \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,dx=\sqrt{dx^{2}+dy^{2}}\\ &= \Big\{(r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^{2}\\ &\qquad +(r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta)^{2}\Big\}^{1/2}d\theta\end{aligned}$$

۸.۸.۶ مثال. ۱) طول قوس نمودار تابع $r(\theta)$ با ضابطهٔ $a\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)$ از $\theta=0$ تا $\theta=2\pi$ را محاسبه کنید.
حل. به کمک ۷.۸.۶ داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(a\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2}+\left(\frac{a}{2}\div\cosh^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2}}\,d\theta\\ &= \int_{0}^{2\pi}\sqrt{\frac{a}{2}\left(1+\tanh^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2}}\,d\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(1+\tanh^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta\\ &= \frac{a}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(2-\frac{1}{\cosh^{2}(\theta/2)}\right)d\theta\\ &= \frac{a}{2}\left[2\theta-2\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{0}^{2\pi}\\ &= a\,(2\pi+\tanh(\pi))\end{aligned}$$

مثال ۲) طول قوس نمودار تابع $r(\theta)=1/\theta$ از $\theta=1/2$ تا $\theta=2$ را محاسبه کنید.
حل. با فرض $z=\sqrt{1+(1/\theta)^{2}}$ داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \int_{1/2}^{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2}+\left(\frac{-1}{\theta^{2}}\right)^{2}}\,d\theta\\ &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}/2}\sqrt{(z^{2}-1)+(z^{2}-1)^{2}}\,\frac{-z\,dz}{(z^{2}-1)^{3/2}}\\ &= \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{5}}\frac{z^{2}}{z^{2}-1}dz\\ &= \left[z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{5}}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}+\ln 2-\ln(3-\sqrt{5})\end{aligned}$$

۹.۸.۶ تمرین. در هر مورد، طول قوس نمودار تابع r از a تا b را محاسبه کنید:

۱) $r(\theta)=a\theta,\ a=0,\ b=2\pi$

۲) $r(\theta)=a(1+\cos\theta),\ a=0,\ b=2\pi$

۳) $\theta(r) = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right),\ a = 1,\ b = 3$

۴) $r(\theta) = a\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right),\ a = 0,\ b = \dfrac{\pi}{2}$

۵) فرض کنید در یک لولهٔ به شعاع R مقداری آب به ارتفاع h قرار دارد. نسبت حجم لوله به مساحت ناحیهٔ ترشده را بدست آورید.

۱۰.۸.۶ محاسبهٔ طول قوس یک منحنی پارامتری.

چنانچه منحنی C به کمک توابع دیفرانسیل‌پذیر $x = x(t)$ و $y = y(t)$ که $a \le t \le b$ است، بیان شود، در این صورت طول قوس C برابر است با

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}\, dt}$$

۱۱.۸.۶ مثال. ۱) طول قوس آستروئید

$$C\ :\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

را محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور کافی است طول آن قسمت از منحنی که در ربع اول است را محاسبه کنیم. بنابراین همانند ۱۱.۷.۶ داریم (C' یک چهارم C است):

$$C'\ :\ x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\ ;\ 0 \le t \le \pi/2$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\ell &= 4\ell' \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\cos t\sin^2 t)^2}\, dt \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt = 6a\left[\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = 6a
\end{aligned}$$

۲) طول قوس منحنی C که به صورت $x = \sqrt{3}t^2$، $y = t - t^3$ با $-1 \le t \le 1$ پارامتری شده است را محاسبه کنید.

حل. با توجه به ۱۰.۸.۶ داریم

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(2\sqrt{3}t\right)^2 + (1 - 3t^2)^2}\, dt \\
&= \int_{-1}^1 (1 + 3t^2)\, dt \\
&= \Big[t + t^3\Big]_{-1}^1 = 4
\end{aligned}$$

۱۲.۸.۶ تمرین. طول قوس هر یک از منحنیهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $C\ :\ x = a(2\cos t - \cos(2t))\,,$

$y = a(2\sin t - \sin(2t))\ ;\ 0 \le t \le 2\pi,$

۲) $C\ :\ x = t^2\ ,\ y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3)\ ;\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$

۳) $C\ :\ x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t\,,$

$y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t\ ;\ 0 \le t \le \pi$

۴) $C\ :\ x = a(\sinh t - t)\,,$

$y = a(\cosh t - 1)\ ;\ 0 \le t \le a$

۵) $C\ :\ x = \sinh^3 t\ ,\ y = \cosh^3 t\ ;\ 0 \le t \le a$

۶) $C\ :\ x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\ ,\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\ ;$

$0 \le t \le 2\pi\ ,\ c^2 = a^2 - b^2$

۹.۶ محاسبهٔ حجم و مساحت اجسام دوار

۱.۹.۶ محاسبهٔ حجم دوار حاصل از دوران تابعی از حول محور y ها.

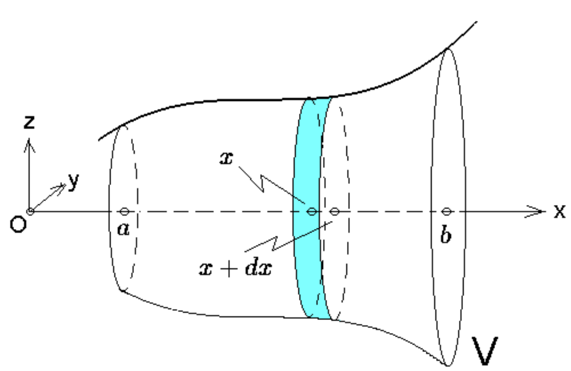
فرض کنید $y = y(x)$ تابعی پیوسته x بر بازهٔ $[a;b]$ است و بازاء هر $x \in (a;b)$ ای $y(x) \ge 0$. در این صورت حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = y(x)$، محور x ها، خط $x = a$ و خط $x = b$ حول محور x ها برابر است با

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2(x)\, dx}$$

زیرا حجم استوانهٔ متناظر به بازهٔ $[x; x + dx]$ برابر است با مساحت دایرهٔ به شعاع $y(x)$ ضرب در ارتفاع dx برابر است با

$$dv = \pi y^2(x) \times dx$$

به شکل ۹.۶ توجه شود.



شکل ۹.۶: محاسبهٔ مساحت جانبی حجم دوار

۲.۹.۶ مثال. ۱) حجم حاصل از دوران سهمی $y=\sqrt{x}$ که $0 \le x \le 1$ حول محور x ها برابر است با

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\, dx \\
&= \pi\left[R^2x - x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

مثال ۲) حجم کرهٔ به شعاع R را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم $y=\sqrt{r^2-x^2}$ و $-R \le x \le R$. در این صورت، نمودار y عبارت است از نیمدایرهٔ به شعاع R و مرکز مبداء و واقع در بالای محور x ها. بنابراین حجم کره که عبارت از حجم حاصل از دوران مساحت زیر این نیمدایره حول محور x ها می‌باشد، برابر است با

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx \\
&= \pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

۳.۹.۶ تمرین. حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به نمودار y، محور x ها، خط $x=a$ و $x=b$ را در هر مورد محاسبه کنید:

۱) $y=2x-x^2,\ a=0,\ b=2,$

۲) $y=3\left(x/3\right)^{3/2},\ a=1,\ b=2,$

۳) $y=\sin x,\ a=0,\ b=\pi,$

۴) $y=\cosh\left(x/c\right),\ a=-c,\ b=c.$

۵) حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به دو منحنی $x^2+y^2=1$ و $y^2=3x/2$ حول محور x ها را محاسبه کنید.

۶) حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به دو منحنی $y=\sin x$ و $y=2/\pi$ حول محور x ها را محاسبه کنید.

۴.۹.۶ محاسبهٔ مساحت سطح حجم دوار حاصل از دوران تابعی از x حول محور x ها.

فرض کنید $y=y(x)$ تابعی پیوسته بر بازهٔ $[a;b]$ و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $(a;b)$ است و بازاء هر $x\in(a;b)$ ای $y(x)\ge 0$. در این صورت مساحت حجم سطح جسم دوار حاصل از دوران نمودار تابع $y=y(x)$ (که از $x=a$ تا $x=b$ ترسیم شده است) حول محور x ها برابر است با

$$\boxed{S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx}$$

زیرا استوانهٔ متناظر به بازهٔ $[x;x+dx]$ به مساحت تقریبی $2\pi y(x)\ell$ است که ℓ طول مولد آن باشد

$$\ell=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

۵.۹.۶ مثال. ۱) مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y^2=\frac{4}{9}x(3-x)^2$ حول محور x ها را محاسبه کنید.

حل. منحنی نسبت به محور x ها متقارن است، در واقع $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{x(3-x)^2}$. از برابر صفر قرار دادن y بدست می‌آید $x=0$ یا $x=3$. پس تابع $y=\frac{2}{3}\sqrt{x(3-x)^2}$ را بر بازهٔ $[0;3]$ در نظر می‌گیریم. چون $0\le x\le 3$ پس می‌توانیم بنویسیم $y=\frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x)$، در نتیجه

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x)\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi\int_0^3\frac{2}{3}\sqrt{x}(3-x)\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}}\,dx \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^3(3-x)\sqrt{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{\pi}{12}\Bigg[(16x^2-76x+46)\sqrt{x^2-x+1} \\
&\qquad +15\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)\Bigg]_0^3 \\
&= \frac{\pi}{36}\left(38\sqrt{7}+90\ln(5+2\sqrt{7})+46\right)
\end{aligned}
$$

مثال ۲) نشان دهید که مساحت سطح هر کرهٔ به شعاع R برابر $4\pi R^2$ است.

حل. می‌توان فرض نمود که این سطح از دوران نمودار تابع $y=\sqrt{R^2-x^2}$ حول محور x ها بدست می‌آید. با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع $[-R;R]$ است، بنابراین

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx = 4\pi R^2
\end{aligned}
$$

۶.۹.۶ تمرین.

۱) مطلوبست مساحت سطحی که از دوران منحنی زنجیری $y=a\cosh\left(x/a\right)$ حول محور x ها در فاصلهٔ $x=0$ تا $x=a$ بدست می‌آید.

۲) مطلوبست مساحت سطح دوکی شکل حاصل از دوران نیم موج از منحنی سینوسی $y=\sin x$ حول محور x ها.

۳) مطلوبست مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=\tan x$ در فاصلهٔ $[0;\pi/4]$ حول محور x ها.

۴) مطلوبست مساحت سطح حاصل از دوران آستروئید $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ حول محور x ها.

۵) مطلوبست مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=x^2/4-(\ln x)/2$ حول محور x ها از $x=1$ تا $x=e$.

۷.۹.۶ حجم و مساحت حاصل از دوران نمودار تابعی از y حول محور y ها. اگر نمودار تابع $x=x(y)$ که $a\le y\le b$ را حول محور y ها دوران دهیم، مساحت سطح حاصل S و حجم جسم دوار حاصل V برابرند با

$$\boxed{\begin{aligned} S &= 2\pi\int_a^b x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy,\\ V &= \pi\int_a^b \left(x(y)\right)^2\,dy \end{aligned}}$$

۸.۹.۶ مثال. ۱) قسمتی از سهمی $y^2=4ax$ که بوسیلهٔ خط $x=a$ جدا شده است را حول محور y ها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل برابر است با

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2a}^{2a}\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 dy\\ &= \pi\left[\frac{y^5}{5\times 16a^2}\right]_{-2a}^{2a}=\frac{4}{5}\pi a^3 \end{aligned}$$

مثال ۲) مساحت سطح حاصل از دوران بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ حول محور y ها برابر است با مساحت منحنی $x=a\sqrt{1-y^2/b^2}$ بر بازهٔ $[-b;b]$ حول محور y ها

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-b}^{b} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sqrt{1+\left\{\frac{-ay/b}{\sqrt{1-y^2/b^2}}\right\}^2}\,dy\\ &= 2\pi a\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2}y^2}\,dy\\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\int_{-b}^{b}\sqrt{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)^2-y^2}\,dy\\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)^2-y^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{b^2}{2(b^2-a^2)}\arcsin\left(\frac{y}{b}\sqrt{b^2-a^2}\right)\right]_{-b}^{b}\\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{b^2\sqrt{1-b^2+a^2}}{\sqrt{b^2-a^2}}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{b^2}{b^2-a^2}\arcsin\left(\sqrt{b^2-a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

۹.۹.۶ تمرین.

۱) حجم جسم دوار حاصل از دوران منطقهٔ محدود به منحنی $x=y^2$ و $x=\sqrt{y}$ حول محور y ها را بیابید.

۲) حجم جسم دوار حاصل از دوران سیکلوئید $x^2=y^3/(2a-y)$ حول محور y ها و از $y=0$ تا $y=a$ را محاسبه کنید.

۱۰.۶ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۱۰.۶ محاسبهٔ انتگرال معین. صورت کلی دستور محاسبهٔ انتگرال `int(f(x),x=a..b)` است، که در آن $f(x)$ تابع مورد انتگرال و x متغیر انتگرالگیری است. اگر بجای `int` از `Int` استفاده شود، انتگرال به شکل نمادین نشان داده می‌شود و محاسبه نخواهد شد. برای محاسبهٔ آن کافی است از دستور `value` استفاده می‌کنیم. برای نمونه

$$\texttt{int(exp(-x)*cos(x),x=0..Pi)}\ \xmapsto{\text{میپل}}\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$$

$$\texttt{Int(exp(-x)*cos(x),x=0..Pi)}\ \xmapsto{\text{میپل}}\ \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,dx$$

$$\texttt{value(Int(exp(-x)*cos(x),x=0..Pi))}\ \xmapsto{\text{میپل}}\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$$

۲.۱۰.۶ تغییر متغیر در انتگرال معین. صورت کلی دستور تغییر متغیر در انتگرال به شکل

```
student[changevar](R(x,u),I(x),u)
```

است، که در آن $I(x)$ انتگرالی است بر حسب متغیر x که می‌خواهیم تغییر متغیر در آن انجام دهیم، $R(x,u)$ رابطه‌ای است که در آن u را بر حسب x بیان نموده‌ایم و u متغیر جدیدی است که باید انتگرال را بر حسب آن بنویسیم. برای نمونه، به کمک

دستور

```
student[changevar](u^2=x^2+1,Int(x^3
*(x^2+1)^(1/2),x=-1..1),u)
```

$\xmapsto{\text{میپل}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -(\mathrm{u}^2-1)\mathrm{u}^2\,\mathrm{du}$

در انتگرال $\int_{-1}^{1} x^3(x^2+1)^2\,dx$ از تغییر متغیر $u^2 = x^2+1$ ایجاد نموده و به نتیجهٔ $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -(u^2-1)u^2\,du$ می‌رسیم.

۳.۱۰.٦ روش جزء به جزء در انتگرال معین.

صورت کلی دستور جزء به جزء در انتگرال به شکل

```
student[intpart](I(x),u(x))
```

است، که به کمک آن در انتگرال $I(x)$ فرض می‌شود $u = u(x)$ و سپس از قاعدهٔ جزء به جزء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ استفاده می‌شود. برای نمونه به کمک دستور

```
student[intpart](Int(x^(3/2)*cos(x),
x = 0..Pi), x^(3/2))
```

$\xmapsto{\text{میپل}} -\frac{3}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{\mathrm{x}}\sin\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$

در انتگرال $\int_0^{\pi} x^{3/2}\cos x\,dx$ از روش جزء به جزء با فرض $u = x^{3/2}$ و $dv = \cos x\,dx$ استفاده می‌شود.

۴.۱۰.٦ محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرال معین.

فرض کنید انتگرالی را نتوان به طریق تحلیلی حل نمود، نظیر $\int_0^{\pi} \sin x/x\,dx$، در این صورت به کمک دستور evalf می‌توان مقدار عددی آن را به طور تقریبی محاسبه نمود. برای نمونه

```
evalf(int(exp(-x^3), x = 0..1))
```

$\xmapsto{\text{میپل}}$ 0.807511182

مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^{1} e^{-x^3}\,dx$ از محاسبه نموده و ۰٫۸۰۷۵۱۱۱۸۲ را نتیجه داده است.

۵.۱۰.٦ . در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۷

انتگرال ناسره

در فصل ششم با اعمال دو فرض اساسی، در مورد انتگرال معین بحث کردیم. اول اینکه فرض کردیم دامنهٔ مورد انتگرالگیری کراندار است (یک بازهٔ بسته به شکل $[a;b]$) و دوم آنکه فرض کردیم، تابع مورد انتگرال f بر $[a;b]$ کراندار است. در این فصل فرض‌های مورد نظر را برمی‌داریم و از دامنهٔ انتگرالهای سَرِه (یعنی، عادی) به دنیای انتگرالهای ناسَرِه (یعنی، غیر عادی) گام می‌نهیم. به همین دلیل، قرار داد ساده کنندهٔ ۱۳.۱.۶ دیگر مورد قبول نیست.

برای ایجاد سهولت بیشتر در بحث، انتگرالهای ناسره را به دو نوع کلی تقسیم می‌کنیم. یکی، آنهایی که دامنهٔ بیکران دارند و دیگری آنهایی که تابع بیکران دارند. روشن است که هر انتگرال ناسره دیگری را به مجموع نمونه‌هایی از این دو نوع می‌توان تجزیه نمود.

۱.۷ تعریف

هر انتگرالی را که بتوان بصورت مجموعی از تعدادی متناهی از چهار انتگرال مشروح در زیر نوشت، **انتگرال ناسَرِه** (یعنی، **غیر عادی**) می‌نامیم.

۱.۱.۷ تعریف ۱. فرض کنید $I=[a;+\infty)$ و $y=f(x)$ تابعی است که بر I تعریف می‌شود. در صورتی می‌گوئیم f بر I **انتگرالپذیر** است که بازاء هر b دلخواه که $a<b$، تابع f به معنی ۲.۱.۶ بر $[a;b]$ انتگرالپذیر باشد و بعلاوه حد $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ موجود باشد. در این صورت، مقدار حد مذکور را **انتگرال ناسره f بر I** نامیده و با نماد $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم.

۲.۱.۷ تعریف ۲. فرض کنید $I=(-\infty;a]$ و $y=f(x)$ تابعی باشد که بر I تعریف می‌گردد. در صورتی می‌گوئیم f بر I انتگرالپذیر است که بازاء هر b دلخواه که $b<a$، تابع f به معنی ۲.۱.۶ بر $[b;a]$ انتگرالپذیر باشد و بعلاوه حد $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ موجود باشد. دراین صورت، مقدار حد مذکور را **انتگرال ناسره f بر I** نامیده و با نماد $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم.

انتگرالهای ناسره معرفی شده در این تعریف و نیز تعریف قبلی را، **انتگرالهای ناسره نوع اول** می‌نامیم.

۳.۱.۷ تعریف ۳. فرض کنید $I=[a;b)$ و تابع $y=f(x)$ بر I تعریف می‌گردد. در صورتی می‌گوئیم f بر I انتگرالپذیر است که بازاء هر c دلخواه که $a<c<b$، تابع f به معنی ۲.۱.۶ بر $[a;c]$ انتگرالپذیر باشد و بعلاوه حد $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx$ موجود باشد. در این صورت، مقدار حد مذکور را **انتگرال ناسره f بر I** نامیده و با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۷ تعریف ۴. فرض کنید $I=(a;b]$ است و تابع داده شدهٔ $y=f(x)$ بر I تعریف می‌گردد. در صورتی می‌گوئیم f بر I انتگرالپذیر است که بازاء هر c دلخواه که $a<c<b$، تابع f به معنی ۲.۱.۶ بر $[c;b]$ انتگرالپذیر باشد و بعلاوه حد $\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,dx$ موجود باشد. در این صورت، مقدار حد مذکور را **انتگرال ناسره f بر I** نامیده و با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم.

انتگرالهای ناسره معرفی شده در این تعریف و نیز تعریف قبل را، **انتگرالهای ناسره نوع دوم** می‌نامیم.

۵.۱.۷ مثال. ۱) مقدار انتگرال $\int_2^{+\infty} dx/(x^2+4)$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. در ابتدا، روشن است که اگر $b>2$، آنگاه تابع مفروض $f(x)=1/(x^2+4)$ بر $[2;b]$ انتگرالپذیر است. بعلاوه

$$\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x^2+4}=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^b$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{b}{۲}\right)-\frac{۱}{۲}\arctan ۱\right\}\\
&= \frac{۱}{۲}\lim_{b\to+\infty}\arctan\left(\frac{b}{۲}\right)-\frac{\pi}{۸}\\
&= \frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\int_{۲}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}+۴}=\frac{\pi}{۸}$$

مثال ۲) مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{۰} e^{x}\,dx$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. روشن است که اگر $a<۰$، آنگاه تابع e^{x} بر $[a;۰]$ انتگرالپذیر است. بعلاوه

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{۰} e^{x}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{۰}\\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(e^{۰}-e^{a}\right)\\
&= ۱-\lim_{a\to-\infty}e^{a}=۱-۰
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{۰} e^{x}\,dx=۱$$

مثال ۳) مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,dx/\sqrt{۱-x}$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. روشن است که اگر $۱>c>۰$، آنگاه تابع مفروض $f(x)=x^{۲}/\sqrt{۱-x}$ بر $[۰;c]$ انتگرالپذیر است. بعلاوه

$$
\begin{aligned}
\lim_{c\to ۱-}\int_{۰}^{c}\frac{x^{۲}}{\sqrt{۱-x}}\,dx &\overset{(۱)}{=} \lim_{d\to ۰-}\int_{۱}^{d}\frac{(۱-u^{۲})^{۲}}{u}(-۲u)du\\
&= \lim_{d\to ۰-} ۲\int_{d}^{۱}(۱-u^{۲})^{۲}\,du\\
&= ۲\int_{۰}^{۱}(۱-u^{۲})^{۲}du\\
&= ۲\int_{۰}^{۱}(u^{۴}-۲u^{۲}+۱)du\\
&= ۲\left[\frac{u^{۵}}{۵}-۲\frac{u^{۳}}{۳}+u\right]_{۰}^{۱}
\end{aligned}
$$

در (۱) فرض شده است $u=\sqrt{۱-x}$. بنابراین

$$\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}}{\sqrt{۱-x}}\,dx=\frac{۱۶}{۱۵}$$

مثال ۴) مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱}(\ln x/\sqrt{x})\,dx$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. روشن است که اگر $۱>c>۰$، آنگاه تابع مورد انتگرال $f(x)=\ln x/\sqrt{x}$ بر $[c;۱]$ انتگرالپذیر است. بعلاوه

$$
\begin{aligned}
\lim_{c\to ۰+}\int_{c}^{۱}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &\overset{(۱)}{=} \lim_{d\to+\infty}\int_{d}^{۰}\frac{-۲u}{e^{-u}}\left(-۲e^{-۲u}\,du\right)\\
&= -۴\lim_{d\to+\infty}\int_{۰}^{d} ue^{-u}\,du\\
&\overset{(۲)}{=} -۴\lim_{d\to+\infty}-\left\{\left[ue^{-u}\right]_{۰}^{d}-\int_{۰}^{d}e^{-u}\,du\right\}\\
&= ۴\lim_{d\to+\infty}\left\{\frac{d}{e^{d}}+\left[e^{-u}\right]_{۰}^{d}\right\}\\
&= ۴\lim_{d\to+\infty}\frac{d+۱}{e^{d}}-۴\\
&= ۴\lim_{d\to+\infty}\frac{d}{e^{d}}-۴\\
&\overset{(۳)}{=} ۴\lim_{d\to\infty}\frac{۱}{e^{d}}-۴=-۴
\end{aligned}
$$

توضیح اینکه، در (۱) فرض شده است $\sqrt{x}=e^{-u}$، در (۲) از روش جزء به جزء استفاده شده است و در (۳) از قاعدهٔ هوپیتال بهره گرفته شده است. بنابراین

$$\int_{۰}^{۱}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=-۴$$

مثال ۵) مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\infty}(e^{-۲\sqrt{x}}/\sqrt{x})\,dx$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. این انتگرال در دو جا مشکل دارد، یکی در ۰ و دیگری در $+\infty$. بنابراین، انتگرال مذکور را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{+\infty}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int_{۰}^{۱}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx+\int_{۱}^{\infty}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

در انتگرال مورد اول، داریم

$$
\begin{aligned}
\int_{۰}^{۱}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{a\to ۰+}\int_{a}^{۱}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\\
&\overset{(۱)}{=} \lim_{b\to ۰+}\int_{b}^{۱}e^{-u}du\\
&= \lim_{b\to ۰+}\left[-e^{-u}\right]_{b}^{۱}\\
&= -\lim_{b\to ۰+}\left\{e^{-۱}-e^{-b}\right\}=۱-\frac{۱}{e}
\end{aligned}
$$

در (۱) فرض شده است که $u=۲\sqrt{x}$. بعلاوه، در مورد انتگرال دوم داریم

$$
\begin{aligned}
\int_{۱}^{\infty}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_{۱}^{b}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx\\
&\overset{(۱)}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_{۱}^{b}e^{-u}\,du\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-u}\right]_{۱}^{b}\\
&= -\lim_{b\to+\infty}\left\{e^{-b}-e^{-۱}\right\}=\frac{۱}{e}
\end{aligned}
$$

که در اینجا نیز در (۱) فرض شده است $u=۲\sqrt{x}$. در نتیجه

$$\int_{۰}^{+\infty}\frac{e^{-۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(۱-\frac{۱}{e}\right)+\left(\frac{۱}{e}\right)=۱$$

مثال ۶) مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{e^x}\,dx)/(1+e^x)$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

حل. این انتگرال در $+\infty$ و نیز در $-\infty$ دارای مشکل است. پس می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx$$

در هر مورد، با تغییر متغیر $u=\sqrt{e^x}$ داریم

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx\\
&= \lim_{b\to 0+}\int_{b}^{1}\frac{u}{1+u^2}\frac{2\,du}{u}\\
&= \lim_{b\to 0+}2\int_{b}^{1}\frac{du}{u^2+1}\\
&= \lim_{b\to 0+}2\,[\arctan u]_b^1\\
&= 2\lim_{b\to 0+}(\arctan 1-\arctan b)\\
&= \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx\\
&= \lim_{a\to+\infty}\int_{1}^{a}\frac{u}{1+u^2}\frac{2\,du}{u}\\
&= \lim_{a\to+\infty}2\int_{1}^{a}\frac{du}{1+u^2}\\
&= 2\lim_{a\to+\infty}[\arctan u]_1^b\\
&= 2\lim_{a\to+\infty}(\arctan b-\arctan 1)\\
&= \pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

۶.۱.۷ تعریف. انتگرال ناسره‌ای که وجود داشته باشد را **همگرا** می‌نامیم. انتگرال ناسره غیر همگرا را **واگرا** می‌نامیم.

در بسیاری از موارد یافتن این نکته که یک انتگرال ناسره مفروض همگرا است یا واگرا، بسیار مهم می‌باشد. عملاً مقدار بسیاری از انتگرالهای ناسره همگرا را نمی‌توان حساب کرد. البته به کمک نظریه‌های پیشرفته‌تری چون «انتگرالهای فوریه»، می‌توان برخی از آنها را محاسبه کرد.

بنابراین من بعد، به مسئلهٔ همگرایی و واگرایی انتگرالهای ناسره می‌پردازیم و زیاد در بند محاسبهٔ مقدار دقیق آنها نیستیم.

۷.۱.۷ مثال. ۱) می خواهیم بدانیم که بازاء کدام مقادیر از عدد حقیقی $p>0$ انتگرال ناسره $\int_1^\infty dx/x^p$ همگرا است؟

حل. با توجه به تعریف انتگرال ناسره، داریم

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx$$

بسته به مقدار p، سه حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

اگر $p>1$) در این صورت انتگرال به عدد $1/(p-1)$ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty\frac{dx}{x^p} &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\\
&= \frac{1}{p-1}
\end{aligned}$$

اگر $p=1$) در این صورت انتگرال واگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty\frac{dx}{x^p} &= \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\ln b=+\infty
\end{aligned}$$

اگر $0<p<1$) در این صورت نیز انتگرال واگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty\frac{dx}{x^p} &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=+\infty
\end{aligned}$$

در نتیجه اگر $p>1$، آنگاه انتگرال داده شده همگرا است و در غیر این صورت، واگرا می‌باشد.

مثال ۲) می‌خواهیم بدانیم که بازاء کدام مقادیر از عدد حقیقی p، انتگرال ناسره $\int_0^\infty x^p\,dx/(1+x)$ همگرا است؟

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^\infty\frac{x^p}{1+x}\,dx\\
&= \int_0^1\frac{x^p}{1+x}\,dx+\int_1^\infty\frac{x^p}{1+x}\,dx\\
&\overset{(1)}{=} \int_{+\infty}^1\frac{u^{-p}}{1+\frac{1}{u}}\frac{-du}{u^2}+\int_1^\infty\frac{x^p}{1+x}\,dx\\
&= \int_1^\infty\frac{x^{-1-p}}{1+x}\,dx+\int_1^\infty\frac{x^p}{1+x}\,dx\\
&= J_{-(1+p)}+J_p
\end{aligned}$$

که در (۱) فرض شده است $u=\frac{1}{x}$ و $J_p=\int_1^\infty\frac{x^p\,dx}{1+x}$. پس کافی است J_p بررسی شود. اما اگر $p\le 0$، آنگاه J_p نسبت به p

صعودی است، زیرا اگر $q \leq p \leq ۰$ و $x \leq ۱$، آنگاه $x^q \leq x^p$، و بنابراین

$$\begin{aligned} J_q &= \int_۱^b \frac{x^q}{۱+x}\,dx \\ &\leq \int_۱^b \frac{x^p}{۱+x}\,dx = J_p \end{aligned}$$

. پس اگر $J_۰$ واگرا باشد، آنگاه همهٔ J_p هایی که $p \leq ۰$ نیز واگرا هستند:

$$\begin{aligned} J_۰ &= \int_۱^\infty \frac{x^۰}{۱+x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_۱^b \frac{dx}{۱+x} \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln|b+۱| = +\infty \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $p \leq ۰$، آنگاه J_p واگرا است و لذا I_p واگرا است. اگر $p \leq -۱$، آنگاه $-۱-p \geq ۰$ و لذا $J_{-p-۱}$ و I_p واگرا هستند. پس کافی است حالت $-۱ < p < ۰$ مطالعه شود، زیرا در این حالت $-۱-p$ نیز در بازهٔ $(-۱;۰)$ قرار می‌گیرد. پس با توجه به اینکه بازه‌های به شکل $\left(-۱+\frac{۱}{n+۱};-۱+\frac{۱}{n}\right)$ بازهٔ $(-۱;۰)$ را می‌پوشانند، فرض می‌کنیم $-۱+\frac{۱}{n+۱} < p < -۱+\frac{۱}{n}$، در این صورت

$$\begin{aligned} J_p &= \int_۱^\infty \frac{x^p}{۱+x}\,dx \\ &< \int_۱^\infty \frac{x^{-۱+\frac{۱}{n+۱}}}{۱+x}\,dx \\ &\overset{(۱)}{=} \int_۱^\infty \frac{y^{-n}}{۱+y^{n+۱}}(n+۱)y^n\,dy \\ &= (n+۱)\int_۱^\infty \frac{dy}{۱+y^n} \\ &< (n+۱)\int_۱^\infty \frac{dy}{y^n} \\ &= (n+۱)\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{y^{۱-n}}{۱-n}\right]_۱^{+\infty} \\ &= \frac{n+۱}{n-۱} \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $x = y^{n+۱}$. چون اگر $۲ \leq n$، آنگاه $\frac{n+۱}{n-۱} \leq ۳$، بنابراین J_p بازاء هر $p \in (-۱;۰)$ ای همگرا است، در این حالت $J_{-(۱+p)}$ نیز همگرا می‌باشد و لذا I_p همگرا است. یعنی ثابت شد که I_p وقتی و تنها وقتی همگرا است که $-۱ < p < ۰$.

۲.۷ آزمونهای همگرایی

منظور از آزمون قضیه‌ای است که کمک می‌کند تا همگرایی و یا واگرایی انتگرالهای ناسره را به صورت مستقیم و یا غیر مستقیم مورد مطالعه قرار دهیم.

اگر $y = f(x)$ تابعی مثبت باشد، آنگاه با افزایش دامنهٔ انتگرالگیری، مقدار انتگرال افزایش می‌یابد، یعنی $\int_a^b f(x)\,dx$ به عنوان تابعی از b صعودی است. به همین دلیل کرانداری آن به معنی وجود انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ است، به بیان دقیقتر:

۱.۲.۷ آزمون تابع مثبت. فرض کنید تابع $y = f(x)$ بر بازهٔ $[a;\infty)$ مثبت و انتگرالپذیر است. در این صورت، شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_a^\infty f(x)\,dx$ آن است که تابع

$$I(b) := \int_a^b f(x)\,dx$$

از بالا کراندار باشد.

اثبات: فرض کنیم $\int_a^\infty f(x)\,dx$ موجود باشد. در این صورت، چون f تابعی مثبت است، انتگرال آن بر هر بازه‌ای مثبت است و درنتیجه، به ازای هر $b > a$ ای

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^N f(x)\,dx\right\} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_b^N f(x)\,dx \\ &\geq \int_a^b f(x)\,dx = I(b) \end{aligned}$$

بنابراین، $I(b)$ از بالا به $M = \int_a^\infty f(x)\,dx$ کراندار است.

حال فرض کنیم M ای باشد که به ازای هر $b > a$ ای $I(b) \leq M$. فرض کنیم

$$A := \{N \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, b > a \,:\, I(b) < N\}$$

در این صورت، چون f مثبت است، پس $\int_a^\infty f(x)\,dx \geq ۰$ و در نتیجه A از پائین کراندار است. بعلاوه، $M \in A$ و بنابراین A غیر تهی است. در نتیجه A دارای اینفیموم است: $\alpha = \inf(A)$. ثابت می‌کنیم $\int_a^\infty f(x)\,dx = \alpha$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$، پس $N \in A$ ای هست که $\alpha \leq N < \alpha+\varepsilon$. اکنون به ازای هر $b > a$ ای $I(b) \leq N < \alpha+\epsilon$. بعلاوه، $b > a$ ای وجود دارد که $I(b) > \alpha-\beta$. زیرا، در غیر این صورت اگر به ازای هر $b > a$ ای $I(b) \leq \alpha-\varepsilon$، آنگاه $\alpha-\varepsilon \in A$ که خلاف تعریف α است. در نتیجه چون I صعودی است، به ازای هر $b > a$ ای $\alpha-\beta \leq I(b) \leq \alpha-\varepsilon$ یا $|I(b)-\alpha| < \varepsilon$ و به این ترتیب، برهان تمام است. □

۲.۲.۷ مثال. ۱) در همگرایی انتگرال $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ بحث کنید.

حل. چون تابع $f(x)=e^{-x^2}$ بر $[0;\infty)$ مثبت و انتگرالپذیر است، بنابه آزمون تابع مثبت کافی است کرانداری $I(b)=\int_0^b e^{-x^2}\,dx$ را ثابت کنیم. اما

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^b e^{-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^b e^{-x^2}\,dx \\ &\overset{(1)}{\le} A + \int_1^b e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

که در اینجا $A=\int_0^1 e^{-x}\,dx$ یک انتگرال عادی است و در (۱) از این واقعیت استفاده شده است که اگر $x\le 1$، آنگاه $x\le x^2$، $-x^2\le -x$ و لذا $e^{-x^2}\le e^{-x}$. از طرفی

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-x}\,dx &= \left[-e^{-x}\right]_1^b \\ &= e^{-1}-e^{-b}\le e^{-1} \end{aligned}$$

در نتیجه $I(b)\le A+1/e$ و بنابراین $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ همگرا است.

مثال ۲) در همگرایی انتگرال $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$ بحث کنید.

حل. چون $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x}$ بر $(1;\infty)$ مثبت و انتگرالپذیر است، پس در مورد کرانداری $I(b)=\displaystyle\int_1^b \frac{x-1}{x^2+x}\,dx$ باید بحث شود. به دلیل آنکه $x\le 1$، پس $\dfrac{x-1}{x^2+x}>\dfrac{x-1}{x^2+x^2}$ و بنابراین

$$\begin{aligned} I(b) &\ge \int_1^b \frac{x-1}{2x^2}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2x}\right]_1^b \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln b+\frac{1}{b}-1\right)=h(b) \end{aligned}$$

که حد $h(b)$ وقتی $b\to\infty$ برابر بینهایت مثبت است. یعنی $I(b)$ کراندار نیست و لذا انتگرال واگرا است.

۳.۲.۷ آزمون مقایسه. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع نامنفی و انتگرالپذیر بر $[a;\infty)$ باشند، به گونه‌ای که بازاء یک $c\ge a$ ای و هر $x\in[c;\infty)$ ای $f(x)\le g(x)$. در این صورت

الف) اگر $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد، آنگاه $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ نیز واگرا است.

ب) اگر $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

اثبات: روشن است که با توجه به ۱.۲.۷، مورد (الف) عکس نقیض (ب) است. پس کافی است (ب) را اثبات کنیم. برای این منظور، فرض کنیم $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرا باشد. پس بنابه ۱.۲.۷، از بالا کراندار است. از طرفی به ازای هر $b\ge a$ ای و همچنین هر $x\in[a;b]$ ای $f(x)\le g(x)$. بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

در نتیجه $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$ و بنابراین $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز کراندار است و در نتیجه، همگرا می‌باشد. □

۴.۲.۷ مثال. ۱) در همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\displaystyle\int_0^\infty dx/\sqrt{1+x^2}$ بحث می‌کنیم.

حل. اگر $x\ge 0$، آنگاه $(1+x)^2\ge 1+x^2$ و بنابراین $1+x\ge\sqrt{1+x^2}$. پس با فرض $f(x)=1/(1+x)$ و $g(x)=1/\sqrt{1+x^2}$ در ۱.۲.۷ و با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x+1} \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln|b+1|=+\infty \end{aligned}$$

واگرا است، نتیجه می‌گیریم که انتگرال ناسره داده شده نیز واگرا است.

مثال ۲) در همگرایی انتگرال $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ که $n\in\mathbb{N}$، بحث کنید.

حل. با استفاده از تغییر متغیر $u=1/(1-x)$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_{+\infty}^1 \frac{(1-\frac{1}{u})^n}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{u})^4}}\frac{-du}{u^2} \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{(u-1)^n du}{u^n\sqrt{4u^3-6u^2+4u-1}} \end{aligned}$$

اما، در اینجا $u\ge 1$ و بنابراین $u\ge u-1\ge 0$. همچنین $-3u^3\le -3\le -6u^2+4u-1$، در نتیجه

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{(u-1)^n}{u^n\sqrt{4u^3-6u^2+4u-1}} \\ &\le \frac{u^n}{u^n\sqrt{4u^3-3u^3}} \\ &= \frac{1}{u^{3/2}}=g(u) \end{aligned}$$

و بعلاوه

$$\begin{aligned} \int_1^\infty g(u)\,du &= \lim_{b\to\infty}\frac{du}{u^{3/2}} \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{u}}\right]_1^b=2 \end{aligned}$$

پس $\int_{1}^{\infty} g(u)du$ همگرا است و بنابراین، مطابق ۱.۲.۷، $\int_{1}^{\infty} f(u)du$ همگرا است. این خود ثابت می‌کند که $\int_{0}^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ بازاء هر $n\in\mathbb{N}$ ای همگرا می‌باشد.

۵.۲.۷ آزمون مقایسهٔ حدی. فرض کنیم f و g دو تابع مثبت و انتگرالپذیر بر $[a;\infty)$ باشند. در این صورت

الف) اگر حد $L = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود و مخالف صفر یا بینهایت باشد، آنگاه انتگرال ناسره $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ وقتی و تنها وقتی همگرا است که $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد.

ب) اگر $L = 0$ و $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

ج) اگر $L = \infty$ و $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ و واگرا باشد، آنگاه $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ نیز واگرا است.

اثبات: فرض کنیم $L \neq 0, \infty$. در این صورت، به ازای $\varepsilon = L/2$ یک $k > a$ چنان وجود دارد که به ازای هر $x > k$ ای $\left|f(x)/g(x) - L\right| < \varepsilon$. در نتیجه

$$(L-\varepsilon)g(x) < f(x) < (L+\varepsilon)g(x)$$

یا $\frac{1}{2}Lg(x) < f(x) < \frac{3}{2}Lg(x)$. در نتیجه، همگرایی $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ به معنی همگرایی $\frac{3}{2}L\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ است و بنابراین $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا است. بعلاوه، اگر $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ واگرا باشد، آنگاه $\frac{1}{2}L\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا است و بنابراین $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ نیز واگرا می‌باشد.

حال اگر فرض شود $L = 0$، به ازای $\varepsilon = 1$، k ای چنان وجود دارد که به ازای هر $x \geq k$ ای $0 \leq f(x)/g(x) < \varepsilon$ یا $f(x) \leq g(x)$. بنابراین، همگرایی $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ منجر به همگرایی $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ می‌شود.

حال اگر فرض شود $L = \infty$، k ای چنان وجود دارد که $x \geq k$ که $f(x)/g(x) \geq 1$ یا $f(x) \leq g(x)$. بنابراین، واگرایی $\int_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ منجر به واگرایی $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ می‌شود. □

۶.۲.۷ مثال. ۱) در همگرایی انتگرال $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ بحث کنید.

حل. با فرض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ و $g(x) = x^{-2/3}$ بر $[1;+\infty)$ در ۵.۲.۷ و نظر به اینکه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}} = 1$$

و نیز

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} g(x)\,dx &= \int_{1}^{\infty} x^{-3/2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} x^{-3/2}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_{1}^{b} = 2\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که انتگرال مورد نظر همگرا می‌باشد.

مثال ۲) در همگرایی انتگرال $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{xe^x+3e^{-x}}$ بحث کنید.

حل. با فرض $g(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$ و $f(x) = \frac{1}{xe^x+3e^{-x}}$ بر $[1;+\infty)$ در ۵.۲.۷ و نظر به اینکه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{xe^x+3e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{2x}}{xe^{2x}+3}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)e^x}{(2x+1)e^x} = 1\end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} g(x)\,dx &= \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-x}\,dx\\ &\leq \int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{1}^{b} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

همگرا می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که انتگرال داده شده نیز همگرا است.

مثال ۳) بازاء کدام مقادیر p و q انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} x^p e^{qx}\,dx$ همگرا است؟

حل. برای این منظور، سه حالت $q > 0$، $q = 0$ و $q < 0$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $q > 0$، آنگاه فرض می‌کنیم $f(x) = e^{qx/2}$ و $g(x) = x^p e^{qx}$. در این صورت یا $p \geq 0$ و یا اینکه $p < 0$.

اگر $p \geq 0$، آنگاه، روشن است که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p e^{qx/2}} = 0$$

اما، اگر $p < ۰$، آنگاه عدد طبیعی $k = [-p] + ۱$ ای وجود دارد که $-p - k < ۰$. بنابراین، پس از k بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، مجدداً به حالت $p \le ۰$ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-p}}{e^{qx/۲}}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-px^{-p-۱}}{\frac{q}{۲}e^{qx/۲}} \overset{\text{هـ}}{=} \cdots\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(-p)(-p-۱)\cdots(-p-k)x^{-p-k}}{\left(\frac{q}{۲}\right)^k e^{qx/۲}} = ۰\end{aligned}$$

یعنی، در هر صورت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = ۰$. بنابراین، با فرض $f(x) = e^{qx/۲}$ و $g(x) = x^p e^{qx}$ بر $[۱;\infty)$ در ۵.۲.۷ و نظر به اینکه

$$\begin{aligned}\int_۱^\infty f(x)\,dx &= \int_۱^\infty e^{qx/۲}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{۲}{q}e^{qx/۲}\right]_۱^b = \infty\end{aligned}$$

واگرا است، نتیجه می‌گیریم که بنابه قسمت (الف) از ۵.۲.۷، انتگرال $\int_۱^\infty x^p e^{qx}\,dx$ نیز واگرا می‌باشد.

ب) اگر $q = ۰$، آنگاه مطابق ۶.۱.۷ (۱) ، وقتی و تنها وقتی $\int_۱^\infty x^p e^{qx}\,dx$ همگرا می‌باشد که $p < -۱$.

ج) اگر $q < ۰$، آنگاه با فرض $g(x) = \frac{۱}{x^۲}$ و $f(x) = x^p e^{qx}$ بر $[۱;\infty)$ در ۷.۳.۷ و نظر به اینکه (با استدلالی شبیه به آنچه که در قسمت الف ذکر شد):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+۲}}{e^{-qx}} = ۰$$

و $\int_۱^\infty g(x)\,dx = \int_۱^\infty x^{-۲}\,dx = ۱$ همگرا است، نتیجه می‌گیریم که انتگرال $\int_۱^\infty x^p e^{qx}\,dx$ نیز همگرا می‌باشد.

پس در مجموع، انتگرال ناسره $\int_۱^\infty x^p e^{qx}\,dx$ وقتی و تنها وقتی همگرا است که «$q = ۰$ و $p < -۱$» یا «$q < ۰$».

مثال ۴) نشان دهید انتگرال $\int_۰^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx$ همگرا است.

حل. با نوشتن

$$\int_۰^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx = \int_۰^۱ \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx + \int_۱^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx$$

و توجه به اینکه $\lim_{x\to۰}\frac{\sin^۲ x}{x^۲} = ۱$ و بنابراین انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx$ عادی است، و لذا وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که کافی است همگرایی $\int_۱^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}\,dx$ را نشان دهیم.

اکنون در قسمت (ب) از قضیهٔ ۵.۲.۷ فرض می‌کنیم $f(x) = \frac{\sin^۲ x}{x^۲}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^{۳/۲}}$. در این صورت

$$\begin{aligned}۰ \le \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^۲ x/x^۲}{۱/x^{۳/۲}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^۲ x}{x^{۱/۲}}\\ &\le \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^{۱/۲}} = ۰\end{aligned}$$

بعلاوه $\int_۱^\infty \frac{dx}{x^{۳/۲}} = \int_۱^\infty g(x)\,dx$ همگرا است و لذا انتگرال مورد نظر نیز همگرا است.

مثال ۵) نشان دهید انتگرال $\int_{e^۲}^\infty \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ واگرا است.

حل. با فرض $t = \ln x$ داریم

$$I := \int_{e^۲}^\infty \frac{dx}{x\ln(\ln x)} = \int_۲^\infty \frac{dt}{\ln t}$$

حال در قسمت (ج) از ۵.۲.۷ فرض می‌کنیم $f(t) = ۱/\ln t$ و $g(t) = ۱/\sqrt{t}$. در این صورت، به وضوح $\int_۲^\infty g(t) = \int_۲^\infty \frac{dt}{\ln t}$ واگرا است و بعلاوه

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{۱/۲\sqrt{t}}{۱/t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\sqrt{t} = +\infty\end{aligned}$$

۷.۲.۷ آزمون کوشی.

شرط لازم و کافی برای همگرایی $\int_a^\infty f(x)\,dx$ آن است که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $k \ge a$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر $\alpha, \beta \ge k$ ای $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

اثبات: فرض کنیم $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا به I است. پس به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $k \ge a$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر $b \ge k$ ای $\left|\int_a^b f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon/۲$. اکنون، به ازای هر $\alpha, \beta > k$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| &< \left|\int_a^\beta f(x)\,dx - \int_a^\alpha f(x)\,dx\right|\\ &\le \left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^\alpha f(x)\,dx\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم که به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $k \ge a$ ای هست که به ازای هر $\alpha, \beta > \varepsilon$ ای $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. در این صورت،

با ثابت نگاه داشتن $\beta = k$ داریم: به ازای هر $\alpha \geq k$ ای $\left|\int_k^\alpha f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. چون $\alpha \geq k$ دلخواه است، پس

$$\left|\int_k^\infty f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{b\to\infty}\int_k^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

و در نتیجه

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^k f(x)\,dx\right| = \left|\int_k^\infty f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

یعنی $\lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)\,dx$ موجود و برابر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ است. $\square$

۸.۲.۷ تمرین. در تمرینات زیر فرض کنید a عدد حقیقی مثبت، n عددی طبیعی مثبت، m عدد صحیح و p، q، α و β اعداد حقیقی دلخواهند.

مقدار هر یک از انتگرالهای ناسره زیر را (در صورت همگرا بودن) محاسبه کنید:

۱) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ ۲) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x}}$

۳) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ ۴) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

۵) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$ ۶) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx$

۷) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin(bx)\,dx$ ۸) $\displaystyle\int_3^\infty\frac{dx}{x^2}$

۹) $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx$ ۱۰) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$ ۱۲) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

۱۳) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ ۱۴) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$

۱۵) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$ ۱۶) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۱۷) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\cosh^n x}$ ۱۸) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

در همگرایی انتگرالهای ناسره زیر بحث کنید:

۱۹) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}$ ۲۰) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

۲۱) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}$ ۲۲) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^m}{1+x^n}\,dx$

۲۳) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\arctan(ax)}{x^n}\,dx$ ۲۴) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$

۲۵) $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ ۲۶) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^m\arctan x}{x^n+2}\,dx$

۲۷) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha|x-1|^\beta\,dx$ ۲۸) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$

۲۹) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x}{1-e^x}\,dx$ ۳۰) $\displaystyle\int_2^\infty(\ln x)^p\,dx.$

۳.۷ همگرایی مشروط

آزمونهایی که تاکنون در اختیار داشتیم، در مورد توابع مثبت بودند. در حالی که عملاً بسیاری از توابع چنین نیستند. در این بخش به ذکر چند آزمون کلی می‌پردازیم.

۱.۳.۷ تعریف. اگر $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ همگرا باشد، می‌گوئیم $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **همگرای مطلق** است. اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا و غیر همگرای مطلق باشد، می‌گوئیم **همگرای مشروط** است.

اگر یک انتگرال ناسره مفروض همگرای مطلق باشد، آنگاه همگرا می‌باشد. اما عکس این گفته نادرست است. برای مشاهدهٔ نمونه‌ای از آن به قسمت (۱) از مثال ۶.۲.۷ توجه شود.

۲.۳.۷ قضیه. فرض کنید $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق بوده و g تابعی انتگرالپذیر و کراندار بر $[a;\infty)$ باشد. در این صورت $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ نیز همگرای مطلق است.

اثبات: چون g کراندار است، عددی مانند M وجود دارد که به ازای هر $b \geq a$ ای $|g(b)| \leq M$. بعلاوه، چون $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق است، عددی مانند N وجود دارد که به ازای هر $b \geq a$ ای $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$ و بنابراین، اگر $b \geq a$، آنگاه

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq M\int_a^b |f(x)|\,dx$$

در نتیجه $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ همگرای مطلق است. $\square$

۳.۳.۷ آزمون آبل. گیریم $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا بوده و g تابعی کراندار و یکنوا بر $[a;\infty)$ باشد. در این صورت $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ همگرا است.

اثبات: به کمک قسمت (۴) از قضیهٔ ۴.۲.۶، به ازای هر $t_1, t_2 > a$، یک ξ چنان وجود دارد که

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)g(x)\,dx = g(t_1)\int_{t_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(t_2)\int_{\xi}^{t_2} f(x)\,dx$$

چون g کراندار است، M ای چنان وجود دارد که به ازای هر $x \geq a$ ای $|g(x)| \leq M$. چون $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا است، به ازای هر $\varepsilon > 0$، $k \geq a$ ای وجود دارد که به ازای هر $t_1, t_2 \geq k$ ای $\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon/2M$. اکنون، چون $k < t_1 < \xi < t_2$، داذیم

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)g(x)\,dx\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|g(t_۱)\int_{t_۱}^{\xi} f(x)\,dx + g(t_۲)\int_{\xi}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(t_۱)|\left|\int_{t_۱}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(t_۲)|\left|\int_{\xi}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&\leq M\left|\int_{t_۱}^{t_۲} f(x)\,dx\right| + M\left|\int_{t_۱}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&= ۲M\left|\int_{t_۱}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&< ۲M\frac{\varepsilon}{۲M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

و بنابه آزمون کوشی، برهان تمام است. □

۴.۳.۷ آزمون دریکله. فرض کنید تابع g بر $[a;\infty)$ یکنوا و کراندار، $\lim_{x\to\infty} g(x) = ۰$ و $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ بر $[a;\infty)$ کراندار است. آنگاه $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ همگرا است.

اثبات: بنابه قسمت (۴) از قضیهٔ ۴.۲.۶، به ازای هر $t_۱, t_۲ \geq a$، یک ξ چنان وجود دارد که $t_۱ < \xi < t_۲$ و

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t_۱}^{t_۲} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx - \int_a^{t_۱} f(x)\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^{t_۱} f(x)\,dx\right| \\
&\leq M + M = ۲M
\end{aligned}$$

به صورت مشابه $\left|\int_{\xi}^{t_۲} f(x)\,dx\right| < ۲M$. چون $\lim_{x\to\infty} g(x) = ۰$، بنابراین به ازای هر $\varepsilon > ۰$ دلخواه، $k > a$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر $x \geq k$ ای $|g(x)| < \varepsilon/۴M$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_۱}^{t_۲} f(x)g(x)\,dx\right| = \\
&= \left|g(t_۱)\int_{t_۱}^{\xi} f(x)\,dx + g(t_۲)\int_{\xi}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(t_۱)|\left|\int_{t_۱}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(t_۲)|\left|\int_{\xi}^{t_۲} f(x)\,dx\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{۴M}\times ۲M + \frac{\varepsilon}{۴M}\times ۲M \\
&= \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۵.۳.۷ قضیه. فرض کنید تابع f بر $[a;\infty)$ پیوسته است، $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ بر $[a;\infty)$ کراندار است. g بر $[a;\infty)$ مشتق‌پذیر، $g' \leq ۰$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = ۰$. در این صورت $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ همگرا است.

اثبات: نتیجه‌ای از آزمون آبل می‌باشد، و به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده. □

۶.۳.۷ مثال. ۱) آیا انتگرال ناسره $\int_۰^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرای مشروط است؟

حل. بله، زیرا اگر در ۴.۳.۷ فرض شود $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$، آنگاه بدلیل

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_۰^x f(x)\,dx = \int_۰^x \sin x\,dx \\
&= \cos x - ۱ \in [-۲;۰]
\end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-۱}{x^۲} < ۰ \qquad \forall\, x > ۰$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x} = ۰$$

نتیجه می‌گیریم $\int_۰^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرا است. بعلاوه، با توجه به

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+۱)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx &\geq \int_{k\pi}^{(k+۱)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+۱)\pi}\,dx \\
&= \left[\frac{\pm\cos x}{(k+۱)\pi}\right]_{k\pi}^{(k+۱)\pi} \\
&= \frac{۲}{(k+۱)\pi}
\end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\int_۰^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx &\geq \int_\pi^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\pi^{(n+۱)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\int_{k\pi}^{(k+۱)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \\
&\geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۲}{(k+۱)\pi} \\
&\geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۲}^{n}\frac{۲}{\pi}\int_k^{k+۱}\frac{dx}{x} \\
&= \frac{۲}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_۲^n\frac{dx}{x} \\
&= \frac{۲}{\pi}\int_۲^\infty\frac{dx}{x} = +\infty
\end{aligned}$$

بنابراین، $\int_۰^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ واگرا است.

مثال ۲) در همگرایی انتگرال ناسره $\int_۰^\infty \frac{\cos^۳ x}{\sqrt{۱+x^۲}}\,dx$ بحث کنید.

حل. فرض $f(x) = \cos^۳ x$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ در ۴.۳.۷ و با توجه به اینکه

$$F(x) = \int_۰^x \cos^۳ x\,dx$$

$$= \int_0^x \left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \in [-2;2]$$
$$g'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2} < 0$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

در نتیجه، انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ همگرا است. این انتگرال، همگرای مطلق نیست. چرا؟

مثال ۳) آیا $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ همگرای مشروط است؟
حل. بله، زیرا با فرض $x=\sqrt{x}$، می‌توان نوشت

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

اکنون با فرض

$$f(t)=\sin t \quad , \quad g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

از قضیهٔ ۴.۳.۷ نتیجه می‌گیریم که $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ همگرا است. این انتگرال همگرای مطلق نیست. چرا؟

مثال ۴) نشان دهید که انتگرال $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$ به ازای $a>0$ همگرا است.

حل. فرض کنیم $g(x)=e^{-ax}$ که به وضوح کراندار و نزولی است. بعلاوه، اگر فرض شود که $f(x)=\sin x/x$، آنگاه $\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرا است. اکنون، بنابه قضیهٔ آبل $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$ نیز همگرا است.

۷.۳.۷ تمرین. در هر مورد مشخص کنید که آیا انتگرال داده شده همگرا، همگرای مطلق و یا همگرای مشروط است یا خیر:

۱) $\int_0^\infty \frac{x\cos x}{1+x^2}\,dx,$　　۲) $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x(x^2-1)}\,dx,$

۳) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx,$　　۴) $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx,$

۵) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^{2x}-1}\,dx,$　　۶) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1-x^2}\,dx,$

۷) $\int_0^\infty \cos x^2\,dx,$　　۸) $\int_1^\infty x^p\sin x\,dx,$

۹) $\int_0^1 x^p(\ln x)^q\,dx,$　　۱۰) $\int_0^\infty x^p(e^{-x}-1)\,dx.$

۴.۷ انتگرالهای ناسره وابسته به پارامتر

در بسیاری از کاربردهای انتگرال ناسره، نظیر روش لاپلاس در معادلات دیفرانسیل معمولی و یا انتگرالهای فوریه در معادلات با مشتقات جزئی، لازم است تا توابعی که برحسب انتگرالهای ناسره تعریف شده‌اند را مطالعه کنیم. بخصوص باید بتوانیم راجع به پیوستگی، مشتق‌پذیری و انتگرالپذیری آنها بحث کنیم. در این بخش ابزار لازم برای این مهم فراهم می‌شود.

۱.۴.۷ تعریف ۱. فرض کنید $S\subseteq\mathbb{R}$ غیر تهی و $[a;\infty)\times S=\{(t,x)\mid a\le t, x\in S\}$. فرض کنید $f(t,x)$ تابعی است که بر $[a;\infty)\times S$ تعریف می‌گردد و بازاء هر $x\in S$ ای انتگرال ناسره نوع اول $F(x)=\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ همگرا باشد. در صورتی می‌گوئیم $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ **بطور یکشکل به** $F(x)$ **همگرا است** که

$$\forall\epsilon\ \exists b_0\ge a\ \forall b\ge b_0\ \forall x\in S\ :\ \left|F(x)-\int_a^b f(t,x)dt\right|<\epsilon$$

در این حالت می‌نویسیم

$$\int_a^\infty f(t,x)dt \overset{\text{ی}}{\leqq} F(x)$$

۲.۴.۷ تعریف ۲. فرض کنید $S\subseteq\mathbb{R}$ غیر تهی است و $(a;b]\times S=\{(t,x)\mid a<t, x\in S\}$. فرض کنید $f(t,x)$ تابعی است که بر $(a;b]\times S$ تعریف می‌گردد و بازاء هر $x\in S$ ای انتگرال نوع دوم $F(x)=\int_a^b f(t,x)\,dt$ همگرا باشد. در صورتی می‌گوئیم $\int_a^b f(t,x)dt$ بطور یکشکل به $F(x)$ همگرا است که

$$\forall\epsilon\ \exists c_0\in(a;b)\ \forall c\in(a;c_0)\ \forall x\in S\ :$$
$$\left|F(x)-\int_a^b f(t,x)dt\right|<\epsilon$$

در این حالت می‌نویسیم

$$\int_a^b f(t,x)dt \overset{\text{ی}}{\leqq} F(x)$$

۳.۴.۷ آزمون M—وایرشتراس ۱. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از $\mathbb{R}$ و $f(t,x)$ تابعی بر $[a;\infty)\times S$ است. فرض کنید بازاء هر $x\in S$ ای $f(t,x)$ بر $[a;\infty)$ انتگرالپذیر است و تابعی $M(t)$ بر $[a;\infty)$ وجود دارد که

الف) بازاء هر $(t,x)\in[a;\infty)\times S$ ای $|f(t,x)|\le M(t)$.

ب) $\int_a^\infty M(t)\,dt$ همگرا است.

در این صورت، $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ بر S همگرای یکشکل است.

۴.۴.۷ آزمون M—وایرشتراس ۲. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از $\mathbb{R}$ است و $f(t,x)$ تابعی بر $(a;b]\times S$ است. فرض کنید بازاء هر $x\in S$ ای $f(t,x)$ بر $(a;b]$ انتگرالپذیر است و تابع $M(t)$ بر $(a;b]$ وجود دارد که

الف) بازاء هر $(t,x)\in(a;b]\times S$ ای $|f(t,x)|\le M(t)$.

ب) $\int_a^b M(t)dt$ همگرا است.

در این صورت، $\int_a^b f(t,x)\,dt$ بر S همگرای یکشکل است.

۵.۴.۷ مثال. ۱) نشان دهید که انتگرال $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[c;d]\subseteq(0;\infty)$ همگرای یکشکل است.

حل. اگر $0<c\le x\le d$ و $1\le t$، آنگاه با فرض $M(t)=t^{d-1}e^{-t}$ در ۳.۴.۷ و با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} f(t,x) &= t^{x-1}e^{-t} \\ &\le t^{d-1}e^{-t}=M(t) \\ \int_1^\infty M(t)dt &= \int_1^\infty t^{d-1}e^{-t}\,dt \end{aligned}$$

همگرا است (چرا؟)، نتیجه می‌گیریم که انتگرال f بر $S=[c;d]$ همگرای یکشکل است.

مثال ۲) نشان دهید که اگر $a>0$، آنگاه انتگرال $\int_0^\infty (x^2+t^2)^{-k}\,dt$ بازاء هر $k\in\mathbb{N}$ ای بر $[a;\infty)$ همگرای یکشکل است.

حل. در ۳.۴.۷ فرض می‌کنیم $M(t)=(a^2+t^2)^{-k}$ و $S=[a;\infty)$. در این صورت، چون از $0<a\le x$ نتیجه می‌شود $a^2+t^2\le x^2+t^2$، پس بر S داریم

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (x^2+t^2)^{-k} \\ &\le (a^2+t^2)^{-k}=M(t) \end{aligned}$$

و بعلاوه $\int_0^\infty M(t)dt=\int_0^\infty (a^2+t^2)^{-k}\,dt$ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (a^2+t^2)^{-k}dt &\le \int_0^\infty (a^2+t^2)^{-1}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^b=\frac{\pi}{2a} \end{aligned}$$

لذا شرایط ۳.۴.۷ برقرار هستند.

۶.۴.۷ قضیه. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از $\mathbb{R}$ است و $f(t,x)$ تابعی پیوسته بر مجموعهٔ $[a;\infty)\times S$ است و $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ بر S به $F(x)$ همگرای یکشکل است. در این صورت F بر S پیوسته است.

فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از $\mathbb{R}$ است و $f(t,x)$ تابعی پیوسته بر مجموعهٔ $[a;b]\times S$ است و $\int_a^b f(t,x)\,dt$ بر S به $F(x)$ همگرای یکشکل است. در این صورت F بر S پیوسته است.

۷.۴.۷ قضیه. فرض کنید $f(t,x)$ تابعی است که بر $[a;\infty)\times[c;d]$ تعریف می‌شود و انتگرال $\int_a^\infty f(t,x)\,dt$ بازاء هر $x\in[c;d]$ به $F(x)$ همگرای نقطه‌ای است. بعلاوه فرض کنید که مشتق جزئی $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ بر $[a;\infty)\times[c;d]$ پیوسته است و انتگرال ناسره $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\,dt$ بر $[c;d]$ به صورت یکشکل همگرا است. در این صورت F بر $[c;d]$ دیفرانسیل‌پذیر است و $F'(x)=\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\,dt$. حکم مشابهی برای انتگرالهای ناسره نوع دوم برقرار است.

۸.۴.۷ مثال. ۱) فرض کنید که بازاء $r>0$ و x دلخواه:

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-rt}\sin(xt)}{t}\,dt$$

با استفاده از ۷.۴.۷ ضابطهٔ $F(x)$ را بیابید.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که بازاء هر $x\neq 0$ ای

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f(t,x) &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-rt}\sin(xt)}{t} \\ &= e^{0}x\lim_{t\to 0}\frac{\sin(xt)}{xt}=x \end{aligned}$$

و نیز اگر $x=0$، آنگاه $f(t,x)=0$، پس $F(x)$ یک انتگرال ناسره از نوع اول است و در $t=0$ مشکلی ندارد. بعلاوه با فرض $M(t)=Ke^{-rt}$ که $K=\max\{|c|,|d|\}$، نتیجه می‌گیریم که بازاء هر $t\ge 0$ ای

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \left|\frac{e^{-rt}\sin(xt)}{t}\right| \\ &= |x|e^{-rt}\left|\frac{\sin xt}{xt}\right| \\ &\le ke^{-rt}=M(t) \end{aligned}$$

بعلاوه، $\int_0^\infty M(x)\,dt$ به k/r همگرا است، از آزمون M—وایرشتراس نتیجه می‌گیریم که $\int_0^\infty \frac{e^{-rt}\sin xt}{t\,dt}$ بر $[c;d]$ به صورت یکشکل به $F(x)$ همگرا است.

از ۶.۴.۷ نتیجه می‌گیریم که F بر $[c;d]$ پیوسته است و از ۷.۴.۷ نتیجه می‌گیریم که چون مشتق جزئی $e^{-rt}\frac{\sin(xt)}{t}$ نسبت به x برابر $e^{-rt}\cos xt$ است و $\int_0^\infty e^{-rt}\cos(xt)\,dt$ بر $\mathbb{R}$ به $r/(r^2+x^2)$ همگرای یکشکل است (چرا؟)، پس بر $\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty e^{-rt}\cos(xt)\,dt \\ &= \frac{r}{r^2+x^2} \end{aligned}$$

در نتیجه، چون $F(0)=0$، داریم

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)-F(0) \\ &= \int_0^x F'(u)\,du \\ &= \int_0^x \frac{r}{r^2+x^2}\,du \end{aligned}$$

و بنابراین، ثابت شد که به ازای هر $r>0$ ای

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rt}\sin(xt)}{t}dt = \arctan\left(\frac{x}{r}\right).$$

مثال ۲) **تابع گاما** به صورت

$$\boxed{\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

تعریف می‌گردد، که $0<x$. ثابت می‌شود (تمرین به عهدهٔ خواننده) که $\Gamma(x)$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[c;d]\subseteq(0;\infty)$ همگرای یکشکل است. بعلاوه، بازاء $x>0$ دلخواه و با استفاده از روش جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x e^{-t}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-t^x e^{-t}\right]_0^b + x\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,dt\right\} \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{b^x}{e^b} + x\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\,\Gamma(x) \end{aligned}$$

پس با توجه به $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1\times\Gamma(1)=1, \\ \Gamma(3) &= 2\times\Gamma(2)=2, \quad \cdots \end{aligned}$$

و در مجموع، بازاء $n\in\mathbb{N}$ داریم $\Gamma(n+1)=n!$.

نشان داده می‌شود (به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده) که بر هر بازهٔ بستهٔ $[c;d]\subseteq(0;\infty)$ مشتق $\Gamma(x)$ به $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt$ همگرای یکشکل است. به صورت مشابه

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\left(\ln t\right)^k\,dt$$

در جلد دوم نشان داده می‌شود که اگر $u=\sqrt{t}$، آنگاه

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

مثال ۳) ثابت کنید که بازاء هر $a,b\in[0;\infty)$ ای

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}\right)$$

حل. برای این منظور فرض می‌کنیم

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{t}\cos t\,dt$$

انتگرال سمت راست همگرا است، زیرا با فرض

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(1-e^{-xt}\right)\cos t \quad , \quad g(t)=e^{-xt}\cos t$$

در آزمون حدی نسبت و با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{e^{xt}-1}{t} \\ &\overset{\text{هـ}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{xe^{xt}}{1}=\infty \end{aligned}$$

و $\int_0^\infty e^{-xt}\cos t\,dt = \int_0^\infty g(t)dt$، همگرایی آن نتیجه می‌گردد.

بنابراین با کمک قضیهٔ ۷.۴.۷ و اینکه مشتق جزئی $\frac{1}{t}\left(1-e^{-xt}\right)\cos t$ نسبت به x برابر با $e^{-xt}\cos t$ می‌باشد، داریم

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty e^{-xt}\cos t dt \\ &= \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x)-F(0) \\ &= \int_0^x \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx &= F(b)-F(a) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) \end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید $a>0$، مقدار انتگرال

$$I_{a,b} := \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,dx$$

را به ازای مقادیر مختلف a و b محاسبه کرده و سپس نتیجه بگیرید که به ازای هر b ای

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x}\,dx = \operatorname{sgn}(b)\frac{\pi}{2}$$

حل. چون $e^{-ax}\dfrac{\sin(bx)}{x}$ نسبت به b پیوسته است، $I_{a,b}$ نسبت به مشتق‌پذیر است و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{a,b}}{dt} &= \int_{۰}^{\infty} xe^{-ax}\frac{\cos(bx)}{x}\,dx \\
&= \int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx \\
&\overset{(۱)}{=} \left[e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{b}\right]_{۰}^{\infty} + \frac{b}{a}\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx \\
&\overset{(۱)}{=} ۰ + \left\{\left[-e^{-ax}\frac{\cos(bx)}{b}\right]_{۰}^{\infty} \right. \\
&\qquad \left. -\frac{b}{a}\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx\right\} \\
&= \frac{a}{b^{۲}} - \frac{a^{۲}}{b^{۲}}\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx \\
&= \frac{a}{b^{۲}} - \frac{a^{۲}}{b^{۲}}\frac{dI_{a,b}}{dt}
\end{aligned}$$

که در (۱) و (۲) از روش جزء به جزء استفاده شده است. در نتیجه،

$$\frac{dI_{a,b}}{dt} = \frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}$$

و بنابراین

$$I_{a,b} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + C$$

که C عددی ثابت است. چون به ازای $b=۰$ داریم $I_{a,۰}=۰$، بنابراین $C=۰$ و در نتیجه $I_{a,b}=\arctan(b/a)$.

اگر $b=۰$، آنگاه بدیهی است که $\operatorname{sgn}(b)=۰$ و بنابراین تساوی $\int_{۰}^{\infty}\dfrac{\sin(bx)}{x}\,dx = \operatorname{sgn}(b)\dfrac{\pi}{۲}$ برقرار است. بعلاوه چون $\int_{۰}^{\infty}\dfrac{\sin(bx)}{x}\,dx$ نسبت به b فرد است، کافی است حکم را برای $b>۰$ ثابت کنیم. در این مورد، کافی است از طرفین عبارت بدست آمده در $a=۰+$ حد بگیریم. نتیجه این که

$$\begin{aligned}
\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\,dx &= I_{۰,b} = \lim_{a\to ۰+} I_{a,b} \\
&= \lim_{a\to ۰+}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۵) مقدار $I_{a,b} := \int_{۰}^{\infty}\dfrac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,dx$ را به ازای مقادیر مختلف a و b محاسبه کنید.

حل. توجه شود که

$$I_{a,b} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\left\{\frac{\sin(a+b)x}{x} + \frac{\sin(a-b)x}{x}\right\}dx$$

سه حالت در نظر می‌گیریم: $a>b$، $a=b$ و $a<b$. چون $I_{a,b}$ نسبت به a فرد است، موقتاً فرض می‌کنیم $a>۰$.

اگر $a>b$، آنگاه $a+b$ و $a-b$ هر دو مثبتند و در نتیجه، بنا به حکم مثال قبل داریم

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx \\
&\quad + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx \\
&= \frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}
\end{aligned}$$

اما اگر $a=b$، آنگاه

$$\begin{aligned}
I_{a,a} &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(۲a)x}{x}\,dx \\
&= \frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۴}
\end{aligned}$$

و بالاخره اگر $a<b$، آنگاه $a+b>۰$ و $a-b<۰$، در نتیجه

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx \\
&\quad + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx \\
&= \frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۲} = ۰
\end{aligned}$$

پس در مجموع، اثبات گردید که

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \begin{cases}
۰ & \text{اگر } ۰<|a|<|b| \\
\operatorname{sgn}(a)\,\dfrac{\pi}{۲} & \text{اگر } ۰<|b|<|a| \\
\operatorname{sgn}(a)\,\dfrac{\pi}{۴} & \text{اگر } ۰<|a|=|b| \\
۰ & \text{اگر } a=۰
\end{cases} \\
&= \operatorname{sgn}(a)\,\frac{\pi}{۲}\Big(۱+\operatorname{sgn}(|a|-|b|)\Big)
\end{aligned}$$

۹.۴.۷ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر $k\le ۰$ و $۰<a$، آنگاه انتگرال $\int_{۰}^{\infty} t^{k}e^{-xt}dt$ بر $[a;\infty)$ همگرای یکشکل است.

۲) بازاء $x\le ۰$ فرض کنید $F(x)=\int_{۰}^{\infty} t^{-۲}(۱-e^{-xt})^{۲}dt$. مشابه مثال ۸.۴.۷ عمل کرده، ضابطهٔ $F(x)$ را بیابید.

۳) ثابت کنید که $\int_{۰}^{\infty}\dfrac{\cos(xt)}{۱+t^{۲}}\,dt$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است.

۴) به روش مشروح در ۸.۴.۷ و با توجه به اینکه $\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\sin xt\,dx = t/(t^{۲}+۱)$، ثابت کنید:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x}(۱-\cos xy)}{x}\,dx = \ln\left(\sqrt{۱+y^{۲}}\right)$$

۵) به روش مشروح در ۸.۴.۷ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \sqrt{\pi}\int_0^y e^{-t^2}\,dt$$

فرض کنید

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt}$$

(بخوانید لاپلاسین $f(t)$). در این صورت ثابت کنید که اگر $s>0$، آنگاه

۶) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, $\quad (s>0)$

۷) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $\quad (s>0)$

۸) $\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$, $\quad (k\in\mathbb{N}, s>0)$

۹) $\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c}$, $\quad (s>c)$

۱۰) $\mathcal{L}\{te^{ct}\} = \frac{1}{(s-c)^2}$, $\quad (s>c)$

۱۱) $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$,

۱۲) $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$,

۱۳) $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$,

۱۴) $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, $\quad (s>|a|)$

۱۵) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$. $\quad (s>|a|)$

ثابت کنید که اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$، آنگاه:

۱۶) $\mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\} = F(s+c)$,

۱۷) $\mathcal{L}\{f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)$,

۱۸) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$,

۱۹) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s)-f(0)$.

۲۰) نشان دهید که به ازای هر $t>0$ ای

$$\Gamma(t) = \int_0^1 \left\{\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\,dt$$

۲۱) نشان دهید که به ازای هر $k\in\mathbb{N}$ ای

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$$

فرض کنید به ازای $p>0$ و $q>0$، **بتای** p و q را به شکل

$$\boxed{\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}$$

تعریف کنیم. در این صورت نشان دهید که

۲۲) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

۲۳) $\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

۲۴) $\int_0^{\pi/2}\cos^p x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

۲۵) $\int_0^{\pi/2}\sin^p x\ \cos^q x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$,

۲۶) $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)$,

۲۷) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{p+q}{p}\mathrm{B}(p,q+1)$,

۲۸) $\mathrm{B}(p,q) = \frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p+1,q-1)$,

۲۹) $\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r) = \mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(p,q+r)$.

۳۰) با تغییر متغیر $x=\frac{1}{1+y}$ نشان دهید که

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}}$$

۳۱) ثابت کنید که اگر a و b اعداد مثبت باشند، آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{(a+b)^{a+b}}{a^b b^a}\right)$$

۳۲) نشان دهید که به ازای هر $m>0$ ای

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(mx)}{x}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+m^2).$$

۳۳) ثابت کنید $\int_0^1 \frac{x^n-1}{\ln x}\,dx = \ln(n+1)$.

۳۴) ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n! a^{n+1/2}}$$

۳۵) ثابت کنید $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

۳۶) ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x\sin(mx)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$$

به کمک تابع گاما که در ۸.۴.۷ تعریف گردید و نیز بتا که در تمرین ۹.۴.۷ تعریف شد، انتگرالهای پیچیدهٔ بسیاری را بدون محاسبهٔ چندان زیاد، می‌توان محاسبه نمود. به موارد زیر توجه کنید:

۱۰.۴.۷ مثال. ۱) مقدار $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. به کمک تمرین ۳۰ از ۹.۴.۷ داریم

$$\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\,dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{x^{10-1}}{(1+x)^{10+5}}\,dx + \int_0^\infty \frac{x^{5-1}}{(1+x)^{5+10}}\,dx \\
&= \mathrm{B}(10,5) + \mathrm{B}(5,10) \\
&= 2\mathrm{B}(5,10) \\
&= 2\frac{\Gamma(5)\,\Gamma(10)}{\Gamma(15)} \\
&= 2\frac{4\times 3\times 2\times 1}{14\times 13\times 12\times 11\times 10} \\
&= \frac{1}{5005}
\end{aligned}
$$

مثال ۲) فرض کنید m و n اعداد حقیقی مثبت باشند، در این صورت مقدار انتگرال $I_{m,n} := \int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. با فرض $y = 1/x$ داریم

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \\
&= \mathrm{B}(m,n)
\end{aligned}
$$

مثال ۳) در صورتی که n عددی مثبت باشد، مقدار انتگرال $I_n := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ را محاسبه کنید.

حل. با تغییر متغیر $x^n = \sin^2\theta$ داریم

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \\
&= \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2/n-1}\theta\,\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta \\
&= \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2/n-1}\theta\,d\theta \\
&\overset{(1)}{=} \frac{2}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

که در (۱) از تمرین ۲۵ از ۹.۴.۷ استفاده شده است.

مثال ۴) در صورتی که a و b اعداد دلخواه و p و q اعدادی مثبت باشند، مقدار انتگرال $\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. فرض کنیم $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$، در این صورت

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,dx = \\
&= \int_0^{\pi/2} (b-a)^p\,\sin^{2p}\theta\,(b-a)^q \\
&\qquad \cos^{2q}\theta\,2(b-a)\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta \\
&= 2(b-a)^{p+q+1}\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1}\theta\,\cos^{2q+1}\theta\,d\theta \\
&\overset{(1)}{=} 2(b-a)^{p+q+1}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{2\Gamma(p+q+2)} \\
&= (b-a)^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q+1)
\end{aligned}
$$

که در (۱) از تمرین ۲۵ از ۹.۴.۷ استفاده شده است.

مثال ۵) فرض کنید n عددی مخالف صفر باشد و

$$I_{m,n,p} := \int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx$$

مقدار $I_{m,n,p}$ را بیابید.

حل. فرض کنیم $x^n = y$، در این صورت

$$
\begin{aligned}
I_{m,n,p} &= \int_0^1 x^{m-n+1}(1-x^n)^p(x^{n-1}\,dx) \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 y^{(m-n+1)/n}(1-y)^p\,dy \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 y^{(m+1)/n-1}(1-y)^{(p+1)-1}\,dy \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)
\end{aligned}
$$

۱۱.۴.۷ تمرین. هر یک از تساویهای زیر را نشان دهید:

۱) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

۲) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta}{(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)^{m+n}} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2a^m b^n\Gamma(n+m)}$.

۳) $\int_0^\infty x^{m-1}(1-x^a)^n\,dx = a^n\,\frac{n!}{m(m+a)\cdots(m+an)}$. راهنمایی: از تغییر متغیر $y = x^a$ استفاده شود.

۴) $\int_0^\infty x^m e^{-n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n^{m+1}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$. راهنمایی: از تغییر متغیر $y = n^2x^2$ استفاده شود.

۵) $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\,dx = 0$.

۵.۷ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۵.۷ محاسبه با تعریف. به کمک دستورات limit و int می‌توان از تعریف انتگرال ناسره استفاده نموده و انتگرالهای بسیاری را حل نمود:

$$\mathrm{F := b-> int(f(x), x = a..b)} \xmapsto{\text{میپل}} F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\mathrm{limit(F(x), x = infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \mathrm{F(b)}$$

برای نمونه

$$\mathrm{F := b-> int(1/(x \wedge 3+1)(x), x = 0..b)} \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{F(b)} = \int_0^{\mathrm{b}} \frac{1}{1+\mathrm{x}^3}\,\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{F(b)} \xmapsto{\text{میپل}} \frac{۱}{۶}\ln\left|\frac{b^۲-b+۱}{b^۲+۲b+۱}\right| + \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}\arctan\left(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}(۲b-۱)\right) + \frac{\pi}{۱۸}\sqrt{۳}$$

$$\mathrm{limit(F(x), x = infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$$

۲.۵.۷ محاسبه با تعیین مقدار. میپل دارای دامنهٔ وسیعی از دستورات است که می‌تواند انتگرالهای ناسره را تعیین مقدار کند بنابراین می‌توان با دستور int به راحتی انتگرالهای ناسره را محاسبه نمود. چنانچه میپل نتواند انتگرالی را حل کند، آن را عیناً بر می‌گرداند. در چنین مواردی از دستور evalf استفاده کنید تا مقدار تقریبی آن را محاسبه کند. برای نمونه

$$\mathrm{int(cos(x \wedge 2), x = 0..infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$\mathrm{int(x \wedge 2sin(x \wedge 3), x = 1..infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \int_1^{+\infty} \mathrm{x}^2 \sin\left(\frac{1}{\mathrm{x}^4}\right)\mathrm{dx}$$

$$\mathrm{evalf(\%)} \xmapsto{\text{میپل}} 0.9819638240$$

توضیح اینکه در محیط میپل، % به معنی «نتیجهٔ خط قبل» است.

۳.۵.۷ . در آدرس اینترنتی

`http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html`

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۸

دنباله و سری عددی

هدف از این فصل آشنایی با مفهوم دنباله و سری است. حقیقت آنست که اصولاً حساب دیفرانسیل و انتگرال با طرح این مفاهیم معنی پیدا می‌کند. به عنوان مثال **عدد** که زمینهٔ اصلی تمام بحثها می‌باشد، توسط دنباله‌ها قابل بیان است. همچنین با تعمیم مفهوم دنباله به دنباله‌های تابعی، توابع اصم قابل تعریف می باشند.

۱.۸ حد یک دنباله

۱.۱.۸ تعریف. دنبالهٔ (عددی) تابعی است از یک زیر مجموعهٔ از پائین کراندار در $\mathbb{Z}$ (مانند، مجموعهٔ $\{a, a+۱, \cdots, n, n+۱, \cdots\}$) بتوی $\mathbb{R}$.

اغلب دنبالهٔ x از $\{a, a+۱, \cdots\}$ به $\mathbb{R}$ را با نماد فشردهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ و یا با نماد گستردهٔ $x_a, x_{a+۱}, \cdots, x_n, \cdots$ نشان می‌دهند، که در اینجا $x_n = x(n)$ و به آن **جملهٔ** n **ام دنباله** گفته می‌شود.

برد دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ عبارت است از مجموعهٔ

$$\{x_a, x_{a+۱}, \cdots, x_n, \cdots\}$$

در صورتی می‌گوئیم دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ **عاقبت خاصیت** P **را دارد** که N ای یافت شود که به ازاء هر $n \geq N$ ای x_n دارای خاصیت P باشد.

۲.۱.۸ مثال. ۱) دنبالهٔ اعداد طبیعی: $x_n = n$ که $۱ \leq n$؛ $\{n\}_{n=۱}^{\infty}$.

مثال ۲) دنبالهٔ اعداد فرد: $x_n = ۲n + ۱$ که $n \geq ۰$؛ $\{۲n+۱\}_{n=۰}^{\infty}$.

مثال ۳) دنبالهٔ $x_n = ۱/۲^n$ که $n \leq ۳-$؛ $\{(۱/۲)^n\}_{n=-۳}^{\infty}$.

مثال ۴) دنبالهٔ «n امین عدد اول = x_n»: $x_۱ = ۲$، $x_۲ = ۳$، $x_۳ = ۵$، $x_۴ = ۷$ و . . .

مثال ۵) دنبالهٔ فیبوناچی: $x_۰ = x_۱ = ۱$ و به ازاء هر $n \geq ۲$ ای $x_n = x_{n-۱} + x_{n-۲}$.

مثال ٦) دنبالهٔ ارقام عدد π: $x_۱ = ۳$، $x_۲ = ۱$، $x_۳ = ۴$، $x_۴ = ۱$، $x_۵ = ۵$، $x_٦ = ۹$ و . . .

۳.۱.۸ تعریف. فرض کنید $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ دنباله است. در صورتی می‌گوئیم **حد** دنباله موجود و برابر عدد ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ که

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \ (n > N \ \Rightarrow\ |x_n - \ell| < \varepsilon)$$

به بیان دیگر، در صورتی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ به عدد ℓ **همگرا است** (یا، **میل می‌کند**) که به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ ای عاقبت فاصلهٔ x_n تا ℓ کمتر از ε شود (یعنی، از n ای به بعد $|x_n - \ell| < \varepsilon$). دنباله‌ای که همگرا نباشد، **واگرا** می‌نامیم.

۴.۱.۸ مثال. ۱) نشان دهید که دنبالهٔ $\{۱/۲^n\}_{n=۰}^{\infty}$ به صفر همگرا است: $\lim\limits_{n\to\infty} ۱/۲^n = ۰$.

حل. شرط $|۰ - ۱/۲^n| < \varepsilon$ به معنی $۲^n > ۱/\varepsilon$ یا $n > -\log_۲ \varepsilon$ است. پس باید فرض کنیم که N برابر $-\log_۲ \varepsilon$ باشد. در این صورت

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \left(n > N\ \Rightarrow\ \left|\frac{۱}{۲^n} - ۰\right| < \varepsilon\right)$$

مثال ۲) نشان دهید که دنبالهٔ $\left\{\frac{۳n+۱}{۲n+۵}\right\}_{n=-۳}^{\infty}$ به $\ell = \frac{۳}{۲}$ همگرا است.

حل. شرط $\left|\frac{۳n+۱}{۲n+۵} - \frac{۳}{۲}\right| < \varepsilon$ به معنی $\frac{۱۳}{۲(۲n+۵)} < \varepsilon$ یا $n > \frac{۱۳}{۴\varepsilon} - \frac{۵}{۲}$ است. پس کافی است فرض شود که

$$N = \frac{۱۳}{۴\varepsilon} - \frac{۵}{۲}$$

مثال ۳) ثابت کنید که اگر $|a| < 1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

حل. اگر $a = 0$، آنگاه حکم بدیهی است. در غیر این صورت، $|a^n - 0| < \varepsilon$ به معنی $|a|^n < \varepsilon$ است. بنابراین کافی است فرض شود $N = -\log_{|a|}\varepsilon$.

مثال ۴) به ازاء هر $a \in \mathbb{R}$ ای $\lim \frac{a^n}{n!}$. زیرا اگر m برابر $[|a|] + 1$ باشد، آنگاه به ازاء هر $n > 2m$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| &= \frac{|a|^n}{n!}\\
&= \frac{|a|^{2m}}{(2m)!}\frac{|a|}{2m+1}\frac{|a|}{2m+2}\cdots\frac{|a|}{n}\\
&\le \frac{|a|^{2m}}{(2m)!}\frac{m}{2m+1}\frac{m}{2m+2}\cdots\frac{m}{n}\\
&\le \frac{|a|^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}\\
&= \frac{|2a|^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

که اگر فرض شود

$$N = \frac{-(2m)!}{|2a|^{2m}}\log_2 \varepsilon < n$$

آنگاه $\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| < \varepsilon$ و حکم ثابت می‌شود.

مثال ۵) نشان دهید که به ازاء هر $a > 0$ ای $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

حل. سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $a > 1$، آنگاه $\sqrt[n]{a} > 1$ و در نتیجه $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ مثبت است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
a &= (x_n + 1)^n\\
&= 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots + nx_n^{n-1} + x_n^n\\
&> 1 + nx_n
\end{aligned}$$

یا $x_n < \frac{a-1}{n}$. پس اگر $n > \frac{a-1}{\varepsilon} = N$، آنگاه

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = |x_n - 0| < \varepsilon$$

و بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

ب) اگر $a = 1$، آنگاه $\sqrt[n]{a} = 1$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

ج) اگر $0 < a < 1$، آنگاه $\frac{1}{a} > 1$ و در نتیجه مطابق قسمت (الف) داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. در نتیجه $\left|\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1\right| < \varepsilon$، یا $|1 - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon\sqrt[n]{a} < \varepsilon$. بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

مثال ۶) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$، زیرا اگر فرض کنیم $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$، آنگاه چون $x_n \ge 0$، داریم

$$\begin{aligned}
n &= (x_n + 1)^n\\
&= 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots + x_n^n\\
&> 1 + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2
\end{aligned}$$

بنابراین $\sqrt{2/n} > x_n = |\sqrt[n]{n} - 1|$. پس اگر $n > 2/\varepsilon = N$، آنگاه $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ و حکم ثابت شد.

۵.۱.۸ قضیه. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = m$، در این صورت

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} ax_n = a\ell$ ۲) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = \ell + m$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = \ell - m$ ۴) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \ell m$

۵) اگر به ازای هر n ای $y_n \neq 0$ و $m \neq 0$، آنگاه: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\ell}{m}$.

۶) اگر در عاقبت $x_n \le y_n$، آنگاه $\ell \le m$.

اثبات: بنا به فرض به ازاء $\epsilon_1 > 0$ دلخواه، N_1 ای هست که به ازاء هر $n \ge N_1$ ای $|x_n - \ell| < \epsilon_1$ و نیز به ازاء هر $\epsilon_2 > 0$ دلخواه، N_2 ای هست که به ازاء هر $n \ge N_2$ ای $|y_n - \ell| < \epsilon_2$.

برای اثبات (۱) فرض می‌کنیم $a \neq 0$، زیرا حالت $a = 0$ بدیهی است. در این صورت با فرض $\epsilon_1 = \epsilon/a$ و $N = N_1$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\forall_\epsilon \exists N \forall_n \Big(n \ge N \Rightarrow |ax_n - a\ell| < \epsilon\Big)$$

برای اثبات (۲) فرض می‌کنیم $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$ و نیز $N = \max\{N_1, N_2\}$. در این صورت به ازاء هر $n \ge N$ ای داریم

$$\begin{aligned}
|x_n + y_n - (\ell + m)| &= |x_n - \ell + y_n - m|\\
&\le |x_n - \ell| + |y_n - m|\\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

اثبات (۳) شبیه (۲) است.

برای اثبات (۴) فرض می‌کنیم M و N_3 ای هست که به ازاء هر $n \ge N_3$ ای $|y_n| < M$ (تمرین) اکنون فرض می‌کنیم $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2M}$ و $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2(|\ell| + 1)}$. اگر $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ و $n \ge N$ آنگاه

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - \ell m| &= |x_n y_n - \ell y_n + \ell y_n - \ell m|\\
&\le |y_n||x_n - \ell| + \ell|y_n - m|\\
&< M\frac{\epsilon}{2M} + \ell\frac{\epsilon}{2[|\ell| + 1]}\\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

برای اثبات (۵) فرض می‌کنیم $M > ۰$ و $N_۳$ ای به ازاء هر $n \geq N_۳$ ای $|y_n| > M$ (تمرین). اکنون فرض می‌کنیم که $\epsilon_۱ = \frac{M}{۲}\epsilon$ و $\epsilon_۲ = \frac{|m|M}{۲|\ell|}$. حال اگر فرض شود $N = \max\{N-۱, N_۲, N_۳\}$ و $n \geq N$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{\ell}{m}\right| = \left|\frac{mx_n - \ell y_n}{my_n}\right| & \\
= \frac{|mx_n + m\ell - m\ell - \ell y_n|}{|m||y_n|} & \\
< \frac{|m||x_n - \ell| + |\ell||y_n - m|}{|m|M} & \\
= \frac{۱}{M}|x_n - \ell| + \frac{|\ell|}{|m|M}|y_n - m| & \\
< \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = ۴\epsilon &
\end{aligned}$$

برای اثبات (٦) فرض می‌کنیم که اگر $\ell \leq m$ نباشد، پس باید $m < \ell$.حال با فرض $\epsilon_۱ = \epsilon_۲ = \frac{\ell - m}{۲}$، اعداد $N_۱$ و $N_۲$ ای هست که اگر $n \leq N = \max\{N_۱, N_۲\}$ آنگاه

$$|x_n - \ell| < \epsilon_۱ \;\Rightarrow\; x_n > \ell - \epsilon_۱ = \frac{\ell + m}{۲}$$
$$|y_n - \ell| < \epsilon_۲ \;\Rightarrow\; y_n < \ell + \epsilon_۲ = \frac{\ell + m}{۲}$$

در نتیجه $y_n < \frac{\ell+m}{۲} < x_n$ که با فرض در تضاد است. □

۶.۱.۸ مثال. ۱) با تقسیم بر $n^۲$ داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{۳n^۲ + ۵n + ۴}{n^۲ + ۲} &= \lim_{n\to\infty} \frac{۳ + ۵/n + ۴/n^۲}{۱ + ۲/n^۲} \\
&= \frac{۳ + ۰ + ۰}{۱ + ۰} = ۳
\end{aligned}$$

مثال ۲) با توجه به اینکه $۱+۲+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$، داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{۱ + ۲ + \cdots + n}{n^۲} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+۱)/۲}{n^۲} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲n}\right) = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۳) با توجه به قسمت (۵) از مثال ۴.۱.۸ داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۵n} &= \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۵}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) \\
&= ۱ \times ۱ = ۱
\end{aligned}$$

مثال ۴) با مخرج مشترک گرفتن، داریم:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۲n^۳}{۲n^۲ + ۳} + \frac{۱ - ۵n^۲}{۵n + ۱}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۲n^۳ - ۱۳n^۲ + ۳}{۱۰n^۳ + ۲n^۲ + ۱۵n + ۳} = \frac{۱}{۵}
\end{aligned}$$

مثال ۵) با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج صورت داریم:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^۲ + n + ۱} - \sqrt{n^۲ - n + ۱}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۲n}{\sqrt{n^۲ + n + ۱} + \sqrt{n^۲ - n + ۱}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{۲}{\sqrt{۱ + \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n^۲}} + \sqrt{۱ - \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n^۲}}} \\
&= \frac{۲}{\sqrt{۱} + \sqrt{۱}} = ۱
\end{aligned}$$

۷.۱.۸ تمرین. با استفاده از تعریف حد دنباله، نشان دهید

۱) $\lim_{n\to\infty} \frac{۲n^۲ - n + ۱}{n^۲ + ۲n + ۳} = ۲$

۲) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱ + ۲ + \cdots + n}{n^۲} = \frac{۱}{۲}$

۳) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right) = ۰$

۴) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{۲n + ۳} - \sqrt{۲n - ۱}\right) = ۰$

حد هر یک از دنباله‌های زیر را محاسبه کنید:

۵) $\frac{۴n^۲ - ۴n + ۳}{۲n^۳ + ۳n - ۱}$

٦) $\frac{۵n^۳ + ۲n^۲ - ۳n + ۷}{۴n^۳ - n^۲ + n + ۱}$

۷) $\frac{۱ + ۲^۲ + \cdots + n^۲}{۵n^۳ + n + ۱}$

۸) $\frac{۳n^۲ + n + ۲}{۴n^۲ + ۲n + ۷}$

۹) $\sqrt[n]{n^٦}$

۱۰) $\sqrt[n]{٦n + ۳}$

۱۱) $\sqrt[۳]{n^۲ - n^۳} + n$

۱۲) $\frac{\sqrt{n^۲ + ۱} + \sqrt{n}}{\sqrt[۴]{n^۳ + n} - \sqrt{n}}$

۱۳) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + ۱} + \sqrt{n}}$

۱۴) $\sqrt[۳]{۱ - n^۳} + n$

۱۵) $\frac{\cos(n^۳)}{۲n} - \frac{۳n}{٦n + ۱}$

۱٦) $\frac{\sqrt[۳]{n^۲}\sin(n!)}{n + ۱}$

۱۷) $\sqrt{۲}\sqrt[۴]{۲}\sqrt[۸]{۲}\cdots\sqrt[۲^n]{۲}$

۱۸) $\frac{n}{۲^n}$

۱۹) $\frac{۱}{n}\log_a n \quad (a > ۱)$

۲۰) $\frac{۱}{\sqrt[n]{n!}}$

۲۱) $\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times \cdots \times \frac{۲n - ۱}{۲n}$

۲۲) $\frac{۱}{n^۲} + \frac{۲}{n^۲} + \cdots + \frac{n - ۱}{n^۲}$

۲۳) $\frac{۱ - ۲ + ۳ - \cdots - ۲n}{\sqrt{n^۲ + ۱} + \sqrt{۴n^۲ - ۱}}$

۲۴) $\frac{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}}{۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۳^n}}$

$$۲۵)\ \sqrt[۳]{(n+۱)^۲}-\sqrt[۳]{(n-۱)^۲}$$

$$۲۶)\ \frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

۲۷) ثابت کنید حد دنباله در صورت وجود یکتا است.

۲.۸ آزمونهای همگرایی دنباله‌ها

در بسیاری از مواقع، یافتن مقدار دقیق حد یک دنباله مقدور نیست، اما می‌توان وجود آنرا تضمین نمود. پس از اطمینان از وجود حد، می‌توان با روش‌های تحلیلی و یا روشهای تقریبی (به کمک کامپیوتر) به یافتن مقدار آن مبادرت نمود.

۱.۲.۸ تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ را در صورتی **صعودی** گوئیم که به ازاء هر $n\geq a$ ای $x_{n+۱}\geq x_n$. دنباله را در صورتی **اکیداً صعودی** گوئیم که به ازاء هر $n\geq a$ ای $x_{n+۱}>x_n$. به صورت مشابه دنبالهٔ **نزولی** و **اکیداً** نزولی قابل تعریف است.

۲.۲.۸ تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ را در صورتی **از بالا کراندار** گوئیم که عددی M چنان یافت گردد که به ازاء هر $n\geq a$ ای $x_n\leq M$. دنباله را در صورتی **از پائین کراندار** گوئیم که عددی M چنان یافت گردد که به ازاء هر $n\geq a$ ای $M\leq x_n$. دنباله‌ای که از بالا و پائین کراندار باشد، دنبالهٔ کراندار می‌نامند.

۳.۲.۸ قضیه. ۱) هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار، همگرا است.
۲) هر دنبالهٔ نزولی و از پائین کراندار، همگرا است.
۳) هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است.
۴) هر دنبالهٔ بی کران، واگرا است.

اثبات: برای اثبات (۱) فرض می‌کنیم $a=\sup\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ کوچکترین کران بالایی همهٔ x_n ها باشد و این مجموعه مطابق فرض از بالا کراندار و غیر تهی است و لذا دارای سوپرموم است. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to\alpha}x_n=a$ فرض کنیم چنین نباشد. پس $\epsilon>۰$ ای هست که به ازاء هر $N>۰$ ای یک $n\in N$ ای چنان وجود دارد که $|x_n-a|>\epsilon$. اما در این صورت $x_n-a>\epsilon$ یا $x_n>a+\epsilon$. پس نمی‌تواند a کوچکترین کران بالایی x_n ها باشد که تناقض است.

اگر فرض شود $y_n=-x_n$، آنگاه در حالت (۲) نزولی و از پایین کرانداری x_n به معنی صعودی و از بالا کرانداری y_n است. و بنا به قسمت (۱) برهان تمام است.

در مورد اثبات (۳) فرض کنیم $\ell=\lim\limits_{n\to\alpha}x_n$. اکنون با فرض $\epsilon=۱$، یک N ای هست که به ازاء هر $n\geq N$ ای $|x_n-\ell|<۱$. در نتیجه $-۱<x_n-\ell<۱$ یا $\ell-۱<x_n<\ell+۱$. پس به ازاء هر $n\geq N$ ای x_n هم از پایین کراندار است و هم از بالا. چنانچه فرض شود

$$A=\max\{x_۱,\cdots,x_N\}\ \ ,\ \ B=\min\{x_۱,\cdots,x)N\}$$

آنگاه به ازاء هر n ای

$$\ell+A-\ell<x_n<\ell+B+۱$$

حکم (۴) عکس تقبض حکم (۳) است. □

۴.۲.۸ مثال. ۱) دنبالهٔ $x_۱=\sqrt{a}$، $x_۲=\sqrt{a+\sqrt{a}}$، ... و $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ که $a>۰$ عددی مفروض و ثابت است را در نظر بگیرید. ثابت کنید این دنباله همگرا است و سپس حد آن را بیابید.

حل. از تعریف دنباله بر می آید که در واقع $x_{n+۱}=\sqrt{a+x_n}$. برای اثبات همگرایی این دنباله، نشان می‌دهیم که این دنباله صعودی و از بالا کراندار است.

دنباله صعودی است، زیرا اگر فرض کنیم $x_{n+۱}<x_n$، آنگاه $\sqrt{a+x_n}<x_n$ یا $a+x_n<x_n^۲$ است. بنابراین $a+\frac{۱}{۴}<\left(x_n-\frac{۱}{۲}\right)^۲$، یا

$$\frac{۱}{۲}+\sqrt{a+\frac{۱}{۴}}<x_n<\frac{۱}{۲}-\sqrt{a+\frac{۱}{۴}}$$

اما، این یک تناقض آشکار است. چرا که

$$\begin{aligned}۱&=\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}}\\&<\frac{۱}{۲}+\sqrt{a+\frac{۱}{۴}}\\&<\frac{۱}{۲}-\sqrt{a+\frac{۱}{۴}}\\&<\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰\end{aligned}$$

پس فرض $x_{n+۱}<x_n$ غلط است، و بنابراین بازای هر n ای $x_{n+۱}\geq x_n$.

دنباله از بالا کراندار است، زیرا اگر $b=\max\{۲,a\}$، آنگاه یا $x_n\leq a$ و در نتیجه $x_n\leq b$، و یا در غیر این صورت $x_n>a$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}x_n^۲&=a+x_{n-۱}\\&\leq a+x_n\leq x_n+x_n=۲x_n\end{aligned}$$

و چون به وضوح $x_n>۰$، بنابراین $x_n<۲$ و لذا باز هم $x_n\leq b$. یعنی بازای هر n ای $x_n\leq b$.

حال که از همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را نشان دادیم، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ و با توجه به این که $x_n^۲ = a + x_n$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\ell^۲ &= \lim_{n\to\infty} x_n^۲ \\ &= \lim_{n\to\infty} (a+x_{n-۱}) = a+\ell\end{aligned}$$

بنابراین $\ell^۲ - \ell - a = ۰$ یا $\ell = \frac{۱}{۲}\left(۱\pm\sqrt{۱+۴a}\right)$. چون همهٔ x_n ها مثبتند، پس نمی‌توان ℓ حد آنها منفی باشد، در نتیجه $\frac{۱}{۲}\left(۱-\sqrt{۱+۴a}\right)$ مردود است. یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{۱}{۲}\left(۱+\sqrt{۱+۴a}\right)$.

مثال ۲) فرض کنید a و b دو عدد مثبت دلخواهند، $x_۱ = b$ و به ازاء هر $n \ge ۱$ ای $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. می‌خواهیم نشان دهیم که این دنباله به عدد $\sqrt{a}$ همگرا است. برای این منظور نزولی بودن و از پائین کرانداری x_n را ثابت می‌کنیم.

x_n عاقبت از پائین کراندار است، در واقع می‌دانیم که به ازاء هر عدد مثبت h ای، نامساوی $h + \frac{۱}{h} \ge ۲$ برقرار است، در نتیجه

$$\begin{aligned}x_{n+۱} &= \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{۲}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \\ &\ge \frac{\sqrt{a}}{۲} \times ۲ = \sqrt{a}\end{aligned}$$

یعنی، به ازاء هر $n \ge ۲$ ای $x_n \ge \sqrt{a}$.

x_n نزولی است، زیرا

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+۱}}{x_n} &= \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{a}{x_n}\right) \\ &\le \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{a}{(\sqrt{a})^۲}\right) = ۱\end{aligned}$$

بنابراین، دنباله همگرا است. اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$، آنگاه از تعریف x_n داریم

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} x_{n+۱} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\ell + \frac{a}{l}\right)\end{aligned}$$

یا $\ell^۲ + a = ۲\ell^۲$ یا $\ell = \pm\sqrt{a}$. چون همهٔ x_n ها مثبتند، پس $-\sqrt{a}$ مردود است و بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

مثال ۳) **عدد نپر** $e = ۲٫۷۱۷۸\ldots$.

دنباله $x_n = (۱+۱/n)^n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید x_n صعودی و از بالا کراندار است. حد این دنباله را **عدد نپر** نامیده و با نماد e نشان می‌دهیم.

حل. برای این منظور با استفاده از فرمول دوجمله‌ای نیوتن، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}x_n &= ۱ + n\frac{۱}{n} + \frac{n(n-۱)}{۲}\left(\frac{۱}{n}\right)^۲ + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{n(n-۱)\cdots(n(n-۱))}{n!}\left(\frac{۱}{n}\right)^n \\ &= ۲ + \frac{۱}{۲!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right) \\ &\quad + \frac{۱}{۳!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{۱}{n!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right) \\ &\le ۲ + \frac{۱}{۲!}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right) \\ &\quad + \frac{۱}{۳!}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱-\frac{۲}{n+۱}\right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{۱}{n!}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱-\frac{۲}{n+۱}\right)\cdots \\ &\qquad \cdots\left(۱-\frac{n-۱}{n+۱}\right) \\ &\quad + \frac{۱}{(n+۱)!}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱-\frac{۲}{n+۱}\right)\cdots \\ &\qquad \cdots\left(۱-\frac{n}{n+۱}\right) \\ &= x_{n+۱}\end{aligned}$$

پس $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ صعودی است. بعلاوه

$$\begin{aligned}x_n &= ۲ + \frac{۱}{۲!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right) \\ &\quad + \frac{۱}{۳!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{۱}{n!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right) \\ &\le ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} \\ &\le ۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\times۲} + \cdots + \frac{۱}{\underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n-۱\ \text{عامل}}} \\ &= ۱ + \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}\right) \\ &= ۱ + \frac{۱-(۱/۲)^n}{۱-۱/۲} \\ &= ۳ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} \le ۳\end{aligned}$$

پس x_n از بالا به عدد سه کراندار است. بنابراین دنبالهٔ x_n همگرا است. مقدار حد این دنباله را عدد e می‌نامند. می‌دانیم که

$e \approx ۲٫۷۱۷۸$، پس در مجموع:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

مثال ۴) فرض کنیم

$$x_n = \frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{n+n}$$

ثابت کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا است.

حل. برای این منظور نشان می‌دهیم که این دنباله صعودی و از بالا کراندار است:

$$\begin{aligned} x_{n+۱}-x_n &= \frac{۱}{۲n+۱}+\frac{۱}{۲n+۲}-\frac{۱}{n} \\ &= \frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۲)} > ۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{n+n} \\ &< \underbrace{\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}+\cdots+\frac{۱}{n}}_{n \text{ عامل}} = ۱ \end{aligned}$$

بعلاوه، در قسمت (۵) از تمرین ۳.۳.۶ نشان داده‌ایم که حد $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ برابر $\ln ۲$ است.

مثال ۵) عدد اولر $\gamma = ۰٫۵۷۷۲۱۵$ نشان دهید که دنبالهٔ

$$x_n := ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}-\ln n$$

نزولی و از پائین کراندار است، و بنابراین دارای حد است. حد این دنباله را **عدد اولر** نامیده و با نماد γ نشان می‌دهند.

حل. دنبالهٔ x_n از پائین کراندار است، زیرا

$$\begin{aligned} x_n &= ۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n-۱}+\frac{۱}{n}-\ln n \\ &= \int_۱^۲ dx+\int_۲^۳\frac{dx}{۲}+\cdots \\ &\quad \cdots+\int_{n-۱}^{n}\frac{dx}{n-۱}+\frac{۱}{n}-\int_۱^n\frac{dx}{x} \\ &\geq \int_۱^۲\frac{dx}{x}+\int_۲^۳\frac{dx}{x}+\cdots+\int_{n-۱}^{n}\frac{dx}{x}+\frac{۱}{n}-\ln n \\ &= \frac{۱}{n} \geq ۰ \end{aligned}$$

بعلاوه این دنباله نزولی است، زیرا

$$\begin{aligned} x_{n+۱}-x_n &= \frac{۱}{n+۱}-\ln(n+۱)+\ln n \\ &= \int_n^{n+۱}\frac{dx}{n+۱}-\ln(n+۱)+\ln n \\ &\leq \int_n^{n+۱}\frac{dx}{x}-\ln(n+۱)+\ln n \\ &= [\ln|x|]_n^{n+۱}-\ln(n+۱)+\ln n = ۰ \end{aligned}$$

۵.۲.۸ تمرین. به روش بالا ثابت کنید که هر یک از دنباله‌های زیر همگرا هستند. در صورت امکان حد آنها را محاسبه کنید:

۱) $x_n = \dfrac{x_{n-۱}}{a+x_{n-۱}}, \quad x_۰ = a > ۱$

۲) $x_n = \dfrac{n^۲}{n^۲-۱}, \quad n > ۱$

۳) $x_n = \dfrac{۲^n}{(n+۲)!}$　　　۴) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$

۵) $x_n = ۲+\dfrac{۱}{۲!}+\dfrac{۱}{۳!}+\cdots+\dfrac{۱}{n!}$

۶) $x_n = \dfrac{۱۰}{۱}\times\dfrac{۱۱}{۳}\times\cdots\times\dfrac{n+۹}{۲n-۱}$

۷) $x_n = \dfrac{۱}{۵+۱}+\dfrac{۱}{۵^۲+۱}+\cdots+\dfrac{۱}{۵^n+۱}$

۸) $x_n = \dfrac{۱}{۳+۱}+\dfrac{۱}{۳^۲+۲}+\cdots+\dfrac{۱}{۳^n+n}$

۹) $x_n = \left(۱-\dfrac{۱}{۲}\right)\left(۱-\dfrac{۱}{۴}\right)\cdots\left(۱-\dfrac{۱}{۲^n}\right)$

۱۰) $x_n = \left(۱+\dfrac{۱}{۲}\right)\left(۱+\dfrac{۱}{۴}\right)\cdots\left(۱+\dfrac{۱}{۲^n}\right)$

۱۱) در صورتی که $e^x := \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n$، نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^x$.

۱۲) فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ چنان است که به ازای آن $\lim_{n\to\infty} nx_n = \ell$. در این صورت نشان دهید $\lim_{n\to\infty}(۱+x_n)^n = e^{\ell}$. راهنمایی: از تمرین ۱۱ استفاده کنید.

۱۳ فرض کنید $a > ۱$ و $b > ۱$، در این صورت نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{ab}-۱\right) = \ln a+\ln b$.

۶.۲.۸ تعریف. فرض کنید به ازاء هر $k \in \mathbb{N}$ ای $n_k < n_{k+۱}$. در این صورت دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}_{k=۱}^{\alpha}$ را یک زیر دنبالهٔ از دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم.

۷.۲.۸ مثال. ۱) دنبالهٔ اعداد اول، یک زیر دنباله از دنبالهٔ اعداد طبیعی است.

مثال ۲) دنبالهٔ $\{۱/(۲n+۱)\}_{n=۰}^{\infty}$ یک زیر دنباله از $\{۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$ است.

۸.۲.۸ قضیه. ۱) اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ℓ همگرا باشد، آنگاه هر زیر دنباله از $\{x_n\}$ نیز به ℓ همگرا است.
۲) اگر زیر دنباله‌ای از دنبالهٔ $\{x_n\}$ واگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیز واگرا است.

اثبات: روشن است که (۲) عکس نقیض (۱) است. پس کافی است (۱) اثبات شود. فرض کنیم $\{x_{n_k}\}_{k+۱}^{\infty}$ یک زیر دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد. به ازاء هر $\epsilon > ۰$ دلخواه یک N ای هست که به ازاء هر $n \ge N$ ای $|x_n-\ell| < \epsilon$. چون مطابق فرض، به ازاء هر k ای $n_k < n_{k+۱}$ و به وضوح $۱ \le n_۱$ پس به ازاء هر k ای $k \le n_k$ (تمرین—به استقرا) در نتیجه به ازاء هر $N \le k$ ای $N \le n_k$ و لذا $|x_{n_k}-\ell| < \epsilon$. یعنی دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ نیز به ℓ همگرا است. □

۹.۲.۸ مثال. ۱.) دنبالهٔ $\{(-۱)^n\}_{n=۰}^{\infty}$ واگرا است. زیرا دنبالهٔ $x_{۲n} = (-۱)^{۲n} = ۱$ از آن به عدد یک همگرا است و زیر دنبالهٔ $x_{۲n+۱} = (-۱)^{۲n+۱} = -۱$ از آن به عدد منهب یک همگرا است. در حالی که $۱ \neq -۱$ پس $x_n = (-۱)^n$ به هیچ ℓ ای همگرا نیست.

مثال ۲) دنبالهٔ $\{۱/n!\}_{n=۱}^{\infty}$ به صفر همگرا است. زیرا، زیر دنباله‌ای از دنبالهٔ همگرای $\{۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$ است که به صفر همگرا می‌باشد.

۱۰.۲.۸ قضیه. هر دنبالهٔ کراندار دارای زیر دنباله‌ای همگرا است.

اثبات: فرض کنیم $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. اگر A متناهی باشد، پس عددی مانند a هست که به ازاء بی‌نهایت $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n = a$ فرض کنیم $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنبالهٔ حاصل از این جملات است و برهان تمام است. پس فرض کنیم A نامتناهی است. مطابق فرض، A غیر تهی و از بالا کراندار است. پس دارای سوپر سوم (کوچکترین کران بالایی) است. فرض کنیم $a = \sup A$.

به ازاء $\epsilon = ۱$، بنا به تعریف سوپر سوم، n ای هست که $a-۱ < x_n < a$. فرض کنیم $y_۰$ آن x_n باشد. به ازاء $\epsilon = ۱/۲$، بنا به تعریف سوپر سوم، n ای هست که $a-۱/۲ < x_n < a$ و $x_n \neq y_۰$. فرض کنیم $y_۱$ آن x_n باشد. به استقراء فرض کنیم $y_{m-۱}$ انتخاب شده باشد. در این صورت به ازاء $\epsilon = ۱/۲^m$، یک N ای هست که به ازاء هر $n \ge N$ ای $a-۱/۲^m < x_n < a$. چون تعداد x_n ها نامتناهی است از بین این x_n ها لااقل یکی هست که با $y_۰, y_۲, \cdots, y_{m-۱}$ فرق می‌کند. فرض کنیم y_m آن x_n باشد. پس بنا به استقراء، به ازاء هر m ای $|y_m-a| < ۱/۲^m$. بنابراین، زیر دنبالهٔ $\{y_m\}_{n=۱}^{\infty}$ از $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به a همگرا است. □

۱۱.۲.۸ تعریف. در صورتی می‌گوئیم دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ **در شرط کوشی صدق می‌کند** و یا به اختصار یک **دنبالهٔ کوشی** است، که به ازاء هر $\varepsilon > ۰$، یک N ای یافت گردد که به ازاء هر $n \ge N$ و هر $m \ge N$ ای $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

۱۲.۲.۸ قضیه. ۱) هر دنبالهٔ همگرا، کوشی است.
۲) هر دنبالهٔ کوشی، همگرا است.

اثبات: برای اثبات (۱) فرض کنیم $\lim_{n\to\alpha} x_n = \ell$. بنابراین به ازاء هر $\epsilon > ۰$ ای یک N ای هست که به ازاء هر $n > N$ ای $|x_n-\ell| < \epsilon/۲$. حال فرض می‌کنیم $n \ge N$ و $m \ge N$. در این صورت

$$\begin{aligned} |x_n - x_n| &= |x_n - \ell + \ell - x_m| \\ &< |x_n - \ell| + |x_m - \ell| \\ &< \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon \end{aligned}$$

پس دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است.

برای اثبات (۲) فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است. به ازاء $\epsilon = ۱$، یک N ای هست که بازاء هر $n \ge N$ ای $|x_N - x_n| < \epsilon = ۱$. یعنی $۱+x_N < x_n < ۱+x_N$. یعنی دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است. اما بنا به قضیه ۱۱ هر دنبالهٔ کراندار، یک زیر دنبالهٔ همگرا $\{x_{n_k}\}$ دارد. اکنون کافی است ثابت کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به همان حدی همگرا است که $\{x_{n_k}\}$ همگرا است. اکنون بنا به فرض کوشی بودن $\{x_n\}$ به ازاء $\epsilon > ۰$ یک $N_۱$ ای هست که اگر $n, m \ge N_۱$ آنگاه $|x_n - x_m| < \epsilon/۲$. همچنین، یک $N_۲$ ای هست که به ازاء هر $k \ge N_۲$ ای $|x_{n_k} - \ell| < \epsilon/۲$ که ℓ حد زیر دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ است. می‌توان نشان داد که به ازاء هر k ای $nk \ge k$. پس با فرض $N = \max\{N_۱, N_۲\}$ و $m \ge N$ داریم

$$\begin{aligned} |x_m - \ell| &= |x_m - x_{n_m} + x_{n_m} - \ell| \\ &\le |x_m - x_{n_M}| + |x_{n_m} - \ell| \\ &< \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۱۳.۲.۸ مثال. ۱) عدد اعشاری. بنابه تعریف یک اعشاری α عبارتی است بشکل

$$\alpha = \pm\left(x_۰ + \frac{x_۱}{۱۰} + \frac{x_۲}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{x_n}{۱۰^n} + \cdots\right)$$

که در آن $x_۰$، $x_۱$، . . . و x_n و . . . همگی اعداد صحیح هستند، $x_۰ \ge ۰$ و $x_۱$، $x_۲$، . . . و x_n و . . . همگی **رقم** هستند

(یعنی، به مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \cdots, ۸, ۹\}$ متعلقند). به بیان دقیقتر $\alpha = \lim_{n\to\infty} y_n$ که در آن

$$y_n = \pm\left(x_۰ + \frac{x_۱}{۱۰} + \frac{x_۲}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{x_n}{۱۰^n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

ثابت می‌کنیم که α وجود دارد! یعنی، دنبالهٔ $\{y_n\}_{n=۰}^{\infty}$ همگرا است. برای این منظور، ثابت می‌کنیم که دنباله $\{y_n\}_{n=۰}^{\infty}$ کوشی است:

$$\begin{aligned}
|y_m - y_n| &= \left|\pm\left(\frac{x_{n+۱}}{۱۰^{n+۱}} + \cdots + \frac{x_m}{۱۰^m}\right)\right| \\
&\leq \frac{x_{n+۱}}{۱۰^{n+۱}} + \cdots + \frac{x_m}{۱۰^m} \\
&\leq \frac{۹}{۱۰^{n+۱}} + \cdots + \frac{۹}{۱۰^m} \\
&= \frac{۹}{۱۰^{n+۱}} \frac{۱ - (۱/۱۰)^{m-n}}{۱ - ۱/۱۰} \\
&< \frac{۹}{۱۰^{n+۱}} \frac{۱}{۱ - ۱/۱۰} = \frac{۱}{۱۰^n}
\end{aligned}$$

پس، در صورتی $|x_m - x_n| < \varepsilon$ که $\varepsilon < \frac{۱}{۱۰^n}$، در نتیجه $N = -\log_{۱۰} \varepsilon < n$. بنابراین دنبالهٔ $\{y_n\}_{n=a}^{\infty}$ کوشی است و در نتیجه همگرا می‌باشد. نتیجه اینکه عدد اعشاری α وجود دارد.

مثال ۲) دنبالهٔ

$$x_n = -۱ + \frac{۱}{۲!} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!}$$

که $n \leq ۱$، را در نظر بگیرید. نشان دهید که دنبالهٔ مذکور کوشی است، و در نتیجه همگرا می‌باشد.

حل. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \left|\sum_{j=۱}^{m} \frac{(-۱)^j}{j!} - \sum_{j=۱}^{n} \frac{(-۱)^j}{j!}\right| \\
&= \left|\sum_{j=n+۱}^{m} \frac{(-۱)^j}{j!}\right| \\
&\leq \sum_{j=n+۱}^{m} \frac{۱}{j!} \\
&\leq \sum_{j=n+۱}^{m} \frac{۱}{۲^{j-۱}} \\
&= \frac{۱}{۲^n} \frac{۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{m-n}}{۱ - ۱/۲} \\
&< \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}
\end{aligned}$$

پس در صورتی $|x_m - x_n| < \varepsilon$ که $\varepsilon < (۱/۲)^{n-۱}$ یا $n- > \log_{۱/۲} \varepsilon$.. بنابراین کافی است فرض شود $N = \left[\log_{۱/۲} \varepsilon\right] + ۱$.

مثال ۳) نشان می‌دهیم که دنبالهٔ

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

واگرا است. برای این منظور نشان می‌دهیم که x_n کوشی نیست. زیرا اگر $m = ۲n$، آنگاه

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{m} \\
&> \underbrace{\frac{۱}{m} + \frac{۱}{m} + \cdots + \frac{۱}{m}}_{m-n=n \text{ عامل}} \\
&= \frac{n}{m} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

یعنی در شرط کوشی ε از ۱/۲ کوچکتر نمی‌شود که یک تناقض است.

۱۴.۲.۸ تمرین. در هر مورد نشان دهید که دنبالهٔ داده شده کوشی است و در نتیجه همگرا می‌باشد:

۱) $x_n = \frac{\sin ۱}{۲} + \frac{\sin ۲}{۲^۲} + \cdots + \frac{\sin n}{۲^n}$

۲) $x_n = \frac{\cos ۱!}{۱ \times ۲} + \frac{\cos ۲!}{۲ \times ۳} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+۱)}$

۳) $x_n = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲}$

۴) $x_n = ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۴!} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{(۲n)!}$

۵) فرض کنید $۰ < w < ۱$، $x_۱ = a$، $x_۲ = b$ و

$$x_{n+۲} = wx_{n+۱} + (۱-w)x_n$$

به ازاء هر $n \leq ۱$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کوشی، و در نتیجه همگرا می‌باشد.

٦) در نمایش اعداد بجای ۱۰ از هر عدد طبیعی $k > ۱$ می‌توان استفاده کرد. حکم مشابهی در مورد نمایش اعداد بر پایهٔ k وجود دارد. ضمن بیان صورت این حکم، آن را ثابت کنید (به قسمت (۱) از ۱۳.۲.۸ مراجعه کنید).

۷) فرض کنید $x_۱ = a > ۰$ و به ازاء هر $n \geq ۱$ ای $x_{n+۱} = ۳ + ۴/x_n$. تحقیق کنید که به ازاء کدام مقادیر از a دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا است.

۱۵.۲.۸ تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ را در صورتی **منقبض** گوئیم که عددی C چنان یافت شود که $۰ < C < ۱$ و به ازاء هر $n \geq ۱$ ای $|x_{n+۲} - x_{n+۱}| \leq C|x_{n+۱} - x_n|$.

۱۶.۲.۸ قضیه. هر دنبالهٔ منقبض، کوشی است و بنابراین همگرا می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $۰ < C < ۱$ و به ازاء هر $n \geq a$ ای $|x_{n+۲} - x_{n+۱}| < C|x_{n+۱} - x_n|$ در این صورت، اگر $n < m$، آنگاه

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \Big|(x_m - x_{m-۱}) + (x_{m-۱} - x_{m-۲}) + \cdots \\
&\qquad \cdots + (x_{n+۱} - x_n)\Big| \\
&\leq |x_m - x_{m-۱}| + |x_{m-۱} - x_{m-۲}| + \cdots \\
&\qquad \cdots + |x_{n+۱} - x_n| \\
&\leq C|x_{m-۱} - x_{m-۲}| + C|x_{m-۲} - x_{m-۳}| \\
&\qquad \cdots + C|x_n - x_{n-۱}| \\
&\vdots \\
&\leq C^{m-۲}|x_۲ - x_۱| + C^{m-۳}|x_۲ - x_۱| + \cdots \\
&\qquad \cdots + C^{n-۱}|x_۲ - x_۱| \\
&= C^{n-۱}\frac{۱ - C^{m-n}}{۱ - C}A < \frac{C^{n-۱}}{۱ - C}A
\end{aligned}$$

که در آن $A = |x_۲ - x_۱|$. پس اگر $\frac{C^{n-۱}}{۱ - C}A < \varepsilon$، یعنی اگر $\log_C \frac{\varepsilon(۱ - C)}{A} + ۱ < n$، آنگاه $|x_m - x_n| < \varepsilon$ و در نتیجه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ یک دنباله کوشی است.

۱۷.۲.۸ مثال. ۱) دنبالهٔ

$$x_n = ۱ + \frac{۴}{۲} + \frac{۹}{۶} + \cdots + \frac{n^۲}{n!}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{n+۲} - x_{n+۱}|}{|x_{n+۱} - x_n|} &= \frac{\frac{(n+۲)^۲}{(n+۲)!}}{\frac{(n+۱)^۲}{(n+۱)!}} \\
&= \frac{n+۲}{(n+۱)^۲} \\
&= \frac{n+۲}{n(n+۲)+۱} \\
&\leq \frac{n+۲}{n(n+۲)+۰} = \frac{۱}{n}
\end{aligned}$$

پس اگر $n \geq ۲$، آنگاه $|x_{n+۲} - x_{n+۱}| < C|x_{n+۱} - x_n|$ که $C = \frac{۱}{۲}$. یعنی این دنباله منقبض، کوشی و در نتیجه همگرا است.

مثال ۲) دنبالهٔ $x_n = ۱ + \frac{۲}{۴} + \cdots + \frac{n!}{n^n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{n+۲} - x_{n+۱}|}{|x_{n+۱} - x_n|} &= \frac{\frac{(n+۲)!}{(n+۲)^{n+۲}}}{\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}} \\
&= \left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)^{n+۱} \\
&= \left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{n+۱} \\
&= \left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{n+۲}\left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{-۱} \\
&\leq \left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{n+۲}\left(۱ - \frac{۱}{۰+۲}\right)^{-۱} \\
&= \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{n+۲} < C
\end{aligned}$$

که در اینجا

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{n\to\infty} ۲\left(۱ - \frac{۱}{n+۲}\right)^{n+۲} \\
&\overset{(۱)}{=} \lim_{N\to\infty} ۲\left\{\left(۱ + \frac{۱}{N}\right)^{N}\right\}^{-۱} \\
&= ۲e^{-۱} < ۱
\end{aligned}$$

در (۱) فرض شده است که $N = -(n+۲)$.

مثال ۳) در قسمت (۲) از مثال ۶.۱.۸ دیدیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱ + ۲ + \cdots + n}{n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

در حالی که دنبالهٔ مذکور منقبض نیست. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که «لزومی ندارد که هر دنبالهٔ همگرا، دنباله‌ای منقبض باشد.»

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{n+۲} - x_{n+۱}|}{x_{n+۱} - x_n} &= \\
&= \frac{\left|\frac{۱ + \cdots + (n+۲)}{(n+۲)^۲} - \frac{۱ + \cdots + (n+۱)}{(n+۱)^۲}\right|}{\left|\frac{۱ + \cdots + (n+۱)}{(n+۱)^۲} - \frac{۱ + \cdots + n}{n^۲}\right|} \\
&= \frac{\left|\frac{(n+۳)}{(n+۲)} - \frac{(n+۲)}{(n+۱)}\right|}{\left|\frac{(n+۲)}{(n+۱)} - \frac{(n+۱)}{n}\right|} \\
&= \frac{n(n+۱)}{(n+۱)(n+۲)} = \frac{n}{n+۲}
\end{aligned}$$

که عبارت آخر به یک میل می‌کند (یعنی، $C = ۱$): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+۲} = ۱$. بنابراین، دنبالهٔ مورد نظر منقبض نیست.

۱۸.۲.۸ تمرین. در هر مورد نشان دهید که دنبالهٔ داده شده منقبض است و بنابراین همگرا می‌باشد:

۱) $x_n = \frac{۴^n}{n!}$ ۲) $x_n = \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$

۳) $x_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{۲^n}$

۴) $x_n = \frac{۱}{۳+۱} + \frac{۱}{۳^۲+۱} + \cdots + \frac{۱}{۳^n+۱}$

۱۹.۲.۸ قضیه. اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی همگرا به صفر باشند و $\{y_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد، در این صورت

$$\lim_{n\to\alpha} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\alpha} \frac{x_n - x_{n+۱}}{y_n - y_{n-۱}}$$

چه متناهی باشد و چه نامتناهی.

اثبات: فرض کنیم $\lim_{n\to\alpha} \frac{x_n - x_{n+۱}}{y_n - y_{n-۱}} = L$ که $L < \infty$. در این صورت به ازاء هر $\epsilon > ۰$ یک N ای هست که به ازاء هر $n \geq N$ ای $\left|\frac{x_n - x_{n+۱}}{y_n - y_{n+۱}} - L\right| < \epsilon$ یا به طور کامل

$$L - \epsilon < \frac{x_n - x_{x+۱}}{y_n - y_{x+۱}} < L + \epsilon \quad (۱.۸)$$

$$(L-\epsilon)(y_n - y_{n+۱}) < x_n - x_{n+۱} < (L+\epsilon)(y_n - y_{n+۱})$$

زیرا $y_n > y_{n+۱}$. اکنون فرمول (۱.۸) را به ازاء n، $n+۱$، . . . و $n+p-۱$ می‌نویسیم و طرفین آنها را با هم جمع می‌کنیم، به این ترتیب، خواهیم داشت

$$(L-\epsilon)(y_n - y_{n+p}) < x_n - x_{n+p} < (L+\epsilon)(y_n - y_{n+p})$$

اکنون از طرفین حد گرفته و p را به بی‌نهایت میل می‌دهیم و به دست می آوریم

$$(L-\epsilon)(y - ۰) < x_n - ۰ < (L+\epsilon)(y_n - ۰)$$

و بنابراین، چون $y_n > ۰$ داریم $L - \epsilon < x_n/y_n < L + \epsilon$ یا $|x_n/y_n - L| < \epsilon$. پس $\{x_n/y_n\}$ نیز همگرا به L است.

حال فرض کنیم $L = \infty$ بینهایت است. یعنی، دنبالهٔ $\{(x_n - x_{n+۱})/(y_n - y_{n+۱})\}$ به بی‌نهایت میل کند. پس بازاء هر $M > ۰$ ای یک N ای هست که به ازاء هر $n \geq N$ ای $(x_n - x_{n+۱})/(y_n - y_{n+۱}) > M$. در نتیجه، چون $y_n > y_{n+۱}$

$$x_n - x_{n+۱} > M(y_n - y_{n+۱}) \quad (۲.۸)$$

این بار نیز طرفین (۲.۸) را بازاء n، $n+۱$، . . . و $n+p-۱$ نوشته و با هم جمع می‌کنیم. بنابراین

$$x_n - x_{n+p} > M(y_n - y_{n+p})$$

با حدگیری از طرفین با $p \to \infty$ نتیجه می‌شود $x_m > My_n$ با $x_n/y_n > M$. بنابراین $\{x_n/y_n\}$ نیز واگرا به بی‌نهایت است. □

۲۰.۲.۸ قضیهٔ استول. فرض کنید $\{y_n\}_{n=a}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صعودی و واگرا به $+\infty$ است و دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ چنان است که $\left\{\frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n}\right\}_{n=a}^{\infty}$ به عدد α همگرا می‌باشد. در این صورت دنبالهٔ x_n/y_n نیز به عدد α همگرا است. چنانچه $\left\{\frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n}\right\}_{n=a}^{\infty}$ واگرا باشد، دنبالهٔ x_n/y_n نیز واگرا خواهد بود.

اثبات: کافی است در قضیهٔ قبل، بجای x_n از $۱/x_n$ و بجای y_n از $۱/y_n$ استفاده شود. □

۲۱.۲.۸ مثال. ۱) فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، نشان می‌دهیم که $\lim_{n\to\infty} \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$ نیز برابر a است. برای این منظور فرض می‌کنیم $y_n = n$ و $x_n = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$. در این صورت بنابه ۲۰.۲.۸ و با توجه به اینکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+۱} - z_n}{y_{n+۱} - y_n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+۱} = a,$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = a$$

مثال ۲) با فرض $x_n = ۲^n$ و $y_n = n!$، آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n+۱} - ۲^n}{(n+۱)! - n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n \times n!} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!}\right) \\ &= ۰ \times \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰ \end{aligned}$$

پس، الزاماً $\lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n!} = ۰$.

مثال ۳) با فرض $x_n = \ln n$ و $y_n = n$ در ۲۰.۲.۸ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+۱) - \ln(n)}{(n+۱) - n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+۱}{n}\right) = ۰ \end{aligned}$$

۲۲.۲.۸ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر $a > ۱$، آنگاه دنبالهٔ $\frac{n^۲}{a^۲}$ به صفر همگرا است.

هر یک از تساویهای زیر را نشان دهید:

۲) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}} = \frac{۱}{p+۱}$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+۱}\right\} = \frac{۱}{۲}$

۴) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۳^p + \cdots + (۲n-۱)^p}{n^{p+۱}} = \frac{۲^p}{p+۱}$

۲۳.۲.۸ قضیه. اگر x_n دنباله‌ای با جملات مخالف صفر باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} = \ell$. در این صورت،

الف) اگر $\ell < ۱$، آنگاه x_n همگرا به صفر است و

ب) اگر $\ell > ۱$، آنگاه x_n واگرا به بینهایت می‌باشد.

ج) اگر x_n دنباله‌ای با جملات مثبت بوده و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n}$ موجود باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ نیز وجود دارد و با قبلی برابر است.

اگر x_n دنباله‌ای مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. در این صورت،

د) اگر $\ell < ۱$، آنگاه x_n همگرا به صفر است و

ه) اگر $\ell > ۱$، آنگاه x_n واگرا به بینهایت می‌باشد.

اثبات: الف) چون $\lim\limits_{n\to\alpha} \frac{x_{n+۱}}{x_n} = \ell$ و $|\ell| < ۱$ پس به ازاء $\epsilon > ۰$ دلخواه که $|\ell| + \epsilon < ۱$ عددی صحیح مانند N هست که به ازاء هر $n \geq N$ ای $\left|\frac{x_n + ۱}{x_n} - \ell\right| < \epsilon$. در این صورت اگر فرض شود $k = \epsilon + |\ell|$ آنگاه $\left|\frac{x_{n+۱}}{x_n}\right| < k$ یا $|x_{x+۱}| < k|x_n|$. بنابراین اگر $n \geq N$ آنگاه

$$|x_n| < k|x_{n-۱}| < k^۲|x_{n-۲}| < \cdots < k^{n-N}|x_N| = \frac{|x_N|}{k^N}.k^n$$

اما چون $k < ۱$ پس $\lim\limits_{n\to\alpha} k^n = ۰$ و بنابراین $\lim\limits_{n\to\alpha} x_n = ۰$.

اثبات ب) چون $\lim\limits_{n\to\alpha} \frac{x_{n+۱}}{x_n} = \ell$ و $|\ell| > ۱$. بازاء $\epsilon > ۰$ ای که $|\ell| - \epsilon > ۱$ یک N ای هست که به ازاء هر $n \geq N$ ای $\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n} - \ell\right| < \epsilon$. بنابراین $|\ell| - \epsilon < \frac{|x_{n+۱}|}{|x_n|} < |\ell| + \epsilon$ پس اگر فرض کنیم $k = |\ell| - \epsilon$، در این صورت $k > ۱$ و به ازاء هر $n \geq N$ ای $|x_{x+۱}| > k|x_n|$. بنابراین

$$|x_n| > k|x_n| > k^۲|x_{n-۲}| > \cdots > k^{n-N}|x_N|$$

یا $|x_n| > \frac{|x_N|}{k^N} k^n$. اما $\lim\limits_{n\to\alpha} k^n = \alpha$ و بنابراین $\lim\limits_{n\to\alpha} |x_n| = \alpha$.

اثبات (ج) از حوصلهٔ این کتاب خارج است. اثبات احکام (د) و (ه) شبیه (الف) و (ب) است و به خواننده سپرده می‌شود. □

۲۴.۲.۸ مثال. ۱) دنبالهٔ $x_n = n^۲/۲^n$ را در نظر بگیرید، در این صورت x_n همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+۱)^۲}{۲^{n+۱}}}{\frac{n^۲}{۲^n}} \\ &= \frac{۱}{۲} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+۱}{n}\right)^۲ \\ &= \frac{۱}{۲} < ۱\end{aligned}$$

و در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۲۳.۲.۸ همگرا است.

مثال ۲) دنبالهٔ $x_n = n^n/n!$ را در نظر بگیرید. در این صورت، دنباله واگرا است زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+۱}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \\ &= e > ۱\end{aligned}$$

و در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۲۳.۲.۸ واگرا است.

مثال ۳) به کمک قسمت سوم از قضیهٔ ۲۳.۲.۸ داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+۱)^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{n^n}{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+۱}{n}\right)^n = e\end{aligned}$$

مثال ۴) ممکن است $\lim\limits_{n\to\alpha} \sqrt[n]{x_n}$ موجود باشد ولی $\lim\limits_{n\to\alpha} \frac{x_{x+۱}}{x_n}$ موجود باشد. زیرا مثلاً فرض کنیم $x_n = ۲^{-n+(-۱)^n}$. در این صورت

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\alpha} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n\to\alpha} \left(۲^{-n-۱+(-۱)^{n+۱}}\right)^{۱/n} \\ &= \lim_{n\to\alpha} ۲^{-۱+\frac{(-۱)^n}{n}} = \frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{x+۱}}{x_n} &= \frac{۲^{-n-۱+(-۱)^{n+۱}}}{۲^{-n+(-۱)^n}} \\ &= \begin{cases} ۲ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۲^{-۳} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n\to\alpha}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ وجود ندارد.

مثال ۵) مقدار حد

$$\lim_{n\to\alpha}\left\{\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{1/2}$$

را محاسبه کنید.

حل. بنا به قسمت (ج) از ۲۳.۲.۸ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\alpha}\left(\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{1/2} &= \\ &= \lim_{n\to\alpha}\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} \\ &= \lim_{n\to\alpha}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\alpha}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e\end{aligned}$$

۲۵.۲.۸ تمرین. در همگرایی هر یک از دنباله‌های زیر بحث کنید:

$$1)\ x_n=\sqrt[n]{5n}\qquad 2)\ x_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\qquad 3)\ x_n=\frac{3^n}{n^3}$$

در هر یک از موارد ۴ تا ۷، یا با ذکر دلیل ادعای مطرح شده را اثبات و یا با ارائهٔ یک مثال، غلط بودن آن را نشان دهید:

۴) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum 1/x_n$ واگرا است.

۵) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum x_n^2$ نیز همگرا است.

٦) اگر $\sum x_n^2$ همگرا باشد، آنگاه $\sum |x_n|$ نیز همگرا است.

۷) اگر $\sum x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum x_n/n$ نیز همگرا است.

۸) نشان دهید $\frac{4}{e}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$.

۳.۸ رابطهٔ حد تابع با حد دنباله

تا کنون حد یک تابع یک متغیره با متغیر حقیقی و نیز حد دنباله را مطالعه کرده‌ایم. در این بخش رابطهٔ میان آن دو مفهوم را مطالعه می‌کنیم.

۱.۳.۸ قضیه. شرط لازم و کافی برای برقراری $\lim_{x\to x_\circ}f(x)=\ell$ این است که به ازاء هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ همگرا به $x_\circ$، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n=a}^{\infty}$ به ℓ همگرا می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $\lim_{x\to x_\circ}f(x)=\ell$. بنابراین، به ازاء هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ ای هست که به ازاء هر x که $|x-x_\circ|<\delta$ داریم $|f(x)-\ell|<\epsilon$. حال فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به $x_\circ$ است. پس به ازاء $\delta>0$ یک N ای هست که به ازاء هر $n\geq N$ ای $|x_n-x_\circ|<\delta$. بنلبراین به ازاء هر $n\geq N$ ای $|f(x_n)-\ell|<\epsilon$ و لذا $\{f(x_n)\}$ به ℓ همگرا است.

حال فرض کنیم به ازاء هر دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ به $x_\circ$، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ به ℓ همگرا باشد. فرض کنیم (فرض غلط) که $\lim_{x\to x_\circ}f(x)=\ell$ غلط باشد. پس $\epsilon>0$ ای هست که به ازاء هر $\delta>0$ ای یک x ای هست که $|x-x_\circ|<\delta$ و $|f(x)-\ell|<\epsilon$. فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ و $\delta=\frac{1}{n}$. پس x_n ای هست که $|x_n-x_\circ|<1/n$ و $|f(x)-\ell|<\epsilon$. به این ترتیب $\{x_n\}$ به $x_\circ$ همگرا است درحالی که فاصلهٔ $f(x_n)$ از ℓ کمتر از ϵ نمی‌شود. پس $\{f(x_n)\}$ به ℓ همگرا نیست که خلاف فرض است. □

۲.۳.۸ مثال. ۱) برای محاسبهٔ مقدار حد $\lim_{n\to\infty}n\sin(1/n)$، در ۱.۳.۸ فرض می‌کنیم $x_n=1/n$ و $f(x)=\sin x/x$. بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\end{aligned}$$

مثال ۲) برای محاسبهٔ مقدار حد

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\cos\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)-1\right)$$

در ۱.۳.۸ فرض می‌کنیم $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\cos\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)-1\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x_n)-1}{(x_n)^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} \\ &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

مثال ۳) اگر $0<\alpha<1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\alpha^n}=0$. زیرا با فرض $u_n=\alpha^n$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\alpha^n} &= \lim_{n\to\infty}(1+\alpha^n)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{(1+u_n)^{1/u_n}\right\}^{u_n/n}\end{aligned}$$

اما $\lim_{n\to\infty} u_n = ۰$، در نتیجه مطابق ۱.۳.۸

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۱+\alpha^n} &= \left(\lim_{u\to ۰}(۱+u)^{۱/u}\right)^{\lim_{n\to\infty}\alpha^n/n}\\ &= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n}\right\}\end{aligned}$$

پس کافی است مقدار حد $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n}$ را محاسبه کنیم. این حد برابر صفر است، زیرا

$$۰ \le \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\alpha^n = ۰$$

در نتیجه، حد مورد نظر برابر $e^۰ = ۱$ می‌باشد.

مثال ۴) نشان دهیم که $\lim_{x\to\infty}\sin x$ وجود ندارد.

حل. برای این منظور دنباله‌های $x_n = n\pi$ و $y_n = ۲n\pi + \pi/۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

در حالی که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(x_n) &= \lim_{n\to\infty} ۰ = ۰,\\ \lim_{n\to\infty}\sin(y_n) &= \lim_{n\to\infty} ۱ = ۱.\end{aligned}$$

در نتیجه، بنابه ۱.۳.۸ حد $\lim_{x\to\infty}\sin x$ وجود ندارد.

مثال ۵) نشان دهید که حد $\lim_{x\to ۰}\tan(۱/x)$ وجود ندارد.

حل. برای این منظور دنباله‌های $x_n = \frac{۱}{n\pi}$ و $y_n = \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۴}}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = ۰,\\ &\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{۱}{x_n}\right) = ۰,\\ &\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{۱}{y_n}\right) = ۱,\end{aligned}$$

و در نتیجه مطابق ۱.۳.۸، حد مورد نظر نمی‌تواند موجود باشد.

۳.۳.۸ تمرین. در صورتی که $a > ۰$ و $b > ۰$، مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲+۳n-۱}{۲n^۲-n+۱}$ ۲) $\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

۳) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{۲}-۱\right)$ ۴) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-۱+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

۵) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{۲}\right)^n$ ، ۶) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۲}{n+۳}\right)^n$

۷) $\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{۲}{\sqrt{n}}\right)$ ۸) $\lim_{n\to\infty} n^۲\left(\sqrt[n]{۲}-\sqrt[n+۱]{۲}\right)$

۹) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^۲-۱}{n^۲+۱}\right)^{\frac{n-۱}{n+۱}}$ ۱۰) $\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{n}\right)$

۱۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n-۲^{-n}}{۲^n+۲^{-n}}$ ۱۲) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۲}{۲n-۱}\right)^{n^۲}$

۱۳) $\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{(-۱)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{۱+n^۲}\right)}$

۱۴) $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[m]{(n+a_۱)\cdots(n+a_m)}-n\right\}$

۱۵) نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}\sin(۱/x)$ وجود ندارد.

۴.۸ سری

سریها (یا رشته‌ها) دسته‌ای خاص و بسیار مهم از دنباله‌ها هستند. بنابراین، هر آنچه تا کنون در مورد دنباله‌ها گفته‌ایم، در مورد سریها نیز صحیح می باشند.

۱.۴.۸ تعریف. فرض کنید $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد است. به ازاء هر $k \ge a$ ای، مجموع جزئی k ام دنبالهٔ مفروض را به صورت $S_k = x_a + x_{a+۱} + \cdots + x_k = \sum_{j=a}^{k} x_j$ تعریف می‌کنیم. دنبالهٔ $\{S_k\}_{k=a}^{\infty}$ را **سری با دنبالهٔ مولد** $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ (یا جملهٔ عمومی x_n) نامیده و با نماد $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ و یا

$$x_a + x_{a+۱} + \cdots + x_n + \cdots$$

نشان می‌دهیم.

۲.۴.۸ قرارداد. چون هر سری یک دنباله است، پس در مورد همگرایی و یا واگرایی آن می‌توان سخن گفت. اگر سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ همگرا باشد، مقدار حد آن را نیز با نماد $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ نشان می‌دهیم. به بیان دقیقتر: $\sum_{n=a}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=a}^{n} x_k$ یا

$$\begin{aligned}&x_a + x_{a+۱} + \cdots + x_n + \cdots =\\ &= \lim_{n\to\infty}\{x_a + x_{a+۱} + \cdots + x_n\}\end{aligned}$$

۳.۴.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}$ به ۲ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{۲^k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{۱-(۱/۲)^{n+۱}}{۱-(۱/۲)}\\ &= ۲ - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n = ۲\end{aligned}$$

مثال ۲) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)}$ به یک همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}
\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k(k+۱)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=۰}^{n} \left\{ \frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k} - \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k+۱} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ ۱ - \frac{۱}{n+۱} \right\} = ۱
\end{aligned}$$

مثال ۳) سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ همگرا است، زیرا دنبالهٔ مجموعه‌های جزئی آن صعودی و از بالا کراندار است. در واقع، اگر

$$S_n = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} = ۲ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n!}$$

آنگاه دنباله صعودی

$$S_{n+۱} = S_n + \frac{۱}{(n+۱)!} > S_n$$

و از بالا کراندار می‌باشد:

$$\begin{aligned}
S_n &= ۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \cdots + \frac{۱}{n!} \\
&\leq ۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} \\
&= ۲ + \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} < ۳
\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد (به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده) که

$$\lim_{n\to\infty} \left(۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{۱}{n} \right)^n = e$$

مثال ۴) سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است. زیرا در قسمت (۳) از مثال ۱۳.۲.۸ نشان دادیم که دنبالهٔ مجموعه‌های جزئی آن در شرط کوشی صدق نمی‌کند و بنابراین واگرا است. دلیل دومی نیز برای آن می‌توان آورد:

$$\begin{aligned}
S_{۲^n} &= \sum_{k=۱}^{۲^n} \frac{۱}{k} \\
&= ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}\right) \\
&\quad + \left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \left(\frac{۱}{۲^{n-۱}+۱} + \frac{۱}{۲^{n-۱}+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}\right) \\
&\geq ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}\right) \\
&\quad + \left(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \underbrace{\left(\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۲^n} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}\right)}_{\text{عامل } ۲^{n-۱}} \\
&= ۱ + \underbrace{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{۲}}_{\text{عامل } n} = ۱ + \frac{n}{۲}
\end{aligned}$$

که وقتی $n \to \infty$، عبارت آخر به بینهایت میل می‌کند.

مثال ۵) سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n$ واگرا است، زیرا دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن در شرط کوشی صدق نمی‌کند:

$$\begin{aligned}
|S_{n+۱} - S_n| &= \left| \sum_{k=۰}^{n+۱} (-۱)^k - \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \right| \\
&= \left| (-۱)^{n+۱} \right| = ۱
\end{aligned}$$

۴.۴.۸ تمرین.

حد مجموع سریهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲n-۱}{n^۲(n+۱)^۲}$

۲) $\sum_{n=۰}^{\infty} e^{-n\alpha} \cos(n\alpha), \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

۳) $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{۲^n} + \cdots$

۴) $\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۸} + \cdots + \frac{۲n-۱}{۲^n} + \cdots$

۵) $\frac{۱}{۱\times۴} + \frac{۱}{۴\times۷} + \cdots + \frac{۱}{(۳n-۲)(۲n+۱)} + \cdots$

۶) $\frac{۱}{۱\times۲\times۳} + \frac{۱}{۲\times۳\times۴} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}$

۷) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sqrt{n+۲} - ۲\sqrt{n+۱} + \sqrt{n} \right)$

۸) $q\sin\alpha + q^۲ \sin(۲\alpha) + \cdots + q^n \sin(n\alpha) + \cdots$

کدام یک از سریهای زیر همگرایند؟ کدامیک واگرا هستند؟

۹) $\sum_{j=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^j}{j+۱}$ ۱۰) $\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{k^۲}{۲^k}$

۱۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n(n+۱)}}$ ۱۲) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n}{n!}$

۱۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!}$　　　۱۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{(۲n-۱)(۲n+۱)}}$

۱۵) $۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\cdots+\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}+\cdots$

۱۶) $۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}+\cdots+\frac{n}{۲n-۱}+\cdots$

۱۷) هر گاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ k ام بوده و a یک عدد حقیقی دلخواه باشد، مقدار سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}a^n$ را محاسبه کنید.

۵.۸ آزمونهای همگرایی سریها

همانند بحث دنباله‌ها، در حالت سریها نیز از روشهای غیر مستقیم برای پاسخ به این پرسش که «آیا سری مورد مطالعه همگرا می‌باشد یا خیر؟» استفاده می‌شود. این روشها را آزمون می‌نامند. تعداد این آزمونها بسیار زیاد است؛ بنابراین، در اینجا تنها تعدادی از مهمترین آزمونها را مطرح می‌کنیم.

۱.۵.۸ آزمون جملهٔ عمومی. شرط لازم برای همگرایی سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ آن است که $\lim_{n\to\infty} x_n = ۰$.

اثبات: فرض کنیم $\sum_{n=a}^{\alpha} x_n$ همگرا به α است. در این صورت

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\alpha} x_n &= \lim_{n\to\alpha}\left\{\sum_{i=a}^{n} x_i - \sum_{i=a}^{n-۱} x_i\right\} \\
&= \lim_{n\to\alpha}\sum_{i=a}^{n} x_i - \lim_{n\to\alpha}\sum_{i=a}^{n-۱} x_i \\
&= \sum_{n=a}^{\alpha} x_n - \sum_{n=a}^{\alpha} x_n \\
&= \alpha-\alpha = ۰
\end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان تمام است. □

۲.۵.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n$ واگرا است، زیرا $\lim_{n\to\infty}(-۱)^n$ اصلاً وجود ندارد.

مثال ۲) اگر $|q| \geq ۱$، آنگاه سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} q^n$ واگرا است، زیرا در این صورت $\lim_{n\to\infty} q^n \neq ۰$.

۳.۵.۸ آزمون کرانداری. اگر $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ یک سری با جملات نامنفی باشد و $S_n = x_a + x_{a+۱} + \cdots x_n$، آنگاه شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ آن است که $\{S_n\}_{n=a}^{\infty}$ از بالا کراندار باشد.

۴.۵.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ واگرا است. زیرا دنبالهٔ

$$\begin{aligned}
S_n &= ۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}} \\
&\geq \underbrace{\frac{۱}{\sqrt{n}}+\frac{۱}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}}_{n \text{ عامل}} \\
&= n\frac{۱}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}
\end{aligned}$$

از بالا بی‌کران می‌باشد.

مثال ۲) اگر $۰ < q < ۱$، آنگاه سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} q^n$ همگرا است، زیرا دنبالهٔ

$$\begin{aligned}
S_n &= ۱+q+\cdots+q^n \\
&= \frac{۱-q^{n+۱}}{۱-q} \\
&= \frac{۱}{۱-q} - \frac{q^{n+۱}}{۱-q} \\
&\leq \frac{۱}{۱-q}
\end{aligned}$$

از بالا کراندار می‌باشد.

۵.۵.۸ آزمون کوشی. سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ وقتی و تنها وقتی همگرا است که به ازاء هر $\varepsilon > ۰$، یک N ای یافت شود که به ازاء هر $n \geq N$ و هر $m > n$ ای $\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon$.

اثبات: کافی است توجه شود که با مفروضات بالا، $\{S_n\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار است. □

۶.۵.۸ مثال. ۱) سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^a}$ که $۰ < a \leq ۱$، واگرا است، زیرا در شرط کوشی صدق نمی‌کند. در واقع، اگر $m = ۲n$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{۱}{k^a}\right| &= \sum_{k=n}^{۲n}\frac{۱}{k^a} \\
&\geq \sum_{k=n}^{۲n}\frac{۱}{k} \\
&\geq \sum_{k=n}^{۲n}\frac{۱}{۲n} = \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

مثال ۲) سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ که $a>1$، همگرا است، زیرا در شرط کوشی صدق می‌کند: به دلیل آنکه $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^a}=0$ (چرا؟). بنابراین، N_0 ای هست که اگر $n\geq N_0$، آنگاه $a^n<n^a$. در این صورت

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^a}\right| &= \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^a}\\ &\leq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{a^k}\\ &= \frac{1}{a^n}\,\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{m-n+1}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)}\\ &< \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}\end{aligned}$$

و چون $0<\frac{1}{a}<1$، در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a-1)a^{n-1}}=\frac{a}{a-1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n=0.$$

پس به ازاء هر $\varepsilon>0$، یک N ای هست که اگر $n>N$، آنگاه تفاضل مورد نظر از ε کوچکتر می‌شود.

۷.۵.۸ آزمون مقایسه. فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ و $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و به ازاء هر $n\geq N$ ای داشته باشیم $0\leq x_n\leq y_n$، آنگاه

الف) اگر $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ نیز همگرا می‌باشد.

ب) اگر $\sum_{n=b}^{\infty}x_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=a}^{\infty}y_n$ نیز واگرا می‌باشد.

۸.۵.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}$ همگرا است، زیرا

$$\frac{2^n+1}{3^n+1}<\frac{2^n+2^n}{3^n}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

و سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ همگرا است (زیرا $\left|\frac{2}{3}\right|<1$).

مثال ۲) سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ واگرا است، زیرا

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{n^2}}<\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

و سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است.

۹.۵.۸ آزمون مقایسهٔ حدی. فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ و $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و حد $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ موجود و مخالف صفر و بینهایت باشد. در این صورت، همگرایی و واگرایی دو سری $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ و $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ یکی است. اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ صفر شود و $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ نیز همگرا خواهد بود. اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ بینهایت شود و $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=b}^{\infty}y_n$ نیز همگرا است.

۱۰.۵.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+1/n)^n}$ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2/2^n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}\\ &= \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{-1/2}=e^{-1/2}\end{aligned}$$

و سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ همگرا است (چرا؟).

مثال ۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$ واگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+3n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n}{\sqrt{n^4+3n^2-n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}=4\end{aligned}$$

و سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (بنابه قسمت (۲) از ۶.۵.۸ واگرا است.

۱۱.۵.۸ آزمون لایبنیتز. فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ یک سری نوسانی است، یعنی x_n ها یکی در میان مثبت و منفی هستند. در این صورت، شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ آن است که دنبالهٔ $\{|x_n|\}_{n=a}^{\infty}$ نزولی و همگرا به صفر باشد.

اثبات: فرض کنیم به ازاء هر n ای $x_n\geq x_{n+1}$، $\lim_{n\to\alpha}x_n$ صفر است و $x_n>0$. دراین صورت می‌خواهیم نشان

دهیم که $\sum_{n=0}^{\alpha}(-1)^n x_n$ همگذا است. برای این منظور دنبالهٔ $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_i$ را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned}
S_0 &= x_0>0\\
S_1 &= x_0-x_1\\
&= S_0-x_1<S_0\\
S_2 &= x_0-x_1+x_2\\
&= S_0+(x_2-x_1)<S_0\\
&= S_1+x_2>S_1\\
S_3 &= x_0-x_1+x_2-x_3\\
&= S_2-x_3<S_2\\
&= S_1+(x_2-x_3)>S_1
\end{aligned}$$

پس به استقراء ملاحظه می‌گردد که به ازاء هر n ای

$$S_0>S_2>\cdots>S_{2n}>S_{2(n+1)}>\cdots>0 \qquad (۳.۸)$$

$$S_1<S_3<\cdots<S_{2n+1}<S_{2(n+1)+1}<\cdots<S_0 \qquad (۴.۸)$$

پس دنبالهٔ $\{S_{2n}\}_{n=0}^{\alpha}$ نزولی و از پایین به صفر کراندار است و بنابراین به عددی مانند ℓ همگرا است. به علاوه، دنبالهٔ $\{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\alpha}$ صعودی و از بالا به $S_0 = x_0$ همگرا است. بنابراین به عددی مانند m همگرا است. از طرفی به ازاء هر n ای $S_{2n-1}<S_{2n+1}<S_{2n}$. بنابراین، با حد گیری از طرفین این نامساوی‌ها، داریم $m\le\ell\le m$ یا $\ell=m$. پس دنبالهٔ $\{S_n\}_{n=0}^{\alpha}$ همگرا است و برهان تمام می‌باشد. □

۱۲.۵.۸ مثال. ۱) سری توانی نوسانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^a}$ که $a>0$ دلخواه است، همگرا می‌باشد. زیرا، در اینجا $|x_n|=1/n^a$ نزولی و همگرا به صفر است:

$$|x_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^a}\le\frac{1}{n^a}=|x_n|,$$

و چون تابع $f(x)=x^a$ صعودی است ($0<a$)، داریم

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$$

مثال ۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt[n]{n}$ واگرا است؛ زیرا، دنبالهٔ $|x_n|=1/\sqrt[n]{n}$ نزولی نیست. برای مشاهدهٔ این امر، علامت مشتق تابع $f(x)=x^{-1/x}$ را بر بازهٔ $(1;\infty)$ بررسی می‌کنیم. اما $f'(x)=f(x)\frac{\ln x-1}{x^2}$ و اگر صورت آن را $g(x)=\ln x-1$ بگیریم، آنگاه $g'(x)=\frac{1}{x}$. پس اگر $x\ge e$، آنگاه $g(x)\ge 0$ و بنابراین $f'(x)$ صعودی است. از طرفی

$$f'(e)=f(e)\frac{1-1}{e^2}=0$$

در نتیجه به ازای هر $x\ge e$ ای $f'(x)\ge 0$. بنابراین، $f(x)$ بر بازهٔ $[e;+\infty)$ صعودی است. این ثابت می‌کند که چنانچه $n\ge 4>e$، آنگاه $x_{n+1}=f(n+1)>f(n)=x_n$.

مثال ۳ سری $\cdots+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}-2$ واگرا است. زیرا در اینجا $x_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$. ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\alpha}x_n &= \lim_{n\to\alpha}(-1)^n\frac{n+1}{n}\\
&= \lim_{n\to\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\alpha}(-1)^n\\
&= \lim_{n\to\alpha}(-1)^n
\end{aligned}$$

که حد آخر وجود ندارد.

۱۳.۵.۸ آزمون انقباضی کوشی.

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی و مثبت است. در این صورت، شرط لازم و کافی برای همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ آن است که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n x_{2^n}=x_1+2x_2+4x_4+8x_8+\cdots$$

همگرا باشد.

اثبات: توجه داریم که

$$\begin{aligned}
&x_1\le x_1\\
&x_2+x_3\le x_2+x_2=2x_2\\
&x_4+x_5+x_6+x_7\le x_4+x_4+x_4+x_4=4x_4=2^2x_{2^2}\\
&\vdots\\
&x_{2^n}+x_{2^n+1}+\cdots+x_{2^{n+1}-1}\le\underbrace{x_{2^n}+\cdots+x_{2^n}}_{\text{تا } 2^n}=2^n x_{2^n}
\end{aligned}$$

بنابراین، با جمع کردن سطرهای بالا، داریم

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}x_k\le\sum_{k=0}^{n}2^k x_{2^k}\le\sum_{k=0}^{\infty}2^k x_{2^k}$$

پس سری با جملات مثبت $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ از بالا کراندار است و بنابراین، همگرا است. □

۱۴.۵.۸ یادداشت. توجه شود که بجای عدد ۲ می‌توان هر عدد صحیح بزرگتر از یک را قرار داد.

۱۵.۵.۸ مثال. ۱) فرض کنید $p > ۰$، و سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n^p$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$۰ \le x_{n+۱} = \frac{۱}{(n+۱)^p} \le \frac{۱}{n^p} = x_n$$

و بنابراین آزمون ۱۳.۵.۸ را در این مورد می‌توان بکار برد: سری هندسی

$$\begin{aligned} \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n x_{۲^n} &= \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n \frac{۱}{(۲^n)^p} \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{۲^{p-۱}}\right)^n \end{aligned}$$

وقتی و تنها وقتی همگرا است که $۱/۲^{p-۱} < ۱$، یعنی بایستی $p-۱ > ۰$. بنابراین، وقتی و تنها وقتی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n^p$ با توان $p > ۰$ همگرا است که $p > ۱$.

مثال ۲) سری $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$ واگرا است.

برای نشان دادن این مطلب ابتدا ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مثبت و نزولی است. برای این منظور، توجه می‌کنیم که علامت مشتق تابع $f(x) = x \ln x$ بر بازهٔ $[۳;+\infty)$ مثبت است (زیرا $f'(x) = \ln x + ۱$) و بنابراین $f(x)$ بر این بازه صعودی است. در نتیجه تابع $\frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{x \ln x}$ بر این بازه نزولی می‌باشد، و بنابراین

$$۰ \le x_{n+۱} = \frac{۱}{f(n+۱)} \le \frac{۱}{f(n)} = x_n$$

سپس، توجه می کنیم که

$$\begin{aligned} \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n x_{۲^n} &= \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n \frac{۱}{۲^n \ln(۲^n)} \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n \ln ۲} \\ &= \frac{۱}{\ln ۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \end{aligned}$$

و سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است. در نتیجه، بنابه آزمون ۱۳.۵.۸، سری واگرا $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$ می‌باشد.

۱۶.۵.۸ تمرین. در همگرایی و واگرایی هر یک از سریهای زیر بحث کنید:

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{n+۱/n}}{(n+۱/n)^n}$، ۲) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n^۵}{۲^n + ۳^n}$،

۳) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲n+۱}{n^۳ + ۲n + ۱}$، ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n - ۱}{۳^n - ۲^n}$،

۵) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳ + (-۱)^n}{۲^{n+۱}}$، ۶) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\sqrt{n}}{n + ۱۰۰}$،

۷) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n} + (-۱)^n}$، ۸) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۱ - (۱/۳)^n}$،

۹) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt[n^۲]{n}}$، ۱۰) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\sin^۲ n}{n}$،

۱۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} \frac{۲^n \sin(۱/n)}{n}$،

۶) $\sum_{n=۲}^{\infty} \left(\sqrt{n+۲} - \sqrt{n-۲}\right)$،

۱۳) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)\,\{\ln(\ln n)\}}$،

۱۴) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)\,\{\ln(\ln ۲^n)\}^۲}$.

۶.۸ آزمونهای همگرایی مطلق

در بخش قبل همهٔ بحث راجع به سریهای با جملات مثبت و یا سریهای با جملات کنترل شده (نوسانی) بود. می‌خواهیم این قید را برداریم. اینگونه سریها به دو خانوادهٔ بزرگ تقسیم می‌شوند: سریهای همگرای مطلق و سریهای همگرای مشروط.

۱.۶.۸ تعریف. سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ را در صورتی **همگرای مطلق** گوئیم که سری $\sum_{n=a}^{\infty} |x_n|$ همگرا باشد. سری‌ای که همگرا باشد، اما همگرای مطلق نباشد، **همگرای مشروط** نامیده می‌شود.

روشن است که هر سری همگرای مطلق، همگرا می‌باشد، ولی عکس این مطلب غلط است.

۲.۶.۸ مثال. ۱) می‌دانیم سری هارمونیک $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است (قسمت (۴) از ۴.۴.۸)، در حالی که سری هارمونیک نوسانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$ همگرا است (قسمت (۱) از ۱۲.۵.۸).

در نتیجه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$ همگرای مشروط است.

مثال ۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n^2}$ همگرای مطلق است، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

یک سری توانی همگرا است (قسمت (۲) از ۶.۵.۸).

۳.۶.۸ آزمون دالامبر.

فرض کنید سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ داده شده است و $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \ell$ موجود می‌باشد. در این صورت

الف) اگر $\ell < 1$، آنگاه سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است.

ب) اگر $\ell > 1$، آنگاه سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ واگرا است.

اثبات: فرض کنیم $\lim_{n\to\alpha} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \ell$. دو حالت در نظر می‌گیریم: الف) $0 \leq \ell \leq 1$ و ب) $\ell > 1$.

الف) فرض کنیم $0 \leq \ell \leq 1$. فرض کنیم r عددی است که $\ell < r < 1$. در این صورت به ازاء $\varepsilon = r - \ell$ عددی مانند N هست که به ازاء هر $n \geq N$ ای $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \ell < \varepsilon$. در نتیجه

$$\ell - r < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \ell < r - \ell$$

یا $0 \leq \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$|x_n| < r|x_{n-1}| < r^2|x_{n-2}| < \cdots < r^{n-N}|x_N|$$

$$\sum_{n=N}^{M} |x_n| < \sum_{n=N}^{M} r^{n-N}|x_N| = |x_N| \sum_{k=0}^{M-N} r^k < \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

که سری هندسی آخر به دلیل $0 < r < 1$ همگرا است. پس سری با جملات مثبت $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ نیز از بالا کراندار و بنابراین همگرا است.

ب) فرض کنیم $1 < \ell$. در این صورت به ازاء $\varepsilon = (\ell - 1)/2$ یک N ای هست که به ازاء هر $n > N$ ای داریم $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \ell\right| < \varepsilon$ یا

$$\frac{3\ell - 1}{2} < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \frac{1 + \ell}{2}$$

اما اگر فرض شود $k = \frac{3\ell - 1}{2}$ در این صورت $k > 1$ و به ازاء هر $n > N$ ای $|x_{n+1}| > k|x_n|$. پس $\lim_{n\to\infty} |x_n|$ صفر نیست و بنابراین سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ واگرا می‌باشد. □

۴.۶.۸ مثال.

۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1
\end{aligned}$$

مثال ۲) سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$ که $a \neq 0$ دلخواه است، واگرا می‌باشد، زیرا

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!/a^{n+1}}{n!/a^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|a|} = \infty > 1
\end{aligned}$$

مثال ۳) در همگرایی سری

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)^2 + \cdots$$

بحث کنید.

حل. در این مساله $x_n = \left(\frac{1.2.\cdots n}{3.5.\cdots(2n+1)}\right)^2$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\alpha} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\alpha} \frac{(2n+3)^2}{(n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\alpha} \frac{4n^2 + 12n + 9}{n^2 + 2n + 1} = 4 > 1
\end{aligned}$$

پس سری داده شده واگرا می‌باشد.

۵.۶.۸ آزمون ریشهٔ کوشی.

فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ یک سری دلخواه است و $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ موجود می‌باشد. در این صورت

الف) اگر $\ell < 1$، آنگاه سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است.

ب) اگر $\ell > 1$، آنگاه سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ واگرا است.

اثبات: دو حالت در نظر می‌گیریم: **الف)** اگر $0 \leq \ell < 1$. در این صورت عددی مانند r هست که $\ell < r < 1$ و لذا $0 < r < 1$ و $\lim_{n\to\alpha} \sqrt[n]{|x_n|} < r$. اکنون به ازاء $\varepsilon = r - \ell$ یک N ای هست که به ازاء هر $n > N$ ای $\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < \varepsilon$ یا $0 \leq \sqrt[n]{|x_n|} < r$. پس $|x_n| < r^n$. در نتیجه

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \sum_{n=N}^{\infty} r^n$$

اما سری آخر به دلیل $0 < r < 1$ همگرا است. بنابراین سری $\sum_{n=N}^{\alpha} |x_n|$ نیز همگرا است.

ب) فرض کنیم $\ell > 1$. در این صورت بازاء $\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2}$، N ای هست که به ازاء هر $n > N$ ای $\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \ell\right| < \varepsilon$. بنابراین $\sqrt[n]{|x_n|} - \ell > \frac{1-\ell}{2}$ یا $\sqrt[n]{|x_n|} > \frac{1+\ell}{2} > 1$ پس

$$\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}|x_n|$$

و لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ نمی‌تواند همگرا باشد. □

۶.۶.۸ یادداشت. ثابت می‌شود که اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ موجود و برابر ℓ باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}$ نیز موجود و برابر ℓ است. اما، عکس این مطلب در حالت کلی غلط است.

بنابراین، اگر چنانچه در استفاده از آزمون دالامبر به حالت $\ell = 1$ برسیم، و بنابراین نتوانیم از آن آزمون استفاده کنیم، آنگاه از آزمون ریشهٔ کوشی نیز نمی توانیم استفاده کنیم (زیرا، به حالت $\ell = 1$ خواهد انجامید).

۷.۶.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=b}^{\infty}\frac{a^n}{n^a}$ را در نظر بگیرید. چون

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n^a}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{(\sqrt[n]{n})^a}\\ &= \frac{|a|}{1^a} = |a|\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $|a| < 1$، آنگاه سری $\sum_{n=b}^{\infty}\frac{a^n}{n^a}$ همگرا است، در حالی که اگر $|a| > 1$، آنگاه این سری واگرا می باشد.

اگر $a = 1$، آنگاه بوضوح سری واگرا است و اگر $a = -1$، آنگاه $\frac{a^n}{n^a} = n(-1)^n$ و در نتیجه سری واگرا است. بنابراین، در مجموع می‌توانیم بگوئیم که: سری $\sum_{n=b}^{\infty}\frac{a^n}{n^a}$ وقتی و تنها وقتی همگرا است که $|a| < 1$.

مثال ۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right\}^{n^3}$ که $0 \neq a \in \mathbb{R}$، همگرا می‌باشد، زیرا

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left\{\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right\}^{n^3}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right\}^{n^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right\}^{x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{1 + \left(\cos\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right)\right\}^{x^2}\\ &= \lim_{u\to\infty}\left\{(1+u)^{1/u}\right\}^{\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1\right)}\end{aligned}$$

که در اینجا $u = 1 - \cos\left(\frac{a}{x}\right)$. از طرفی با فرض $v = \frac{a}{x}$، داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right) &= \lim_{v\to 0}\frac{\cos v - 1}{v^2}a^2\\ &= -\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

بنابراین $\ell = e^{-a^2/2} < 1$ و برهان تمام است.

مثال ۳ در این حالت، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\alpha}\sqrt[n]{|x_n|} &= \lim_{n\to\alpha}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - \frac{n+1}{n}\right\}^{-1}\\ &= \lim_{n\to\alpha}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} - 1\right\}^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\\ &= \left(\lim_{n\to\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)\left(\lim_{n\to\alpha}\frac{n}{n+1}\right)\\ &= (e-1)^{-1}\times 1\\ &= \frac{1}{e-1} < 1\end{aligned}$$

پس سری داده شده همگرا است.

۸.۶.۸ تمرین. در همگرایی و واگرایی هر یک از سریهای زیر بحث کنید:

۱) $1000 + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots$

۲) $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots$

۳) $\frac{2\times 1!}{1} + \frac{2^2\times 2!}{2^3} + \frac{2^3\times 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n n!}{n^3} + \cdots$

۴) $\frac{3\times 1!}{1} + \frac{3^2\times 2!}{2^2} + \frac{3^3\times 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n n!}{n^n} + \cdots$

۵) $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots$

۶) $\frac{1000}{1} + \frac{1000\times 1001}{1\times 3} + \frac{1000\times 1001\times 1002}{1\times 3\times 5} + \cdots$

۷) $\frac{4}{2} + \frac{4\times 7}{2\times 6} + \frac{4\times 7\times 10}{2\times 6\times 10} + \frac{4\times 7\times 10\times 13}{2\times 6\times 10\times 14} + \cdots$

۸) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$، ۹) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}(\sqrt{2}+(-1)^{n})^{n}}{3^{n}}$،

۱۰) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln(n)}$، ۱۱) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$،

۱۲) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}e^{-\sqrt{n}}$، ۱۳) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^{n}}$،

۱۴) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n^{2}+1}-1}$، ۱۵) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$.

۷.۸ چند آزمون پیشرفته‌تر

این آزمونها که در دسته‌هایی بخصوص از سریها قابل استفاده هستند، بسیار متنوع می‌باشند. در نتیجه، عملاً امکان بیان همهٔ آنها نیست. بترتیب اهمیت، برخی از آنها را نام می‌بریم.

۱.۷.۸ آزمون انتگرال. فرض کنید $y=f(x)$ تابعی نامنفی و نزولی بر $(0;\infty)$ باشد. در این صورت، شرط لازم و کافی برای اینکه سری $\displaystyle\sum_{n=a}^{\infty}f(n)$ همگرا باشد آن است که انتگرال $\displaystyle\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ همگرا باشد.

اثبات: چون f نزولی است، پس بازای هر $x\in[k;k+1]$ ای داریم $f(k+1)\le f(x)\le f(k)$ در نتیجه

$$\begin{aligned}f(k+1) &= \int_{k}^{k+1}f(k+1)\,dx\\ &= \int_{k}^{k+1}f(x)\,dx\\ &< \int_{k}^{k+1}f(k)\,dx=f(k)\end{aligned}$$

با جمع کردن این رابطه به ازاء n های مختلف، داریم

$$\sum_{k=a+1}^{n+1}f(k)<\int_{a}^{n}f(x)\,dx<\sum_{k=a}^{n}f(k)$$

و با حد گیری از طرفین به ازاء $n\to\alpha$، نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=a+1}^{\infty}f(n)\le\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx\le\sum_{n=a}^{\infty}f(x)$$

و برهان تمام است. □

۲.۷.۸ مثال. ۱) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{2}+1}$ همگرا است؛ زیرا اگر $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1}$، آنگاه $y=f(x)$ بر $[0;\infty)$ نزولی و مثبت است. بعلاوه

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2}+1} &= \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{dx}{x^{2}+1}\\ &= \lim_{a\to\infty}\arctan a=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

مثال ۲) سری $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^{2}e^{-\sqrt{n}}$ همگرا است، زیرا اگر فرض شود $f(x)=x^{2}e^{-\sqrt{x}}$، آنگاه $y=f(x)$ بر بازهٔ $[0;\infty)$ مثبت است و چون $f'(x)=x(4-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$، پس $y=f(x)$ بر بازهٔ $[4;\infty)$ نزولی است. همچنین، با فرض $u=\sqrt{x}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{4}^{\infty}x^{2}e^{-\sqrt{x}}dx &= \int_{2}^{\infty}u^{4}e^{-u}2u\,du\\ &= 2\int_{2}^{\infty}u^{5}e^{-u}\,du\\ &= \lim_{a\to\infty}2\int_{2}^{a}u^{5}e^{-u}du\\ &\overset{(1)}{=} \lim_{a\to\infty}\Big[P(u)e^{-u}\Big]_{2}^{a}\\ &= \lim_{a\to\infty}\left(P(a)e^{-a}-P(2)e^{-2}\right)\\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{P(a)}{e^{a}}-\frac{P(2)}{e^{2}}\right)\\ &\overset{(2)}{=} \lim_{a\to\infty}\left(\frac{P^{(5)}(a)}{e^{a}}-\frac{P(2)}{e^{2}}\right)\\ &= -\frac{P(2)}{e^{2}}\end{aligned}$$

که در (۱) تابع $P(u)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ ۵ است و در (۲) از قضیهٔ هوپیتال استفاده شده است. بنابراین سری داده شده همگرا می‌باشد.

۳.۷.۸ تمرین. فرض کنید a و p اعداد حقیقی دلخواهند، در این صورت در همگرایی هر یک از سریهای داده شده بحث کنید:

۱) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}$، ۲) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$،

۳) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^{p}}$، ۴) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$،

۵) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{2}$، ۶) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^{4}+n^{2}-1}}$.

۴.۷.۸ آزمون دریکله. اگر دنبالهٔ مجموعه‌های جزئی سری $\displaystyle\sum_{n=a}^{\infty}x_{n}$ کراندار باشد و $\{y_{n}\}_{n=b}^{\infty}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد که به شکل یکنوا به صفر میل می‌کند، آنگاه سری $\displaystyle\sum_{n=c}^{\infty}x_{n}y_{n}$ همگرا است.

اثبات این حکم از خوصلهٔ این کتاب خارج است، و در کتب آنالیز ریاضی اثبات می‌گردد.

۵.۷.۸ مثال. ۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(an)}{n}$ که $a\in\mathbb{R}$، یک سری همگرا است، زیرا با فرض کردن $x_n=\sin(ax)$ و $y_n=\frac{1}{n}$ و با توجه به اینکه دنبالهٔ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ مثبت، نزولی و همگرا به صفر است و

$$\begin{aligned}|S_k| &= \left|\sum_{n=1}^{k}x_k\right| = \left|\sum_{n=1}^{k}\sin(na)\right|\\ &\stackrel{(1)}{=} \left|\frac{\sin\left((k+1)\frac{a}{2}\right)\sin\left(k\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right|\\ &\le \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right|}\end{aligned}$$

کراندار است؛ پس، از آزمون دریکله نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=a}^{\infty}x_ny_n$ (که همان سری داده شده است) همگرا می‌باشد. (تساوی (۱) در قسمت (۳) از مثال ۱۳.۶.۱ اثبات شده است.)

مثال ۲) سری

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}+\cdots$$

را در نظر بگیرید. فرض کنیم $y_n=\frac{1}{n}$ و x_n به صورت دوری تعریف می‌گردد

$$x_1=x_2=x_4=x_5=\cdots=x_{3n+1}=x_{3n+2}=1$$
$$x_3=x_6=\cdots x_{3n}=-2$$

در این صورت، دنبالهٔ y_n نزولی، مثبت و همگرا به صفر است و بعلاوه

$$\begin{aligned}|S_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\\ &= \begin{cases}1 & n=3m+1 \quad \text{اگر}\\ 2 & n=3m+2 \quad \text{اگر}\\ 0 & n=3m \quad \text{اگر}\end{cases} \le 2\end{aligned}$$

پس مطابق ۴.۷.۸، سری $\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$ (که همان سری مورد نظر است) همگرا می‌باشد.

۶.۷.۸ تمرین. همگرایی سریهای زیر با به کمک آزمون دریکله نشان دهید:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(an)}{n}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(2+(-1)^n\right)$

۳) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$

۴) $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\cdots \quad (p>1)$

۵) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\cdots$

۷.۷.۸ آزمون آبل. فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty}x_n$ یک سری همگرا و $\{y_n\}_{n=b}^{\infty}$ یک دنبالهٔ همگرا و یکنوا باشد. در این صورت، سری $\sum_{n=c}^{\infty}x_ny_n$ همگرا است.

اثبات: فرض کنیم $y=\lim_{n\to\alpha}y_n$ و $Z_n=y-y_n$. در این صورت $Z_n\le 0$ و $\lim_{n\to\alpha}Z_n=0$ و $\{Z_n\}$ غیر صعودی است. پس بنا به آزمون دریکله $\sum_{n=a}^{\alpha}x_nZ_n$ همگرا است. اما $x_ny_n=yx_n-x_nZ_n$ در نتیجه

$$\sum_{n=a}^{\alpha}x_n\,y_n=b\sum_{n=a}^{\alpha}x_n-\sum_{n=a}^{\alpha}x_n\,Z_n$$

که چون دو سری سمت راست همگرایند، پس سری سمت چپ نیز همگرا می‌باشد. □

۸.۷.۸ مثال. ۱) اگر $|a|>\frac{1}{2}$، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ همگرا است، زیرا با فرض $x_n=\frac{\pi}{(2a)^n}$ و $y_n=\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)/\frac{\pi}{2^n}$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}x_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{(2a)^n}\\ &= \frac{\pi}{2a}\frac{1}{1-\frac{1}{2a}}=\frac{\pi}{2a-1}\\ \lim_{n\to\infty}y_n &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)/\frac{\pi}{2^n}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\end{aligned}$$

و y_n یکنوا است، زیرا اگر $f(x)=\sin x/x$، آنگاه

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\\ &= \frac{x-\tan x}{x^2\cos x}\ge 0 \qquad \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \text{ بر}\end{aligned}$$

و در نتیجه $f(x)$ صعودی است. اما $\pi/2^{n+1}<\pi/2^n$ و در نتیجه

$$y_{n+1}=f\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)<f\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=y_n$$

مثال ۲) اگر $۱ < a < b$، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{b^n - a^n}$ همگرا است. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم $x_n = \left(\frac{۱}{b}\right)^n$ و $y_n = ۱/\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - ۱\right)$. در این صورت، چون $۰ < \frac{۱}{b} < ۱$، پس سری $\sum_{n=۰}^{\infty} x_n = \sum_{n=۰}^{\infty} \left(\frac{۱}{b}\right)^n$ همگرا است. بعلاوه، چون $a < b$، پس $\frac{a}{b} < ۱$ و بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+۱} < \left(\frac{a}{b}\right)^n$. پس

$$\begin{aligned} y_n &= ۱ \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n - ۱\right\} \\ &< ۱ \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+۱} - ۱\right\} = y_{n+۱} \end{aligned}$$

یعنی، دنبالهٔ y_n صعودی است. همچنین

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} ۱/\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n - ۱\right\} = -۱$$

بنابراین، سری مورد نظر که برابر $\sum x_n y_n$ می‌باشد، همگرا است.

۹.۷.۸ تمرین. به کمک آزمون آبل، همگرایی هر یک از سریهای زیر را نشان دهید:

$$۱)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n-۱}{n+۱} n^{-۱/۱۰۰} \qquad ۲)\ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+۱}{n!}$$

$$۳)\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{p(p+۱)\cdots(p+n-۱)}{n!} \times \frac{۱}{n^p}$$

$$۴)\ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n^۵}{۳^n + ۲^n}$$

۱۰.۷.۸ قضیه (آزمون دوم مقایسه). اگر $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=a}^{\infty} y_n$ دو سری با جملات مثبت باشند و نیز به ازاء هر $n \geq a$ ای $\frac{x_{n+۱}}{x_n} < \frac{y_{n+۱}}{y_n}$ و $\sum_{n=a}^{\infty} y_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ نیز همگرا است.

اثبات: فرض کنیم

$$\begin{aligned} S_n &= x_a + x_{a+۱} + \cdots + x_n \\ t_n &= y_a + y_{a+۱} + \cdots + y_n \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} S_n &= x_a \left(۱ + \frac{x_{a+۱}}{x_a} + \frac{x_{a+۲}}{x_a} + \cdots + \frac{x_n}{x_a}\right) \\ &= x_a \left(۱ + \frac{x_{a+۱}}{x_a} + \frac{x_{a+۲}}{x_a}\frac{x_{a+۱}}{x_a} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \frac{x_n}{x_{n-۱}}\frac{x_{n-۱}}{x_{n-۲}}\cdots\frac{x_{a+۱}}{x_a}\right) \\ &< x_a \left(۱ + \frac{y_{a+۱}}{y_a} + \frac{y_{a+۲}}{y_{a+۱}}\frac{y_{a+۱}}{y_a} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \frac{y_n}{y_{n-۱}}\frac{y_{n-۱}}{y_{n-۲}}\cdots\frac{y_{a+۱}}{y_a}\right) \\ &= x_a \left(۱ + \frac{y_{a+۱}}{y_a} + \frac{y_{a+۲}}{y_a} + \cdots + \frac{y_n}{y_a}\right) \\ &= \frac{x_a}{y_a}(y_a + y_{a+۱} + \cdots + y_n) \\ &= \frac{x_a}{y_a} t_n \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &\geq \frac{x_a}{y_a} \lim_{n\to\infty} t_n \\ &= \frac{x_a}{y_a} \sum_{n=a}^{\infty} y_n \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۱۱.۷.۸ آزمون رابه. اگر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت بوده و $\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+۱}} - ۱\right)$. اگر $۱ < \ell$، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا است و اگر $\ell < ۱$، سری واگرا است.

اثبات: فرض کنیم $y_n = ۱/n^k$. در این صورت شرط لازم و کافی برای همگرایی سری $\sum_{n=a}^{\infty} y_n$ آن است که $k > ۱$. از طرفی

$$\frac{x_n}{x_{n+۱}} > \frac{y_n}{y_{n+۱}}$$

یعنی

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n+۱}} &> \frac{(n+۱)^k}{n^k} \\ &= \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^k \\ &= ۱ + \frac{k}{n} + \frac{k(k-۱)}{۲n^۲} + \cdots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} n\left(\frac{x_n}{x_{n+۱}} - ۱\right) &> n\left(\frac{k}{n} + \frac{k(k-۱)}{۲n^۲} + \cdots\right) \\ &= k + \frac{k(k-۱)}{۲n} + \cdots \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+۱}} - ۱\right) > ۱$ می‌توان k را بزرگتر از یک گرفت و چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} y_n$ واگرا است، پس بنا به آزمون دوم مقایسه، سری $\sum x_n$ نیز واگرا است.

حالت دوم به صورت مشابه اثبات می‌گردد. (تمرین) □

۱۲.۷.۸ قضیه (آزمون لگاریتمی). اگر به ازاء هر $n \le a$ ای $x_n > 0$ و $\ell = \lim\limits_{n\to} n \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$، آنگاه اگر $\ell < 1$ سری $\sum\limits_{n=a}^{\infty} x_n$ همگرا و اگر $\ell > 1$ سری $\sum\limits_{n=a}^{\infty} x_n$ واگرا است.

اثبات: در اینجا نیز فرض می‌کنیم $y_n = 1/n^k$. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} > \frac{y_n}{y_{n+1}} &\Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) k \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > k \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > n\, k \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right\} \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) > k - \frac{k}{2n} + \frac{k}{3n^2} - \cdots
\end{aligned}
$$

بنابراین، اگر $\ell > 1$ می‌توان k را بزرگتر از یک انتخاب کرد؛ و به این ترتیب، واگرایی $\sum\limits_{n=a}^{\infty} y_n$ به واگرایی $\sum\limits_{n=a}^{\infty} x_n$ می‌انجامد. حالت دوم به صورت مشابه اثبات می‌گردد. □

۱۳.۷.۸ مثال. ۱) فرض کنید a عددی حقیقی است و x_n ضریب جملهٔ n ام در **دو جمله‌ای نیوتن**

$$(1+a)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n$$

به ازای $a = -1$ می‌باشد؛ یعنی،

$$
\begin{aligned}
x_n &:= \binom{\alpha}{n} (-1)^n \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (-1)^n
\end{aligned}
$$

در این صورت اگر $n > n_\circ := [\alpha] + 1$، آنگاه $0 < \alpha - n + 1$ و بنابراین از $n_\circ$ به بعد همهٔ a_n ها هم علامت هستند. می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ آنها مثبتند. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha + 1
\end{aligned}
$$

بنابراین، وقتی $\alpha > 0$ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (-1)^n$$

همگرا است.

مثال ۲) سری

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^p + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^p + \cdots$$

را در نظر بگیرید. در این صورت $x_n = \left(\frac{1\times 3\cdots(2n-1)}{2\times 4\cdots(2n)}\right)^p$ و بنابراین

$$
\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)^p\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x}\Big((1+x)^p - 1\Big) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^p - 1}{x} \\
&\overset{\text{هـ}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{p(1+x)^{p-1}}{1} = \frac{p}{2}
\end{aligned}
$$

که در اینجا $x = \frac{1}{2n+1}$. در نتیجه، اگر $p < 2$، آنگاه سری داده شده همگرا است و اگر $p > 2$، سری واگرا می‌باشد.

۸.۸ استفاده از میپل

برای مشاهدهٔ مقدمات استفاده از نرم افزار میپل، به بخش تحت همین نام از فصل یک مراجعه شود.

۱.۸.۸ محاسبهٔ حد یک دنبالهٔ عددی. صورت کلی محاسبهٔ حد یک دنباله به شکل زیر است:

$$\texttt{limit(x(n), n = infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \text{x(n)} \quad \text{حد دنبالهٔ}$$

برای نمونه در مورد محاسبهٔ حد $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 1/n)^{2n}$ داریم

$$\texttt{limit((1 - 1/n)\^{}(2 * n), n = infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} \mathrm{e}^{-2}$$

چنانچه میپل نتواند حدی را محاسبه کند، خود حد را مجدداً اعلام خواهد نمود. اگر جواب بینهایت شود، infinity اعلام خواهد شد.

۲.۸.۸ محاسبهٔ مقدار یک سری عددی. صورت کلی محاسبهٔ مقدار حد یک سری به شکل زیر است:

$$\texttt{sum(x(n), n = a..infinity)} \xmapsto{\text{میپل}}$$

مجموع سری $x(n)$ از $n = a$ به بعد

برای نمونه در مورد محاسبهٔ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ داریم

$$\texttt{sum((-1)\^{}n/n\^{}2, n = 1..infinity)} \xmapsto{\text{میپل}} -\frac{\pi^2}{12}$$

۳.۸.۸ . در آدرس اینترنتی

http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/r1.html

مثالها و منابع بیشتر در این زمینه آورده شده است.

فصل ۹

دنباله و سری تابعی

یکی از مهمترین مسایل آنالیز و به تبع آن، حساب دیفرانسیل و انتگرال، مسئلهٔ تقریب است. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع ساده باشند (مانند چند جمله‌ایها) که بر مجموعهٔ S تعریف می‌شوند و $y = f(x)$ تابعی با دامنهٔ $D_f \subseteq S$ است. آیا می‌توان توابع $f_n(x) \in \mathcal{F}$ ای را یافت به گونه‌ای که بتوانیم ادعا کنیم که $f(x) = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ بر D؟ و یا حداقل به شکل تقریبی بتوان این ادعا را مطرح نمود؟ هدف از این فصل یافتن جوابی برای این مسئله است. بعلاوه به این سئوال خواهیم پرداخت که کدام خواص از توابع $f_n(x)$ به تابع $f(x)$ قابل تعمیم هستند؟

۱.۹ دنبالهٔ تابعی

با چند تعریف آغاز می‌کنیم.

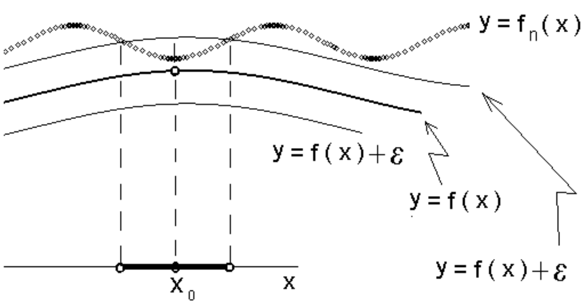
۱.۱.۹ تـعـریـف. فرض کنید به ازای هر $n \geq a$ ای $f_n(x)$ یک تابع بر مجموعهٔ D باشد. خانوادهٔ مرتب $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ را **دنبالهٔ تابعی با جملهٔ عمومی (یا جملهٔ n ام) $f_n(x)$ و دامنهٔ D** می‌نامیم.

روش است که به ازای هر $x_\circ \in D$ ای $\{f_n(x_\circ)\}_{n=a}^{\infty}$ یک دنبالهٔ عددی است، یعنی هر دنبالهٔ تابعی را به عنوان تابعی با متغیر حقیقی و مقدار «دنباله‌ای» می‌توان تصور نمود.

مجموعهٔ C همهٔ $x \in D$ هایی که $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ همگرا است را **دامنهٔ همگرایی دنباله** می‌نامیم. اگر به ازای هر $x \in C$ ای $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، تابع $f(x)$ را **تابع حد نقطه‌ای** $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} f(x), \quad \Big(\text{بر } C\Big)$$

به شکل ۱.۹ توجه شود.



شکل ۱.۹: همگرایی نقطه‌ای در $x = x_\circ$

۲.۱.۹ مثال. ۱) دنبالهٔ تابعی $\left\{\dfrac{۱}{۱ + x^{۲n}}\right\}_{n=a}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. حد نقطه‌ای این دنباله را بیابید.

حل. در اینجا $f_n(x) = \dfrac{۱}{۱ + x^{۲n}}$ و $D = \mathbb{R}$. برای یافتن حد نقطه‌ای آن به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱ + x^{۲n}}$$

اگر $|x| > ۱$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^{۲n} = \infty$ و بنابراین $f(x) = \circ$.
اگر $|x| = ۱$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^{۲n} = ۱$ و بنابراین $f(x) = \dfrac{۱}{۱ + ۱} = \dfrac{۱}{۲}$. اگر $|x| < ۱$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^{۲n} = \circ$ و بنابراین $f(x) = \dfrac{۱}{۱ + \circ} = ۱$. پس در مجموع $C = \mathbb{R}$ و

$$f(x) = \begin{cases} \circ & |x| > ۱ \text{ اگر} \\ ۱/۲ & |x| = ۱ \text{ اگر} \\ ۱ & |x| < ۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

یادداشت: ملاحظه می‌شود که تمام $f_n(x)$ ها پیوسته‌اند ولی $f(x)$ نیست!

مثال ۲) دنبالهٔ تابعی $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. در اینجا $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ و $D=\mathbb{R}$. بعلاوه، از تعریف عدد e نتیجه می‌شود که اگر $x\neq 0$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right\}^x = e^x \end{aligned}$$

و اگر $x=0$، آنگاه $f(0)=f_n(0)=1$. بنابراین، در مجموع $C=\mathbb{R}$ و

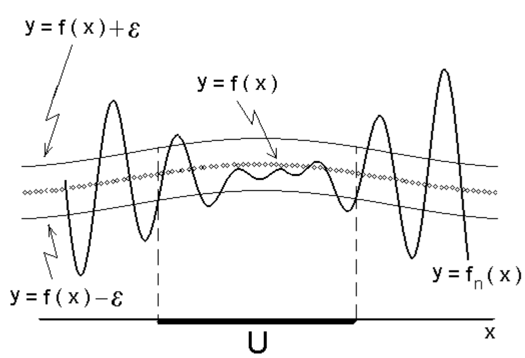
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} e^x, \qquad \left(\text{بر } \mathbb{R}\right)$$

۳.۱.۹ تعریف حد یکشکل.

فرض کنید دنبالهٔ تابعی $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ بر C به $f(x)$ همگرای نقطه‌ای است. در صورتی می‌گوئیم دنبالهٔ تابعی $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ بر $U\subseteq C$ به $f(x)$ **همگرای یکشکل** است که به ازای هر $\varepsilon>0$ دلخواه N_ε ای یافت گردد که به ازای هر $x\in U$ دلخواه و هر $n\geq N_\varepsilon$ دلخواه داشته باشیم $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{یکشکل}} f(x), \qquad \left(\text{بر } U\right)$$

به شکل ۲.۹ توجه شود.



شکل ۲.۹: همگرایی یکشکل بر U

۴.۱.۹ تعریف.

فرض کنید $y=f(x)$ بر $S\subseteq\mathbb{R}$ تعریف شود. **نرم یکشکل** $f(x)$ بر S را بصورت زیر تعریف می‌کنیم: $\|f\|_S := \sup\{|f(x)|\,|x\in S\}$.

sup مخفف کلمهٔ Supremum سوپرموم به معنی حداکثر است. قرار داد است که اگر $f(x)$ بر S پیوسته باشد، آنگاه بجای sup از max (که مخفف Maximum می‌باشد) استفاده می‌گردد. بطور دقیق، سوپرموم مجموعهٔ A یعنی کوچکترین کران بالایی آن مجموعه. مثلاً $\sup[0;1]=\sup[0;1)=1$.

۵.۱.۹ قضیه.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ بر U تعریف شوند و $a\in\mathbb{R}$، آنگاه

۱) $\|f\|_U\geq 0$

۲) $\|f\|_U=0 \Rightarrow f\equiv 0 \left(\text{بر } U\right)$

۳) $\|af\|_U=|a|\,\|f\|_U$

۴) $\|f+g\|_U\leq\|f\|_U+\|g\|_U$

اثبات: چون به ازاء هر x ای $0\leq|f(x)|$ حکم (۱) بدیهی است. برای اثبات حکم (۲) توجه می‌کنیم که اگر $f\equiv$ بر U آنگاه بدیهی است که به ازاء هر $x\in U$ ای $|f(x)|=0$ و لذا $\|f\|_U=0$ بالعکس اگر $\|f\|_U=0$ آنگاه $\sup\{|f(x)|\,|x\in U\}$. پس به ازاء هر $x\in U$ ای

$$0\leq|f(x)|\leq\sup\{|f(x)||x\in U\}=0$$

و بنابراین $f(x)=0$.

برای اثبات (۳) توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \|af\|_U &= \sup\{|af(x)|\,|\,x\in U\} \\ &= |a|\sup\{|f_(x)|\,|\,x\in U\} \\ &= |a|\,\|f\|_U \end{aligned}$$

همچنین در مورد (۴) ملاحظه می‌گردد که چون $|a+b|\leq|a|+|b|$، پس

$$\begin{aligned} \|f+g\|_U &= \sup\{|f(x)+g(x)||x\in U\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|+|g(x)||x\in U\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|\,|\,x\in U\}+\sup\{|g(x)|\,|\,x\in U\} \\ &= \|f\|_U+\|g\|_U \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۶.۱.۹ قضیه.

شرط لازم و کافی برای اینکه دنبالهٔ تابعی $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ بر U به $y=f(x)$ همگرای یکشکل باشد آن است که به ازای هر $\varepsilon>0$، یک N_ε ای یافت گردد که به ازای هر $n>N_\varepsilon$ ای $\|f_n(x)-f(x)\|_U<\varepsilon$. به بیان دیگر

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{یکشکل}} f(x)\,, \qquad \left(\text{بر } U\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_U=0$$

اثبات: فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\alpha}\|f_n(x)-f(x)\|_U=0$. بنابراین به ازاء هر $\varepsilon>0$ ای یک N ای هست که اگر $n\geq N$ آنگاه $\|f_n(x)-f(x)\|_U<\varepsilon$، یا به طور معادل

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in U\}<\varepsilon$$

بنابراین، مطابق تعریف sup داریم

$$\forall\, x\in U \quad : \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

پس دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به طور یک شکل به $f(x)$ بر U همگرا است.

حال فرض کنیم دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ بر U به طور یک شکل به $f(x)$ همگرا باشد. پس به ازاء $\varepsilon>۰$ دلخواه N ای هست که به ازاء هر $n>N$ هر $n\in U$ ای $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. در نتیجه

$$\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in U\}<\varepsilon$$

پس بنابه تعریف sup، داریم

$$\|f_n(x)-f(x)\|_U=\sup\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in U\}<\varepsilon$$

و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\alpha}\|f_n(x)-f(x)\|_U=۰$. □

۷.۱.۹ مثال. ۱) دنبالهٔ $\{x^n\}_{n=۱}^{\infty}$ بر $U=[۰;۱/۲]$ همگرای یکشکل به $f(x)=۰$ است. زیرا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x^n-۰\|_U &= \lim_{n\to\infty}\sup\left\{x^n\,\middle|\,۰\le x\le\frac{۱}{۲}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^n=۰\end{aligned}$$

در حالی که بر $U=[۰;۱]$ همگرای یکشکل به تابع حد نقطه‌ای خود نیست؛ زیرا

$$\begin{aligned}f(x)\xrightarrow{\text{نقطه‌ای}}\lim_{n\to\infty}f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}x^n\\ &= \begin{cases}۰ & ۰\le x<۱ \ \text{اگر}\\ ۱ & x=۱ \ \text{اگر}\end{cases}\end{aligned}$$

و بعلاوه

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n-f(x)\|_U=\lim_{n\to\infty}\sup\{|x^n-f(x)|\,|\,۰\le x\le ۱\}$$

چون $|۱^n-f(۱)|=۰$ و $y=f(x)$ به ازای $x\neq ۰$ ها صفر است، بنابراین بجای عبارت بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}\sup\{x^n\,|\,۰\le x<۱\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n\to ۱^-}x^n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}۱=۱\end{aligned}$$

در نتیجه، همگرایی دنبالهٔ $\{f_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ به $y=f(x)$ یکشکل نیست.

مثال ۲) دنبالهٔ $\left\{\dfrac{۱}{۱+x^{۲n}}\right\}_{n=۰}^{\infty}$ بر $[۰;۱]$ همگرای یکشکل نیست (قسمت (۱) از مثال ۲.۱.۹). زیرا

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_U\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,۰\le x\le ۱\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\left\{\left|\frac{۱}{۱+x^{۲n}}-۱\right|\,\middle|\,۰\le x<۱\right\}\\ &\qquad\cup\left\{\left|\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right|\,\middle|\,x=۱\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\left\{\frac{x^{۲n}}{۱+x^{۲n}}\,\middle|\,۰\le x<۱\right\}\\ &\overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}\neq ۰\end{aligned}$$

تساوی (۱) را (با روشی همانند آنچه که در مثال (۱) بکار رفت) اثبات کنید.

با این حال اگر فرض شود $U\subseteq[۲;\infty)$، آنگاه دنباله تابعی مفروض بر U به صفر همگرای یکشکل می‌باشد.

مثال ۳) فرض کنید $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$. در این صورت، به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ ای

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n}\right|\\ &\le \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\xrightarrow{\text{نقطه‌ای}}۰,\qquad \left(\text{بر }\mathbb{R}\right)$$

بعلاوه، این همگرایی یکشکل است، زیرا

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_{\mathbb{R}}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-۰|\,|\,x\in\mathbb{R}\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\left\{\frac{|\sin(nx)|}{n}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sup\{|\sin(nx)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sup\{|\sin x|\,|\,۰\le x\le ۲\pi\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰\end{aligned}$$

مثال ۴) فرض کنید $f_n(x)=nx(۱-x)^n$ و $U=[۰;۱]$. در این صورت، اگر $x=۰$ یا $x=۱$، آنگاه $f_n(x)=۰$. اما اگر $x\in(۰;۱)$، آنگاه $۱>۱-x>۰$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}nx(۱-x)^n\\ &\overset{(۱)}{=} x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}\\ &\overset{(۲)}{=} x\lim_{y\to\infty}\frac{y}{a^y}\\ &\overset{\text{هـ}}{=} x\lim_{y\to\infty}\frac{۱}{a^y\ln a}=۰\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) فرض شده است $a = \frac{1}{1-x}$ و در (۲) از ۱.۳.۸ استفاده شده است. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} 0, \qquad \left(\text{بر } [0;1]\right)$$

اما این همگرایی یکشکل نیست، زیرا اگر $x_n = \frac{1}{n+1}$، آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\overset{(3)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{-1} \end{aligned}$$

که در (۳) از قضیهٔ ۱.۳.۸ استفاده شده است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x_n) - 0\|_U \geq e^{-1}$ و در نتیجه مخالف صفر است.

۸.۱.۹ قضیه. فرض کنید دنبالهٔ تابعی $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ بر U به $y = f(x)$ همگرای یکشکل است.

الف) اگر عاقبت $f_n(x)$ در $x_0 \in U$ پیوسته باشد، آنگاه $f(x)$ نیز در x_0 پیوسته است و بعلاوه

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

ب) اگر $f_n(x)$ بر $U \supseteq [a;b]$ به $f(x)$ همگرای نقطه‌ای بوده و $\{f'(x)\}$ بر $[a;b]$ همگرای یکشکل باشد و به ازای هر n ای f'_n بر $[a;b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ همگرای یکشکل است و $\lim_{n\to\infty} f'_n = f'$.

ج) اگر به ازای هز n ای f_n بر $[a;b]$ انتگرالپذیر بوده و $\{f_n\}$ بر $[a;b]$ به f همگرلی یکشکل باشد، آنگاه $f(x)$ نیز بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر است و بعلاوه

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

اثبات: الف) فرض کنیم $x_0 \in U$. چون به ازاء هر n ای $f_n(x)$ در x_0 پیوسته است، پس به ازاء هر $\varepsilon > 0$ ای یک $\delta > 0$ ای هست که اگر $|x - x_0| < \delta$ و $x \in U$، آنگاه

$$\left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

چون $f(x_0) = \lim_{n\to\alpha} f_n(x_0)$ پس به ازاء $\varepsilon > 0$ یک N ای هست که به ازاء هر $n \geq N_1$ ای $\left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \varepsilon/3$ چون $\{f_n\}$ همگرای یک شکل به f است، پس به ازاء $\varepsilon > 0$ یک $\mathbb{N}_2$ ای هست که به ازاء هر $n \geq N_2$ ای و هر $x \in U$ ای $\left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \varepsilon/3$. پس اگر $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$، $|x - x_0| < \delta$ و $x \in U$ داریم

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(x_0)\right| &= \left|f(x) - f_n(x) + f_n(x)\right. \\ &\quad \left. - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)\right| \\ &\leq \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| \\ &\quad + \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

اثبات ب) فرض کنیم $x_0 \in U$. در این صورت به دلیل همگرایی نقطه‌ای $\{f_n\}$ در $x = x_0$ به $f(x_0)$ به ازاء $\varepsilon > 0$ یک N_1 ای هست که به ازاء هر $n, m \geq N_1$ ای $\left|f_n(x) - f_m(x_0)\right| < 3/2$.
چون $\{f'_n\}$ به طور یک شکل بر U همگرا است، بنابراین به ازاء هر $\varepsilon > 0$ یک N_2 ای هست که به ازاء هر $m, n > N_2$ ای و هر $x \in [a,b]$ ای $\left|f'_n(x) - f'_m(x_0)\right| < \varepsilon/2(b-a)$. حال اگر $N = \max\{N_1, N_2\}$ و $m, n > N$ و $x \in [a,b]$ آنگاه

$$\begin{aligned} \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \left|f'_n(x) - f'_m(x)\right| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

گیریم $\varphi = f_n - f_m$ و $[t,x] \subseteq [a,b]$. در این صورت بنا به قضیهٔ لاگرانژ β ای هست که $t < \beta < x$ و

$$\varphi(x) - \varphi(t) = (x-t)\varphi'(\beta)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\left|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)\right| = \\ &= \quad \left|(x-t)(f'_n(\beta) - f'_m(\beta))\right| \\ &< \quad |x-t|\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

اگر $x, t \in [a;b]$ و $n, m \geq N$. اکنون، به ازاء هر $x \in [a,b]$ ای و هر $n, m \geq N$ ای داریم

$$\begin{aligned} \left|f_n(x) - f_m(x)\right| &= \left|f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0)\right. \\ &\quad \left. + f_m(x_0) - f_n(x_0) + f_m(x_0)\right| \\ &\leq \left|f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)\right| \\ &\quad + \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

و بنابراین $\{f_n\}$ بر $[a,b]$ همگرای یک شکل است.

چون مطابق فرض f'_n ها همه پیوسته‌اند و $\{f'_n\}$ به g همگرای یک شکل است. به ازاء هر $y \in [a;b]$ ای داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\alpha}\int_a^y f'_n(x)\,dx &= \int_a^y g(x)\,dx \\ \lim_{n\to\alpha}\{f_n(y) - f_n(a)\} &= \int_a^y g(x)\,dx \end{aligned}$$

ولی $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه‌ای است، وس $\lim_{n\to\alpha} f_n(y) = f(y)$ و $\lim_{n\to\alpha} f_n(a) = f(a)$ در نتیجه

$$\int_a^y g(x)\,dx = f(y) - f(a) \implies f'(y) = g(y)$$

پس $\lim_{n\to\alpha} f'(x) = f'(x)$ بر $[a,b]$.

اثبات ج) به ازاء $\varepsilon = ۱$ عددی مانند N هست که به ازاء هر $n \geq N$ و هر $x \in [a,b]$ ای $|f_n(x) - f(x)| < ۱$. در نتیجه

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f_n(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< |f_n(x)| + ۱ \end{aligned}$$

چون f_n انتگرال پذیر است، پس بر $[a,b]$ کراندار است. در نتیجه f نیز کراندار است. اکنون به ازاء $\varepsilon > ۰$ دلخواه یک N ای هست که اگر $n > N$ و $x \in [a;b]$، آنگاه $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \{f_n(x) - f(x)\}\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon \end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ $\int_a^b f_n(x)\,dx$ به $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا است. □

۹.۱.۹ مثال. ۱) مطابق تعریف $e^x := \lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n$.
به عنوان تمرین ثابت کنید که بر هر بازهٔ بستهٔ $[a;b]$ ای دنبالهٔ $\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n$ به تابع e^x همگرای یکشکل است. در نتیجه، چون همهٔ $f_n(x)$ ها پیوسته‌اند، پس e^x نیز پیوسته است. بعلاوه

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{n\to\infty} n\frac{۱}{n}\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{n-۱} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{-۱} = e^x \end{aligned}$$

مثال ۲) دنبالهٔ تابعی $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n = \left\{\sum_{k=۰}^{n} x^k\right\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} \frac{۱}{۱-x}, \qquad \left(\text{بر } (-۱;۱)\right)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که اگر $U = [-a;a] \subseteq (-۱;۱)$، آنگاه همگرایی بر U بصورت یکشکل می‌باشد

$$۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{۱-x}, \quad \left(\text{بر } [-a;a]\right)$$

بنابراین، با تعویض x به $-x$ داریم

$$۱ - x + x^۲ - \cdots + (-۱)^n x^n + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{x+۱}, \quad \left(\text{بر } [-a;a]\right)$$

و یا با تعویض x به $x^۲$ داریم

$$۱ - x^۲ + x^۴ - \cdots + (-۱)^n x^{۲n} + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{x^۲+۱}, \qquad \left(\text{بر } [-a;a]\right)$$

با مشتقگیری و انتگرالگیری، بر $U = [-a;a] \subseteq (-۱;۱)$ داریم

$$۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + (n+۱)x^n + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

$$۱ - ۲x + ۳x^۲ - \cdots + (-۱)^n(n+۱)x^n + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{(۱+x)^۲}$$

$$x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \cdots + (-۱)^n\frac{x^{n+۱}}{n+۱} + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \ln(x+۱)$$

$$x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots + (-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \arctan x$$

۱۰.۱.۹ قضیه (آزمون کوش). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای بر U است. شرط لازم و کافی برای اینکه $\{f_n\}$ بر U به تابعی f همگرای یک شکل باشد این است که به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ یک N ای هست که به ازاء هر $n,m > N$ ای و هر $x \in U$ ای $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

اثبات: فرض کنیم $\{f_n\}$ بر U به تابعی f همگرای یک شکل باشد. پس به ازاء $\varepsilon > ۰$ یک N ای هست که به ازاء هر $n \geq N$ و هر $x \in U$ ای $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon/۲$. اکنون به ازاء هر $n,m \geq N$ و هر $x \in U$ داریم

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) - f_n(x) + f(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \end{aligned}$$

حال فرض کنیم به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ یک N ای هست که به ازاء هر $m,n \geq N$ و هر $x \in U$ ای $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. به ازاء هر $x \in U$ ثابت، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ در شرط کوشی صدق می‌کند و لذا به عددی مانند $f(x)$ همگرا است. نشان می‌دهیم که دنبالهٔ f_n به تابع f با ضابطهٔ $x \mapsto f(x)$ همگرای یک شکل است. اکنون با ثابت گرفتن $m \geq N$ و میل دادن n به α در شرط $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ نتیجه می‌گیریم که

$$\left|f_m(x) - \lim_{n\to\infty} f(x)\right| < \varepsilon$$

یا $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. و برهان تمام است. □

۱۱.۱.۹ تمرین. در مورد همگرایی نقطه‌ای و همگرایی یکشکل دنباله‌های داده شده بر مجموعه‌های داده شده را بررسی کنید:

$$\begin{array}{lll}
1) & f_n(x) = x^n - x^{n+1}, & U = [0;1], \\
2) & f_n(x) = x^n - x^{n+1}, & U = \left[0;\dfrac{1}{2}\right], \\
3) & f_n(x) = x^n - x^{2n}, & U = [0;1], \\
4) & f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}, & U = (0;+\infty), \\
5) & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}, & U = [0;1], \\
6) & f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, & U = \left[0;\dfrac{1}{2}\right], \\
7) & f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, & U = [0;1], \\
8) & f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}, & U = [0;1], \\
9) & f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}, & U = (1;+\infty), \\
10) & f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}, & U = \mathbb{R}, \\
11) & f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}, & U = \mathbb{R}, \\
12) & f_n(x) = \arctan(nx), & U = (0;+\infty), \\
13) & f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1), & U = [1;a],\ 1 < a,
\end{array}$$

۱۵) نشان دهید که $\left\{-nxe^{-nx^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0;1]$ همگرای یکشکل نیست. بعلاوه، اگر $f(x)$ حد نقطه‌ای سری تابعی داده شده باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

۱۶) نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^3 \frac{n+\sin x}{3n+\cos^2 x}\,dx = 1$$

(راهنمایی: از همگرایی یکشکل دنبالهٔ تابعی داخل انتگرال بر مجموعهٔ $[0;3]$ استفاده شود.)

۲.۹ سری تابعی

دراین بخش به تعمیم مفهوم سری عددی می‌پردازیم. سری تابعی یک نوع بخصوص از دنباله‌های تابعی است.

۱.۲.۹ تعریف. فرض کنید $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ یک دنبالهٔ تابعی با دامنهٔ D باشد. دنبالهٔ تابعی جدیدی به صورت:

$$\begin{aligned}
S_a(x) &= f_a(x), \\
S_{a+1}(x) &= f_a(x) + f_{a+1}(x), \cdots \\
S_n(x) &= \sum_{k=a}^{n} f_k(x),
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. این دنباله را سری تابعی با دنبالهٔ مولد $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ نامیده و با نماد $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ نشان می‌دهیم.

چون هر سری تابعی یک دنبالهٔ تابعی است، پس همهٔ مطالب در بخش قبل به این دستهٔ بخصوص نیز ربط پیدا می‌کند. از جمله همگرایی یکشکل.

۲.۲.۹ قضیه. فرض کنید سری تابعی $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f(x)$ بر C به $y = f(x)$ همگرای نقطه‌ای است. شرط لازم و کافی برای همگرایی یکشکل این سری تابعی آن است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک N_ε ای یافت گردد که به ازای هر $n > N_\varepsilon$ ای

$$\|\sum_{k=a}^{n} f_k(x) - f(x)\|_U < \varepsilon$$

به بیان دیگر، وقتی و تنها وقتی

$$\sum_{n=a}^{\infty} f_n \xrightarrow{\text{یکشکل}} f(x), \qquad \left(\text{بر } U\right)$$

که $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum\limits_{k=a}^{n} f_k(x) - f(x)\right\|_U = 0$.

این نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ ۶.۱.۹ می‌باشد. □

۳.۲.۹ قضیه. اگر $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ بر U به $y = f(x)$ همگرای یکشکل باشد، آنگاه

الف) اگر همهٔ $f_n(x)$ ها در $x_0 \in U$ پیوسته باشند، آنگاه $f(x)$ نیز در x_0 پیوسته است.

ب) اگر همهٔ $f_n(x)$ ها در $x_0 \in U$ پیوسته باشند، آنگاه $f(x)$ نیز در x_0 مشتق‌پذیر است و بعلاوه $f'(x_0) = \sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n'(x_0)$.

ج) اگر همهٔ $f_n(x)$ ها بر $U \supseteq [\alpha;\beta]$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f(x)$ نیز بر $[\alpha;\beta]$ انتگرالپذیر می‌باشد و بعلاوه

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{n=a}^{\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx$$

این نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ ۵.۱.۹ می‌باشد. □

چون هر سری تابعی در هر نقطه‌ای یک سری عددی است، پس تمام آزمونهای همگرایی سریهای عددی را می‌توان به صورت نقطه‌ای برای سریهای تابعی تعمیم داد. اما به شکل فراگیر چطور؟

۴.۲.۹ آزمون کوشی. شرط لازم و کافی برای اینکه سری تابعی $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ بر $U = [a;b]$ همگرای یکشکل باشد آن است که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک N_ε ای یافت گردد که به ازای هر $n \geq N_\varepsilon$ و $m \geq N_\varepsilon$ و $x \in U$ داشته باشیم $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$.
به بیان دیگر، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک N_ε ای یافت می‌گردد که به ازای هر $n \geq N_\varepsilon$ و هر $m \geq N_\varepsilon$ ای $\left\|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right\|_U < \varepsilon$.

این نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ کوشی برای دنباله‌های تابعی می‌باشد. □

۵.۲.۹ مثال. ۱) سری تابعی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را در نظر بگیرید. اگر $U = [a;b] \subseteq \mathbb{R}$، آنگاه با فرض $C = \max\{|a|,|b|\}$، $N = ۲([c]+۱)$، $n \geq N$ و $m \geq N$ داریم

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!}\right| &\leq \sum_{k=n}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} \frac{C^k}{k!} \\
&= \frac{C^n}{n!} \sum_{k=n}^{m} \frac{C^{k-n}}{(n+۱)(n+۲)\cdots k} \\
&= \frac{C^n}{n!} \sum_{k=n}^{m} \frac{C}{n+۱} \times \frac{C}{n+۲} \times \cdots \times \frac{C}{k} \\
&< \frac{C^n}{n!} \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{k-n} \\
&= \frac{(۲C)^n}{n!} \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{k} \\
&= \frac{(۲C)^n}{n!} \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{k} \\
&< \frac{(۲C)^n}{n!} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}
\end{aligned}$$

پس اگر فرض شود

$$\log_۲\left(\frac{\varepsilon(۲C)^n}{N!}\right) + ۱ < n$$

آنگاه $\left\|\sum_{k=n}^{m} \frac{x^k}{k!}\right\|_U < \varepsilon$. بنابراین، $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ بر U همگرای یکشکل است. فرض کنیم بر U داشته باشیم $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
در این صورت

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{nx^{n-۱}}{n!} \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)
\end{aligned}$$

بنابراین، $\frac{df(x)}{dx} = f(x)$، $\frac{df(x)}{f(x)} = dx$ و در نتیجه $\ln(f(x)) = x + \ln A$، که A عددی ثابت است. بنابراین، $f(x) = Ae^x$. اما $f(۰) = ۱$، پس $Ae^\circ = ۱$ یا $A = ۱$. در نتیجه $f(x) = e^x$. یعنی ثابت شد که

$$e^x \xrightarrow{\text{یکشکل}} ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \left(\text{بر } [a;b]\right)$$

مثال ۲) سری تابعی $\sum_{n=۰}^{\infty} x^۲ e^{-nx}$ را بر $U = [۰;a]$ در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} x^۲ e^{-kx}\right| &= \sum_{k=n}^{m} x^۲ e^{-nx} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m} a^۲ e^{-ka} \\
&= a^۲ e^{-na} \frac{۱-(e^{-a})^{m-n+۱}}{۱-e^{-a}} \\
&< \frac{a^۲}{۱-e^{-a}} (e^{-a})^n < \varepsilon
\end{aligned}$$

پس اگر

$$N > \frac{۱}{a} \ln\left(\frac{a^۲}{\varepsilon(۱-e^{-a})}\right)$$

آنگاه

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x^۲ e^{-kx}\right\|_U < \varepsilon$$

و در نتیجه $\sum_{n=۰}^{\infty} x^۲ e^{-nx}$ همگرای یکشکل می‌باشد. بعلاوه

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \sum_{n=۰}^{\infty} x^۲ e^{-nx} \\
&= x^۲ \sum_{n=۰}^{\infty} (e^{-x})^n \\
&= \frac{x^۲}{۱-e^{-x}}
\end{aligned}$$

۶.۲.۹ تمرین. فرض کنید تعریف کنیم

$$\begin{aligned}
S(x) &:= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}, \\
C(x) &:= \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}.
\end{aligned}$$

نشان دهید که اگر $U = [a;b] \subseteq \mathbb{R}$، آنگاه S بر U همگرای یکشکل است و C نیز بر U همگرای یکشکل می‌باشد. بعلاوه نشان دهید که S و C توابع مشتق‌پذیرند و $S' = C$ و $C' = S$.
آیا می‌توان گفت $S(x) = \sin x$ و $C(x) = \cos x$؟ چرا؟

۳.۹ آزمونهای همگرایی یکشکل

۱.۳.۹ آزمون M–وایرشتراس. فرض کنید $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ یک سری با جملات مثبت و همگرا باشد و به ازای هر $x \in U$ ای $|f_n(x)| \leq x_n$، در این صورت $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ بر U همگرای مطلق و نیز همگرای یکشکل است.

اثبات: چون سری $\sum_{n=a}^{\infty} x_n$ همگرا است، در شرط کوشی صدق می‌کند. پس به ازاء $\varepsilon > 0$ یک N ای هست که به ازاء هر $m, n \geq N$ ای $\left|\sum_{i=n}^{m} x_i\right| < \varepsilon$. به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=n}^{m} f_i\right\|_U &\leq \sum_{i=n}^{m} \|f_i\|_U \\
&= \sum_{i=n}^{m} \sup\{|f_i(x)| \mid x \in U\} \\
&< \sum_{i=n}^{m} x_i < \varepsilon
\end{aligned}$$

پس $\{f_n\}$ در شرط کوشی بر U صدق می‌کند و بنابراین بر U همگرای یک شکل است. □

۲.۳.۹ مثال. ۱) سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ بر $U = [-1;1]$ همگرای یکشکل است، زیرا اگر $-1 \leq x \leq 1$ و $f_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$، آنگاه

$$\begin{aligned}
f_n'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^{n-1} - x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \ , \ x = 1
\end{aligned}$$

بنابراین $f_n(x) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ بر U. پس با فرض

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

و با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} x_n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1
\end{aligned}$$

حکم مورد نظر از آزمون M–وایرشتراس نتیجه می‌گردد.

مثال ۲) سری تابعی همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است، زیرا اگر $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$، آنگاه $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$. اما سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (سری توانی با $a = 2$) همگرا است. پس بنابه آزمون M–وایرشتراس همگرایی یکشکل سری تابعی مورد نظر بر $\mathbb{R}$ را داریم.

توجه شود که در اینجا دامنهٔ همگرایی یکشکل، بازهٔ بسته نیست!

۳.۳.۹ تمرین. همگرایی یکشکل سریهای تابعی زیر را به کمک آزمون M–وایرشتراس نشان دهید:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \qquad U = (-2; +\infty),$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \qquad U = [0; +\infty),$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right), \qquad U = \mathbb{R}.$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \qquad U = (0; +\infty),$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} x^n, \qquad U = \left[\frac{1}{2}; 2\right],$

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)x)}{n(n+1)}, \qquad U = \mathbb{R}.$

۷) نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ بر $U = [0;1]$ همگرای یکشکل است، ولی این موضوع را از آزمون وایرشتراس نمی‌توان نتیجه گرفت.

۴.۳.۹ آزمون آبل. اگر سری تابعی $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ بر U همگرای یکشکل باشد و دنبالهٔ $\{g_n(x)\}_{n=b}^{\infty}$ بر U کراندار یکشکل باشد و به ازای هر $x \in U$ ای دنبالهٔ عددی $\{g_n(x)\}_{n=b}^{\infty}$ یکنوا باشد، آنگاه سری تابعی $\sum_{n=c}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ همگرای یکشکل است، که $c \geq \max\{a, b\}$.

۵.۳.۹ تعریف. دنبالهٔ $\{f_n(x)\}_{n=a}^{\infty}$ را در صورتی **کراندار یکشکل** بر U گوئیم که به ازای یک عدد مثبت $M > 0$ ای و به ازای هر $x \in U$ ای $|f_n(x)| < M$.

۶.۳.۹ آزمون دریکله. اگر سری تابعی $\sum_{n=a}^{\infty} f_n(x)$ بر U کراندار یکشکل باشد، دنبالهٔ عددی $\{g_n(x)\}_{n=b}^{\infty}$ به ازای هر $x \in U$ ای یکنوا باشد و دنبالهٔ تابعی $\{g_n(x)\}_{n=b}^{\infty}$ بر U همگرای یکشکل به تابع صفر باشد، آنگاه سری تابعی $\sum_{n=c}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ نیز بر U همگرای یکشکل خواهد بود، که $c \geq \max\{a,b\}$.

۷.۳.۹ مثال. ۱) سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ بر مجموعهٔ $U = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ همگرای یکشکل است، زیرا با فرض کردن $f_n(x) = \sin(nx)$ و $g_n(x) = \frac{1}{n}$ داریم: دنبالهٔ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ بر U به صفر همگرای یکشکل است و اکیداً نزولی است. بعلاوه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بر U کراندار یکشکل است، چرا که

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right) \times \sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|} \leq \sqrt{2}$$

پس بنابه آزمون دریکله، سری تابعی

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

بر U همگرای یکشکل است. همین مطلب را برای هر زیر مجموعهٔ $[a;b]$ از مجموعهٔ $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ می‌توان ثابت کرد.

مثال ۲) سری تابعی $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ بر $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ همگرای یکشکل است، زیرا با فرض $g_n(x) = \frac{\sin(x/3^n)}{x/3^n}$ و $f_n(x) = x(2/3)^n$ داریم: دنبالهٔ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ بر $U = [a;b]$ کراندار یکشکل است و نزولی و بعلاوه سری تابعی $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ به $3x$ بر $[a;b]$ همگرای یکشکل است (بنابه آزمون M−وایرشتراس). بنابراین، بنابه آزمون آبل، سری تابعی

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

بر U همگرای یکشکل می‌باشد.

۸.۳.۹ تمرین. به کمک آزمونهای آبل و دریکله، همگرایی یکشکل سریهای تابعی داده شده را بر مجموعه‌های مشخص شده نشان دهید:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \qquad U = [a;b] \subseteq \mathbb{R},$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \qquad U = [0; 2\pi],$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, \qquad U = \mathbb{R},$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, \qquad U = [0; +\infty],$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, \qquad U = [a;b] \subseteq \mathbb{R}$

در هر مورد، دامنهٔ همگرایی یکشکل سری داده شده رامشخص کنید:

۶) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n,$ ۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n},$

۸) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2},$ ۹) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$

۱۰) فرض کنید $\alpha > 0$. نشان دهید که سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1 + nx^2)}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است.

(راهنمایی: بیشترین مقدار $f_n(x)$ در $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ می‌باشد.)

۱۱) نشان دهید که سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1 + nx^2)^n}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است.

۱۲) نشان دهید که سری تابعی

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \cdots$$

بر $[0;1]$ همگرای یکشکل نیست. (راهنمایی: دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید.)

۴.۹ سری توان

نوع بخصوصی از سریهای تابعی بنام «سریهای توانی» کاربردهای فراوانی در مسایل کاربردی ریاضیات دارد. از جمله در حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها از این دستهٔ بخصوص از سریها استفادهٔ فراوانی می‌گردد. شاید دلیل آن این باشد که سریهای مذکور خواص متعددی دارند و بنابراین کار با آنها ساده‌تر می‌باشد.

۱.۴.۹ تعریف. سری تابعی بشکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ را **سری توان** می‌نامند. اگر مقدار حد $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ و یا حد $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ موجود باشد، عکس آن را شعاع همگرایی سری توان نامیده و با نماد R نشان می‌دهیم.

۲.۴.۹ قضیه. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان با شعاع همگرایی R باشد، آنگاه

الف) اگر $|x-x_0|<R$، آنگاه سری توان به ازای x همگرای مطلق است.

ب) اگر $R<|x-x_0|$، آنگاه سری توان به ازای x واگرا است.

ج) اگر $U=[a;b]\subseteq(x_0-R;x_0+R)$، آنگاه سری توان بر U همگرای یکشکل است.

۳.۴.۹ قضیهٔ یکتایی سری توان. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ بر بازهٔ $(-R;R)$ به تابع $y=f(x)$ همگرا باشند (که $0<R$). در این صورت به ازای هر n ای $a_n=b_n$.

۴.۴.۹ قضیهٔ اعمال اصلی سریهای توان. فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ سری توانی با شعاع همگرایی R باشد که به $y=f(x)$ همگرا است و $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ سری توانی با شعاع همگرایی r باشد که به $y=g(x)$ همگرا می‌باشد و a عددی حقیقی است. در این صورت

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} aa_nx^n$ با شعاع همگرایی R به $y=af(x)$ همگرا است.

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ با شعاع همگرایی $\min\{R,r\}\le$ به $y=f(x)+g(x)$ همگرا است.

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n$ با شعاع همگرایی $\min\{R,r\}\le$ به $y=f(x)g(x)$ همگرا است.

۴) اگر بجای x در $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ از $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ استفاده شود، $|a_0|<r$ و $U=\left\{x \,\middle|\, |x|<R,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n|x|^n<r\right\}$، آنگاه سری حاصل بر U همگرا خواهد بود.

۵.۴.۹ قضیهٔ بسط تیلور. فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ سری توانی با شعاع همگرایی R باشد که به $y=f(x)$ همگرا است و $-R<a<R$. آنگاه به ازای هر x ای که $|x-a|<R$ سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ نیز به $y=f(x)$ همگرا می‌باشد.

۶.۴.۹ مثال. ۱) سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را در نظر بگیرید. شعاع همگرایی این سری توان R برابر یک است. چرا که، $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$. پس اگر $|x|<1$، آنگاه سری همگرا است و اگر $1<|x|$، آنگاه سری واگرا است. اما، اگر $|x|=1$، آنگاه $x=\pm1$ و هر دو سری $\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ واگرایند. پس دامنهٔ همگرایی سری توان عبارت است از $(-1;1)$. بعلاوه، اگر $[a;b]\subseteq(-1;1)$، آنگاه

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{1}{1-x} \quad \left(\text{بر } [a;b]\right)$$

مثال ۲) سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ را در نظر بگیرید. چون

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}\right|=0$$

. پس شعاع همگرایی سری ∞ است. یعنی این سری بر $\mathbb{R}$ همگرای یکشکل است. فرض کنیم $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. در این صورت $f(0)=1$ و

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

در نتیجه $f(x)=e^x$. یعنی، اگر $a<b$ دلخواه باشند، آنگاه

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} e^x, \quad \left(\text{بر } [a;b]\right)$$

همچنین

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\end{aligned}$$

مثال ۳) سری توان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$$

را در نظر بگیرید. چون

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+(-2)^{n+1})/(n+1)}{(3^n+(-2)^n)/n}\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\right)=3\end{aligned}$$

پس $R=\frac{1}{3}$. بنابراین اگر $|x+1|<\frac{1}{3}$، آنگاه سری همگرا است و اگر $\frac{1}{3}<|x+1|$، آنگاه سری واگرا است. بعلاوه، اگر $|x+1|=\frac{1}{3}$، آنگاه $x+1=\pm\frac{1}{3}$. اگر $x+1=\frac{1}{3}$، آنگاه سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+(\frac{-2}{3})^n)$ را داریم که واگرا است، زیرا

$\frac{1}{n}(1+(\frac{-2}{3})^n)/\frac{1}{n} = 1$ و سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگرا است.

اما اگر $x+1 = \frac{-1}{3}$، آنگاه سری عددی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)$$

را داریم که این نیز واگرا است، زیرا یک سری نوسانی با جملات غیر نزولی است (چرا؟). بنابراین دامنهٔ همگرایی سری $|x+1| < \frac{1}{3}$ یا $\left(\frac{-4}{3};\frac{-2}{3}\right)$ می‌باشد.

مثال ۴) معادلهٔ دیفرانسیل $\varepsilon := y'' + xy' + y = 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک جواب آن باشد (یعنی در معادله صدق کند). پس باید

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n\right)x^n + 2a_2 + a_0 = 1$$

بنابراین $2a_2 + a_0 = 1$ و به ازای هر $n \geq 1$ ای

$$(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \\ a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{8}(1-a_0), \\ a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{15}a_1, \\ \vdots \end{cases}$$

پس در مجموع داریم

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}(1-a_0) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n \times n!}(1-a_0) \\ a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}a_1 \\ &= \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}a_1 \end{aligned}$$

برای محاسبهٔ شعاع همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ توجه داریم که برای اعداد زوج

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|} \\ &= \frac{\sqrt[2n]{|1-a_0|}}{2(\sqrt[n]{n!})^{1/2}} = 0 \end{aligned}$$

و برای اعداد فرد

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} \\ &= \frac{\sqrt[2n+1]{|a_1|}}{\sqrt[2n+1]{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین، در هر صورتی $R=\infty$. پس سری بر کل $\mathbb{R}$ همگرا است. پس در مجموع جواب معادله عبارتست از

$$f(x) = (1-a_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\times n!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

مثال ۵) یکی از روشهای تولید سریهای توان، بسط تیلور است. بعنوان مثال می‌دانیم که بسط تیلور مرتبهٔ n ام تابع $f(x)=\sin x$ در نقطهٔ $x=0$ برابر است با

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

اکنون می‌پرسیم که آیا می‌توان نوشت

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

برای پاسخ به این مسئله توجه می‌کنیم که شعاع همگرایی این سری توان برابر ∞ است و در نتیجه تساوی بالا بر کل $\mathbb{R}$ برقرار می‌باشد، زیرا

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n+1]{(2n+1)!}} = 0 \end{aligned}$$

مثال ۶) مقدار سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ را محاسبه کنیم.

حل. برای این منظور انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1} \\ &= \lim_{x\to 1-}\int_0^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{3n}\right\}dx \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1-}\int_0^x\frac{dx}{1+x^3} \\ &= \lim_{x\to 1-}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right] \\ &= \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قسمت (۲) از ۹.۱.۹ استفاده شده است.

مثال ۷) تابع حد نقطه‌ای سری توان $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(n+۱)(n+۳)}$ را بدست آورید.

حل. در قسمت (۲) از ۹.۱.۹ نشان دادیم که

$$۱-x+x^۲-\cdots+(-۱)^n x^n+\cdots \xrightarrow{\text{یکشکل}} \frac{۱}{x+۱}, \qquad \left(\text{بر } (-۱;۱)\right)$$

اکنون از طرفین این رابطه نسبت به x و بر بازهٔ $[۰;۱]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{n+۱}}{n+۱} \xrightarrow{\text{یکشکل}} x\ln(x+۱), \quad \left(\text{بر } (-۱;۱]\right)$$

که به ازای $x=۱$ به $\ln ۲$ همگرا است و به ازای $x=-۱$ (برابر سری هارمونیک است و بنابراین) واگرا می‌باشد. حال دو طرف تساوی بدست آمده را در x ضرب نموده و بدست می آوریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{n+۲}}{n+۱} \xrightarrow{\text{یکشکل}} x\ln(x+۱), \quad \left(\text{بر } (-۱;۱]\right)$$

اکنون از تساوی بدست آمده بر بازهٔ $[۰;x]$ (به کمک قاعدهٔ جزء به جزء) انتگرال می‌گیریم. در نتیجه به ازای هر $x\in(-۱;۱]$ ای

$$\frac{۱}{۲}(x^۲-۱)\ln(x+۱)-\frac{x^۲}{۴}+\frac{x}{۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{n+۳}}{(n+۱)(n+۳)}.$$

حال کافی است که طرفین را بر $x^۳$ تقسیم نمائیم و سپس بجای x، $x^۲$ را قرار بدهیم. در نتیجه به ازای هر $x\in(-۱;۰)\cup(۰;۱)$ ای

$$\frac{x^۴-۱}{۲x^۶}\ln(x^۲+۱)-\frac{۱}{۴x^۲}+\frac{۱}{۲x^۴}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(n+۱)(n+۳)}.$$

۷.۴.۹ تمرین. شعاع همگرایی و دامنهٔ همگرایی هر یک از سریهای توان زیر را بدست آورید:

۱) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{n^۳}$, ۲) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲}x^n$,

۳) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{a^n}x^n$, $(a>۱)$, ۴) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(n!)^۲}{(۲n)!}x^n$,

۵) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^۲}\right)x^n$, ۶) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲n+۱}\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^n$,

۷) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$, ۸) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$,

۹) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(۳+(-۱)^n)^n}{n}x^n$, ۱۰) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$,

۱۱) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{-n^۲}e^{-nx}$,

۱۲) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{m(m-۱)\cdots(m-n+۱)}{n!}x^n$,

بسط مک لورن هر یک از توابع زیر را یافته، سپس شعاع همگرایی سریهای توان حاصله را محاسبه کنید:

۱۳) $f(x)=a^x$, ۱۴) $f(x)=\cos x$,

۱۵) $f(x)=\sinh x$, ۱۶) $f(x)=\cosh x$,

۱۷) $f(x)=\arctan x$, ۱۸) $f(x)=\arcsin x$,

۱۹) $f(x)=\sin^۲ x$, ۲۰) $f(x)=e^{-x^۲}$,

۲۱) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-۲x}}$, ۲۲) $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\right)$,

۲۳) $f(x)=\frac{x}{۱+x-۲x^۲}$, ۲۴) $f(x)=\frac{x}{(۱-x)^۲}$,

۲۵) $f(x)=(۱+x)e^{-x}$, ۲۶) $f(x)=e^x\cos x$.

حد مجموع سریهای زیر را محاسبه کنید:

۲۷) $۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots$

۲۸) $x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\cdots$

۲۹) $\frac{x}{۱\times ۲}+\frac{x^۲}{۲\times ۳}+\frac{x^۳}{۳\times ۴}+\cdots$

۳۰) $x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\cdots$

۳۱) نشان دهید که سری توان $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^۲}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+y'-y=۰$ صدق می‌کند.

۳۲) نشان دهید که سری توان $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۴n}}{(۴n)!}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(۴)}=y$ صدق می‌کند.

هر یک از تساویهای زیر را ثابت نموده و سپس دامنهٔ برقراری هر یک را بدست آورید:

۳۳) $\arcsin x = x+\frac{۱}{۲.۳}x^۳+\frac{۱\times ۳}{۲\times ۴\times ۵}x^۵+\frac{۱\times ۳\times ۵}{۲\times ۴\times ۶\times ۷}x^۷+\cdots$

۳۴) $\sinh x = x+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}+\cdots$

۳۵) $\cosh x = ۱+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots+\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}+\cdots$

۳۶) $\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)=۲\left(x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots+\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}+\cdots\right)$

۳۷) در صورتی که S_n مجموع توان دوم n عدد طبیعی ۱ تا n باشد، نشان دهید

$$\frac{S_1}{1!}+\frac{S_2}{2!}+\cdots+\frac{S_n}{n!}+\cdots=\frac{17}{6}e$$

(راهنمایی: نشان دهید که حکم مطرح شده معادل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n!}=17e$$

است و سپس از روشی شبیه به قسمت (۷) از ۶.۴.۹ استفاده نمائید. با سری توان $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ شروع کنید.)

۳۸) فرض کنید p و q اعداد صحیحند، در این صورت نشان دهید که

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}-\frac{1}{p+3q}+\cdots$$

۳۹) نشان دهید که اگر $-1<x<1$، آنگاه

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

کتاب‌نامه

[1] Adams, R. A., *Calculus of Several Variables*, Addison Wesley, Canada, 2000.

[2] Adler, M., *Lectures on integration of Several Variables (Using Differential Forms)*, Internet Version, URL: `http://www.physics.nus.edu.sg/~phyteoe/teaching/mm4`

[3] Agarwal, D. C., *Advanced Integral Calculus*, Krishna Prakashan Media Ltd., India, 1997.

[4] Apostel, T. M., *Calculus*, 2 vols., Blaisdell Pub., 1969.

[5] Buck, R. C., *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1978.

[6] Udriste, C. and Balan, V., *Analytic and Differential Geometry*, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2000.

[7] Budak, B. M. and Fomin, S. V., *Multiple Integrals, Field Theory and Seies*, Mir Pub., Moscow, 1978.

[8] Cain, G. and Herod, J., *Multivariable Calculus*, Internet Version URL: `http://www.math.gatech.edu/~cain/notes/calculus.html`

[9] Chen, W. , Linear Algebra, URL: `http://www.maths.mq.edu.au/~wchen/In.html`

[10] Chen, W. , Multivariable and Vector Analysis, URL: `http://www.maths.mq.edu.au/~wchen/In.html`

[11] Davis, H. F. and Snider, A. D., *Introduction to Vector Analysis*, Wm. C. Brown, New Delhi, 1988.

[12] Dieudonne, J., *Linear Algebra and Geometry*, Hermann, Paris, 1969.

[13] Douglass, S. A., *Introduction to Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Massachusetts, 1996.

[14] Dorofeev, G., Potapov, M. and Rozov, N., *Elementary Mathematics*, Mir Pub., Moscow, 1988.

[15] Gelbaum, B. R., and Olmsted, J. M. H., *Theorem and Conterexamples in Mathematics*, Springer Verlag, New York, 1990.

[16] Garvan, F., *The Maple Book*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2002.

[17] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, EPrentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[18] Hardy, G. H., *A Course Pure Mathematics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1948.

[19] Ilyn, V. A. and Pozniak, E. G., *Linear Algebra*, Mir Pub., Moscow, 1986.

[20] Ilyn, V. A. and Pozniak, E. G., *Foundamental of Mathematical Analisis*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1982.

[21] Israel, R. B. , *The Maple Calculus*, Addison Wesley, New York, 1996.

[22] Kay, D. C., *Tensor Calculus*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1988.

کتاب‌نامه

[23] Klambauer, G., *Aspects of Calculus*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1986.

[24] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Pub., New York, 1956.

[25] Kurosh, A., *Higher Algebra*, Mir Pub., Moscow,

[26] Lang, S., *A First Course in Calculus*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1986.

[27] Lang, S., *Calculus of Several Variables*, U.T.M., Springer Verlag, New York, 1987.

[28] Landesman, E. M. and Hestenes, M. R., *Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice-Hall, New Iersey, 1992.

[29] Livesley, R. K., *Mathematical Methods for Engineers*, John Wiley & Sons, Canada, 1989.

[30] Loomis, L. H. and Sternberg, S., *Advanced Calculus*, Jnes and Bartlett Pub., Boston, 1990.

[31] Maron, I. A., *Problems in Calculus of One Variable*, Mir Pub., Moscow, 1988.

[32] Myskis, A. D., *Introductory Mathematics for Engineers*, Mir Pub., Moscow, 1978.

[33] Nikolski, S. M., *A Course of Mathematical Analisis*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1987.

[34] Piskunov, N., *Differential Calculus and Integral Calculus*, 2 vols., Mir Pub., Moscow, 1981.

[35] Pogorelov, A., *Geometry*, Mir Pub., Moscow, 1987.

[36] Olver, P. and Shakiban, C., *Applied Mathematics*, Lecture Notes, Preprint, 2000.

[37] Potapov, M. K., Alexandrov, V. V. and Pasichenko, P. I., *Algebra and Analysis of Elementary Functions*, Mir Pub., Moscow, 1987.

[38] Shakarchi, R., *Problem and Solutions for Undergraduate Analysis*, Springer Verlag, New York, 1998.

[39] Spigle, M. R., *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1959.

[40] Spivak, M., *Calculus on Mnifolds*, New york, Benjamin, 1965.

[41] Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., *Challenging Mathematical Problems*, 2 vols., San Fransisco, 1964.

[۴۲] شهشهانی، س.، ریاضی ۱، دانشگاه صنعتی شریف، پیش از چاپ، تهران، ۱۳۸۰.

[۴۳] شهشهانی، س.، ریاضی ۳، دانشگاه صنعتی شریف، پیش از چاپ، تهران، ۱۳۸۰.

[۴۴] نجفی‌خواه، م.، آمادگی برای امتحان ریاضی ۱، بهمن برنا، تهران، ۱۳۸۰.

[۴۵] نجفی‌خواه، م.، آمادگی برای امتحان ریاضی ۲، بهمن برنا، تهران، ۱۳۷۹.

[۴۶] دمیدویچ، ب. پ.، مجموعهٔ مسایل آنالیز ریاضی، میر مسکو، تهران، ۱۹۷۹.

[۴۷] دمیدویچ، ب. پ.، تمرینات و مسایل آنالیز ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، امیر کبیر، تهران، ۱۳۶۳.

فهرست الفبایی

فهرست الفبایی

فهرست الفبایی