تحلیل جبری معادلات موج در فضای هذلولوی

مهدی نجفی خواه، امیرحسام زعیم

۱۳ اسفند ۱۳۸۸

چکیده

در این مقاله معادله موج در فضای هذلولوی بررسی شده است. سپس با مشخص کردن جبر لی تقارنهای این معادله به دسته بندی کامل زیرجبرهای آن می پردازیم.

لغات کلیدی: معادله موج، جبر لی تقارنها

۱ مقدمه

یکی از مهمترین کاربردهای گروه لی تقارنهای یک معادله دیفرانسیل، کلاسه بندی کامل تغییر متغیرهای موجود جهت کاهش مرتبه معادله است. تقارنها و کاهش های بسیاری از معادلات مهم با متریک زمینه مسطح قبلا مورد بررسی قرار گرفته اند.[۵، ۶] همچنین مساله کلاسه بندی برای تعدادی از معادلات موج روی فضاهای مسطح نیز به طور کامل بیان شده است. [۶، ۱، ۳، ۴، ۸، ۱۱] بررسی تقارنها و کاهش های معادله موج با متریک زمینه $ds^۲ = dt^۲ - dx^۲ - sin^۲(x)dy^۲$ روی فضای $S^۲ \times R$ نیز در [۲] مطالعه شده است. در این مقاله به کلاسه بندی تقارنها و کاهشهای مختلف معادله موج با متریک زمینه با انحنای برشی ثابت منفی روی فضای $R \times R \times R^+$ که به فضای هذلولوی مشهور است، می پردازیم.

$$t^۲ u_{xx} + t^۲ u_{yy} + ۵tu_t + t^۲ u_{tt} = ۰ \qquad (۱)$$

برای کلاسه بندی کامل کاهشهای معادله ابتدا باید به کلاسه بندی زیرجبرهای جبر لی تقارنهای معادله بر اساس کلاسهای مزدوج، تحت عمل مزدوج گروه لی تقارنها بپردازیم. [۱۲] در بخش ۲ جبر لی تقارنهای معادله ۱ ارائه شده است و در ادامه در بخش ۳ کلاس بندی کامل زیرجبرهای جبر لی تقارنها را بیان می کنیم. با توجه به اینکه روش تقارنها موضعی است، بدیهی است که کلاسه بندی های بیان شده همگی موضعی هستند.

۲ معادله موج روی فضای هذلولوی

معادله موج روی فضای هذلولوی حالت خاصی از معادله $\Delta_g u + f(u) = ۰$ است. جاییکه

$$\Delta_g u = \frac{۱}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j}) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j u = \nabla^j\nabla_j u = \nabla_i\nabla^i u$$

عبارت است از اپراتور لاپلاس-بلترامی روی یک منیفلد زمینه ریمانی (شبه ریمانی) (M^n, g) ، ∇_i مشتق کوواریانت وابسته به التصاق لوی چویتا، و $f(u)$ یک تابع هموار روی منیفلد زمینه است. [۷]
حال اگر متریک $ds^2 = 1/t^2(dx^2 + dy^2 + dt^2)$ را روی فضای هذلولوی $H^3 = R \times R \times R^+$ قرار دهیم و معادله لاپلاس- بلترامی را بنویسیم به طوری که $f(u) = 0$، معادله موج ۱ روی فضای هذلولوی بدست می آید.
روش بدست آوردن جبر لی تقارنهای یک معادله دیفرانسیل در کتابهای بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است. [۱۰] برای مشخص کردن جبر لی تقارنها ابتدا مولد جبر لی تقارنها را به صورت زیر مشخص در نظر می گیریم:

$$V = \xi_1(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial y} + \xi_3(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi_1(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

از آنجا که معادله ۱ یک تابع دیفرانسیلی روی فضای جت مرتبه دوم است لذا میدان برداری V را امتداد مرتبه دوم می دهیم. با اثر دادن $V^{[2]}$ روی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱ و برابر صفر قرار دادن آن به شرط اینکه u جواب معادله باشد، عبارتهای زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} = 0, \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} = 0, \frac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0, \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u^2} = 0\\
&\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = 0, \frac{\partial \xi_3}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0, -2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u \partial x} = 0, -2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} = 0, \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u \partial t} = 0, \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u \partial t} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial t} = 0, \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial t} = 0, \frac{t}{5}\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u \partial t} + \frac{t}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = 0\\
&\frac{t}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial x} + \frac{t}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial t} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = 0, \frac{t}{5}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \frac{2t}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial t} = 0,\\
&\frac{-2t}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial t} + \frac{t}{5}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} + 2\frac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0, t\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + 5\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + t\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = 0\\
&2t\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial x} - 5\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - t\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - t\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - t\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} = 0,\\
&2t\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial y} - 5\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - t\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial y^2} - t\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - t\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = 0,\\
&\frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \xi_3 - \frac{2t^2}{5}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial t} + \frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} + \frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} - t\frac{\partial \xi_3}{\partial t} = 0\\
&\frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial t^2} + \xi_3 - 2t\frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \frac{2t^2}{5}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u \partial t} + \frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{t^2}{5}\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} + t\frac{\partial \xi_3}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{t^{۲}}{۵}\frac{\partial^{۲}\xi_{۳}}{\partial y^{۲}}+\xi_{۳}-۲t\frac{\partial\xi_{۱}}{\partial x}-\frac{۲t^{۲}}{۵}\frac{\partial^{۲}\phi_{۱}}{\partial u\partial t}+\frac{t^{۲}}{۵}\frac{\partial^{۲}\xi_{۳}}{\partial x^{۲}}+\frac{t^{۲}}{۵}\frac{\partial^{۲}\xi_{۳}}{\partial t^{۲}}+t\frac{\partial\xi_{۳}}{\partial t}=۰$$

پس از حل سیستم معادلات دیفرانسیل فوق داریم:

$$\xi_{۱}(x,y,t,u)=\frac{C_{۳}}{۲}(-t^{۲}+x^{۲}-y^{۲})+\frac{x}{۲}(۲C_{۱}y+۲C_{۲})-C_{۴}y+C_{۶}$$

$$\xi_{۲}(x,y,t,u)=\frac{C_{۱}}{۲}(-t^{۲}+y^{۲}-x^{۲})+\frac{x}{۲}(۲C_{۳}y+۲C_{۴})+C_{۲}y+C_{۵}$$

$$\xi_{۳}(x,y,t,u)=(C_{۳}x+C_{۱}y+C_{۲})t$$

$$\phi_{۱}(x,y,t,u)=(-۳C_{۳}x-۳C_{۱}y+C_{۷})u+f(x,y,t)$$

که در آن $f(x,y,t)$ تابعی است که در معادله ۱ صدق می کند.
بنابراین جبر لی تقارنهای معادله ۱ به صورت زیر است:

$$X_{۱}=xy\frac{\partial}{\partial x}-\frac{۱}{۲}(t^{۲}-y^{۲}+x^{۲})\frac{\partial}{\partial y}+yt\frac{\partial}{\partial t}-۳yu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_{۲}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_{۳}=\frac{-۱}{۲}(t^{۲}-x^{۲}+y^{۲})\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+xt\frac{\partial}{\partial t}-۳xu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_{۴}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_{۵}=\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_{۶}=\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_{۷}=u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_{f}=f\frac{\partial}{\partial u}$$

جدول ۱- روابط کروشه ای جبر لی تقارنهای معادله ۱

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	0	$-X_1$	0	$-X_3$	$-X_2+3X_7$	X_4	0
X_2	X_1	0	X_3	0	$-X_5$	$-X_6$	0
X_3	0	$-X_3$	0	X_1	$-X_4$	$-X_2+3X_7$	0
X_4	X_3	0	$-X_1$	0	X_6	$-X_5$	0
X_5	X_2-3X_7	X_5	X_4	$-X_6$	0	0	0
X_6	$-X_4$	X_6	X_2-3X_7	X_5	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	0	0

۳ کلاسه بندی زیرجبرهای جبر تقارنها

با توجه به جدول ۱ مرکز جبر عبارت است از $Z=<X_7>$ و نیز

$$L^7=<X_7>\oplus<X_1,X_2-3X_7,X_3,X_4,X_5,X_6>$$

از آنجا که زیرجبر $<X_1,X_2-3X_7,X_3,X_4,X_5,X_6>$ شبه ساده است نتیجه می شود که $R=<X_7>$ رادیکال و $L^6=<X_1,X_2-3X_7,X_3,X_4,X_5,X_6>$ فاکتور لوی است. [۱۲]
چون زیرجبر $<X_7>$ مرکز جبر L^7 است و به عنوان یک بردار مستقل با هر یک از بردارهای L^6 می تواند جمع شود، لذا کافی است به شناسایی زیرجبرهای L^6 بپردازیم.
بردارهای $\{e_1=X_1,e_2=X_2-3X_7,e_3=X_3,e_4=X_4,e_5=X_5,e_6=X_6\}$ را به عنوان پایه برای L^6 در نظر می گیریم. برای بردار دلخواه $V=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3+v_4e_4+v_5e_5+v_6e_6$ در L^6 نگاشت الحاقی $ad(V)<x>=[x,V]$ به صورت زیر مشخص می شود:

$$ad(V)=\begin{bmatrix} v_2 & -v_1 & -v_4 & v_3 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & v_6 & 0 & -v_1 & -v_3 \\ v_4 & -v_3 & v_2 & -v_1 & 0 & 0 \\ -v_6 & 0 & v_5 & 0 & -v_3 & v_1 \\ 0 & v_5 & 0 & v_6 & -v_2 & -v_4 \\ 0 & v_6 & 0 & -v_5 & v_4 & -v_2 \end{bmatrix}$$

و بنابراین فرم کیلینگ $K<V,W>=tr(ad(V)\circ ad(W))$ به صورت زیر بدست می آید:

$$K(V,W):=4v_2w_2-4v_1w_5-4v_4w_4-4v_3w_6-4v_5w_1-4v_6w_3$$

جاییکه $W = w_۱e_۱ + w_۲e_۲ + w_۳e_۳ + w_۴e_۴ + w_۵e_۵ + w_۶e_۶$. همچنین شکل ماتریسی فرم کیلینگ به صورت زیر است:

$$K = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به ناتبهگون بودن ماتریس فوق نتیجه می شود که زیرجبر $L^۶$ شبه ساده است.

مساله طبقه بندی زیرجبرهای یک بعدی $L^۶$ به صورت مشخص نمودن لیستی از زیرجبرهای غیرمعادل تحت رابطه مزدوجی زیرجبرها با یکدیگر انجام می شود. بنابراین هر زیرجبر یک بعدی دلخواه با یکی از اعضای لیست معادل است یعنی $\bar{\mathfrak{h}}Ad(g)\mathfrak{h}$ برای یک g عضو گروه لی.

اگر $V \in \mathfrak{g}$ دلخواه باشد عمل مزدوجی M_V متناظر با V از حل دستگاه $\frac{\partial}{\partial t}M_V = ad(V) \circ M_V$ با شرط $M_V(۰) = I$ بدست می آید. چنانچه عمل مزدوجی متناظر با هریک از اعضای پایه ای جبر لی $\mathfrak{g}$ مشخص باشد، عمل مزدوجی عمومی $Ad(g)$ به صورت ترکیبی از اعمال مزدوجی پایه ای است.[۹]

قضیه ۱– زیرجبرهای یک بعدی $L^۷$ به صورت زیر مشخص می شوند:

$$\begin{array}{ll} A_۱^۱ : X_۳ + aX_۵ + bX_۶ + cX_۷ & A_۱^۲ : X_۱ + aX_۵ + bX_۶ + cX_۷ \\ A_۱^۳ : X_۵ + aX_۲ + bX_۴ + cX_۷ & A_۱^۴ : X_۴ + aX_۲ + bX_۶ + cX_۷ \\ A_۱^۵ : X_۲ + cX_۷ & A_۱^۶ : X_۶ + cX_۷ \\ A_۱^۷ : X_۵ + cX_۷ & A_۱^۸ : X_۷ \end{array}$$

اثبات– همانطور که قبلا اشاره شد برای مشخص کردن زیرجبرهای یک بعدی $L^۷$ ابتدا زیرجبرهای یک بعدی $L^۶$ را مشخص می کنیم و سپس بردار $X_۷$ را به آنها اضافه می کنیم. برای تعیین زیرجبرهای یک بعدی $L^۶$ که تحت عمل مزدوجی طبقه بندی می شوند ابتدا به محاسبه عمل مزدوجی متناظر با هریک از اعضای پایه ای $L^۶$ می پردازیم. اگر $F_i^s : L^۶ \to L^۶$ نگاشت مزدوجی متناظر با e_i، $(i = ۱, ۲, ..., ۶)$ باشد، ماتریس F_i^s در پایه $\{e_i\}_{i=۱}^۶$را با M_i^s نمایش می دهیم.

$$M_۱(s) = \begin{bmatrix} ۱ & s & ۰ & ۰ & \frac{s^۲}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & s & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & s & ۰ & -\frac{s^۲}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -s \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} M_۲(s) = \begin{bmatrix} \frac{۱}{s} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{s} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & s & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & s \end{bmatrix}$$

$$M_3(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -s & -\frac{s^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & s & 1 & 0 & 0 & \frac{s^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4(s)=\begin{bmatrix} \cos(s) & 0 & \sin(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(s) & 0 & \cos(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(s) & \sin(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix}$$

$$M_5(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ \frac{s^2}{2} & -s & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s^2}{2} & s & 0 & 1 \end{bmatrix} M_6(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{s^2}{2} & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & -s & \frac{s^2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بردار دلخواه $X=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4+a_5e_5+a_6e_6$ عضو L^6 را انتخاب می کنیم و سعی می کنیم با استفاده از عمل مزدوجی مناسب آن را به ساده ترین شکل در آوریم. به این صورت که با تعیین $s_1, s_2, ..., s_6$ عمل مورد نظر را به صورت $Ad(s_1s_2...s_6)=M_1^{s_1}M_2^{s_2}...M_6^{s_6}$ تعریف می کنیم.

حالت اول اگر $a_3\neq 0$ در این صورت با انتخاب $s_4=-tan^{-1}(\frac{a_1}{a_3})$، $s_5=\frac{a_4}{a_4}$، $s_6=\frac{a_2}{a_3}$، $s_2=1$و $s_3=s_1$ ضرایب a_1، a_2و a_4 را صفر می کنیم. در صورت لزوم با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_3=1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^1 در می آید.

حالت دوم اگر $a_3=0$ و $a_1\neq 0$ در این صورت با انتخاب $s_2=1$، $s_4=0$، $s_5=\frac{a_2}{a_1}$، $s_6=\frac{-a_4}{a_1}$ و $s_3=s_1$ ضرائب a_2، a_3 و a_4 را صفر می کنیم. در صورت لزوم با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_1=1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^2 در می آید.

حالت سوم اکر $a_1=a_3=0$، $a_4\neq 0$ و $a_5\neq 0$ در این صورت با انتخاب $s_2=1$، $s_4=0$، $s_5=\frac{-a_6}{a_4}$، $s_6=0$ و $s_3=s_1$ ضریب a_6 را صفر می کنیم. در صورت لزوم با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_5=1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^3 در می آید.

حالت چهارم اگر $a_1 = a_3 = 0$، $a_4 \neq 0$ و $a_5 = 0$ در این صورت با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_4 = 1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^4 در می آید.
حالت پنجم اگر $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ و $a_2 \neq 0$ در این صورت با انتخاب $s_2 = 1$، $s_5 = \frac{a_5}{a_2}$، $s_6 = \frac{a_6}{a_2}$ و $s_1 = s_3$ می توان ضرایب a_5 و a_6 را صفر می کنیم. در صورت لزوم با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_2 = 1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^5 در می آید.
حالت ششم اگر $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ و $a_6 \neq 0$ در این صورت با انتخاب $s_2 = 1$، $s_4 = -tan^{-1}(\frac{a_5}{a_6})$ و $s_1 = s_3$ ضریب a_5 را صفر می کنیم. در صورت لزوم با تغییر مقیاس می توان فرض کرد $a_6 = 1$ و لذا X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^6 در می آید.
حالت هفتم اگر $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0$ در این صورت با تغییر مقیاس در صورت لزوم می توان فرض کرد $a_5 = 1$ و بنابراین X پس از اضافه کردن بردار X_7 به فرم A_1^7 در می آید.
چون X_7 به تنهایی یک زیرجبر یک بعدی مستقل از L^6 است پس حالت A_1^8 نیز باید مورد نظر قرار گیرد.

■

قضیه ۲- زیرجبرهای دو بعدی L^7 به صورت زیر هستند:

$A_2^1 :< X_3 + aX_5 + bX_6 + cX_7, X_1 - bX_5 + aX_6 >$,(abelian)(not a=b=0)
$A_2^2 :< X_3, aX_1 + bX_2 + cX_7 >$),(non-abelian)
$A_2^3 :< X_1 + aX_5 + bX_6 + cX_7, X_3 + bX_5 - aX_6 >$,(abelian)(not a=b=0)
$A_2^4 :< X_1, aX_2 + bX_3 + cX_7 >$,(non-abelian)
$A_2^5 :< X_5 + aX_2 + bX_4 + cX_7, X_6 + bX_2 - aX_4 >$,(abelian)(not a=b=0)
$A_2^6 :< X_5, aX_2 + bX_6 + cX_7 >$,(non-abelian)
$A_2^7 :< X_4 + aX_2 + bX_6 + cX_7, X_5 - (\frac{1+a^2}{b})X_2 - aX_6 >$,(abelian)$(b \neq 0)$
$A_2^8 :< X_2 + cX_7, X_4 >$,(abelian)
$A_2^9 :< X_2 + cX_7, aX_1 + bX_3 >$,(non-abelian)
$A_2^{10} :< X_2 + cX_7, aX_5 + bX_6 >$,(non-abelian)
$A_2^{11} :< X_6, X_2 + aX_5 + cX_7 >$,(non-abelian)
$A_2^{12} :< X_5, X_2 + aX_6 + cX_7 >$,(non-abelian)
$A_2^{13} :< X_3 + aX_5 + bX_6, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{14} :< X_1 + aX_5 + bX_6, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{15} :< X_5 + aX_2 + bX_4, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{16} :< X_4 + aX_2 + bX_6, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{17} :< X_2, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{18} :< X_6, X_7 >$,(abelian)
$A_2^{19} :< X_5, X_7 >$,(abelian)

اثبات- مانند قضیه قبل ابتدا زیرجبرهای دو بعدی L^6 را محاسبه می کنیم. برای این کار بردار دلخواه $Y = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ و بردار X از زیرجبرهای یک بعدی را انتخاب می کنیم و فرض می کنیم $\mathfrak{h} = span\{X, Y\}$ یک زیر جبر دو بعدی L^6 و $\mathfrak{g}$ زیر جبر متناظر L^7 باشد.
حالت اول اگر $X = e_3 + ae_5 + be_6$ در این صورت چون $\mathfrak{h}$ باید نسبت به کروشه لی بسته باشد قرار می دهیم $[X, Y] =$

$\alpha X+\beta Y$. دو حالت پیش می آید:

الف)اگر $a,b\neq 0$ یا $a=0$ و $b\neq 0$ یا $a\neq 0$ و $b=0$ در این صورت داریم $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_3X+b_1(e_1-bX_5+aX_6)$. با انتخاب پایه مناسب می توانیم قرار دهیم $Y=e_1-be_5+ae_6$. با اضافه کردن بردار X_7 زیر جبر دو بعدی $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^1 در می آید.

ب) اگر $a=b=0$ در این صورت داریم $\alpha=-b_2,\beta=0$ و $Y=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$. با انتخاب پایه مناسب می توانیم قرار دهیم $Y=b_1e_1+b_2e_2$. با اضافه کردن بردار X_7 زیر جبر دو بعدی $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^2 در می آید.

حالت دوم اگر $X=e_1+ae_5+be_6$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a,b\neq 0$ یا $a=0$ و $b\neq 0$ یا $a\neq 0$ و $b=0$ در این صورت $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_1X+b_3(e_3+be_5-ae_6)$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_3+be_5-ae_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^3 در می آید.

ب) اگر $a=b=0$ در این صورت داریم $\alpha=-b_2,\beta=0$ و $Y=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$. با انتخاب پایه مناسب می توانیم قرار دهیم $Y=b_2e_2+b_3e_3$. با اضافه کردن بردار X_7 زیر جبر دو بعدی $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^4 در می آید.

حالت سوم اگر $X=e_5+ae_2+be_4$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a,b\neq 0$ یا $a=0$ و $b\neq 0$ یا $a\neq 0$ و $b=0$ در این صورت داریم $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_5X+b_6(be_2-ae_4+e_6)$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_6+be_2-ae_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^5 در می آید.

ب) اگر $a=b=0$ در این صورت داریم $\alpha=b_2,\beta=0$ و $Y=b_2e_2+b_5e_5+b_6e_6$. با انتخاب پایه مناسب می توانیم قرار دهیم $Y=b_2e_2+b_6e_6$. با اضافه کردن بردار X_7 زیر جبر دو بعدی $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^6 در می آید.

حالت چهارم اگر $X=e_4+ae_2+be_6$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $b\neq 0$ در این صورت $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_4(a_2e_2+a_6e_6+e_4)+b_5(e_5-\frac{1+a^2}{b}e_2-ae_6)$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_5-\frac{1+a^2}{b}e_2-ae_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^7 در می آید.

ب) اگر $b=0$ در این صورت $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_2e_2+b_4e_4$ و لذا یک زیرجبر یک بعدی بدست می آید.

حالت پنجم اگر $X=e_2$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت $\alpha=\beta=0$ و $Y=b_2e_2+b_4e_4$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^8 در می آید.

حالت ششم اگر $X=e_2$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت $\alpha=-b_2,\beta=1$ و $Y=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=ae_1+be_3$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^9 در می آید.

حالت هفتم اگر $X=e_2$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت $\alpha=b_2,\beta=-1$ و $Y=b_2e_2+b_5e_6+b_6e_6$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=ae_5+be_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^{10} در می آید.

حالت هشتم اگر $X=e_6$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت $\alpha=b_2,\beta=0$ و $Y=b_2e_2+b_5e_5+b_6e_6$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_2+ae_5$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^{11} در می آید.

حالت نهم اگر $X=e_5$ و $[X,Y]=\alpha X+\beta Y$ در این صورت $\alpha=b_2,\beta=0$ و $Y=b_2e_2+b_5e_5+b_6e_6$ که با انتخاب پایه مناسب $Y=e_2+ae_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_2^{12} در می آید.

حالات $A_2^{16}\dots A_2^{10}$ با افزودن بردار مستقل e_7 به هریک از زیرجبرهای یک بعدی بدست می آیند.

■

قضیه ۳- زیرجبرهای سه بعدی L^7 به صورت زیر هستند:

$A_3^1 :< X_3, aX_1 + bX_2 + cX_7, aX_4 - bX_6 >$
$A_3^2 :< X_1, X_2 + cX_7, X_3 >$
$A_3^3 :< X_2 + cX_7, X_3, X_6 >$
$A_3^4 :< X_1, aX_2 + bX_3 + cX_7, bX_4 + aX_5 >$(a≠0)
$A_3^5 :< X_5, aX_2 + bX_6 + cX_7, aX_1 - bX_4 >$(a≠0)
$A_3^6 :< X_5, X_6, aX_2 + bX_4 + cX_7 >$
$A_3^7 :< X_2 + cX_7, aX_1 + bX_3, aX_5 + bX_6 >$(a≠0)
$A_3^8 :< X_2 + cX_7, aX_5 + bX_6, aX_1 + bX_3 >$(a≠0)
$A_3^9 :< X_6, X_2 + aX_5 + cX_7, X_3 + aX_4 >$(a≠0)
$A_3^{10} :< X_5, X_2 + aX_6 + cX_7, X_1 - aX_4 >$
$A_2^{11} :< X_3 + aX_5 + bX_6, X_1 - bX_5 + aX_6, X_7 >$,(not a=b=0)
$A_2^{12} :< X_3, aX_1 + bX_2, X_7 >$
$A_2^{13} :< X_1 + aX_5 + bX_6, X_3 + bX_5 - aX_6, X_7 >$,(not a=b=0)
$A_2^{14} :< X_1, aX_2 + bX_3, X_7 >$
$A_2^{15} :< X_5 + aX_2 + bX_4, X_6 + bX_2 - aX_4, X_7 >$,(not a=b=0)
$A_2^{16} :< X_5, aX_2 + bX_6, X_7 >$
$A_2^{17} :< X_4 + aX_2 + bX_6, X_5 - (\frac{1+a^2}{b})X_2 - aX_6, X_7 > (b \neq 0)$
$A_2^{18} :< X_2, X_4, X_7 >$
$A_2^{19} :< X_2, aX_1 + bX_3, X_7 >$
$A_2^{20} :< X_2, aX_5 + bX_6, X_7 >$
$A_2^{21} :< X_6, X_2 + aX_5, X_7 >$
$A_2^{22} :< X_5, X_2 + aX_6, X_7 >$

اثبات- ابتدا زیرجبرهای سه بعدی L^6 را محاسبه می کنیم و بعد بردار X_7 را به آنها اضافه می نماییم. لذا بردار دلخواه $Z = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ و بردارهای X و Y از هر یک از زیرجبرهای دو بعدی L^6 را انتخاب می کنیم و فرض می کنیم $\mathfrak{h} = span\{X, Y, Z\}$ یک زیرجبر سه بعدی L^6 و $\mathfrak{g}$ زیر جبر متناظر L^7 باشد.

حالت اول فرض کنید $X = e_3 + ae_5 + be_6$ و $Y = e_1 - be_5 + ae_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X, Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y, Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_1 X + b_3 Y$. بنابراین یک زیرجبر دو بعدی بدست می آید.

حالت دوم فرض کنید $X = e_3$ و $Y = ae_1 + be_2$ در این صورت قرار می دهیم $[X, Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y, Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ داریم $Z = b_1e_1 + \frac{bb_1}{a}e_2 + b_3e_3 + ae_4 - be_6$ که به انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = ae_4 - be_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^1 در می آید.

ب) اگر $a = 0$ در این صورت می توانیم قرار دهیم $X = e_3$ و $Y = e_2$ بنابراین $Z = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ یا $Z = b_2e_2 + b_3e_3 + b_6e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = e_1$ یا $Z = e_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^2 یا A_3^3 در می آید.

حالت سوم فرض کنید $X = e_1 + ae_5 + be_6$ و $Y = e_3 + be_5 - ae_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X, Z] =$

$\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_1 X + b_3 Y$. بنابراین یک زیرجبر دو بعدی بدست می آید.

حالت چهارم فرض کنید $X = e_1$ و $Y = ae_2 + be_3$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ داریم $Z = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \frac{ab_2}{a} - be_4 - ae_5$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = be_4 + ae_5$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^4 در می آید.

ب) اگر $a = 0$ می توان قرار داد $X = e_1$ و $Y = e_3$ که همان حالت A_3^2 است.

حالت پنجم فرض کنید $X = e_5 + ae_2 + be_4$ و $Y = e_6 + be_2 - ae_4$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_5 X + b_6 Y$. بنابراین یک زیرجبر دو بعدی بدست می آید.

حالت ششم فرض کنید $X = e_5$ و $Y = ae_2 + be_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ داریم $Z = ae_1 + b_2 e_2 - be_4 + b_5 e_5 + \frac{bb_2}{a} e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = ae_1 - be_2$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^5 در می آید.

ب) اگر $a = 0$ می توان قرار داد $X = e_5$ و $Y = e_6$ و داریم $Z = b_2 e_2 - b_4 e_4 + b_5 e_5 + b_6 e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = ae_2 + be_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^6 در می آید.

حالت هفتم فرض کنید $X = e_4 + ae_2 + be_6$ و $Y = e_5 + \frac{1+a^2}{b} e_2 - ae_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ جواب حقیقی وجود ندارد.

ب) اگر $a = 0$ در این صورت می توان قرار داد $X = e_4 + be_6$ و $Y = e_2 - be_5$ و بدست می آوریم $Z = b_4(e_4 + be_6)$. بنابراین در این حالت زیرجبر دو بعدی ایجاد می شود.

حالت هشتم فرض کنید $X = e_2$ و $Y = e_4$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_2 e_2 + b_4 e_4$. بنابراین یک زیر جبر دو بعدی بدست می آید.

حالت نهم فرض کنید $X = e_2$ و $Y = ae_1 + be_3$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ داریم $Z = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \frac{bb_1}{a} e_3 + b_5 e_5 + \frac{bb_5}{a} e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = ae_5 + be_6$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^8 در می آید.

ب) اگر $a = 0$ می توان قرار داد $X = e_2$ و $Y = e_3$ که همان حالت A_3^2 است.

حالت دهم فرض کنید $X = e_2$ و $Y = ae_5 + be_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$. دو حالت پیش می آید:

الف) اگر $a \neq 0$ داریم $Z = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \frac{bb_1}{a} e_3 + b_5 e_5 + \frac{bb_5}{a} e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $Z = ae_1 + be_3$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^9 در می آید.

ب) اگر $a = 0$ می توان قرار داد $X = e_2$ و $Y = e_6$ که همان حالت A_3^3 است.

حالت یازدهم فرض کنید $X = e_6$ و $Y = e_2 + ae_5$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$ و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_2 e_2 + b_3 e_3 + ab_3 e_4 + ab_2 e_5 + b_6 e_6$ که با انتخاب پایه مناسب داریم $Z = e_3 + ae_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^{10} در می آید.

حالت دوازدهم فرض کنید $X = e_5$ و $Y = e_2 + ae_6$ در این صورت قرار می دهیم $[X,Z] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z$

و $[Y,Z] = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z$ و داریم $Z = b_1e_1 + b_2e_2 + ab_1e_4 + b_5e_5 + ab_2e_6$ که با انتخاب پایه مناسب داریم $Z = e_1 - ae_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_3^{11} در می آید.
بقیه حالات از اضافه کردن بردار X_7 به زیرجبرهای دو بعدی قضیه ۱ بدست می آیند.

■

قضیه ۴- زیرجبرهای چهار بعدی L^7 به صورت زیر هستند:

$A_4^1 :< X_1, X_2 + aX_7, X_3, X_4 >$
$A_4^2 :< X_2 + aX_7, X_4, X_5, X_6 >$
$A_4^3 :< X_3, aX_1 + bX_2, aX_4 - bX_6, X_7 >$
$A_4^4 :< X_1, X_2, X_3, X_7 >$
$A_4^5 :< X_2, X_3, X_6, X_7 >$
$A_4^6 :< X_1, aX_2 + bX_3, bX_4 + aX_5, X_7 >(a\neq 0)$
$A_4^7 :< X_5, aX_2 + bX_6, aX_1 - bX_4, X_7 >(a\neq 0)$
$A_4^8 :< X_5, X_6, aX_2 + bX_4, X_7 >$
$A_4^9 :< X_2, X_4, aX_3 + bX_5 + cX_6, X_7 >$
$A_4^{10} :< X_2, aX_5 + bX_6, bX_1 + aX_4, X_7 >(a\neq 0)$
$A_4^{11} :< X_6, X_2 + aX_5, X_3 + aX_4, X_7 >(a\neq 0)$
$A_4^{12} :< X_5, X_2 + aX_6, X_1 - aX_4, X_7 >$

اثبات- ابتدا زیرجبرهای چهار بعدی L^6 را محاسبه می کنیم و بعد بردار X_7 را به آنها اضافه می نماییم. لذا بردار دلخواه $W = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ و بردارهای X، Y و Z از هر یک از زیرجبرهای سه بعدی L^6 را انتخاب می کنیم و فرض می کنیم $\mathfrak{h} = span\{X, Y, Z, W\}$ یک زیرجبر چهار بعدی L^6 و $\mathfrak{g}$ زیرجبر متناظر L^7 باشد.
چنانچه هر یک از زیرجبرهای سه بعدی $A_3^1, A_3^3, A_3^4, A_3^5, A_3^7, A_3^8, A_3^9, A_3^{10}$ را انتخاب کنیم و قرار دهیم $[X,W] = \alpha_1X+\alpha_2Y+\alpha_3Z+\alpha_4W$، $[Y,W] = \beta_1X+\beta_2Y+\beta_3Z+\beta_4W$ و $[Z,W] = \gamma_1X+\gamma_2Y+\gamma_3Z+\gamma_4W$ در این صورت بردار W محاسبه شده که در شرایط فوق صدق کند توسط بردارهای X, Y, Z قابل محاسبه است و لذا زیرجبر بدست آمده سه بعدی می شود که در اینجا مطلوب نیست. در مورد زیر جبرهای A_3^2 و A_3^6 داریم:
حالت اول فرض کنید $X = e_1$، $Y = e_2$ و $Z = e_3$ باشند در این صورت قرار می دهیم $[X,W] = \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3Z + \alpha_4W$، $[Y,W] = \beta_1X + \beta_2Y + \beta_3Z + \beta_4W$ و $[Z,W] = \gamma_1X + \gamma_2Y + \gamma_3Z + \gamma_4W$ و بدست می آوریم $W = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$. با انتخاب پایه مناسب داریم $W = e_4$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_4^1 در می آید.
حالت دوم فرض کنید $X = e_5$، $Y = e_6$ و $Z = ae_2 + be_4$ باشند در این صورت قرار می دهیم $[X,W] = \alpha_1X+\alpha_2Y+\alpha_3Z+\alpha_4W$، $[Y,W] = \beta_1X+\beta_2Y+\beta_3Z+\beta_4W$ و $[Z,W] = \gamma_1X+\gamma_2Y+\gamma_3Z+\gamma_4W$.
دو حالت پیش می آید:
الف) اگر $a \neq 0$ در این صورت $W = b_2e_2 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ که توسط بردارهای X, Y, Z تولید می شود و بنابراین زیرجبر بدست آمده سه بعدی است.
ب) اگر $a = 0$ در این صورت $X = e_5$، $Y = e_6$ و $Z = e_4$ و داریم $W = b_2e_2 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ که با انتخاب پایه مناسب بدست می آوریم $W = e_2$. پس از اضافه کردن بردار X_7 ، $\mathfrak{g}$ به فرم A_4^2 در می آید.
بقیه حالات از اضافه کردن بردار X_7 به زیرجبرهای سه بعدی L^6 بدست می آیند.

■

قضیه ۵- زیرجبرهای پنج بعدی L^7 به صورت زیر هستند:

$A_5^1 :< X_1, X_2, X_3, X_4, X_7 >$
$A_4^2 :< X_2, X_4, X_5, X_6, X_7 >$

اثبات- ابتدا زیرجبرهای پنج بعدی L^6 را محاسبه می کنیم و بعد بردار X_7 را به آنها اضافه می نماییم. لذا بردار دلخواه $T = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6$ و بردارهای X، Y، Z و W از هر یک از زیرجبرهای چهار بعدی L^6 را انتخاب می کنیم و فرض می کنیم $\mathfrak{h} = span\{X, Y, Z, W, T\}$ یک زیرجبر پنج بعدی L^6 و $\mathfrak{g}$ زیرجبر متناظر L^7 باشد.
حالت اول فرض کنید $X = e_1$، $Y = e_2$، $Z = e_3$ و $W = e_4$ باشند در این صورت قرار می دهیم $[X, T] = \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3Z + \alpha_4W + \alpha_5T$، $[Y, T] = \beta_1X + \beta_2Y + \beta_3Z + \beta_4W + \beta_5T$، $[Z, T] = \gamma_1X + \gamma_2Y + \gamma_3Z + \gamma_4W + \gamma_5T$ و $[W, T] = \lambda_1X + \lambda_2Y + \lambda_3Z + \lambda_4W + \lambda_5T$ و بدست می آوریم $T = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$ که توسط بردارهای X, Y, Z, W تولید می شود و لذا زیرجبر بدست آمده چهار بعدی است.
حالت دوم فرض کنید $X = e_2$، $Y = e_4$، $Z = e_5$ و $W = e_6$. این حالت نیز مانند حالت اول است.
با توجه به اینکه L^6 فاقد زیرجبر پنج بعدی است بنابراین زیرجبرهای پنج بعدی L^7 به اضافه کردن بردار X_7 به زیرجبرهای چهار بعدی L^6 بدست می آیند که حالات A_5^1 و A_5^2 را تشکیل می دهند.

نتیجه ۶- تنها زیر جبر شش بعدی جبر لی L^7 جبر لی L^6است.
اثبات- با توجه به قضیه ۵، L^6 هیچ زیرجبر پنج بعدی ندارد و بنابراین با توجه به تجزیه لوی، L^7 نیز هیچ زیرجبر شش بعدی بجز L^6 ندارد.

■

مراجع

[1] W.F. Ames, R.J. Lohner, E. Adams, Group properties of utt = (f (u)ux)x , Internat. J. Non-Linear Mech. 16 (1981) 439–447.

[2] H. Azad, M.T. Mustafa, Symmetry analysis of wave equation on sphere, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 1180–1188.

[3] V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, Approximate symmetries and conservation laws, Proc. Steklov Inst. Math. 200 (1993) 35–47.

[4] G. Bluman, S. Kumei, On invariance properties of the wave equation, J. Math. Phys. 28 (1987) 307–318.

[5] N.H. Ibragimov (Ed.), CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[6] N.H. Ibragimov (Ed.), CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 3, New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[7] I. L. Freire, On the paper “Symmetry analysis of wave equation on sphere” by H. Azad and M. T. Mustafa, arXiv:0910.0813v1 [math.AP] 5 Oct 2009.

[8] M.L. Gandarias, M. Torrisi, A. Valenti, Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, Internat. J. Non-Linear Mech. 39 (2004) 389–398.

[9] M. Nadjafikhah, Lie group analysis of Poisson's equation and optimal system of subalgebras for Lie algebra of 3–dimensional rigid motions, arXiv:0908.3619v1 [math.AP] 25 Aug 2009.

[10] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] A. Oron, P. Rosenau, Some symmetries of nonlinear heat and wave equations, Phys. Lett. A 118 (4) (1986) 172–176.

[12] L.V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.