ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. VESSIOT

Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 10, nº 2 (1896), p. D 1-D 14.
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1896_1_10_2_D1_0>

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — Sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique plane.

Toute courbe algébrique plane peut être transformée birationnellement en une autre courbe algébrique plane n'admettant pas d'autres points multiples que des points doubles à tangentes distinctes.

On a donné bien des démonstrations de ce théorème; la suivante, qui se rapproche de celle qui a été exposée par MM. Appell et Goursat dans leur Ouvrage sur les fonctions algébriques, ne paraîtra cependant peut-être pas dénuée d'intérêt, à cause de sa simplicité et de son entière rigueur.

Rappelons d'abord une propriété des *cycles* des courbes algébriques. Un cycle de degré n peut être représenté d'une infinité de manières sous la forme

$$(1)\qquad x = x_0 + t^n, \qquad y = y_0 + a_1 t^n + a_2 t^{2n} + \ldots + a_k t^{kn} + b_1 t^{kn+r} + \ldots,$$

avec les conditions

$$(2)\qquad k \geqq 1, \qquad 0 < r < n, \qquad b_1 \neq 0,$$

x et y désignant, dans un système quelconque de coordonnées trilinéaires, le rapport de deux des coordonnées à la troisième. Le nombre k est le même dans tous ces modes de représentation du cycle : nous l'appellerons, pour abréger le langage, le *rang* du cycle.

Pour établir ce lemme, nous remarquons que ce nombre k peut-être défini par la propriété suivante : pour l'origine du cycle, les k premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}$ restent finies, tandis que la suivante $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}$ devient infinie. On le voit immédiatement en tirant des équations (1) la valeur de y en fonction de x

$$y = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_k(x - x_0)^k + b_1(x - x_0)^{k+\frac{r}{n}} + \ldots,$$

et prenant les dérivées successives du second membre par rapport à x.

Cela posé, une transformation de coordonnées quelconque est définie par des formules

$$X = \frac{A}{C}, \qquad Y = \frac{B}{C},$$

où A, B, C sont des fonctions linéaires de x et y ; et, pour qu'elle conduise à des formules de la même forme que les équations (1), il faut et il suffit, d'abord que C reste finie pour l'origine du cycle, et en second lieu que la tangente au cycle ne soit pas parallèle à la droite $A = 0$, c'est-à-dire que $\frac{dY}{dX}$ reste aussi finie pour l'origine du cycle. Cette dérivée est de la forme

$$\frac{dY}{dX} = \frac{B_1 + B_2\frac{dy}{dx}}{A_1 + A_2\frac{dy}{dx}},$$

et l'on a

$$\frac{dx}{dX} = \frac{C^2}{A_1 + A_2\frac{dy}{dx}};$$

et l'on en conclut que la dérivée $\frac{d^qY}{dX^q}$ a pour dénominateur une puissance de l'expression $\left(A_1 + A_2\frac{dy}{dx}\right)$, qui ne s'annule pas pour l'origine du cycle, en vertu de l'hypothèse, et pour numérateur un polynome en $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^qy}{dx^q}$, qui reste donc fini en ce point, tant que q ne dépasse pas k.

Le nombre k ne peut donc pas diminuer par une transformation de coordonnées, et, par suite, ne peut pas augmenter non plus, à cause de la transformation inverse. Le lemme annoncé est donc établi ([1]).

([1]) Cette remarque nous paraît indispensable pour donner aussi à la démonstration de MM. Appell et Goursat, à laquelle nous faisions allusion en commençant, une entière rigueur.

Considérant une courbe algébrique plane quelconque, appliquons-lui la transformation Θ formée par le produit des deux suivantes : 1° une transformation projective *générale* T; 2° la transformation T′ définie par les formules

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3}$$

où $f = 0$ est l'équation de la courbe considérée $\mathcal{C}$, après la transformation projective T. Pour la commodité du langage, nous interpréterons x et y comme des coordonnées cartésiennes, et, à cause de l'indétermination de la transformation T, on pourra supposer que les axes de coordonnées occupent, par rapport à la courbe $\mathcal{C}$, une position tout à fait quelconque.

Le théorème résultera des remarques suivantes :

(*a*). *La transformation Θ est birationnelle.* — En effet, les points de contact des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$, qui sont parallèles à une direction donnée, sont, quelle que soit cette direction, en nombre limité : car ce sont les points communs à cette courbe, supposée indécomposable, et à la courbe de degré moindre

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

dont l'équation ne peut se réduire à une identité, puisqu'on aurait alors, pour tous les points de $\mathcal{C}$, $\frac{dy}{dx} = \text{const.}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ serait une droite, cas que l'on peut écarter. L'ensemble des droites D joignant deux points en lesquels les tangentes sont parallèles ne dépend donc que d'un paramètre : on peut par suite supposer l'axe des y, qui est arbitraire, tellement choisi qu'il ne soit parallèle qu'à un nombre limité de ces droites, c'est-à-dire qu'en général à un point (ξ, η) de la courbe transformée $\mathcal{C}'$ ne correspond qu'un point de la courbe $\mathcal{C}$.

(*b*). *La transformation Θ n'élève le degré d'aucun cycle.* — Cela résulte immédiatement de la première des équations (3). En particulier, tout cycle linéaire reste linéaire.

(*c*). Étudions maintenant l'*effet de la transformation* Θ *sur un cycle non linéaire.* On peut supposer (grâce à la transformation T) ce cycle représenté par les équations (1), d'où l'on déduit

$$\xi = x_0 + t^n, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 t^n + \ldots + k a_k t^{(k-1)n} + \left(k + \frac{r}{n}\right) b_1 t^{(k-1)n+r} + \ldots.$$

Si donc le rang k est plus grand que 1, le rang du cycle transformé sera inférieur d'une unité, sans que le degré ait changé. Si le rang k est égal à 1, il vient

$$\xi = x_0 + t^n, \qquad \eta = a_1 + \left(1 + \frac{r}{n}\right) b_1 t^r + \ldots,$$

et comme $r < n$, on en déduit, par le procédé classique du retour inverse des suites, que la transformation Θ abaisse dans ce cas le degré du cycle.

On conclut de là que, *par une suite de transformations* Θ, *on peut ramener la courbe à n'avoir plus que des cycles linéaires.* Supposons donc ce premier résultat obtenu, et montrons qu'on peut faire en sorte qu'il n'y ait jamais plus de deux de ces cycles ayant même origine, et que deux tels cycles n'aient pas même tangente. C'est, sous une autre forme, le théorème à démontrer, et cela va résulter de quelques nouvelles remarques.

(*d*). Soient deux cycles de la courbe $\mathfrak{S}$ ayant même origine : on peut (grâce à la transformation T) les supposer représentés par les formules

$$x = x_0 + t, \qquad y = y_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_h t^h + a_{h+1} t^{h+1} + \ldots,$$

$$x = x_0 + t, \qquad y = y_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_h t^h + a'_{h+1} t^{h+1} + \ldots \qquad (a'_{h+1} \neq a_{h+1}),$$

et les cycles transformés sont alors

$$\xi = x_0 + t, \qquad \eta = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + h a_h t^{h-1} + (h+1) a_{h+1} t^h + \ldots,$$

$$\xi = x_0 + t, \qquad \eta = \qquad a_1 + 2a_2 t + \ldots + h a_h t^{h+1} + (h+1) a'_{h+1} t^h + \ldots.$$

Si donc $h = 0$, les cycles transformés n'ont plus même origine; si $h = 1$, ils ne sont plus tangents; si $h > 1$, leur ordre de contact est inférieur à celui des cycles primitifs.

(*e*). *La transformation* Θ *n'introduit, comme points multiples nouveaux, que des points doubles.* Les points multiples introduits proviennent de la réunion des points de la courbe $\mathfrak{S}$ qui ont même abscisse et des tangentes parallèles; il s'agit donc de démontrer qu'on peut, par la transformation T, faire en sorte qu'il ne puisse y avoir plus de deux points ayant même abscisse et des tangentes parallèles, et que parmi ces deux points, aucun ne soit déjà un point multiple de $\mathfrak{S}$.

Comme on dispose en particulier de la direction de l'axe des y, il suffit de montrer que les droites qui rencontrent $\mathcal{C}$ en trois points où les tangentes soient parallèles sont en nombre limité [1]. Or cela revient à dire que, si l'on considère les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à une direction, il n'y a pas, quelle que soit cette direction, trois points de contact en ligne droite. Comme, de plus, $\mathcal{C}$ n'est déterminée qu'à une transformation projective près (T), on peut faire cette hypothèse à moins que la courbe donnée n'ait cette propriété que, parmi les points de contact des tangentes issues d'un point *quelconque* P, il y en ait toujours trois en ligne droite : M, M_1, M_2.

Examinons ce qui en résulterait : P variant d'une manière continue, les points M, M_1, M_2 varient aussi d'une manière continue, car ils sont déterminés par une équation algébrique, dont les coefficients dépendent rationnellement des coordonnées de P. Si donc P se déplace sur la tangente en M à la courbe, la droite M_1M_2 pivotera autour du point M et les tangentes en M_1 et M_2 iront toujours se couper sur la tangente fixe en M. Si, par une projection, nous rejetons cette tangente à l'infini, nous aurons une courbe que toutes les droites parallèles à une même direction, celle de l'axe des y par exemple, couperont en deux points où les tangentes sont parallèles : soient (x, y), (x', y') ces deux points, qui varient en même temps d'une manière continue. Comme on a à la fois $x' = x$, $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, on en conclut $y' = y + a$, c'est-à-dire que la courbe admet une translation : puisqu'elle est indécomposable, elle se réduirait donc à une droite [2]. Même ainsi, du reste, l'hypothèse examinée est impossible.

(f). *Les points doubles introduits ont des tangentes distinctes.* — Nous servant toujours du même mode de raisonnement, il nous suffira de démontrer qu'il n'y a pas, sur la courbe $\mathcal{C}$, une infinité de couples de points pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ aient même valeur. Soient en effet $(x, y)(x', y')$ les deux points d'un tel couple : ils varieraient ensemble d'une manière conti-

---

(1) Par les droites D joignant deux points où les tangentes sont parallèles, et dont l'une est un point multiple, un raisonnement fait plus haut montre qu'elles sont aussi en nombre limité. On peut donc supposer que l'axe des y n'est parallèle à aucune d'elles.

(2) On peut le montrer ainsi. L'équation $f(x, y) = 0$ doit être identique à chacune des équations $f(x, y + na) = 0$, où n est un entier arbitraire; développant cette dernière par la formule de Taylor, on en conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identiquement nul; si l'équation est irréductible, elle est donc de la forme $x = \text{const.}$

nue, et des relations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2},$$

on déduirait

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{dx}{dx'}\right) = 0.$$

Donc ou bien $\frac{dy}{dx}$ est constant pour une suite continue de points de la courbe, qui est une droite; ou bien on a une infinité continue de couples de points, pour lesquels on a

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b;$$

mais c'est dire que la courbe admet une translation, et c'est encore une droite (1).

On voit donc bien que, par une suite de transformations Θ, on détruira tous les points multiples anciens, et qu'ils ne seront remplacés que par des points doubles à tangentes distinctes. Le théorème est donc démontré.

II. — Sur l'application du théorème d'Abel a la Géométrie.

On sait que l'on déduit immédiatement du théorème d'Abel certaines conditions transcendantes que doivent remplir nq points d'une courbe indécomposable de degré n donnée C, pour constituer le système des points d'intersections de cette courbe C avec une courbe quelconque de degré q, C_q. Pour démontrer que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, Clebsch, et les auteurs qui ont repris la question après lui, se servent des résultats du *problème de l'inversion* de Jacobi, et du *problème de l'inversion généralisé*. La démonstration que nous allons indiquer est tout autre. Elle s'appliquerait facilement au cas où la courbe C a des singularités quelconques : pour simplifier nous nous bornerons, avec Clebsch, au cas où elle ne présente que des points doubles à tangentes distinctes ou à rebroussement simple (dit de première espèce), qu'on peut supposer tous à distance finie.

---

(1) Si l'on considère comme évidentes les remarques (e) et (f), comme le font MM. Appell et Goursat pour des points analogues de leur démonstration, on arrive au but plus rapidement. Mais les explications que nous donnons nous paraissent indispensables pour mettre les deux faits en question tout à fait hors de doute.

Nous pouvons supposer aussi que les asymptotes sont toutes à distance finie, et qu'aucune n'est parallèle à l'axe des y.

1. *Cas des courbes adjointes.* — Nous nous servirons du lemme suivant :

Toute intégrale abélienne de la courbe considérée $f(x, y) = 0$, n'ayant pas de point singulier à distance finie, est de la forme

$$\int \Phi(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

où $\Phi(x, y)$ est un polynome adjoint. La démonstration est toute semblable à celle qui est donnée par MM. Appell et Goursat, au Chapitre VII de l'Ouvrage déjà cité, pour établir la forme des intégrales de première espèce. Nous admettons donc ce lemme et passons à la proposition à établir, qui peut s'énoncer ainsi qu'il suit, en désignant par d le nombre total des points doubles de C, et par $u_1(x, y)$, ..., $u_p(x, y)$ un système d'intégrales normales de première espèce attachées à cette courbe :

Deux systèmes de $nq - 2d = s$ points de la courbe considérée

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_s, b_s), \tag{1}$$

$$(a'_1, b'_1), \quad (a'_2, b'_2), \quad \ldots, \quad (a'_s, b'_s), \tag{2}$$

étant liés par les relations

$$\sum_{k=1}^{s} u_h(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_s, b'_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p), \tag{3}$$

où les périodes sous-entendues par les signes $\equiv$ sont des périodes correspondantes, si l'un des systèmes constitue le système des points d'intersection (mobiles) d'une courbe adjointe de degré q avec la courbe proposée, il en est de même de l'autre.

Soit, en effet, $g(x, y) = 0$ la courbe adjointe que l'on suppose couper C, en plus des points doubles, aux points (2) par exemple. Les systèmes (1) et (2) peuvent avoir un certain nombre de points communs : désignons par (P) leur ensemble, par (M) celui des autres points (1), par (M′) celui des autres points (2). Si l'on supprime les termes communs aux deux membres dans les relations (3), elles expriment, en vertu de la réciproque du théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, qu'il existe une fraction rationnelle $R(x, y)$ admettant pour infinis les points (M') et pour zéros les points (M). Si nous considérons alors l'intégrale abélienne

$$\int R(x, y) \frac{g(x, y)\, dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

on voit facilement qu'elle n'a aucun point singulier à distance finie; elle est donc, en vertu du lemme, de la forme

$$\int h(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$h(x, y) = 0$ étant une nouvelle courbe adjointe, c'est-à-dire que l'on a

$$R(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)},$$

et, par suite, les zéros de $h(x, y)$ doivent être, en plus des points doubles de C, qui comptent pour $2d$, les points (M), zéros de R, et les points (P), zéros de $g(x, y)$ qui ne sont pas des infinis de R. La courbe $h(x, y) = 0$ est donc une courbe adjointe ayant les points (1) pour ses points d'intersection (mobiles) avec C et, dès lors, est en plus de degré q. Le théorème est donc établi.

2. *Cas des courbes non adjointes.* — Parmi les points doubles de la courbe, on met à part p' points à tangentes distinctes, que nous appellerons les points (A), et p'' points de rebroussement, que nous nommerons les points (B). A chacun des premiers correspond, comme l'on sait, une intégrale normale de troisième espèce

$$\varpi_i(x, y) = \int \psi_i(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

et à chacun des points (B) une intégrale normale de seconde espèce

$$\zeta_j(x, y) = \int \chi_j(x, y) \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p'');$$

chacune des courbes $\psi_i = 0$, $\chi_j = 0$ étant de degré $n - 3$, et passant par tous les points multiples de la courbe C, sauf le point correspondant. Cela posé, le théorème à établir peut s'énoncer ainsi :

Deux systèmes de $s = nq - 2(d - p' - p'')$ points de la courbe considérée

$$(1) \qquad (a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_s, b_s),$$

$$(2) \qquad (a'_1, b'_1), \quad (a'_2, b'_2), \quad \ldots, \quad (a'_s, b'_s),$$

étant liés par les $p + p' + p''$ relations

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{s} u_h(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} u_h(a'_s, b'_s) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} \varpi_i(a'_s, b'_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p'),$$

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a_s, b_s) \equiv \sum_{k=1}^{s} \zeta_j(a'_s, b'_s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p''),$$

où les périodes sous-entendues par les divers signes $\equiv$ sont des périodes correspondantes (en tant que périodes cycliques), si l'un des systèmes constitue le système des points d'intersection (mobiles) de la courbe proposée C *avec une courbe de degré q, assujettie à passer par tous les points multiples de* C, *autres que les points* (A) *et* (B), *il en est de même de l'autre système de points.*

Désignons encore par $g(x, y) = 0$ la courbe de degré q, dont le système complet des points d'intersection avec C se compose, par hypothèse, des points doubles de C autres que les points (A) et (B) (chacun compté double) et des s points (2). Représentons de nouveau par (P) l'ensemble des points communs à (1) et (2), par (M) et (M′) l'ensemble des autres points (1) et (2), respectivement; et imaginons qu'on ait rayé les termes communs aux deux membres de chacune des égalités (3), (4) et (5). Cela fait, en vertu des égalités (3) et de la réciproque du théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, il existe une fraction rationnelle $R(x, y)$ ayant pour ses zéros les points (M) et, pour ses infinis, les points (M′). Si, de plus, on compare les égalités (3), (4), (5), à celles que fournit l'application à cette fraction rationnelle R du théorème d'Abel pour chacune des intégrales u_h, ϖ_i, ζ_j, on voit que cette fonction R jouit des propriétés suivantes : 1° en chacun des points (A), elle prend la même valeur sur les deux branches de la courbe qui se coupent en ce point; 2° en chacun des points (B), la différentielle dR est nulle.

Si l'on considère alors de nouveau l'intégrale abélienne

$$\mathrm{I}=\int \mathrm{R}(x, y)\,\frac{g(x, y)\,dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

on voit sans peine : d'abord, qu'elle n'a d'autres points singuliers possibles à distance finie que les points de la courbe superposés aux points (A), et les points (B); et, ensuite, qu'en ces points elle devient infinie comme les fonctions $\lambda_i \varpi_i$, $\mu_j \zeta_j$ respectivement, les λ et μ étant des constantes convenablement choisies.

Dès lors, l'intégrale abélienne

$$\mathrm{I}-\sum_{i=1}^{p'} \lambda_i \varpi_i-\sum_{j=1}^{p''} \mu_j \zeta_j$$

est, d'après le même lemme que dans le premier cas, de la forme

$$\int \Phi(x, y)\,\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

Φ étant un polynome adjoint, et l'on en conclut que $\mathrm{R}(x, y)$ est de la forme

$$\mathrm{R}(x, y)=\frac{\Phi(x, y)+\Sigma \lambda_i \psi_i(x, y)+\Sigma \mu_j \chi_j(x, y)}{g(x, y)}=\frac{h(x, y)}{g(x, y)},$$

où la courbe $h(x, y)=0$ passe visiblement par tous les points doubles de C autres que les points (A) et les points (B). Comme, de plus, ses autres points communs avec C doivent être, à cause des zéros et des infinis de R, les points (M) et les points (P), il en résulte qu'elle est de degré q et que c'est la courbe annoncée.

III. — Remarque sur les transformations rationnelles des courbes algébriques.

Supposons qu'à la courbe algébrique de genre p

(C) $$f(x, y)=0$$

corresponde, par une *transformation simplement rationnelle*

$$\text{(T)} \qquad \xi = \mathrm{M}(x, y), \qquad \eta = \mathrm{N}(x, y),$$

une courbe algébrique de genre inférieur ϖ

$$(\gamma) \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

de sorte qu'à un point quelconque (ξ, η) de courbe γ correspondent, par exemple, q points de (C)

$$(1) \qquad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_q, y_q).$$

Désignons par Σ une surface de Riemann correspondant à la courbe (γ), et S une surface de Riemann correspondant à la courbe (C), et qu'on peut se représenter, par exemple, comme formée de q feuillets appliqués sur Σ, en prenant pour Σ une surface fermée avec ϖ trous [1]. Le point (ξ, η) se déplaçant d'une manière continue sur Σ, les q points (1) se déplacent aussi d'une manière continue sur S; et si le point (ξ, η) décrit ainsi sur Σ un contour fermé, il en résulte une certaine permutation des points (1). De plus, la surface S étant connexe, puisque la courbe (C) est supposée indécomposable, on peut choisir le contour fermé par lequel (ξ, η) revient à sa position initiale, de façon que deux quelconques des points (1), choisis à l'avance, se succèdent par la permutation correspondante.

Cela posé, soit $u(x, y)$ une intégrale de première espèce, quelconque, de la courbe (C), et considérons la somme

$$(2) \qquad u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q).$$

Si on lui applique le raisonnement célèbre par lequel Riemann démontre le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce, on voit que c'est une fonction de (ξ, η), dont la différentielle est rationnelle, et qui reste finie en tout point de Σ. C'est donc une intégrale de première espèce [2] $w(\xi, \eta)$ de la courbe (γ)

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{q} u(x_k, y_k) = w(\xi, \eta).$$

---

(1) Cette idée a été déjà utilisée par M. Hurwitz dans son Travail : *Ueber Algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (*Math. Annalen*, t. XLI).

(2) Ce résultat a été aussi indiqué par M. Hurwitz dans une note de son Mémoire *Sur le Principe de correspondance* (*Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wiss.*, 1886); mais les remarques qui suivent nous paraissent nouvelles.

Écrivons les relations de cette forme pour p intégrales de première espèce indépendantes attachées à la courbe (C)

$$\sum_{k=1}^{q} u_h(x_k, y_k) = w_h(\xi, \eta) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{4}$$

Comme la courbe (γ) est de genre $\varpi < p$, les seconds membres sont fonctions linéaires à coefficients constants de ϖ intégrales $w(\xi, \eta)$ seulement. On peut donc choisir les intégrales $u_h(x, y)$ de manière que, dans $p - \varpi$ au moins des relations (4), les seconds membres soient constants. Il est du reste impossible que cela ait lieu dans plus de $p - \varpi$ de ces relations, car toute intégrale $w(\xi, \eta)$ se change, par la transformation (T), en une intégrale de première espèce de (C) que l'on peut représenter par $\frac{1}{q} u(x, y)$, de sorte qu'on peut écrire

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{q} u(x_1, y_1) = \frac{1}{q} u(x_2, y_2) = \ldots = \sum_{k=1}^{q} u(x_k, y_q).$$

On doit donc obtenir, dans les seconds membres des équations (4), ϖ intégrales indépendantes et, par suite, on en peut déduire *exactement* $p - \varpi$ relations de même forme, à seconds membres constants. On peut donc énoncer le résultat suivant :

A la transformation simplement rationnelle considérée correspond un système de $p - \varpi$ intégrales abéliennes de première espèce de la courbe (C), $U_h(x, y)$, *linéairement indépendantes, telles que les différents points* (1) *qui correspondent à un même point de la courbe transformée* (γ) *sont liés, quel que soit ce point, par les $p - \varpi$ relations transcendantes*

$$\sum_{k=1}^{q} U_h(x_h, y_k) \equiv K_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, p - \varpi), \tag{5}$$

où les seconds membres sont des constantes.

Ces relations (5), qui rappellent d'une manière frappante les équations du théorème d'Abel pour les intégrales abéliennes, peuvent être considérées comme en fournissant une généralisation. Car on retombe sur le théorème d'Abel lui-même, si l'on suppose que la courbe (γ) est unicursale : on peut en effet supposer alors qu'on ait fait en sorte, par une transformation birationnelle, que η soit une fonction rationnelle de ξ, et alors les points (1) sont les zéros de l'équation $\xi = M(x, y)$.

A un autre point de vue, le résultat précédent est lié à la question si importante de la réduction des intégrales abéliennes. Nous allons montrer en effet que *les intégrales* $U_h(x, y)$ *constituent un système de* $p - \varpi$ *intégrales de première espèce, se réduisant au genre* $p - \varpi$.

Pour le démontrer, reprenons la relation générale (3). Supposons qu'on ait tracé sur Σ et sur S respectivement deux systèmes de sections canoniques, et désignons par $a_1 \ldots a_p$, $b_1 \ldots b_p$ les modules de périodicité de l'intégrale $u(x, y)$, par $\alpha_1 \ldots \alpha_\varpi$, $\beta_1 \ldots \beta_\varpi$ ceux de l'intégrale $w(\xi, \eta)$. Si le point (ξ, η) décrit un cycle quelconque, chacun des points (1) pourra traverser une ou plusieurs sections canoniques de S, une ou plusieurs fois, de sorte que le premier membre de l'identité (3) reprendra la même valeur augmentée de certains multiples des modules de périodicité de $u(x, y)$, ces multiples ne dépendant que du contour décrit par le point (ξ, η) et non de l'intégrale considérée. Si donc on prend pour ce contour, successivement, chacune des courbes dont les deux bords forment les sections canoniques de Σ, on obtiendra 2ϖ relations de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{p} m_{kh} a_h + \sum_{h=1}^{p} n_{kh} b_h = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi), \\ &\sum_{h=1}^{p} m'_{kh} a_h + \sum_{h=1}^{p} n'_{kh} b_h = \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi), \end{aligned}\right.$$

où les entiers m_{kh}, n_{kh}, m'_{kh}, n'_{kh} sont les mêmes, quelle que soit l'intégrale considérée $u(x, y)$.

De plus, les premiers membres des relations (6) sont 2ϖ formes linéaires des a_h et des b_h, linéairement indépendantes, car nous avons vu qu'on peut choisir $u(x, y)$ de manière que $w(\xi, \eta)$ soit une intégrale de première espèce *quelconque* de la courbe (γ), de sorte que les 2ϖ périodes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varpi$, $\beta_1, \ldots, \beta_\varpi$ sont indépendantes.

Dès lors, si nous appliquons les relations (6) aux intégrales $U_h(x, y)$, les intégrales $w(x, y)$ correspondantes sont des constantes, en vertu des relations (5), et les seconds membres des relations (6) sont nuls. Les modules de périodicité de ces différentes intégrales sont donc liés par les

2ϖ relations indépendantes

$$\sum_{h=1}^{p} m_{kh} \mathrm{A}_{jh} + \sum_{h=1}^{p} n_{kh} \mathrm{B}_{jh} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi),$$

$$\sum_{h=1}^{p} m'_{kh} \mathrm{A}_{jh} + \sum_{h=1}^{p} n'_{kh} \mathrm{B}_{jh} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varpi)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p - \varpi)$$

et, par suite, s'expriment par les mêmes combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un certain système de $2(p - \varpi)$ périodes indépendantes.

Si nous remarquons enfin que, d'après ce qui précède, on peut associer aux $p - \varpi$ intégrales $\mathrm{U}_h(x, y)$, pour constituer un système de p intégrales indépendantes de première espèce attachées à la courbe C, ϖ intégrales provenant des intégrales de (γ) par la transformation (P) et qui, par suite, se réduisent de leur côté au genre ϖ, nous voyons que nous retrouvons ici, avec l'*interprétation des deux systèmes d'intégrales réductibles*, un cas particulier du théorème général donné par M. Picard dans le cas de $p = 2$, puis par M. Poincaré dans le cas général : *Lorsqu'un système de ϖ intégrales abéliennes de première espèce, d'une courbe de genre p, s'abaisse au genre ϖ, il existe un système complémentaire de $p - \varpi$ intégrales de première espèce de la même courbe, s'abaissant au genre $p - \varpi$.*