C. YUEN
KŌDAI MATH. SEM. REP.
28 (1977), 197—210

SUR LES FIBRES TANGENTS D'ORDRE 2

BY CHRISTOPHE YUEN

Dans ce article on généralise aux fibrés tangents d'ordre 2 les résultats sur les relèvements de dérivations aux fibrés tangents [4]. Si M est une variété différentiable de dimension finie, on désigne par $\tau_2(M)=(T_2M, \pi, M)$ le fibré tangent d'ordre 2 de M. On associe à toute dérivation D de l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}(M)$ des champ de tenseurs sur M, une dérivation D^{II} de $\mathfrak{T}(T_2M)$, appelée le relèvement de D à T_2M. L'application $D\to D^{II}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. De même, on définit le relèvement d'une dérivation de l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ des formes différentielles sur M à T_2M. D'une façon générale on peut définir les relèvements de dérivations aux fibrés tangents d'ordre supérieur et la plupart des résultats restent encore valables.

Dans la deuxième partie on étudie certaines 1-forme vectorielles h sur T_2M et les dérivations i_h et d_h de Frölicher-Nijenhuis attachées à la 1-forme vectorielle h. Ces dérivations donnent un calcul différentiel sur le fibré tangent d'ordre 2.

PARTIE I

Relèvements de dérivations aux fibrés tangents d'ordre 2

1. Relèvements des tenseurs.

Soit M une variété différentiable de dimension finie n. Si $\{x^h\}$ est un système de coordonnées locales sur un ouvert U de M, un jet $j_0{}^2F$ d'ordre 2 de $\boldsymbol{R}$ dans U, d'origine $O\in\boldsymbol{R}$, peut être représenté par(x^h, y^h, z^h) :

$$x^h=F^h(O), \qquad y^h=\frac{dF^h(O)}{dt}, \qquad z^h=\frac{d^2F^h(O)}{dt^2}$$

où l'application $F: R\to U$ a pour l'expression locale : $x^h=F^h(t)$, $t\in\boldsymbol{R}$. L'ensemble des jets d'ordre 2, d'origine $O\in\boldsymbol{R}$, de $\boldsymbol{R}$ dans M forme une variété différentiable T_2M. Si π est la projection naturelle de T_2M sur M, $\{x^h, y^h, z^h\}$ forme un système de coordonnées locales sur $\pi^{-1}(U)$.

Soit $f\in\mathfrak{F}(M)$ une fonction différentiable sur M. On peut écrire localement : $f=f(x)$ sur U. Les fonctions sur $\pi^{-1}(U)$ définies par :

Received Oct. 22, 1975.

$$f^0=f(x)\,; \qquad f^I=y^i\partial_i f(x)\,; \qquad f^{II}=z^i\partial_i f(x)+\frac{1}{2}y^j y^i\partial_j\partial_i f(x)$$

déterminent trois fonctions globales sur T_2M, notées respectivement par f^0, f^I et f^{II}. Un champ de vecteurs sur T_2M est complètement déterminé par ses actions sur les fonctions f^{II}, avec $f\in\mathcal{F}(M)$.

Soit $X\in\mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs sur M. Localement on peut écrire $X=X^h(\partial/\partial x^h)$ sur U. Les champs de vecteurs sur $\pi^{-1}(U)$ définis par:

$$X^0=X^h\frac{\partial}{\partial z^h}\,;$$

$$X^I=X^h\frac{\partial}{\partial y^h}+(y^i\partial_i X^h)\frac{\partial}{\partial z^h}$$

$$X^{II}=X^h\frac{\partial}{\partial x^h}+(y^i\partial_i X^h)\frac{\partial}{\partial y^h}+\left(z^i\partial_i X^h+\frac{1}{2}y^j y^i\partial_j\partial_i X^h\right)\frac{\partial}{\partial z^h}$$

déterminent trois champs globaux de vecteurs sur T_2M, notés respectivement par X^0, X^I et X^{II}. Un champ de tenseurs de type $(1, s)$ (resp. de type $(0, s)$) sur T_2M est complètement déterminé par ses actions sur les champs de vecteurs X^{II}, avec $X\in\mathcal{X}(M)$.

Soit $\omega\in\Lambda^1(M)$ une 1-forme différentielle sur M. Localement on peut écrire $\omega=\omega_h dx^h$ sur U. Les 1-formes différentielles sur $\pi^{-1}(U)$ définies par:

$$\omega^0=\omega_h dx^h$$

$$\omega^I=(y^i\partial_i\omega_h)dx^h+\omega_h dy^h$$

$$\omega^{II}=\left(z^i\partial_i\omega_h+\frac{1}{2}y^j y^i\partial_j\partial_i\omega_h\right)dx^h+(y^i\partial_i\omega_h)dy^h+\omega_h dz^h$$

déterminent trois 1-formes différentielles globales sur T_2M, notées respectivement par ω^0, ω^I et ω^{II}.

Plus généralement, les relèvements d'un champ de tenseurs sur M à T_2M sont définis par les conditions: soient $R, S, T\in\mathcal{T}(M)$ des champs de tenseurs sur M, on a [3]:

$$(S\otimes T)^0=S^0\otimes T^0\,; \qquad (R+S)^0=R^0+S^0$$

$$(S\otimes T)^I=S^I\otimes T^0+S^0\otimes T^I\,; \qquad (R+S)^I=R^I+S^I$$

$$(S\otimes T)^{II}=S^{II}\otimes T^0+S^I\otimes T^I+S^0\otimes T^{II}\,; \qquad (R+S)^{II}=R^{II}+S^{II}$$

2. Relèvements de dérivations de $\mathcal{T}(M)$.

Soit $\mathcal{T}(M)$ l'algèbre tensorielle des champs de tenseurs sur M. L'ensemble des dérivations de $\mathcal{T}(M)$ forme une $\boldsymbol{R}$-algèbre de Lie, notée par $\mathcal{D}(\mathcal{T}(M))$. Un élément $D\in\mathcal{D}(\mathcal{T}(M))$ est complètement déterminé par ses actions sur $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{X}(M)$. Toute dérivation D de $\mathcal{T}(M)$ se décompose d'une façon unique:

$$D=L_X+i_F$$

où L_X est la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs $X\in\mathcal{X}(M)$ et i_F est la dérivation de $\mathcal{T}(M)$ définie par un champ de tenseurs F de type (1, 1) sur M.

PROPOSITION. *Deux dérivations D et $\bar{D}$ de $\mathcal{T}(T_2M)$ sont identiques si et seulement si*

(a) $Df^{II}=\bar{D}f^{II}$ *pour toute fonction* $f\in\mathcal{F}(M)$;
(b) $DX^{II}=\bar{D}X^{II}$ *pour tout* $X\in\mathcal{X}(M)$.

Preuve: Considérons D et $\bar{D}$ sous sa forme canonique:

$$D=L_X+i_F,\qquad \bar{D}=L_{\bar{X}}+i_{\bar{F}}$$

où $X, \bar{X}\in\mathcal{X}(T_2M)$ et $F, \bar{F}\in\mathcal{T}_1^1(T_2M)$. La condition (a) implique que $Xf^{II}=\bar{X}f^{II}$ pour toute fonction différentiable $f\in\mathcal{F}(M)$, d'où $X=\bar{X}$. La condition (b) implique que

$$[X, Y^{II}]+FY^{II}=[\bar{X}, Y^{II}]+\bar{F}Y^{II}$$

pour tout champ de vecteurs $Y\in\mathcal{X}(M)$. Comme $X=\bar{X}$, on a $FY^{II}=\bar{F}Y^{II}$ pour tout $Y\in\mathcal{X}(M)$. Comme les champs de tenseurs sur T_2M sont complètement déterminés par ses actions sur les champs de vecteurs de la forme Y^{II}, avec $Y\in\mathcal{X}(M)$, on a $F=\bar{F}$. Par conséquent, $D=\bar{D}$. Soit $D=L_X+i_F$ une dérivation de $\mathcal{T}(M)$. On pose

$$D^0=L_{X^0}+i_{F^0};\qquad D^I=L_{X^I}+i_{F^I};\qquad D^{II}=L_{X^{II}}+i_{F^{II}}$$

D^0, D^I et D^{II} sont des dérivations de $\mathcal{T}(T_2M)$, appelées les relèvements de D à T_2M. On a les relations:

PROPOSITION. *Pour toute $f\in\mathcal{F}(M)$ et tout $X\in\mathcal{X}(M)$, on a*

$$D^0f^{II}=(Df)^0;\qquad D^0X^{II}=(DX)^0$$

$$D^If^{II}=(Df)^I;\qquad D^IX^{II}=(DX)^I$$

$$D^{II}f^{II}=(Df)^{II};\qquad D^{II}X^{II}=(DX)^{II}$$

Preuve: Soit $D=L_X+i_F$ une dérivation de $\mathcal{T}(M)$. Pour toute $f\in\mathcal{F}(M)$, on a

$$D^0f^{II}=X^0f^{II}=(Xf)^0=(Df)^0;$$

$$D^If^{II}=X^If^{II}=(Xf)^I=(Df)^I;$$

$$D^{II}f^{II}=X^{II}f^{II}=(Xf)^{II}=(Df)^{II}.$$

Pour tout $Y\in\mathcal{X}(M)$, on a

$$D^0Y^{II}=[X^0, Y^{II}]+F^0Y^{11}=[X, Y]^0+(FY)^0=(DY)^0;$$

$$D^IY^{II}=[X^I, Y^{II}]+F^IY^{II}=[X, Y]^I+(FY)^I=(DY)^I;$$

$$D^{II}Y^{II}=[X^{II}, Y^{II}]+F^{II}Y^{II}=[X, Y]^{II}+(FY)^{II}=(DY)^{II}.$$

THÉORÈME. *L'application $D\mapsto D^{II}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{D}(\mathcal{T}(M))$ vers $\mathcal{D}(\mathcal{T}(T_2M))$.*

Preuve: Soient $D=L_X+i_F$ et $\bar{D}=L_{\bar{X}}+i_{\bar{F}}$ deux dèrivations de $\mathcal{T}(M)$. On vérifie facilement

$$(D+\bar{D})^{II}=D^{II}+\bar{D}^{II};$$

$$(\lambda D)^{II}=\lambda D^{II}, \qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$

Or, le commutateur $[D, \bar{D}]$ peut s'écrire sous la forme:

$$[D, \bar{D}]=L_{[X,\bar{X}]}+i_W$$

où $i_W=[L_X, i_{\bar{F}}]+[i_F, L_{\bar{X}}]+[i_F, i_{\bar{F}}]$ est une dèrivation de $\mathcal{T}(M)$ définie par un champ de tenseurs W de type (1, 1) sur M. La dérivation i_W est complètement déterminée par ses actions sur $\mathcal{X}(M)$. Pour tout champ de vecteurs $Y\in\mathcal{X}(M)$ on a

$$WY=[X, \bar{F}Y]-\bar{F}[X, Y]+F[\bar{X}, Y]-[\bar{X}, FY]+F\bar{F}Y-\bar{F}FY$$

$$\begin{aligned}W^{II}Y^{II}&=(WY)^{II}\\&=[X^{II}, \bar{F}^{II}Y^{II}]-\bar{F}^{II}[X^{II}, Y^{II}]+F^{II}[\bar{X}^{II}, Y^{II}]\\&\quad-[\bar{X}^{II}, F^{II}Y^{II}]+F^{II}\bar{F}^{II}Y^{II}-\bar{F}^{II}F^{II}Y^{II}\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$[D^{II}, \bar{D}^{II}]=L_{[X^{II},\bar{X}^{II}]}+i_{\bar{W}}$$

où

$$i_{\bar{W}}=[L_{X^{II}}, i_{\bar{F}^{II}}]+[i_{F^{II}}, L_{\bar{X}^{II}}]+[i_{F^{II}}, i_{\bar{F}^{II}}]$$ est une

dérivation de $\mathcal{T}(T_2M)$ définie par un champ de tenseurs $\bar{W}$ de type (1, 1) sur T_2M. Pour tout champ de vecteurs $Y\in\mathcal{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned}\bar{W}Y^{II}&=[X^{II}, \bar{F}^{II}Y^{II}]-\bar{F}^{II}[X^{II}, Y^{II}]+F^{II}[\bar{X}^{II}, Y^{II}]\\&\quad-[\bar{X}^{II}, F^{II}Y^{II}]+F^{II}\bar{F}^{II}Y^{II}-\bar{F}^{II}F^{II}Y^{II}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\bar{W}Y^{II}=W^{II}Y^{II}$ pour tout $Y\in\mathcal{X}(M)$. On déduit que $\bar{W}=W^{II}$. Comme $[X^{II}, \bar{X}^{II}]=[X, \bar{X}]^{II}$, on a ainsi démontré que $[D^{II}, \bar{D}^{II}]=[D, \bar{D}]^{II}$.

Les applications $D\to D^0$ et $D\to D^I$ ne sont pas des homomorphismes d'algèbres de Lie car $[X^0, Y^0]=0$ et $[X^I, Y^I]=[X, Y]^0$ pour tout $X, Y\in\mathcal{X}(M)$.

3. Relèvements de dérivations de $\Lambda(M)$.

Soit $\Lambda(M)$ l'algèbre extérieure des formes différentielles sur M. Toute dérivation D de degré r de $\Lambda(M)$ se décompose d'une façon unique [1]:

$$D=i_L+d_N$$

où i_L est une dérivation de type i_*, déterminée par une $(r+1)$-forme vectorielle L sur M et d_N est une dérivation de type d_*, déterminée par une r-forme vectorielle N sur M. On pose

$$D^{II}=i_{L^{II}}+d_{N^{II}}$$

D^{II} est une dérivation de $\Lambda(T_2M)$, appelée le relèvement de D à T_2M.

LEMME. *Soit Q un élément de $\mathcal{T}_s^1(M)$ avec les composantes locales $Q^h{}_{i_1\cdots i_s}$. Les composantes locales $\bar{Q}^A{}_{B_1\cdots B_s}$ de Q^{II} sont données par:*

$$\bar{Q}^h{}_{i_1\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_s})^0$$
$$\bar{Q}^{\bar{h}}{}_{i_1\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_s})^I$$
$$\bar{Q}^{\bar{h}}{}_{i_1\cdots\bar{i}_t\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_t\cdots i_s})^0$$
$$\bar{Q}^{\bar{\bar{h}}}{}_{i_1\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_s})^{II}$$
$$\bar{Q}^h{}_{i_1\cdots\bar{i}_t\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_t\cdots i_s})^I$$
$$\bar{Q}^{\bar{\bar{h}}}{}_{i_1\cdots\bar{i}_t\cdots\bar{i}_r\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_t\cdots i_r\cdots i_s})^0$$
$$\bar{Q}^{\bar{\bar{h}}}{}_{i_1\cdots\bar{\bar{i}}_t\cdots i_s}=(Q^h{}_{i_1\cdots i_t\cdots i_s})^0$$

les autres composantes étant zéros. (Notations: $y^h=x^{\bar{h}}$; $z^h=x^{\bar{\bar{h}}}$)

LEMME. *Soient L et N des formes vectorielles sur M. On a les relations:*

$$(N\bar{\wedge}L)^{II}=N^{II}\bar{\wedge}L^{II}$$
$$[N,L]^{II}=[N^{II},L^{II}]$$

où $[N,L]$ est le crochet de N et L, au sens de Frölicher-Nijenhuis.

Preuve: Si $L\in\Psi^p(M)$ et $N\in\Psi^r(M)$, on a

$$N^{II}\bar{\wedge}L^{II}(u_1{}^{II},\cdots,u^{II}{}_{p+r-1})$$
$$=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum(\operatorname{sgn}\sigma)N^{II}(L^{II}(u^{II}{}_{\sigma(1)},\cdots,u^{II}{}_{\sigma(p)}),u^{II}{}_{\sigma(p+1)},\cdots,u^{II}{}_{\sigma(p+r-1)})$$
$$=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum(\operatorname{sgn}\sigma)\{N(L(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)}),u_{\sigma(p+1)},\cdots,u_{\sigma(p+r-1)})\}^{II}$$
$$=(N\bar{\wedge}L)^{II}(u_1{}^{II},\cdots,u^{II}{}_{p+r-1})$$

On déduit que $N^{II}\bar{\wedge}L^{II}=(N\bar{\wedge}L)^{II}$.

Soit $\{x^i\}$ un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U de M. Si $L\in\Psi^p(M)$ a pour composantes locales $L^i{}_{a_1\cdots a_p}$ et si $N\in\Psi^r(M)$ a pour composantes locales $N^i{}_{b_1\cdots b_r}$, le crochet $[N,L]$ a pour composantes locales [1]:

$$[N, L]^{i}{}_{b_1\cdots b_r a_1\cdots a_p}$$
$$=\frac{(r+p)!}{r!\,p!}\{N^k{}_{[b_1\cdots b_r}\partial_{|k|}L^i{}_{a_1\cdots a_p]}-L^k{}_{[a_1\cdots a_p}\partial_{|k|}N^i{}_{b_1\cdots b_r]}$$
$$-rN^i{}_{k[b_2\cdots b_r}\partial_{b_1}L^k{}_{a_1\cdots a_p]}+pL^i{}_{k[a_2\cdots a_p}\partial_{a_1}N^k{}_{b_1\cdots b_r]}\}$$

A l'aide des expressions locales données par le lemme précédent, des vérifications directes montrent que

$$[N^{II}, L^{II}]=[N, L]^{II}$$

THÉORÈME. *L'application $D\to D^{II}$ possède les propriétés suivantes*:

(a) *Pour tout $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $(\lambda D)^{II}=\lambda D^{II}$;*

(b) *Si D et $\bar{D}$ sont deux dérivations de même degré de $\Lambda(M)$, on a*

$$(D+\bar{D})^{II}=D^{II}+\bar{D}^{II};$$

(c) *Si D et $\bar{D}$ sont deux dérivations quelconques de $\Lambda(M)$, on a*

$$[D, \bar{D}]^{II}=[D^{II}, \bar{D}^{II}].$$

Preuve: Soient $D=i_L+d_N$ et $\bar{D}=i_{\bar{L}}+d_{\bar{N}}$ deux dérivations de $\Lambda(M)$. On vérifie facilement

$$(\lambda D)^{II}=\lambda D^{II}, \qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$$
$$(D+\bar{D})^{II}=D^{II}+\bar{D}^{II}$$

Si D et $\bar{D}$ sont deux dérivations quelconques de $\Lambda(M)$, respectivement de degré r et $\bar{r}$, on a

$$[D, \bar{D}]=[i_L, i_{\bar{L}}]+[i_L, d_{\bar{N}}]+[d_N, i_{\bar{L}}]+[d_N, d_{\bar{N}}]$$
$$[D, \bar{D}]^{II}=[i_L, i_{\bar{L}}]^{II}+[i_L, d_{\bar{N}}]^{II}+[d_N, i_{\bar{L}}]^{II}+[d_N, d_{\bar{N}}]^{II}$$

Or,

$$[i_L, i_{\bar{L}}]=i_{\bar{L}\bar{\wedge}L}-(-1)^{r\bar{r}}i_{L\wedge\bar{L}}$$

on a:

$$[i_L, i_{\bar{L}}]^{II}=i_{\bar{L}^{II}\wedge L^{II}}-(-1)^{r\bar{r}}i_{L^{II}\wedge\bar{L}^{II}}=[i_{L^{II}}, i_{\bar{L}^{II}}]$$

Puisque

$$[i_L, d_{\bar{N}}]=d_{\bar{N}\wedge L}+(-1)^{\bar{r}}i_{[L,\bar{N}]}$$

on a:

$$[i_L, d_{\bar{N}}]^{II}=d_{\bar{N}^{II}\wedge L^{II}}+(-1)^{\bar{r}}i_{[L^{II},\bar{N}^{II}]}=[i_{L^{II}}, d_{\bar{N}^{II}}]$$

De même,

$$[d_N, i_{\bar{L}}]^{II}=[d_{N^{II}}, i_{\bar{L}^{II}}]$$

D'après la définition du crochet, on a

$$[d_N, d_{\bar{N}}]^{II}=d_{[N,\bar{N}]^{II}}=d_{[N^{II},\bar{N}^{II}]}=[d_{N^{II}}, d_{\bar{N}^{II}}]$$

On déduit donc que

$$[D, \bar{D}]^{II}=[D^{II}, \bar{D}^{II}].$$

Si $D=\iota_L+d_N$ est une dérivation de $\Lambda(M)$, on peut également définir les relèvements

$$D^0=i_{L^0}+d_{N^0}\,; \qquad D^I=\iota_{L^I}+d_{N^I}$$

D^0 et D^I sont des dérivations de $\Lambda(T_2M)$. L'application $D\to D^0$ (resp. $D\to D^I$) possède les deux premières propriétés du théorème, mais elle n'a pas la troisième propriété.

4. Relèvements de différentiations covariantes.

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Pour tout champ de vecteurs $X\in \mathcal{X}(M)$, la différention covariante ∇_X par rapport à X est une dérivation de $\mathcal{T}(M)$. Puisque $\nabla_X f=Xf$ pour toute fonction $f\in\mathcal{F}(M)$, on a la décomposition: $\nabla_X=L_X+i_F$, où F est un champ de tenseurs de type (1, 1) sur M.

Soit $b\in T_2M$. Pour tout vecteur $u\in T_b(T_2M)$, il existe au moins un champ de vecteurs $X\in\mathcal{X}(M)$ tel que $u=X^{II}(b)$. Pour un champ de vecteurs $Y\in\mathcal{X}(M)$ donné, la valeur de $(\nabla_X)^{II}Y^{II}=(\nabla_X Y)^{II}$ au point $b\in T_2M$ ne dépend pas du choix de X tel que $u=X^{II}(b)$. En posant

$$\nabla_u{}^*Y^{II}=((\nabla_X)^{II}Y^{II})(b)$$

on déduit alors un opérateur $\nabla_u{}^*$ sur $\mathcal{X}(T_2M)$. En effet, si $K=\sum f_\iota Y_\iota{}^{II}$ est un champ de vecteurs sur T_2M, où $f_i\in\mathcal{F}(T_2M)$ et $Y_i\in\mathcal{X}(M)$, on pose

$$\nabla_u{}^*K=((\nabla_X)^{II}K)(b)=\sum f_i(b)\nabla_u{}^*Y_\iota{}^{II}+\sum (uf_\iota)Y_\iota{}^{II}(b)$$

PROPOSITION. *L'opérateur $\Delta_u{}^*$ possède les propriétés suivantes*:

(a) $\nabla_u{}^*(A+B)=\nabla_u{}^*A+\nabla_u{}^*B, \qquad A, B\in\mathcal{X}(T_2M)$;

(b) $\nabla_u{}^*(gA)=g\nabla_u{}^*A+(ug)A(b), \qquad g\in\mathcal{F}(T_2M)$;

(c) $\nabla_{\lambda u}{}^*A=\lambda\nabla_u{}^*A, \qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$;

(d) $\nabla^*{}_{u+v}A=\nabla_u{}^*A+\nabla_v{}^*A, \qquad u, v\in T_b(T_2M)$.

Preuve: Les propriétés (a) et (b) sont immèdiates d'après la définition de $\nabla_u{}^*$ car $(\nabla_X)^{II}$ est une dérivation de $\mathcal{T}(T_2M)$, où X est un champ de vecteurs sur M tel que $u=X^{II}(b)$. Si $\lambda\in\boldsymbol{R}$, on a $(\lambda X)^{II}=\lambda X^{II}$ et $(\lambda X)^{II}(b)=\lambda u$. Par conséquent,

$$\nabla_{\lambda u}{}^*A=((\nabla_{\lambda X})^{II}A)(b)=(\lambda(\nabla_X)^{II}A)(b)=\lambda\nabla_u{}^*A$$

pour tout $A\in\mathcal{X}(T_2M)$. Soient $X\in\mathcal{X}(M)$, $Y\in\mathcal{X}(M)$ tels que $X^{II}(b)=u$ et $Y^{II}(b)=v$. On a alors $(X+Y)^{II}(b)=u+v$. Par conséquent,

$$\nabla^*{}_{u+v}A=((\nabla_{X+Y})^{II}A)(b)=((\nabla_X)^{II}A+(\nabla_Y)^{II}A)(b)=\nabla_u{}^*A+\nabla_v{}^*A$$

La proposition est ainsi démontrée.

Soient A et B deux champs de vecteurs sur T_2M. On construit un champ de vecteurs $\nabla_A{}^*B$ sur T_2M en posant $(\nabla_A{}^*B)(b)=\nabla^*{}_{A(b)}B$. On obtient ainsi une application :

$$\nabla^*: \mathfrak{X}(T_2M)\times\mathfrak{X}(T_2M)\rightarrow\mathfrak{X}(T_2M)$$

D'après la proposition précédente, on a :

THÉORÈME. *L'opérateur ∇^* définit une connexion linéaire sur T_2M. Plus précisément, on a*

(a) $\nabla_A{}^*(P+Q)=\nabla_A{}^*P+\nabla_A{}^*Q$
(b) $\nabla_A{}^*(gP)=g\nabla_A{}^*P+(Ag)P$
(c) $\nabla_{gA}{}^*P=g\nabla_A{}^*P$
(d) $\nabla^*{}_{A+B}P=\nabla_A{}^*P+\nabla_B{}^*P$

où A, B, P, $Q\in\mathfrak{X}(T_2M)$ et $g\in\mathfrak{F}(T_2M)$.

Soit T le tenseur de torsion de la connexion ∇. On a

$$T(X, Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X, Y]$$

où X, $Y\in\mathfrak{X}(M)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} T^{II}(X^{II}, Y^{II})&=(T(X, Y))^{II}\\ &=\nabla^*{}_{X^{II}}Y^{II}-\nabla^*{}_{Y^{II}}X^{II}-[X^{II}, Y^{II}]\\ &=T^*(X^{II}, Y^{II})\end{aligned}$$

où T^* est le tenseur de torsion de ∇^*. On a ainsi $T^*=T^{II}$.

Soit R (resp. R^*) le tenseur de courbure de la connexion ∇ (resp. ∇^*). On a

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$$

où X, Y, $Z\in\mathfrak{X}(M)$. Or,

$$\begin{aligned}(R(X, Y)Z)^{II}&=\nabla^*{}_{X^{II}}\nabla^*{}_{Y^{II}}Z^{II}-\nabla^*{}_{Y^{II}}\nabla^*{}_{X^{II}}Z^{II}-\nabla_{[X,Y]^{II}}Z^{II}\\ &=R^*(X^{II}, Y^{II})Z^{II}\end{aligned}$$

et

$$R^{II}(X^{II}, Y^{II})Z^{II}=(R(X, Y)Z)^{II}$$

on déduit que $R^*=R^{II}$.

PROPOSITION. *Soit T (resp. T^*) le tenseur de torsion de la connexion ∇ (resp. ∇^*) ; soit R (resp. R^*) le tenseur de courbure de ∇ (resp. ∇^*). On a :*

$$T^*=T^{II}; \qquad R^*=R^{II}$$

La connexion linéaire ∇^* coincide avec le relèvement de ∇ défini autrement par Yano et Ishihara [2].

5. Remarques.

Soit T_kM le fibré tangent d'ordre k, formé par des k-jets de $\boldsymbol{R}$ dans M, d'origine $O\in\boldsymbol{R}$. Les résultats se généralisent aux relèvements de dérivations à T_kM.

PARTIE II

Opérateurs différentiels sur les fibrés tangents d'ordre 2

1. Endomorphisme vertical.

Soit I la 1-forme vectorielle identique sur une variété différentiable M. Les relèvements I^0, I^I et I^{II} de I à T_2M sont des 1-formes vectorielles sur T_2M. Si $\{x^h\}$ est un système de coordoonnées locales sur un ouvert U de M et si $\{x^h, y^h, z^h\}$ est le système de coordonnées locales induit sur $\pi^{-1}(U)\subset T_2M$, on a

$$I^0=\delta_j{}^i dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial z^i}$$

$$I^I=\delta_j{}^i\Big(dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}+dy^j\otimes\frac{\partial}{\partial z^i}\Big)$$

$$I^{II}=\delta_j{}^i\Big(dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}+dy^j\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}+dz^j\otimes\frac{\partial}{\partial z^i}\Big)$$

I^{II} est donc la 1-forme vectorielle identique sur T_2M; on a $(I^0)^2=0$ et $(I^I)^3=0$.

PROPOSITION. *Le tenseur de Nijenhuis associé à I^0 (resp. I^I) est nul.*

Preuve: Soit N (resp. $\tilde{N}$) le tenseur de Nijenhuis associé à I^0 (resp. I^I). Pour tout $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned}N(X^{II}, Y^{II})&=[I^0X^{II}, I^0Y^{II}]+(I^0)^2[X^{II}, Y^{II}]-I^0[I^0X^{II}, Y^{II}]\\&\quad -I^0[X^{II}, I^0Y^{II}]\\&=[X^0, Y^0]-I^0[X^0, Y^{II}]-I^0[X^{II}, Y^0]\\&=-I^0[X, Y]^0-I^0[X, Y]^0\\&=0\end{aligned}$$

De même, on a

$$\tilde{N}(X^{II}, Y^{II})=0$$

Comme les champs de tenseurs sur T_2M sont complètement déterminés par ses actions sur les champs de vecteurs de la forme X^{II}, avec $X\in\mathfrak{X}(M)$, on déduit que $N=0$ et $\tilde{N}=0$.

Dans la suite on posera $v=I^0$ et $\tilde{v}=I^I$. La 1-forme vectorielle v (resp. $\tilde{v}$) définit un endomorphisme du fibré tangent $\tau(T_2M)$, appelé *l'endomorphisme* *vertical* (resp. *l'endomorphisme semi-vertical*) de $\tau(T_2M)$.

Soient A et B les champs de vecteurs fondamentaux sur T_2M. Localement ils sont définis par:

$$A=y^h\frac{\partial}{\partial z^h}$$

$$B=y^h\frac{\partial}{\partial y^h}+z^h\frac{\partial}{\partial z^h}$$

L'endomorphisme v (resp. $\bar{v}$) n'est pas compatible avec le crochet de Lie. En effet, on démontre à l'aide des expressions locales:

PROPOSITION. *Soient A et B les champs de vecteurs fondamentaux sur T_2M et soit X un champ de vecteurs arbitraire sur T_2M. On a*

(a) $vA=0$; $vB=0$
$\bar{v}A=0$; $\bar{v}B=A$

(b) $v[A, X]+[vX, A]=0$
$v[B, X]+[vX, B]=vX$
$\bar{v}[A, X]+[\bar{v}X, A]=vX$

L'endomorphisme v (resp. $\bar{v}$) de $\mathfrak{X}(T_2M)$ détermine un endomorphisme v^* (resp. $\bar{v}^*$) de $\Lambda(T_2M)$ appelé *opérateur vertical* (resp. *opérateur semi-vertical*) dans $\Lambda(T_2M)$.

PROPOSITION. *L'opérateur vertical v^* (resp. $\bar{v}^*$) est un endomorphisme de carré nul (resp. de cube nul) de l'algèbre extérieure $\Lambda(T_2M)$. Si X est un champ de vecteurs sur T_2M, on a*

$$i_Xv^*=v^*i_{vX}\,; \qquad i_X\bar{v}^*=\bar{v}^*i_{\bar{v}X}$$

en particulier:

$$i_Av^*=0\,; \qquad i_A\bar{v}^*=0$$

$$i_Bv^*=0\,; \qquad i_B\bar{v}^*=\bar{v}^*i_A$$

Ces propriétés se démontrent sans difficultés.

Expression locale: L'endomorphisme v^* (resp. $\bar{v}^*$) est déterminé localement par

$$v^*f=f\,; \qquad \bar{v}^*f=f \qquad f\in\mathcal{F}(T_2M)$$

$$v^*(dx^h)=0\,; \qquad \bar{v}^*(dx^h)=0$$

$$v^*(dy^h)=0\,; \qquad \bar{v}^*(dy^h)=dx^h$$

$$v^*(dz^h)=dx^h\,; \qquad \bar{v}^*(dz^h)=dy^h$$

2. Dérivation verticale.

Considérons la dérivation i_v (resp. $i_{\bar{v}}$) de type i_*, déterminée par v (resp. $\bar{v}$); c'est une dérivation de degré 0, appelée la *dérivation verticale* (resp. la *dérivation semi-verticale*) de l'algèbre extérieure $\Lambda(T_2M)$. Si ω est une p-forme différentielle sur T_2M, on a [1]

$$i_v\omega(X_1, \cdots, X_p)=\sum_i \omega(X_1, \cdots, vX_i, \cdots, X_p)$$

Cette dérivation est caractérisée par les relations

$$i_v f=0\,;\ i_v(df)=v^*(df)\,,\qquad f\in \mathcal{F}(T_2M)$$

On a:

$$i_v v^*=v^* i_v=0\,;\ i_{\bar v}(\bar v^*)^2=(\bar v^*)^2 i_{\bar v}=0$$

PROPOSITION. *Soit ω une p-forme différentielle sur T_2M. On a*

(a) $(i_v)^p\omega=p\,!\,v^*\omega$

(b) $(i_v)^q\omega=0$ *pour* $q>p$

La vérification de cette propriété est immédiate.

Expression locale: La dérivation i_v (resp. $i_{\bar v}$) est déterminée localement par

$$\begin{array}{lll} i_v f=0\,; & i_{\bar v} f=0 & f\in\mathcal{F}(T_2M) \\ i_v(dx^h)=0\,; & i_{\bar v}(dx^h)=0 & \\ i_v(dy^h)=0\,; & i_{\bar v}(dy^h)=dx^h & \\ i_v(dz^h)=dx^h & i_{\bar v}(dz^h)=dy^h & \end{array}$$

PROPOSITION. *Soit X un champ de vecteurs sur T_2M et soient A et B les champs de vecteurs fondamentaux sur T_2M; on a*

(a) $[i_X, i_v]=i_{vX}\,;\ [i_X, i_{\bar v}]=i_{\bar v X}$

(b) $[i_v, L_A]=0\,;\ [i_v, L_B]=[i_{\bar v}, L_A]=i_v$

Preuve: Il suffit de vérifier que ces expressions prennent les mêmes valeurs pour $\alpha=f$ et $\alpha=df$, $f\in\mathcal{F}(T_2M)$. Or:

$$[i_X, i_v]f=0, \qquad i_{vX}f=0\,;$$

$$[i_X, i_v]df=i_X v^*df=i_{vX}df\,;$$

$$[i_X, i_{\bar v}]f=0, \qquad i_{\bar v X}f=0\,;$$

$$[i_X, i_{\bar v}]df=i_X\bar v^*df=i_{\bar v X}df\,;$$

$$[i_v, L_A]f=0\,;$$

$$\begin{aligned}([i_v, L_A]df)(Y)&=(i_v d(Af)-L_A v^*(df))(Y)\\ &=vY(Af)-A(vY\cdot f)+v[A, Y]f\\ &=([vY, A]+v[A, Y])f\\ &=0\end{aligned}$$

$$[i_v, L_B]f=0, \qquad i_v f=0;$$

$$([i_v, L_B]df)(Y)=([vY, B]+v[B, Y])f$$
$$=(vY)f$$

$$(i_v df)(Y)=df(vY)=(vY)f$$

$$[i_{\bar{v}}, L_A]f=0, \qquad i_v f=0$$

$$([i_{\bar{v}}, L_A]df)(Y)=([\bar{v}Y, A]+\bar{v}[A, Y])f$$
$$=(vY)f$$

$$(i_v df)(Y)=(vY)f$$

COROLLAIRE. *On a par récurrence*: $[(i_v)^p, L_B]=p(i_v)^p$

3. Différentiation verticale.

Soit h une 1-forme vectorielle sur M. La dérivation d_h de type d_* attachée à h, est une dérivation de degré 1 de l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$. Si ω est une p-forme différentielle sur M, on a [1]

$$d_h\omega=[h, \omega]$$

$$(d_h)^2\omega=[h, [h, \omega]]=\left[\frac{1}{2}[h, h], \omega\right]$$

où le crochet est au sens de Frölicher-Nijenhuis. Donc, $(d_h)^2$ est une dérivation de type d_*, déterminée par $N_h=(1/2)[h, h]$, qui n'est autre que le tenseur de Nijenhuis associé à h.

Considérons maintenant la dérivation d_v (resp. $d_{\bar{v}}$) de type d_* déterminée par v (resp. $\bar{v}$); c'est une dérivation de degré 1, appelée la *différentiation verticale* (resp. la *différentiation semi-verticale*) de l'algèbre extérieure $\Lambda(T_2M)$. Elle est définie par

$$d_v=i_v d-di_v$$

Cette dérivation est caractérisée par les relations

$$d_v f=v^*(df)\,; \; dd_v=-d_v d$$

où $f\in\mathcal{F}(T_2M)$. Puisque le tenseur de Nijenhuis associé à v (resp. $\bar{v}$) est nul, on a:

PROPOSITION. *La différentiation verticale d_v (resp. $d_{\bar{v}}$) est une dérivation de carré nul.*

LEMME. *On a $i_v dv^*df=0$ pour toute fonction $f\in\mathcal{F}(T_2M)$.*

Preuve: Soient X et Y deux champs de vecteurs sur T_2M.

$$
\begin{aligned}
(i_v dv^* df)(X, Y) &= (dv^* df)(vX, Y) + (dv^* df)(X, vY) \\
&= vX(vY\cdot f) - (v[vX, Y])f - (vY)(vX\cdot f) - (v[X, vY])f \\
&= \{[vX, vY] - v[vX, Y] - v[X, vY]\}f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

car le tenseur de Nijenhuis associé à v est nul.

PROPOSITION. *Soient A et B les champs de vecteurs fondamentaux sur T_2M. On a*

(a) $[i_v, d_v]=0$

(b) $i_A d_v + d_v i_A = 0$;
$i_A d_{\bar{v}} + d_{\bar{v}} i_A = i_B d_v + d_v i_B = i_v$

(c) $[d_v, L_A]=0$; $[d_v, L_B]=d_v$

(d) $[L_A, L_B]=L_A$

Preuve: Il suffit de vérifier que ces expressions prennent les mêmes valeurs pour $\alpha=f$ et $\alpha=df$, $f\in\mathcal{F}(T_2M)$. Or:

$$[i_v, d_v]f = i_v v^* df = 0$$

$$
\begin{aligned}
[i_v, d_v]df &= -i_v d i_v df - i_v d i_v df + d(i_v)^2 df \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$(i_A d_v + d_v i_A)f = i_A v^* df = 0$$

$$
\begin{aligned}
(i_A d_v + d_v i_A)df &= -i_A d i_v df + v^* d(Af) \\
&= -L_A i_v df + i_v L_A df \\
&= [i_v, L_A]df \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$(i_B d_v + d_v i_B)f = i_B v^* df = 0, \qquad i_v f = 0;$$

$$(i_B d_v + d_v i_B)df = [i_v, L_B]df = i_v df$$

$$(i_A d_{\bar{v}} + d_{\bar{v}} i_A)f = i_A \bar{v}^* df = 0,$$

$$(i_A d_{\bar{v}} + d_{\bar{v}} i_A)df = [i_{\bar{v}}, L_A]df = i_v df$$

$$[d_v, L_A]f = i_v L_A df - L_A i_v df = [i_v, L_A]df = 0$$

$$[d_v, L_A]df = d_v d(Af) - L_A d_v df = -d d_v(Af) + d L_A d_v f = -d([d_v, L_A]f) = 0$$

$$[d_v, L_B]f = [i_v, L_B]df = i_v df = d_v f$$

$$[d_v, L_B]df = -d([d_v, L_B]f) = -d(i_v df) = d_v(df)$$

$$[L_A, L_B] = L_{[A,B]} = L_A$$

COROLLAIRE. *On a* $v^*d_v=0$

Preuve: Si ω est une p-forme différentielle sur T_2M, on peut écrire

$$\begin{aligned} v^*d_v\omega &= \frac{1}{(p+1)!}(i_v)^{p+1}d_v\omega \\ &= \frac{1}{(p+1)!}d_v(i_v)^{p+1}\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

COROLLAIRE. *On a* $d_vv^*=v^*d$.

Preuve: On vérifie tout d'abord par récurrence la relation

$$(i_v)^pd=pd_v(i_v)^{p-1}+d(i_v)^p$$

Si maintenant ω est une p-forme différentielle sur T_2M, on peut écrire

$$\begin{aligned} v^*d\omega &= \frac{1}{(p+1)!}(i_v)^{p+1}d\omega \\ &= \frac{1}{(p+1)!}\{(p+1)d_v(i_v)^p+d(i_v)^{p+1}\}\omega \\ &= \frac{1}{p!}d_v(i_v)^p\omega \\ &= d_vv^*\omega \end{aligned}$$

4. Remarques.

D'une façon générale, on peut considérer les relèvements de la 1-forme vectorielle identique I sur M à T_kM, qui est le fibré tangent d'ordre k de M. Les dérivations attachées à chacune de ses formes vectorielles donnent un calcul différentiel sur T_kM.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROLICHER ET NIJENHUIS, Theory of Vector-valued Differential Forms Proc. Kon. Ned. Akad., A **59** (1956), p. 338.

[2] YANO ET ISHIHARA, Differential Geometry of Tangent Bundles of Order 2 Kōdai Math. Sem. Rep., **20** (1968), p. 319.

[3] YANO ET ISHIHARA, Tangent and Cotangent Bundles, Dekker, 1973.

[4] YUEN, Relèvements des Dérivations et des Structures aux Fibrés Tangents (à paraître)

UNIVERSITÉ DE METZ
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
ILE DU SAULCY
57000-METZ
FRANCE