C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 515–518

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

La géométrie de l'équation $y''' = f(x, y, y', y'')$

Sylvain Neut, Michel Petitot

**Université des sciences et technologies de Lille, laboratoire d'informatique fondamentale,
59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France**

Reçu et accepté le 29 juin 2002

Note présentée par Bernard Malgrange.

Résumé La méthode d'équivalence de Cartan permet de décider de l'équivalence locale de deux objets de nature géométrique sous l'action d'un pseudo-groupe de difféomorphismes locaux. En utilisant cette méthode, nous donnons des conditions explicites pour qu'une équation différentielle ordinaire du 3eme ordre soit linéarisable par une transformation de contact. ***Pour citer cet article : S. Neut, M. Petitot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 515–518.***

The geometry of the equation $y''' = f(x, y, y', y'')$

Abstract Cartan's method of equivalence allows to decide if two geometrical objects are equivalent under a pseudo-group of local diffeomorphisms. Using this method we give explicit conditions for a third order ordinary differential equation to be linearisable by a contact transformation. ***To cite this article: S. Neut, M. Petitot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 515–518.***

1. Introduction

Grâce à sa méthode d'équivalence [1,4,5], Cartan a facilement démontré que l'équation générale du deuxième ordre $y'' = f(x, y, y')$ peut être linéarisée sous la forme $y'' = 0$ par une transformation de contact. La classification de l'équation générale du troisième ordre

$$y''' = f(x, y, y', y'') \tag{1}$$

est nettement plus compliquée puisque les équations $y''' = 0$ et $y''' + y = 0$ ne se déduisent pas l'une de l'autre par une transformation de contact.

Sous la direction de Cartan, Chern [2,3] en 1937 calcule les équations de structure (6) et (8) obtenues en discutant sur la nullité d'un semi-invariant mis en évidence dans la thèse de K. Wünschmann en 1905.

Grâce au calcul sur machine, nous obtenons explicitement les invariants fondamentaux mis en évidence par Chern, ce qui nous permet d'esquisser la classification de l'équation générale du troisième ordre sous l'action du groupe des transformations de contact. Des conditions simples de linérarisation de l'équation (1) sont données. Signalons les travaux de Sato et Yoshikawa dans [6] qui démontrent le Théorème 1 en utilisant des résultats de Tanaka.

Adresses e-mail : Neut@lifl.fr (S. Neut); petitot@lifl.fr (M. Petitot).

S1631-073X(02)02507-4/FLA

2. Formulation du problème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'espace J^n des jets d'ordre n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une *transformation de contact* de J^n dans J^n est un difféomorphisme analytique *local* qui préserve le module des formes de contact du J^n. D'après un théorème de Bäcklund, une telle transformation de contact de J^n dans J^n ($n > 1$) est la prolongation d'une transformation de contact de J^1 dans J^1.

Soit $\mathrm{x} := (x, y, p = y', q = y'') \in \mathbb{R}^4$ un système de coordonnées locales de J^2. Deux équations $y''' = f(x, y, y', y'')$ et $\bar{y}''' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'')$ sont équivalentes par une transformation de contact $\bar{\mathrm{x}} = \phi(\mathrm{x})$ lorsqu'il existe [3,4] des fonctions $(a_1, \ldots, a_9)$ de J^2 dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\phi^* \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{q} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q})\,\mathrm{d}\bar{x} \\ \mathrm{d}\bar{y} - \bar{p}\,\mathrm{d}\bar{x} \\ \mathrm{d}\bar{p} - \bar{q}\,\mathrm{d}\bar{x} \\ \mathrm{d}\bar{x} \end{pmatrix}}_{\bar{\omega}(\bar{\mathrm{x}})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(\mathrm{x}) & a_2(\mathrm{x}) & a_3(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & a_4(\mathrm{x}) & 0 & 0 \\ 0 & a_5(\mathrm{x}) & a_6(\mathrm{x}) & 0 \\ 0 & a_7(\mathrm{x}) & a_8(\mathrm{x}) & a_9(\mathrm{x}) \end{pmatrix}}_{g(\mathrm{x}) \in G} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{d}q - f(x, y, p, q)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}p - q\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix}}_{\omega(\mathrm{x})}. \tag{2}$$

On se ramène à l'équivalence de deux G-structures, i.e. au système de Pfaff $\phi^*\bar{\theta} = \theta$ en posant $\theta = g\omega$ et $\bar{\theta} = \bar{g}\bar{\omega}$.

3. Le semi-invariant I

Après quatre normalisations, on obtient les équations de structure suivantes

$$\begin{cases} \mathrm{d}\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^3 + I_1 \theta^2 \wedge \theta^4, \\ \mathrm{d}\theta^2 = \pi^1 \wedge \theta^2 + 2\pi^5 \wedge \theta^2 - \theta^3 \wedge \theta^4, \\ \mathrm{d}\theta^3 = \pi^1 \wedge \theta^3 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^5 \wedge \theta^3 - \theta^1 \wedge \theta^4, \\ \mathrm{d}\theta^4 = \pi^3 \wedge \theta^2 + \pi^4 \wedge \theta^3 + \pi^5 \wedge \theta^4, \end{cases} \tag{3}$$

faisant apparaître l'invariant $I_1 = I/a_9^3$ en posant

$$I = -\tfrac{1}{3} f_p f_q + \tfrac{1}{2} D_x f_p - \tfrac{1}{6} D_x^2 f_q - f_y + \tfrac{1}{3} f_q D_x f_q - \tfrac{2}{27} f_q^3 \tag{4}$$

la dérivation totale étant notée $D_x := \partial/\partial x + p\partial/\partial y + q\partial/\partial p + f(x, y, p, q)\partial/\partial q$.

D'après Wünschmann, la nullité du semi-invariant I signifie que la condition de contact de deux courbes intégrales voisines solutions de l'équation (1) est une équation de Monge du 2eme ordre.

Pour une équation linéaire de la forme

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{5}$$

on a : $I = 1/6a'' + 1/3aa' + 2/27a^3 - 1/3ab - 1/2b' + c$. Vessiot a montré que la condition $I = 0$ traduit l'existence d'un système fondamental de solutions $(y_1, y_2, y_3) = (z_1^2, z_1 z_2, z_2^2)$ telles que les fonctions (z_1, z_2) forment un système fondamental de solutions d'une équation linéaire du 2eme ordre qui se déduit de (5).

4. Le cas $I = 0$

A cette étape, aucune normalisation n'est possible. Après une prolongation et trois normalisations, il faut prolonger encore une fois pour obtenir un système en involution. Les équations de structure obtenues (formules (25) dans [3]) :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{d}\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^6,\\
\mathrm{d}\theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^5 - 2\theta^2 \wedge \theta^9 - \theta^3 \wedge \theta^4,\\
\mathrm{d}\theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^6 - \theta^3 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^9,\\
\mathrm{d}\theta^4 = -\theta^2 \wedge \theta^7 - \theta^3 \wedge \theta^8 - \theta^4 \wedge \theta^9,\\
\mathrm{d}\theta^5 = -2\theta^1 \wedge \theta^8 - \theta^3 \wedge \theta^7 - \theta^4 \wedge \theta^6,\\
\mathrm{d}\theta^6 = -\theta^1 \wedge \theta^7 - \theta^3 \wedge \theta^{10} + \theta^6 \wedge \theta^9,\\
\mathrm{d}\theta^7 = I_1\theta^1 \wedge \theta^2 + I_2\theta^1 \wedge \theta^3 + I_3\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^{10} - \theta^5 \wedge \theta^7 - \theta^6 \wedge \theta^8 + \theta^7 \wedge \theta^9,\\
\mathrm{d}\theta^8 = I_4\theta^1 \wedge \theta^2 + I_5\theta^1 \wedge \theta^3 + I_6\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^4 \wedge \theta^7 - \theta^5 \wedge \theta^8,\\
\mathrm{d}\theta^9 = \theta^1 \wedge \theta^8 - \theta^2 \wedge \theta^{10} + \theta^4 \wedge \theta^6,\\
\mathrm{d}\theta^{10} = I_7\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^5 \wedge \theta^{10} - \theta^6 \wedge \theta^7 - 2\theta^9 \wedge \theta^{10}
\end{array}\right. \tag{6}$$

font apparaître neuf invariants $(I_1, \ldots, I_9)$ fondamentaux. Grâce à l'identité de Poincaré $d(d\theta^i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, on montre que l'algèbre *différentielle* (les dérivations sont *duales* des 1-formes $\theta^1, \ldots, \theta^{10}$) générée par ces neuf invariants est engendrée par l'invariant :

$$I_5 = -\frac{1}{6}\frac{f_{qqqq}}{a_1^3 a_9}. \tag{7}$$

Pour l'équation $y''' = 0$, les neufs invariants fondamentaux sont nuls. Par suite,

THÉORÈME 1. – *L'équation* $y''' = f(x, y, y', y'')$ *se ramène à l'équation* $y''' = 0$ *par une transformation de contact si et seulement si* $I = 0$ *et* $f_{qqqq} = 0$.

5. Le cas $I \neq 0$

Dans ce cas, on normalise l'invariant I/a_9^3 à 1 en posant $a_9 = J = \sqrt[3]{I}$, ce qui conduit aux équations de structure (formules (32), (33) dans [3]) suivantes comportant 16 invariants fondamentaux $(I_1, \ldots, I_{16})$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{d}\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^5 + I_1\theta^2 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4 + I_2\theta^3 \wedge \theta^4,\\
\mathrm{d}\theta^2 = I_3\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^5 - \theta^3 \wedge \theta^4,\\
\mathrm{d}\theta^3 = I_4\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^4 + I_5\theta^2 \wedge \theta^3 + I_6\theta^2 \wedge \theta^4 - \theta^3 \wedge \theta^5,\\
\mathrm{d}\theta^4 = I_7\theta^1 \wedge \theta^2 + I_8\theta^1 \wedge \theta^3 + I_9\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{10}\theta^2 \wedge \theta^4,\\
\mathrm{d}\theta^5 = I_{11}\theta^1 \wedge \theta^2 + I_{12}\theta^1 \wedge \theta^3 + I_{13}\theta^1 \wedge \theta^4 + I_{14}\theta^2 \wedge \theta^3 + I_{15}\theta^2 \wedge \theta^4 + I_{16}\theta^3 \wedge \theta^4.
\end{array}\right. \tag{8}$$

L'identité $\mathrm{d}(\mathrm{d}\theta^i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 5$ permet de montrer que l'algèbre différentielle générée par ces 16 invariants est engendrée par les quatre invariants (on a $I_6 = I_2$) :

$$\left\{\begin{array}{l}
I_8 = \dfrac{J_{qq}}{J a_1^2},\\[2mm]
I_3 = \dfrac{-8J_q f_q J + 2 f_{qq} J^2 - 12 J_p J + 12 J_q D_x J}{3J^3 a_1},\\[2mm]
I_{10} = -\dfrac{D_x J_p - D_x^2 J_q - J_y}{J^3 a_1},\\[2mm]
I_2 = \dfrac{-3J^2 f_p - J^2 f_q^2 + 3J^2 D_x f_q - 6J D_x^2 J + 9(D_x J)^2}{6J^4}.
\end{array}\right. \tag{9}$$

Pour l'équation générale (1), la 1-forme invariante θ^4 vaut

$$\theta^4 = J\,\mathrm{d}x + (J_p - D_x J_q)(\mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x) + J_q(\mathrm{d}p - q\,\mathrm{d}x). \tag{10}$$

La nullité de la 2-forme invariante $\mathrm{d}\theta^4$ est une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse fixer le semi-invariant $I = (J)^3$ à la valeur 1. En posant $\theta^4 = \mathrm{d}x$, on a alors :

$$\theta^5 = \frac{1}{3} f_q \,\mathrm{d}x + \frac{1}{18}(6 f_{pq} - 3 D_x f_{qq} - f_{qq} f_q)(\mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x) + \frac{2}{3} f_{qq}(\mathrm{d}p - q\,\mathrm{d}x) + \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \tag{11}$$

THÉORÈME 2. – *Soit une équation* $y''' = f(x, y, y', y'')$ *telle que* $I \neq 0$*. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *L'équation est linéarisable sous la forme* (5) *par une transformation de contact.*
(ii) *Les invariants définis en* (8)*, sauf éventuellement* $I_2 = I_6$*, sont nuls.*
(iii) *Les* 2*-formes* $\mathrm{d}\theta^4$ *et* $\mathrm{d}\theta^5$ *définies en* (8)*,* (10) *et* (11) *sont nulles.*

Pour l'équation linéaire (5), une transformation ponctuelle de la forme $\bar{x} = \xi(x)$ et $\bar{y} = \eta(x)y$ ne modifie pas le semi-invariant $I = 1$ mais permet de se ramener au cas $a(x) = 0$. On a alors $I_2 = (1/2)b(x)$ et $I = -(1/2)b'(x) + c(x) = 1$. Par suite, l'équation linéaire se ramène à la forme *canonique*

$$y''' + b(x)y' + \bigl(1 + 1/2b'(x)\bigr)y = 0. \tag{12}$$

Le cas $I_2 = 0$ correspond à l'équation $y''' + y = 0$ étudiée par Chern [3].

Références bibliographiques

[1] E. Cartan, Les problèmes d'équivalence, in : Oeuvres complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1953, pp. 1311–1334.
[2] S.S. Chern, Sur la géométrie d'une équation différentielle du troisième ordre, C. R. Acad. Sci. Paris (1937) 1227.
[3] S.S. Chern, The geometry of the differential equation $y''' = f(x, y, y', y'')$, Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. 4 (1940) 97–111.
[4] R.B. Gardner, The Method of Equivalence and its Applications, SIAM, Philadelphia, 1989.
[5] P.J. Olver, Equivalence, Invariants and Symetry, in: Graduate Texts in Math., Cambridge University Press, 1995.
[6] H. Sato, A.Y. Yoshikawa, Third order ordinary differential equations and Legendre connections, J. Math. Soc. Japan 50 (4) (1998) 993–1013.