بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پیشنهاد رساله دکتری
ریاضی محض (هندسه)

موضوع:

# گروههای تبدیلات و کمیت های غیرریمانی در هندسه فینسلر

تهیه کننده:
مسیب زهره وند

استاد راهنما:
آقای دکتر مرتضی میرمحمدرضایی

استاد مشاور:
آقای دکتر اسدا... رضوی

پاییز ۱۳۸۹

**تقدیم به این حدیث زیبا از امام رضا (ع):**

بزرگترین عبادت، اندیشه در مورد وظیفه است.

# مقدمه

این پیشنهاد رساله شامل سه بخش است. در بخش اول به معرفی تاریخچه و اهمیت مطالبی که مورد بررسی قرار خواهند گرفت می پردازیم. در بخش دوم تعاریف و قضایایی که برای ورود به بحث مورد نیاز است را بیان می کنیم. در بخش سوم به تشریح اهدافی که در این رساله می‌خواهیم به آنها برسیم می‌پردازیم و روشهایی برای رسیدن به این اهداف پیشنهاد می‌کنیم.

# فهرست مندرجات

# فصل ۱

# تاریخچه و اهمیت

هندسه فینسلری تعمیمی از هندسه ریمانی است، در واقع یک متریک فینسلری روی منیفلد خانواده‌ای از نرمهای مینکوفسکی روی فضاهای مماس است که بطور هموار روی منیفلد تغییر می‌کند.
در هندسه فینسلر چندین کمیت هندسی وجود دارند که از آن جمله می توان به انحنای پرچمی [۱]، انحنای ریمان [۲]، تغییر شکل [۳]، تاب کارتان [۴]، تاب کارتان میانگین [۵]، $S-$ انحنا [۶]، انحنای لندزبرگ [۷]، انحنای لندزبرگ میانگین [۸]، انحنای بروالد [۹]، انحنای بروالد میانگین [۱۰]، $H-$ انحنا [۱۱] اشاره کرد. انحنای پرچمی مشابه انحنای برشی در هندسه ریمانی است. انحنای ریمان اولین بار توسط ریمان در سال ۱۸۵۴ برای منیفلدهای ریمانی معرفی شد و در سال ۱۹۲۶ توسط بروالد به هندسه فینسلر تعمیم داده شد[۹]. بجز انحنای ریمان و انحنای پرچمی باقی این کمیت ها در هندسه ریمان صفر هستند و به همین دلیل آنها را کمیت های غیر ریمانی می نامند. انحنای ریمان شکل فضا را اندازه می گیرد در حالیکه کمیت های غیرریمانی تغییر رنگ روی فضا را تشریح می کنند. انحنای پرچمی ارتباط بسیار نزدیکی با این کمیت های غیرریمانی دارد[۴][۲۷] [۴۱].
صفر شدن بعضی از کمیت های غیرریمانی در فضاهای فینسلری رده‌ی خاصی از منیفلدهای فینسلری را مشخص می کند. مثلاً صفر شدن کمیت های هندسی تغییر شکل ( تاب کارتان، تاب کارتان میانگین)، انحنای لندزبرگ، انحنای لندزبرگ میانگین، انحنای بروالد، انحنای بروالد میانگین، به ترتیب فضاهای ریمانی، لندزبرگی، لندزبرگی ضعیف، بروالدی و بروالدی ضعیف را مشخص می کند. یکی از

[۱] Flag curvature
[۲] Riemann curvature
[۳] Distorsion
[۴] Cartan Torsion
[۵] Mean Cartan Torsion
[۶] S - Curvature
[۷] Landsberg Curvature
[۸] Mean Landsberg Curvature
[۹] Berwald Curvature
[۱۰] Mean Berwald Curvature
[۱۱] H - Curvature

مسائل مهم در هندسه فینسلر مطالعه معانی هندسی این کمیت های غیرریمانی و مخصوصا بدست آوردن روابط بین پایاهای ریمانی با پایاهای غیرریمانی است. یک تکنیک برای بدست آوردن این روابط، استفاده از اتحادهای ریچی می باشد.

هندسه تصویری فینسلری یک بخش مهمی از هندسه فینسلر است. متریک های فینسلری $F$ و $\bar{F}$ روی منیفلد $n-$بعدی $M$ را بطور تصویری مرتبط (تبدیل $F \to \bar{F}$ را یک تبدیل تصویری ) گوییم اگر هر ژئودزیک $F$ از نظر مجموعه نقاط یک ژئودزیک $\bar{F}$ نیز باشد و بالعکس. بطور کلی برای متریک فینسلری داده شده $F$ روی $M$ تعیین همه متریک های فینسلری روی $M$ که با $F$ بطور تصویری مرتبط هستند، مسئله جالبی است. حالت خاص این مسئله تعیین همه متریک های فینسلری روی $M$ است که با یک متریک موضعا مینکوفسکی روی $M$ بطورتصویری مرتبط هستند. چنین متریک های فینسلری را موضعا مسطح تصویری می نامند. در واقع مسئله چهارم هیلبرت در حالت منظم تشخیص متریکهای فینسلری مسطح تصویری است. هامل[۱] [۱۸] یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل پاره ای برای تشخیص متریک های مسطح تصویری بدست آورد. بروالد[۲][۱۰] و فانک[۳][۲۰][۲۱] متریک های فینسلری مسطح تصویری از انحنای پرچمی ثابت را بررسی کردند. این حقیقت منتسب به بروالد است که متریک های فینسلری مسطح تصویری از انحنای اسکالر هستند. بنابراین یک مسئله مهم در هندسه فینسلر مطالعه و طبقه بندی متریک های فینسلری از انحنای اسکالر می باشد. این مسئله هنوز بطور کامل حل نشده است، حتی برای متریک های فینسلری از انحنای پرچمی ثابت نیز حل نشده است. بهترین نتیجه در مورد مطالعه و تشخیص متریک های فینسلری با انحنای ثابت قضیه‌ی زیر از پروفسور اکبرزاده است[۳]:

◄ **۱.۱. قضیه .** فرض کنیم $(M,F)$ یک منیفلد فینسلری فشرده با انحنای پرچمی ثابت $K=\lambda$ باشد. در این صورت

۱) $F$ ریمانی است اگر $\lambda < ۰$،

۲) $F$ موضعا مینکوفسکی است اگر $\lambda = ۰$.

در یک تحقیق ۲۵ ساله که از [۴۴] شروع شد و با [۷] به پایان رسید، متریکهای راندرزی از انحنای پرچمی ثابت طبقه بندی شدند.

همانطور که گفته شد مسئله تشخیص متریک های فینسلری از انحنای اسکالر مسئله مشکلی است. از طرفی انحنای پرچمی ارتباط نزدیکی با کمیت های غیرریمانی دارد، بنابراین یک روش برای نزدیک شدن به جواب این مسئله این است که منیفلد فینسلری، دارای کمیت های غیرریمانی بفرم های خاصی باشد.

یک مثال از متریک های فینسلری از انحنای اسکالر بصورت زیر میباشد. فرض کنید $a \in R^n$ یک بردار واحد دلخواه باشد، روی گوی واحد $B^n(۱) \subset R^n$ تعریف می کنیم:

---

[۱] G. Hamel
[۲] Berwald
[۳] Funk

$$F := \frac{\sqrt{(|x|^۲ <a,y> -۲ <a,x><x,y>)^۲ + |y|^۲(۱-|x|^۴)}}{۱-|x|^۴} - \frac{|x|^۲ <a,y> -۲ <a,x><x,y>}{۱-|x|^۴}$$

که $y \in T_xR^n \equiv R^n$. در [۴۰] ثابت می شود که این یک متریک فینسلری از انحنای اسکالر $K = \frac{۳\theta}{F} + \sigma$ است که $\theta :=< a,y >$ یک ۱− فرمی دقیق است و $\sigma := ۳ < a,x >^۲ -۲|x|^۲$ یک تابع اسکالر است. در تعمیم این مثال می توان منیفلدهای فینسلری که انحنای اسکالر آنها بفرم فوق است را بررسی کرد. در [۳۰] اثبات می شود که: اگر $M$ یک منیفلد فینسلری با بعد $n \geq ۳$ از انحنای اسکالر باشد آنگاه برای هر یک فرمی دلخواه $\theta$ روی $M$، $H = \frac{(n^۲-۱)\theta}{۲F}$ است اگروتنها اگر $K = \frac{۳\theta}{F} + \sigma(x)$.

مثالی که در بالا ارائه شد یک متریک فینسلری از نوع راندرزی است. بیشتر متریکهای راندرزی شناخته شده در رابطه $S = (n+۱)c(x)F$ صدق می کنند. در بررسی منیفلدهای فینسلری که $S-$ انحنای آنها در رابطه $S = (n+۱)c(x)F$ صدق می کنند در [۱۱] ثابت شده است که: اگر یک منیفلد فینسلری از انحنای اسکالر $K(x,y)$ باشد و $S = (n+۱)c(x)F$، آنگاه $K = \frac{۳c_{x^m}y^m}{F} + \sigma(x)$ است. همچنین در [۱۱] منیفلدهای فینسلری از انحنای اسکالر که انحنای لندزبرگ میانگین آنها در رابطه $J + c(x)FI = ۰$ صدق می کنند، بررسی شده است و انحنای اسکالر بطور جزئی تعیین شده است. به عنوان یک حالت خاصی از مسئله فوق می توان منیفلدهای فینسلری مسطح تصویری را در نظر گرفت، در [۱۳] چنین منیفلدهای فینسلریی که $S-$انحنای آنها در رابطه $S = (n+۱)\{c(x)F+\eta\}$ صدق می‌کنند، بررسی شده است. بنابراین یک مسئله طبیعی مطالعه منیفلدهای فینسلری مسطح تصویری است که انحنای لندزبرگ میانگین آنها در رابطه $J + c(x)FI = ۰$ صدق می کنند.

انحنای ریچی نقش مهمی در هندسه تصویری فینسلری ایفا می کند. در[۳۸] بطورتصویری مرتبط بودن منیفلدهای فینسلری انیشتینیی که اسکالر ریچی آنها ثابت است، بررسی شده است. همچنین در[۱۴] و [۱۵] انحنای ریچی در هندسه تصویری بررسی شده است و قضیه هایی روی مقایسه‌ی انحنای ریچی متریک‌های فینسلری بطورتصویری مرتبط، بدست آمده است. در هندسه ریمانی تانسور انحنای ریمان $R^i_k$ نسبت به $y^i$ مربعی است، در هندسه فینسلر چنین منیفلدهایی را $R-$مربعی[۱] می نامند. در [۵] فضاهای فینسلری انیشتینی $R-$ مربعی هستند بررسی شده است و اثبات شده است که هر فضای فینسلری انیشتینی $R-$ مربعی که ریچی مسطح نیست باید ریمانی باشد و در [۲۴] متریک های راندرزی $R-$ مربعی بررسی شده اند. در [۲۸] کمیت غیر ریمانی $H-$ انحنا بررسی شده است و اثبات شده است که این کمیت برای منیفلدهای فینسلری $R-$ مربعی صفر است، بنابراین بررسی منیفلدهای فینسلری که برخی کمیت های هندسی آنها دارای فرمهای خاصی هستند نیز جالب توجه می باشد. از طرفی نتایج کمی روی فضاهای فینسلری ریچی مسطح وجود دارد، بنابراین یک مسئله جالب میتواند مطالعه متریک های فینسلری ریچی مسطح و ارتباط تصویری آنها باشد.

---
[۱] R-quadratic

فضاهای راندرزی با کمیت های غیرریمانی در [۱۲] بررسی شده اند. متریک های راندرزی حالت خاصی از $(\alpha, \beta)$ متریک ها هستند. $(\alpha, \beta)$ − متریک ها اولین بار توسط ماتسوموتو در [۲۶] معرفی شدند. کوشش های زیادی در بررسی $(\alpha, \beta)$ متریک ها انجام شده است.در [۲۹] متریک های موضعا مسطح تصویری بفرم $F = \alpha + \epsilon\beta + 2k\frac{\beta^2}{\alpha}$ مطالعه شده اند و در [۳۷] $(\alpha, \beta)$− متریک های بفرم $F = \alpha + \epsilon\beta + 2k\frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{k^2\beta^4}{3\alpha^3}$ بررسی شده اند و یک شرط لازم و کافی برای اینکه $F$ موضعا مسطح تصویری باشد بدست آمده است. بنابراین طبیعی به نظر می رسد که روی یک منیفلد متریک های فینسلری بفرم $F = \alpha(1 + \sum_{i=1}^{i=n} a_i s^i)$ که $s = \frac{\beta}{\alpha}$ را در نظر گرفت. در [۴۵] انحنای ریمان و انحنای ریچی برای $(\alpha, \beta)$−متریک ها محاسبه شده است و با استفاده از این روابط یک شرط لازم و کافی برای اینکه متریک $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ از انحنای اسکالر باشد بدست آمده است. در واقع به دلیل متنوع بودن این متریک ها به نظر میرسد که بررسی این نوع از متریک های فینسلری جالب باشد.

می دانیم که هندسه‌های کلاینی بر پایه‌ی گروههای تبدیلات بنا شده اند. بنابراین بررسی گروههای تبدیلات یک فضا هندسه های کلاینی آن را مشخص می کند. همانطور که گفته شد هندسه تصویری فینسلری بخش مهمی از هندسه فینسلر را تشکیل می دهد و تا کنون تحقیقات گسترده ای در این زمینه انجام شده است. ویل یک پایای تصویری برای متریکهای ریمانی معرفی کرد[۴۲]. داگلاس آنرا به متریکهای فینسلری توسیع داد[۱۷]. متریک های فینسلری با انحنای ویل تصویری صفر را متریک های ویل می نامند. زابو[۱] در [۳۶] ثابت کرد که متریک های ویل از انحنای اسکالر هستند. بجز انحنای ویل [۲] چندین کمیت پایای تصویری دیگر در منیفلدهای فینسلری موجود هستند مانند انحنای داگلاس[۳]، انحنای داگلاس−ویل تعمیم یافته[۴]، و انحنای تصویری محدودشده[۵] که منتسب به اکبرزاده است[۱].

در طول سالهای ۱۹۵۶ تا ۱۹۹۰ اکبرزاده تحقیقات گسترده ای درباره گروه تبدیلات ایزومتری، همدیس و تصویری در منیفلدهای فینسلری انجام داد[۲]. اکبرزاده در [۳] اثبات کرد که برای یک منیفلد ویل از بعد $n \geq 3$ انحنای پرچمی ثابت است اگروتنها اگر $H = 0$، همچنین در [۱] اثبات کرد که منیفلد فینسلری $F^n$ با $n \geq 3$ از انحنای پرچمی ثابت است اگروتنهااگر انحنای تصویری محدودشده‌ی آن برابر با صفر باشد. در [۳۲] یک نوع خاصی از تبدیلات تصویری به نام تبدیلات $C$− تصویری در نظر گرفته شده و با استفاده از آن یک کمیت هندسی به نام $\widetilde{W}$− انحنا بدست می آید که تحت تبدیلات $C$− تصویری پایا است و ثابت شده است که یک منیفلد فینسلری با بعد $n \geq 3$ از انحنای ثابت است اگروتنها اگر $\widetilde{W} = 0$ باشد. بنابراین بررسی رده های خاصی از تبدیلات تصویری یا همدیس نیز جالب می باشد.

نبلمن[۶] در سال ۱۹۲۹ نظریه تبدیلات همدیس فضاهای فینسلری را بنیان نهاد[۲۳]. تلاشهای زیادی برای پیدا کردن تانسورهای بطورهمدیس پایا شبیه به تانسور انحنای ویل همدیس یک منیفلد ریمانی و برای بدست آوردن شرایطی که یک منیفلد فینسلری بطور همدیس مسطح باشد، انجام شد.

---

[۱] Szabo
[۲] Weyl curvature
[۳] Douglas curvature
[۴] Generalized Douglas-Weyl curvature
[۵] Restricted Weyl curvature
[۶] M. S. Knebelman

کیکوچی [۷] در [۲۲] یک التصاق فینسلری پایا تحت تبدیلات همدیس بدست آورد و شرط بطور همدیس مسطح بودن را بدست آورد، ولی این التصاق را فقط می توان با یک شرط ضروری تعریف کرد که بررسی این شرط نسبتا مشکل است و چون در هندسه ریمانی هیچ التصاقی که بطور همدیس پایا باشد وجود ندارد در نتیجه این فرض در هندسه ریمانی برقرار نیست. تا کنون نیز پیدا کردن یک تانسوری که تحت تبدیلات همدیس پایا باشد و تعمیمی از تانسور ویل همدیس در هندسه ریمانی باشد، به عنوان یک مسئله باز باقی مانده است. ام. هاشیگوچی [۸] در سال ۱۹۷٦نوع خاصی از تبدیلات همدیس با نام تبدیل $C-$ همدیس را معرفی کرد[۱۹]. در [۳۵] وجود این تبدیل روی بعضی از منیفلدهای فینسلری خاص بررسی شده است. در [۳۴] ثابت شده است که اگر یک فضای راندرزی از $S-$ انحنای ایزوتروپیک دارای یک میدان برداری تصویری غیرآفین مانند $X$ باشد، آنگاه فضا یا بروالدی است یا اینکه $X$ یک میدان برداری آفین $(M,\alpha)$ است. بنابراین بررسی وجود میدانهای برداری خاص (تصویری، همدیس یاآفین) روی منیفلدهای فینسلری مسئله‌ی جالبی می باشد و می تواند دسته بندی هایی از منیفلدها را بدست دهد.

---

[۷] Kikuchi

[۸] M. Hacshiguchi

# فصل ۲

# تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای لازم برای بهتر فهمیدن مطلب می پردازیم. فرض می کنیم $M$ یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $n-$ بعدی بوده و $\pi: TM \rightarrow M$ نگاشت تصویر طبیعی باشد.

◄ **۱.۲. تعریف .** تابع پیوسته $F: TM \rightarrow [0,\infty)$ را یک متریک (ساختار) فینسلر گوییم هرگاه:

۱) $F$ روی $TM\backslash\{0\}$، $C^\infty$ باشد.

۲) $F$ همگن مثبت از درجه یک باشد، یعنی $\forall\lambda > 0,\ F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$

۳) $F$ در شرط تحدب قوی[۱] صدق کند، یعنی ماتریس هسیان زیر در هر نقطه $TM\backslash\{0\}$ معین مثبت باشد: $(g_{ij}) := \left(\left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^iy^j}\right)$

◄ **۲.۲. تعریف .** یک اسپری $G$ روی منیفلد $M$، یک میدان برداری سرتاسری $C^\infty$، روی $TM\backslash\{0\}$ است که در هر دستگاه مختصات موضعی استاندارد $(\pi^{-1}(U),(x^i,y^i))$ بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

$G^i(x,y)$ را ضرایب اسپری $G$ می نامیم که توابعی موضعی روی $TM$ هستند و همگن مثبت از درجه ۲ می باشند. خم منظم $C$ روی $M$ را یک ژئودزیک $G$ می نامیم هرگاه تصویر یک خم انتگرال $G$ باشد.

می دانیم که هر متریک فینسلر یک اسپری بصورت زیر تعریف می کند:

$$G^i := \frac{1}{2}g^{ij}\{(FF_{x^k})_{y^j}y^k - FF_{x^j}\}$$

روی یک منیفلد فینسلری می توان التصاقهای مختلفی تعریف کرد مانند التصاق‌های کارتان بروالد و چرن (راند). در اینجا به طور خاص از دو التصاق کارتان و بروالد استفاده می کنیم. برای جزئیات در

---

[۱] Strong convexity

مورد این التصاقها می توان به [۴]،[٦] و [۳۹] مراجعه کرد. در اینجا فرض می کنیم $\nabla$, $\nabla^{\bullet}$, $D$ و $D^{\bullet}$ بطور متناظر نشان دهنده‌ی مشتق افقی و قائم نسبت به کارتان و بروالد و استفاده از $\circ$ نشان دهنده ضرب در $y$ باشد.

همانطور که در فصل اول گفته شد کمیت های هندسی زیادی در هندسه فینسلر وجوددارند. در اینجا به معرفی بعضی از آنها می پردازیم.

به ازای هر اسپری $G^i$ روی $M$ انحنای ریمان $R^i_k$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$R^i_k := ۲\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^۲ G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + \frac{\partial^۲ G^i}{\partial y^j \partial y^k} G^j - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}$$

انحنای ریچی $\mathbf{Ric}(x, y)$ در واقع اثر انحنای ریمان در هر تار از کلاف مماس $TM$ می باشد:

$$\mathbf{Ric}(x, y) := R^i_i,$$

در حالت کلی، انحنای ریچی تابع همگن مثبت از درجه دو نسبت به $y$ می باشد. اسکالر ریچی متریک $F$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$Ric(x, y) := \frac{۱}{F^۲}\mathbf{Ric}(x, y),$$

تانسور ریچی متریک $F$ بدین صورت تعریف می شود:

$$Ric(x, y)_{ij} := \frac{۱}{۲}[Ric(x, y)]_{y^i y^j}.$$

متریک فینسلری $F$ را انیشتینی گوییم هرگاه اسکالر ریچی فقط تابعی از $x$ باشد. در این حالت داریم:

$$Ric_{ij} = Ric(x) g_{ij}.$$

انحنای پرچمی تعمیمی از انحنای برشی[۱] در هندسه ریمانی است که بصورت زیر تعریف می شود: برای هر صفحه $P = span\{y, u\} \subset T_x M$، انحنای پرچمی $K(P, y)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$K(P, y) := \frac{u^i R_{ij} u^j}{(g_{ij}u^i u^j)(g_{ij}y^i y^j) - (g_{ij}y^i u^j)^۲}$$

که‌در آن $R_{ij} := g_{ik}R^k_j$ می باشد. یک متریک فینسلری را از انحنای اسکالر نامند هرگاه $K(P, y)$ مستقل از انتخاب بردار $u$ باشد، یعنی انحنای پرچمی تابعی اسکالر $K(x, y)$ روی $TM^\circ$ باشد.

تاب کارتان بصورت زیر تعریف می شود:

$$C_{ijk} := \frac{۱}{۴}(F^۲)_{y^i y^j y^k}$$

[۱] Sectional Curvature

از آن تاب میانگین کارتان بصورت زیر تعریف می شود:

$$I_i := g^{jk} C_{ijk}.$$

قضییه دایکه[۲] [۱۶] بیان می کند که یک متریک فینسلری ریمانی است اگروتنهااگر $I = \circ$ باشد. بنابراین تاب کارتان ( میانگین ) مشخص کننده نرم های اقلیدسی در بین نرمهای مینکوفسکی است. مطالعه نرخ تغییرات تاب کارتان ( تاب کارتان میانگین ) در طول ژئودزیک ها منجر به معرفی کمیت های انحنای لندزبرگ ( انحنای لندزبرگ میانگین ) می شود که آنها را با $L$ $(J)$ نمایش می دهند. بنابراین داریم:

$$L_{ijk} := \nabla_\circ C_{ijk} = D_\circ C_{ijk}.$$

$$J_i := \nabla_\circ I_i = D_\circ I_i. \quad J_i = g^{jk} L_{ijk}$$

متریک فینسلری با خاصیت $L + c(x)FC = \circ$ $(J + c(x)FI = \circ)$ را از $L-$ انحنای ( $J-$ انحنای ) ایزوتروپیک نسبی گوییم.

برای ضرایب اسپری $G^i$، انحنای بروالد بصورت $G^i{}_{jkl} := \frac{\partial G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}$ تعریف می شود که در واقع انحنای دوم ( مختلط) التصاق بروالد منیفلد است. اثر این کمیت را انحنای بروالد میانگین ( یا $E-$ انحنا) می نامند. یعنی داریم:

$$E_{jk} := G^i{}_{jki}.$$

در یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد $(x^i, y^i)$ تابع $\tau(x)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\tau(x) := ln \frac{\sqrt{det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma_F(x)}$$

که در آن

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol(B^n)}{Vol\{(y^i) \in R^n | F(x, y^i \frac{\partial}{\partial x^i})\}}$$

است و $Vol(U)$ نشان دهنده حجم اقلیدسی یک زیرمجموعه باز $U \subset R^n$ است. این کمیت را تغییرشکل می نامند و می توان ثابت کرد که متریک $F$ ریمانی است اگروتنهااگر $\tau = \circ$ باشد. اگر از این کمیت در طول ژئودزیک های $F$ مشتق بگیریم کمیت دیگری به نام $S-$ انحنا بدست می آید. بنابراین داریم :

$$S := \nabla_\circ \tau.$$

---

[۲] Deicke

$S=S(x,y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه ۱ است. می توان دید که در دستگاه مختصات موضعی استاندارد $S$–انحنا بفرم زیر است:

$$S=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(ln\sigma_F(x)).$$

یک متریک فینسلر $F$ را از $S$–انحنای ایزوتروپیک نامند هرگاه $S=(n+1)c(x)F$ باشد و بطورکلی $F$ را از $S$–انحنای تقریبا ایزوتروپیک گوییم هرگاه $S=(n+1)\{cF+\eta\}$ باشد که $c=c(x)$ یک تابع اسکالر و $\eta=\eta_k(x)y^k$ یک ۱– فرمی بسته روی $M$ هستند. اگر از $S$ دوبار مشتق عمودی بگیریم کمیت انحنای بروالد میانگین بدست می آید یعنی $E_{ij}=S_{y^iy^j}$. بنابراین واضح است که اگر $S$– انحنا تقریبا ایزوتروپیک باشد آنگاه $E$– انحنا ایزوتروپیک است و اگر $E$– انحنا ایزوتروپیک باشد یعنی $E=\frac{n+1}{2}cF^{-1}h$ آنگاه یک ۱– فرمی $\eta$ موجود است بطوریکه $S=(n+1)\{cF+\eta\}$ است ولی در حالت کلی $\eta$ بسته نیست. اما برای متریک های راندرزی این دو مفهوم هم ارز هستند.

با توجه به این مطالب طبیعی است که بخواهیم نرخ تغییرات کمیت $E$– انحنا را مطالعه کنیم. در واقع این کمیت را اکبرزاده معرفی کرد و آنر ابا $H$ نمایش داد. یعنی داریم:

$$H_{ij}:=\nabla_\circ E_{ij}.$$

همانطور که گفتیم $(\alpha,\beta)$– متریک ها کلاس غنی از متریک های فینسلری هستند. تابع

$$F=\alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$$

که $\alpha:=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک متریک ریمانی و $\beta$ یک – فرمی روی $M$ هستند و $\phi(s)$ تابعی هموار و مثبت روی یک بازه متقارن $[-r,r]$ می باشد را $(\alpha,\beta)$– متریک می نامند. برای جزئیات در مورد این متریک ها به[۴۰] مراجعه شود. حال با تعریف $\phi(s):=1+s$ متریک $F=\alpha+\beta$ بدست می آید که یک متریک راندرزی است. برای جزئیات مفصل در مورد متریک های راندرزی به [۸] مراجعه شود.

در این قسمت به معرفی تبدیلات تصویری و همدیس روی منیفلدهای فینسلری می پردازیم.

فرض کنیم $\phi:M\rightarrow M$ یک تبدیل نقاط ( دیفئومورفیسم موضعی) فضای فینسلری $(M,F)$ باشد که در دستگاههای مختصات موضعی $(x,U)$ و $('x,'U)$ بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$'x^i=\phi^i(x),$$

با استفاده از این تبدیل داریم :

$$'y^i=(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^j})y^j.$$

بنابراین یک تبدیل نقاط روی $M$ یک تبدیل نقاط روی $TM$ القا می کند که آن را تبدیل نقاط توسعه یافته[۱] می نامند. حال اگر $\phi$ ژئودزیک های $(M,F)$ را از نظر مجموعه نقاط حفظ کند، تبدیل $\phi$ را یک تبدیل تصویری می نامند. در واقع اگر قرار دهیم:

[۱] Extended point transformation

$$\tilde{F}(x,y) := F(\phi(x), \phi_*(y)),$$

آنگاه $\phi$ یک تبدیل تصویری است اگر ژئودزیک های $F$ و $\tilde{F}$ از نظر مجموعه نقاط یکسان باشند. در این حالت در [۳۹] ثابت می شود که یک تابع همگن مثبت از درجه یک موجود است بطوریکه:

$$\tilde{G}^i = G^i + Py^i,$$

تابع $P$ را فاکتور تصویری[۱] می نامند. حال فرض می کنیم که $\phi$ تبدیل تصویری بی نهایت کوچک[۲] باشد یعنی:

$$'x^i = x^i + v^i dt, \quad 'y^i = y^i + (\frac{\partial v^i}{\partial x^j})y^j dt,$$

که در آن $v^i$ مولفه های یک میدان برداری روی $M$ است. در اینصورت میدان برداری $X = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ را یک میدان برداری تصویری گویند. بنابراین میدان برداری $X$ تصویری است هرگاه گروه موضعی ۱−پارامتری آن تبدیلات تصویری باشند. در[۴۳] ثابت می شود که $X$ تصویری است هرکاه داشته باشیم:

$$L_{X^c} G^i = Py^i,$$

که $X^c = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$ ترفیع کامل[۳] $X$ است، $L$ نشان دهنده عملگر مشتق لی می باشد و

$$L_{X^c} G^i = \nabla_\circ \nabla_\circ v^i + v^j R^i_j.$$

بطور کلی مشتق لی یک میدان تانسوری $T^i_{jk}$ نسبت به میدان برداری $X$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$L_{X^c} T^i_{jk} = v^l \nabla_l T^i_{jk} + (v^l \nabla_l v^m) \nabla^{\bullet}_m T^i_{jk} - T^m_{jk} \nabla_m v^i + T^i_{mk} \nabla_j v^m + T^i_{jm} \nabla_k v^m.$$

میدان برداری تصویری $X$ را محدود شده نامند هرگاه فاکتور تصویری آن نسبت به $y$ خطی باشد، یعنی:

$$P(y) = p_j(x) y^j,$$

که $p_j(x)$ تابعی اسکالر روی $M$ است.

میدان برداری $X$ را $C-$ تصویری نامند هرگاه داشته باشیم:

$$D_j P_i = D_i P_j,$$

که در آن $P_i := \frac{\partial P}{\partial y^i}$ می باشد.

---

[۱] Projective factor
[۲] Infinitesimal transformation
[۳] Complete lift

تانسور ویل تصویری از انحنای ریمان ساخته می شود و بصورت زیر تعریف می شود:

$$W^i_k := A^i_k - \frac{۱}{n-۱}\frac{\partial A^m_k}{\partial y^m}y^i,$$

که $A^i_k := R^i_k - R\delta^i_k$ و $R := \frac{۱}{n-۱}R^m_m$ می باشد. این تانسور تحت تبدیلات تصویری پایا است[۳۹]. انحنای تصویری محدود شده حالت خاصی از انحنای ویل تصویری است که تحت تبدیلات تصویری محدود شده پایا است.

تانسور داگلاس پایای تصویری دیگری است که برای منیفلدهای ریمانی صفر است ولی برای منیفلدهای فینسلری بصورت زیر تعریف می شود[۳۹]:

$$D^i_{jkl} := G^i_{jkl} - \frac{۲}{n+۱}\Big[E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + \frac{\partial E_{jk}}{\partial y^l}y^i\Big].$$

منیفلد فینسلری $(M,F)$ را یک متریک ویل—داگلاس تعمیم یافته گویند هرگاه برای یک تانسور $T_{jkl}$ داشته باشیم:

$$\nabla_{\circ}D^i_{jkl} = T_{jkl}y^i.$$

این متریک ها شامل متریک های ویل و متریک های داگلاس می باشند[۳۱].

تبدیل همدیس فضای ریمانی $(M,g)$ یک دیفئومورفیسم $\varphi : M \to M$ است که زاویه را حفظ می کند. اگر قرار دهیم $\tilde{g}_{ij}(x) := g_{ij}(\varphi(x))$ آنگاه $\varphi$ یک تبدیل همدیس است هرگاه $\tilde{g}_{ij}(x) = e^{\alpha(x)}g_{ij}(x)$.
بطور مشابه تبدیل همدیس منیفلد فینسلری $(M,F)$ یک دیفئومورفیسم $\varphi : M \to M$ است که برای آن داریم:

$$\tilde{F}(x,y) := F(\varphi(x), \varphi_*(y)) = e^{\alpha(x,y)}F(x,y).$$

نبلمن ثابت کرد که در این صورت $\alpha$ باید فقط تابعی از $x$ باشد[۲۳]. میدان برداری $X$ را همدیس گویند هرگاه گروه موضعی $۱-$ پارامتری آن تبدیلات همدیس باشد. ثابت می شود که میدان برداری $X$ همدیس است هرگاه

$$L_{X^c}g_{ij} = ۲\alpha g_{ij}.$$

میدان برداری $X$ را $C-$ همدیس گویند هرگاه داشته باشیم:

$$C^i_{jk}\alpha^k = \circ, \alpha^k := g^{kj}\frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \neq \circ$$

برای جزئیات در مورد تبدیلات تصویری و همدیس و مشتقات لی به [۴۳] مراجعه شود.

تعریف تانسور ویل همدیس در منیفلدهای فینسلری تا کنون به عنوان یک مسئله باز باقی مانده است، ولی در منیفلدهای ریمانی بصورت زیر تعریف می شود:

$$C^i_{jkl} := R^i_{jkl} + \delta^i_k C_{jl} - \delta^i_l C_{jk} + C^i_k g_{jl} - C^i_l g_{jk}$$

که $R^i_{jkl}$ انحنای التصاق لوی—چیوتا است،

$$C_{ij} := -\frac{۱}{n-۲} R_{ij} + \frac{۱}{۲(n-۱)(n-۲)} r g_{ij}$$

و $r$ انحنای اسکالر متریک $g_{ij}$ می باشد.

# فصل ۳

# اهداف رساله

اهدافی که در این پیشنهاد رساله موردنظر هستند به شرح زیر می باشند. مطالعه مترهای فینسلری که کمیت های هندسی مشخصی از آنها دارای فرمهای خاصی هستند و اینکه در این حالت چه محدودیت هایی روی دیگر کمیت ها ایجاد می شود. همچنین بررسی تبدیلات تصویری و همدیس روی منیفلدهای فینسلری و اینکه وجود میدانهای برداری خاص ( تصویری و همدیس ) روی این منیفلدها چه دسته بندی از منیفلدهای فینسلری بدست میدهد و ارتباط بین وجود میدانهای برداری تصویری یا همدیس روی منیفلدهای فینسلری را با کمیت های غیرریمانی بررسی می کنیم. از جمله کارهای در این زمینه می توان به بررسی میدانهای برداری تصویری روی منیفلدهای فینسلری $R-$ مربعی و بررسی منیفلدهای فینسلری ریچی مسطح و بطور تصویری مرتبط بودن آنها با یکدیگر و همچنین بررسی میدانهای برداری تصویری یا همدیس روی منیفلدهای $W-$ مربعی[1] اشاره کرد.

در ادامه به دنبال بررسی $(\alpha,\beta)-$ متریک ها هستیم. از جمله دلایل برای انجام اینکار اینست که $(\alpha,\beta)-$ متریکها قابل محاسبه هستند، همچنین مطالعه $(\alpha,\beta)-$ متریکها می تواند به بهتر فهمیدن خواص هندسی متریک های فینسلری در حالت کلی کمک کند، در واقع می توان نتایج بدست آمده در مورد $(\alpha,\beta)-$ متریک ها را در باره متریک های فینسلری در حالت کلی مورد بررسی قرار داد. دلیل دیگر اینست که $(\alpha,\beta)-$ متریک ها کاربردهای مهمی در فیزیک و بیولوژی دارند[۴]. از جمله مسائل در این زمینه می توان به بررسی بطور تصویری مرتبط بودن $(\alpha,\beta)-$ متریک های متریک بروالد، یا متریک بروالد و متریک ماتسوموتو و دیگر $(\alpha,\beta)-$ متریک ها، بررسی شرایط لازم وکافی برای اینکه $(\alpha,\beta)-$ متریک ها دارای کمیت های غیر ریمانی بفرمهای خاصی باشند، اشاره کرد. بطور مثال بررسی شرط لازم و کافی برای اینکه $(\alpha,\beta)-$ متریک ها از $J-$انحنای تقریبا ایزوتروپیک باشند.

[1] منیفلدهایی که تانسور ویل تصویری آنها نسبت به $y$ مربعی است.

# کتاب نامه


[1] Akbar-Zadeh H M.; *Champs de vectuers projectifs sur le fibré unitaire* , Journal de Mathématique pure et appliqué, 65 (1986) p.47-79.

[2] Akbar-Zadeh H.; *Transformation infinitésimales conformes des variété Finslérienne compacte*, C. R. Acad. Sc. Paris. t.252, p.2061-2063, (1961).

[3] Akbar-Zadeh H.; *Sur les espaces de Finsler à courbure sectionnnelles constantes*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci., Série. 5e 84 (1988), 281-322.

[4] Antonelli P. L., Ingarden R. S., and Matsumoto M.; *The Theory of Spray and Finsler Spaces with application in Physics and Biology*, Kluw. Acad. Publ. FTPH. no 58, 1993.

[5] Bacso S., Rezaei B.; *On R-quadratic Einstein Finsler space*, Publ. Math. Debrecen, no.: 4336 (2009), 1-10.

[6] Bao D., Chern S.S., Shen, Z.;*An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Varlag, 2000.

[7] Bao D., Robles C., Shen Z.; *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Diff.Geom. 66 (2004), 391-449.

[8] Bao D., Robles C.; *Ricci and flag curvature in Finsler Geometry*, Riemann-Finsler Geometry, MSRI Publication, Vol 50, 2004.

[9] Berwald L.; *Untersuchung der Krummung allgemeiner metrischer Raume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus*, Math. Z. (1926), 25, 40-73.

[10] Berwald L.; *Uber die n-dimensionalen Geometrien konstanter Krummung, in denen die Geraden die kurzesten sind*, Math Z, 1929, 30: 449-469.

[11] Chen X., Mo X., Shen Z.; *On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvatire*, J. London Math. Sco. (2) 68, 2003, 762-780.

[12] Chen X., Shen Z.; *Randers metrics with special curvature properties*, Osaka J. of Math. 40 (2003), 87-101.

[13] Chen X., Shen Z.; *Projectively flat Finsler metrics with almost isotropic S-curvature*, Acta Mathematica Scientica 26B(2) (2006) 307-313.

[14] Chen X.; *The Ricci curvature in Finsler projective geometry*, J. of Math.(PRC) (to appear).

[15] Chen X., Shen Z.; *A comparison theorem on Ricci curvature in projective geometry*, Annals of Global Analysis and Geometry, 23(2) (2003), 141-155.

[16] Deicke A.,; *Uber die Finsler-Raume mit* $A_i = \circ$, Arch. Math. 4 1953, 45-51.

[17] Douglas J.; *The general geometry of path*, Ann. Math. 29 (1927-28), 143-168.

[18] Hamel G.; *Uber die Geometrien in denen die Geraden die Kurzesten sind*, Math Ann, 1903, 57: 231-264.

[19] Hacshiguchi M.; *On conformal transformations of Finsler metrics*, J. Math. Kyoto Univ. 8(1976), 25-50.

[20] Funk P.; *Uber Geometrien bei denen die Geraden die Kurzesten sind*,Math Ann, 1929, 101: 226-237.

[21] Funk P.; *Uber zweidimensionale Finslersche Raume, insbesondere uber solche mit gerandlinigen Extremalen und positiver konstanter Krummung*, math Z, 1936, 40: 86-93.

[22] Kikuchi S.; *On the condition that a Finsler space be conformally flat*, Tensor, N. S. 55(1994), 97-100.

[23] Knebelman, M. S.; *Conformal geometry of generalized metric spaces*, Proc. Nat. Sci., U.S.A., 15 (1929), 376-379.

[24] Li B., Shen Z.; *On Randers metrics of quadratics Riemann curvature*, in progress.

[25] Matsumoto M.; *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces*, Kaiseisha Press, Shigaken, 1986.

[26] Matsumoto M.; *The Berwald connection of Finsler space with an* $(\alpha, \beta)$ *metric*, Tensor (N.S.) 50 (1991) 18-21.

[27] Mo X., Shen Z.; *On negatively curved Finsler manifolds of scaler curvature*, Canadian Math. Bull. 48(2005), 112-120.

[28] Mo X.; *On the non-Riemannian quantity H of a Finsler metric*, Diff. Geom. and App. 27 (2009) 7-14.

[29] Mo X. H., Shen Z. M., Yang C. H.; *Some constructions of projectively flat Finsler metrics*, Sci. China Ser. A-Math. 2006, 49(5): 703-714.

[30] Najafi B., Shen Z., Tayebi A.; *Finsler metrics of scalar flag curvature with special non-Riemannian curvature properties*, Geom. Dedicata. 131, (2008), 87-97.

[31] Najafi B., Shen Z., Tayebi A.; *On a projective class of Finsler metrics*, 2007, Vol.70,

[32] B. Najafi, A. Tayebi; *Finsler metrics of scalar flag curvature and projective invariants*, Balkan journal of Geometry and Its Applications, Vol.15, No.2, 2010, pp. 82-91.

[33] Poor Walter A.; *Differential Geometric Structures*, McGraw-Hill Inc., 1981.

[34] M. Rafie-rad, B. Rezaei; *On projective vector fields Randers spaces of isotropic S-curvature*, submitted.

[35] Rezaei B., Tayebi A.; *C-conformal transformation of special Finsler spaces*, International Mathematical Forum, 4, 2009, no. 20, 959-968.

[36] Szabo Z.; *Ein Finslerscher Raum ist gerade dann von skalarer Krümmung, wenn seine Weyl sche Projectiv Krümmung verschwindet,* Acta. Sci. Math. 39 (1977), 163-168.

[37] Shen Y., Zhao L.; *Some projectively flat* $(\alpha, \beta)$*- metrics*, Science in China: Series A Mathematics 2006 Vol. 49 No. 6 838-851.

[38] Shen Z.; *Projectively related Einstein metrics in Riemann-Finsler geometry*, Math. Ann. 320(2001), 625-647.

[39] Shen Z.; *Differential Geometry of Sprays and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[40] Shen Z.; *Landsberg curvature, S-curvature and Riemann curvature*, In "A Sampler of Finsler Geometry" MSRI series, Cambridg University Press, 2004.

[41] Shen Z.; *Lectures on Finsler geomtry*, Word Scientific, Singapore, 2001.

[42] Wyel H.; *Zur Infinitesimal geometrie*, Göttinger Nachrichten. (1921), 99-112.

[43] Yano K.; *The theory of Lie derivetive and its applications*, North Holland, 1957.

[44] Yasuda H., Shimada H.; *On Randers spaces of scaler curvature*, Rep, on Math. Phys., 11 (1977), 347-360.

[45] Zhou L.; *A local classification of a class of* $(\alpha, \beta)$ *metrics with constant flag curvature*, Diff. Geom. and its App..