بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد
دانشکده ریاضی

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی محض(هندسه- توپولوژی)

بنیادهای هندسه فینسلری و برگ بندی‌های طبیعی روی کلاف مماس

استاد راهنما: دکتر اکبر دهقان‌نژاد

استاد مشاور: دکتر حسین خورشیدی

پژوهش و نگارش: زهره آرال

تیر ماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

با توجه به کاربرد فراوان اخیر نظریه هندسه‌ی فینسلری در علوم مختلف (فیزیک، هوافضا، علوم مهندسی و ...) و نقشی که مفهوم برگ‌بندی در این هندسه ایفا می‌کند. در فصل دوم این پایان‌نامه، با بررسی مفهوم برگ‌بندی به همراه ویژگی‌های آن، روی کلاف مماس از یک منیفلد فینسلری، به این مهم می‌پردازیم. در فصل دیگر، مفهوم انحنا در فضاهای فینسلری مطرح گردیده، خواص اساسی آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. سپس با بیان مثال‌هایی، به توصیف آن‌چه در فصل‌های قبل بیان شده است، می‌پردازیم.

مقدمه

بعضی از ویژگی‌ها و روش‌هایی که در هندسه دیفرانسیل دیده می‌شود رامی‌توان در مورد منیفلدها، به ویژه منیفلدهای فینسلری بررسی کرد. اشیاء هندسی در هندسه‌ی فینسلری هم به نقطه و هم به جهت وابسته هستند از این رو کلاف مماس نقش مهمی در مطالعه هندسه‌ی فینسلری ایفا می‌کند. منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M، همراه یک متر فینسلری F، را یک منیفلد فینسلری نامیم. هرگاه G یک متر سازاکی- فینسلر، روی فضای کلاف سفته‌ی $TM^\circ = TM - \{\circ\}$ باشد، آنگاه هندسه‌ی برگ‌بندی‌ها روی فضای (TM°, G) با هندسه‌ی خود منیفلد فینسلری مرتبط است. نظر به اینکه برگ‌بندی‌ها نقشی مهم و اساسی در هندسه ایفا می‌کنند، در این پایان‌نامه، ابتدا در فصل اول تعاریف و مقدمات به کار رفته در دو فصل دیگر (از جمله، منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر، برگ‌بندی و هندسه فینسلری و ...) را ذکر می‌کنیم. سپس در فصل دوم ضمن معرفی شش برگ‌بندی طبیعی روی کلاف مماس یک منیفلد فینسلری به بیان ویژگی‌های آن (مانند کاملاً ژئودزی بودن ، کاملاً نافی بودن و همچنین شبه کلاف بودن متر ریمانی G) می‌پردازیم .

منیفلدهای فینسلری با انحنای ثابت یکی از موضوع‌های اساسی در مطالعه‌ی هندسه‌ی فینسلری است. پرفسور اکبرزاده در سال ۱۹۹۸ میلادی [۲۳] ثابت کرد که یک منیفلد فینسلری تحت شرایطی خاص با انحنای ثابت K

الف) به طور موضعی مینکووسکی است هرگاه $K = \circ$

ب) یک منیفلد ریمانی است هرگاه $K = -۱$.

اما حالت $K > \circ$ تا آن زمان کمتر مورد پژوهش قرار گرفته بود برایانت [۲۴] یک متر فینسلری

با انحنای پرچم مثبت ثابت، ارائه کرد. در فصل سوم، انحنای کلاف شاخص‌دار روی یک منیفلد فینسلری را تعریف و به بیان یک رابطه‌ی جالب بین هندسه‌ی کلاف c- شاخص‌دار روی منیفلد M و انحنای منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ می‌پردازیم، سپس مفهوم انحنا و انحنای پرچم برای چند فضای فینسلری خاص مانند فضاهای لندسبرگ تعمیم‌یافته و راندرز مورد مطالعه قرار می‌گیرد . در پایان مثال‌هایی از فضاهای فینسلری با انحنای پرچم ثابت، ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر

۱.۱.۱ G- منیفلدها

تعریف ۱.۱.۱. یک **شبه گروه** [۱] روی یک فضای توپولوژیک مفروض M، یک مجموعه G متشکل از هومئومورفیسم‌های مابین مجموعه‌های باز M است هرگاه در شرایط زیر صدق نماید.

الف) دامنه‌های اعضای $g \in G$، مجموعه M را بپوشاند.

ب) هر عضو آن، با تحدید دامنه‌اش به مجموعه‌های باز، پایدار باشد. (یعنی هرگاه $g \in G$ عضوی دلخواه و U زیر مجموعه بازی از دامنه تعریف g باشد آنگاه $g \mid_U \in G$).

ج) مجموعه‌ی G نسبت به ترکیب توابع بسته باشد. (اگر f, g دو عضو دلخواه G باشند آنگاه $f \circ g$ در صورت تعریف شدن به G تعلق داشته باشد).

د) هرگاه $f \in G$ آنگاه داشته باشیم $f^{-1} \in G$.

ه) هرگاه g یک هومئومورفیسم مابین مجموعه‌های باز از M (مانند $g : U \longrightarrow V$) باشد به قسمی‌که دامنه U توسط مجموعه‌های بازی مانند U_iها پوشیده شود و هر تحدید g به مجموعه‌های باز U_iها متعلق به G باشد آنگاه داشته باشیم $g \in G$.

مثال ۱.۱.۱. الف) فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد. یک شبه گرو بدیهی، متشکل از تمام نگاشتهای همانی روی زیر مجموعه‌های باز از فضای M است.

ب) **شبه گروه** $\mathbf{top}$: مجموعه متشکل از تمام هومئومورفیسم‌های مابین زیر مجموعه‌های باز از $\mathbb{R}^n$ است.

ج) شبه گروه C^∞ : خانواده‌ی تمام نگاشت‌ها، از کلاس C^∞ بین زیر مجموعه‌های باز از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم مجموعه G یک شبه‌گروه روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشد. یک G-**منیفلد** n بعدی، یک فضای توپولوژیک M به همراه یک G-اطلس روی آن است. یک

---

[۱] $pseudo-group$

G-اطلس، خانواده‌ای از کارتهای G-سازگار یا یک دستگاه مختصات موضعی است که دامنه این کارت‌ها مجموعه M را می‌پوشانند . یک کارت مختصاتی، زوج (ϕ_α, U_α) است به قسمی که در آن U_αها در M باز هستند و نگاشت‌های $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ همیومورفیسم‌هایی به روی تصویرشان می‌باشند. مفهوم G-سازگاری در این جا به این معنی است که، هرگاه دامنه‌های دو کارت (ϕ_α, U_α) و (ϕ_β, U_β) دارای اشتراک ناتهی باشند $((U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset)$ آنگاه نگاشت

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \qquad (۱.۱.۱)$$

به شبه‌گروه G تعلق داشته باشند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم M, N دو منیفلد هموار از کلاس C^k باشند نگاشت $f : M \longrightarrow N$ را در نقطه $p \in M$ **دیفرانسیل‌پذیر** از کلاس C^r $(r \leq k)$ گوئیم هرگاه یک کارت موضعی (x, U) در اطلس ماکسیمال M شامل نقطه p و یک کارت موضعی (y, V) در اطلس ماکسیمال N شامل نقطه $f(p)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نگاشت تغییر کارت

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(V) \subseteq \mathbb{R}^m \qquad (۲.۱.۱)$$

در نقطه $x(p)$ از کلاس C^r باشد.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه تمام بردارهای مماس بر منیفلد n بعدی M در نقطه p ، تشکیل یک فضای برداری n بعدی T_pM می دهند که آن را فضای مماس بر M در یک نقطه p می نامیم. اجتماع تمام فضاهای مماس $TM = \cup_{m\in M} T_mM$ را کلاف مماس [۱] گوئیم.

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ یک اطلس روی M باشد. یک تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر است. هرگاه برای هر $i \in I$، تابع

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (۳.۱.۱)$$

دیفرانسیل‌پذیر باشد. که در آن مشتقات جزئی $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ توسط رابطه

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)) \qquad k = 1, ..., n \qquad (۴.۱.۱)$$

---
[۱] tangent bundle

مشخص می‌شوند.

عملگر $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ به هر تابع دیفرانسیل‌پذیر f روی U_i تابع $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ را نظیر می‌کند. در هر نقطه $x \in U_i$، عملگرهای $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ مستقل خطی هستند. هرگاه (U_j, φ_j) کارت موضعی دیگری روی منیفلد M باشد، نقطه $x \in U_i \cap U_j$ را با مختصات $(x_1, ..., x_n)$ روی U_i و $(x'_1, ..., x'_n)$ روی U_j نمایش می‌دهیم. داریم:

$$(x'_1, ..., x'_n) = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(x_1, ..., x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x'_l}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x'_l}(x)$$

در هر نقطه $x \in M$ عملگرهای $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^{n}$ یک فضای برداری حقیقی از بعد n وابسته به کارت (U_i, φ_i) تولید می‌کنند. فضای مماس بر M در نقطه x فضای برداری حقیقی T_xM است که به ازاء هر کارت موضعی (U_i, φ_i) توسط $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{i=1}^{n}$ تولید می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه اویلر)[1] یک تابع هموار $f(y^1, ..., y^m)$ روی فضای $\mathbb{R}^m - \{0\}$ همگن مثبت از درجه‌ی r است اگر وتنها اگر در شرط زیر صدق کند.

$$y^\alpha \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} = rf \tag{۵.۱.۱}$$

۲.۱.۱ فرم‌ها

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از بعد n باشد. به ازاء هر نقطه p از M، T_pM یک فضای برداری n بعدی است که فضای دوگان آن را با T_p^*M نشان داده و آن را فضای دوگان مماس نامیم. قرار می‌دهیم

$$T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M \tag{۶.۱.۱}$$

فرض کنیم (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p بوده و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{i=1,...,n}$یک پایه برای T_pM باشد. هرگاه به ازاء هر $i = 1, ..., n$ نگاشت (dx^i) را پایه دوگان $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ در نظر بگیریم

[1] $Euler$

(به عبارت دیگر $((\frac{\partial}{\partial x^i})_p (dx^i)_p) = \delta^i_j$) در این صورت مجموعه $\{(dx^i)_p\}_{i=1}^n$ یک پایه برای فضای برداری n بعدی مماس دوگان خواهد بود. مجموعه‌های TM و T^*M به‌طور طبیعی دارای ساختارهای منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از بعد $2n$ هستند. مجموعه T^*M را منیفلد کتانژانت و اعضای آن را ۱- فرمی نامیم.

مثال ۲.۱.۱. خانواده ۱- فرمی‌ها روی فضای $\mathbb{R}^2$ در مختصات (x,y) در نقطه p را با $T_p^*\mathbb{R}^2$ نشان داده و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\omega_p = a_1 dx + a_2 dy$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. هر نگاشت p- خطی t روی E را یک p- تانسور هموردا [1] یا یک تانسور از نوع $(p,0)$ گوئیم.

$$t : \underbrace{E \times ... \times E}_{p} \longrightarrow \mathbb{K} \tag{۷.۱.۱}$$

مجموعه تمام تانسورهای از نوع $(p,0)$ روی فضای برداری E را با $\otimes_p^0(E)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد و T_mM فضای مماس بر M در نقطه m باشد. (می‌دانیم T_mM یک فضای برداری است.) یک تانسور از نوع $(p,0)$ در یک نقطه m از منیفلد M عبارت است از یک عضو فضای برداری

$$\otimes_p^0(T_mM) \tag{۸.۱.۱}$$

اگر (x,U) یک کارت مختصاتی در همسایگی m و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_m\}$ پایه طبیعی T_mM وابسته به این مختصات باشد، پایه دوگان پایه فوق عبارت است از $\{(dx^i)_m\}$. بنابراین یک تانسور از نوع $(p,0)$ را می‌توان به‌صورت

$$t_m \in \otimes_p^0(T_mM) \tag{۹.۱.۱}$$

$$t_m = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_p} t_{\alpha_1...\alpha_p} (dx^{\alpha_1})_m \otimes ... \otimes (dx^{\alpha_p})_m \tag{۱۰.۱.۱}$$

نشان داد. این مقدار را مولفه‌های تانسور t نامند.

---

[1] *covariant tensor*

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه df یک تانسور هموردا از نوع $(۱,۰)$ روی منیفلد M است. در حقیقت بنابر تعریف دیفرانسیل کل داریم $df = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\otimes_{\circ}^{p}(E) = \otimes_{p}^{\circ}(E^*) \tag{۱۱.۱.۱}$$

اعضای $\otimes_{\circ}^{p}(E)$ را تانسور پادوردا [۱] از نوع $(p,۰)$ می‌نامیم.

یک تانسور از نوع (p,q) عبارت است از نگاشت $(p+q)$- خطی t که به صورت

$$t : \underbrace{E \times ... \times E}_{p} \times \underbrace{E^* \times ... \times E^*}_{q} \longrightarrow \mathbb{K} \tag{۱۲.۱.۱}$$

تعریف می‌شود. این نگاشت را تانسور P مرتبه هموردا و q مرتبه پادوردا گوئیم.

تانسورهایی که معمولاً در هندسه کاربرد دارند بیشتر از نوع $(p,۱)$ هستند که توابع چندخطی آن‌ها در زیر آمده است.

$$t : E \times ... \times E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R} \tag{۱۳.۱.۱}$$

هر تانسور از نوع $(p,۱)$ را می‌توان توسط یک نگاشت چندخطی مانند $\tilde{t}$ به صورت زیر معرفی نمود

$$\tilde{t} : E \times ... \times E \longrightarrow E \tag{۱۴.۱.۱}$$

به‌طوری‌که

$$t(x_۱, ..., x_p, \omega) = \omega(\tilde{t}(x_۱, ..., x_p)) \tag{۱۵.۱.۱}$$

تعریف ۸.۱.۱. یک میدان تانسوری از نوع (p,q) روی منیفلد M یک نگاشت t از کلاس C^∞ است که توسط

$$t : M \longrightarrow \otimes_{p}^{q}(TM) \tag{۱۶.۱.۱}$$

[۱] contravariant tensor

$$m \longmapsto t_m \in \otimes_p^q(T_pM)$$

تعریف می‌گردد.

۳.۱.۱ توزیع‌ها

تعریف ۹.۱.۱. نگاشت $\Omega : M \longrightarrow TM$ را یک **توزیع** [۱] p بعدی برای یک منیفلد n بعدی M نامیم. هرگاه،

الف) که برای هر نقطه $m \in M$ مجموعه‌ی $\Omega(m)$، یک زیر فضای p بعدی از فضای برداری T_mM باشد. $(0 < p \leq n)$

ب) در شرط دیفرانسیل‌پذیری زیر صدق کند ،

حول هر نقطه m در دامنه توزیع Ω یک همسایگی V و میدان‌های برداری $X_1, ..., X_p$ روی V موجود باشند به‌طوری‌که به ازای هر نقطه $q \in V$، بردارهای $X_1(q), ..., X_p(q)$ زیرفضای $\Omega(q)$ را تولید کنند.

تعریف ۱۰.۱.۱. کارت x از منیفلد M را نسبت به توزیع Ω تخت [۲] گوئیم هرگاه میدان‌های برداری $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $(\alpha = 1, ..., p)$ تشکیل یک پایه برای توزیع Ω دهند.
یک توزیع را روی منیفلد M انتگرال‌پذیر گوئیم هرگاه هر نقطه از M در دامنه یک کارت تخت قرار گیرد.

مثال ۴.۱.۱. بدیهی است، روی هر منیفلد n بعدی M، توزیع n بعدی و هر توزیع یک بعدی انتگرال‌پذیر می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک توزیع را **گسترنده** [۳] گوئیم هرگاه نسبت به کروشه پایا باشد، یعنی برای هر دو میدان برداری $X, Y \in \Omega$ داشته باشیم $[X, Y] \in \Omega$.

---

[۱] $distribution$
[۲] $flat$
[۳] $involutive$

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه فروبنیوس) هرگاه M یک منیفلد m بعدی و $\mathcal{D}$ یک توزیع n بعدی روی M $(\circ < n \leq m)$ باشد آنگاه شرایط الف و ب معادلند.

الف)$\mathcal{D}$ یک توزیع انتگرال‌پذیر است.

ب) $\mathcal{D}$ یک توزیع گسترنده است.

۴.۱.۱ الصاق‌های خطی

نمادگذاری

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^∞ باشد. مجموعه‌ی میدان‌های برداری از کلاس C^∞ روی M را با $\Gamma(M)$ نشان می‌دهیم. و $C^\infty(M)$ مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی از کلاس C^∞ روی منیفلد M است.

تعریف ۲۱.۱.۱. عملگر $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M)$ را یک الصاق خطی [۱] گوئیم هرگاه برای تمام میدان‌های برداری $X, X', Y, Y' \in \Gamma(M)$ و $f \in C^\infty(M)$ روابط زیر برقرار باشد:

۱) $\nabla_{X+X'}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'}Y$

۲) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

۳) $\nabla_X(Y+Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$

۴) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

تذکر.

هرگاه $\mathbb{M} = (M, <,>)$ یک منیفلد ریمانی باشد. الصاق خطی ∇ با متر ریمانی $<,>$ سازگار [۲] است اگر و تنها اگر برای میدان‌های برداری دلخواه $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ داشته باشیم:

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >$$

[۱] *linear connection*

[۲] *compatible*

تعریف ۳۱.۱.۱. یک الصاق خطی ∇ روی منیفلد هموار M را متقارن گوئیم هرگاه برای هر دو میدان برداری $X, Y \in \Gamma(M)$ داشته باشیم

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

قضیه ۳.۱.۱. (لوی- چویتا [1])

روی هر منیفلد ریمانی M، یک الصاق خطی یکتا ∇ موجود است به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) ∇ یک الصاق خطی متقارن است.

ب) ∇ با متر ریمانی سازگار است.

تذکر.

الصاق ∇ صادق در شرایط قضیه بالا را یک الصاق لوی-چویتا (یا ریمانی) روی منیفلد M، نامیم.

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر و ∇ یک الصاق خطی روی منیفلد M باشد. تابع $C^\infty(M)$- دوخطی

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \qquad (۱۷.۱.۱)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

را فرم تاب برای الصاق ∇ گویند.

تعریف ۵۱.۱.۱. فرض کنیم ∇ یک الصاق خطی روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M باشد تابع $C^\infty(M)$ سه- خطی

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \qquad (۱۸.۱.۱)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

را فرم انحنا برای الصاق ∇ نامند.

---
[1] $Levi - Civita$

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به همراه الصاق آفین ∇ باشد. یک تناظر یکتا وجود دارد بطوریکه به هر میدان برداری V در طول منحنی دیفرانسیل‌پذیر $c: I \longrightarrow M$ میدان برداری دیگر $\frac{DV}{dt}$ در طول c نظیر می‌کند. آن را مشتق کواریانت [1] V در طول c می‌نامیم هرگاه

۱) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

۲) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

که در آن W یک میدان برداری در طول c و f یک تابع دیفرانسیل‌پذیر روی I است.

۳) هرگاه V میدان برداری القاء شده توسط میدان برداری $Y \in \Gamma(M)$ باشد. (یعنی $(V(t) = Y(c(t))$ آنگاه $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

تعریف ۶۱.۱.۱. M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به همراه الصاق آفین ∇ فرض شود. یک میدان برداری V در طول منحنی $c: I \longrightarrow M$ را موازی گوئیم. هرگاه برای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{DV}{dt} = \circ$.

تعریف ۷۱.۱.۱. یک منحنی پارامتری شده $\gamma: I \longrightarrow M$ در نقطه $t_\circ \in I$ ژئودزی است، هرگاه $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \circ$.

اگر منحنی γ در هر نقطه $t \in I$ ژئودزی باشد، گوئیم γ یک ژئودرزی است.

۲.۱ برگ‌بندی

فرض کنیم $\mathbb{R}^m$ فضای اقلیدسی m- بعدی با ضرب اسکالر معمولی باشد. توپولوژی استاندارد القایی روی $\mathbb{R}^m$ تعریف شده توسط نرم

$$\|x\| = \sqrt{(x^۱)^۲ + ... + (x^m)^۲}$$

را با τ نمایش می‌دهیم. منظور از گویهای باز، همان همسایگی‌ها در توپولوژی τ هستند. در این صورت، $(\mathbb{R}^m, \tau)$ یک منیفلد هموار m بعدی با یک کارت سرتاسری $(\mathbb{R}^m, ۱_{\mathbb{R}^m})$ است. دو

[1] *covariant derivative*

عدد صحیح مثبت n, p را طوری در نظر می‌گیریم که $m = n + p$. فضای $\mathbb{R}^m$ را می‌توان با حاصلضرب دکارتی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ یکی گرفت.
هرگاه $c = (c^{n+1}, ..., c^{n+p})$ یک نقطه از $\mathbb{R}^p$ باشد. زیر فضای آفین n بعدی $\mathbb{R}^m$ گذرنده از نقطه $(0, ..., 0, c^{n+1}, ..., c^{n+p})$ و موازی با $\mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{R}^n_c$ نشان می‌دهیم. که توسط رابطه بالا تعریف می‌شود.

$$\mathbb{R}^n_c = \{(x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^n \mid x^{n+1} = c^{n+1}, ..., x^{n+p} = c^{n+p}\}$$

یک (n, c)- پلاک [1] یا P^n_c در $\mathbb{R}^m$، اشتراک $\mathbb{R}^n_c$ با یک گوی باز از $\mathbb{R}^m$ نسبت به توپولوژی τ است. برای هر n، یک توپولوژی جدید τ_n، روی $\mathbb{R}^m$ تعریف می‌کنیم که بازهای پایه‌ای آن متشکل از تمام (n, c)- پلاکها از فضای $\mathbb{R}^m$ هستند.

$(\mathbb{R}^m, \tau_n)$ یک فضای هاسدورف، و هر زیر فضای آفین $\mathbb{R}^n_c$ در $\mathbb{R}^m$ هم باز و هم بسته [2] نسبت به توپولوژی τ_n است. در نتیجه توپولوژی τ_n، حاصلضرب توپولوژی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ و توپولوژی گسسته روی $\mathbb{R}^p$ می‌باشد . بنابراین یک افراز روی فضای $\mathbb{R}^m$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbb{R}^m = \cup_{c \in \mathbb{R}^p} \mathbb{R}^n_c$$

خانواده $\{\mathbb{R}^n_c\}_{c \in \mathbb{R}^p}$، یک **برگ‌بندی** از بعد n (هم بعدp) روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ تشکیل می‌دهند به‌قسمی‌که هر $\mathbb{R}^n_c$ یک برگ از این برگ‌بندی است. در واقع هر برگ این برگ‌بندی، مولفه همبند از فضای توپولوژیک $(\mathbb{R}^m, \tau_n)$ است . همچنین هر برگ یک زیر منیفلد n بعدی از $(\mathbb{R}^m, \tau)$ می‌باشد .
ملاحظه می‌شود که $(\mathbb{R}^m, \tau_n)$ یک منیفلد هموار از بعد n است زیرا روی $\mathbb{R}^m$ یک اطلس هموار با کارتهای موضعی (P^n_c, ϑ^n_c)، تعریف می‌کنیم

$$\vartheta^n_c : P^n_c \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{۱۹.۲.۱}$$

---
[1] *plaque*
[2] *clopen*

$$\vartheta_c^n(x^1, ..., x^n, c_{n+1}, ..., c_{n+p}) = (x^1, ..., x^n)$$

افراز روی $\mathbb{R}^m$ را می‌توان به منیفلدهای هموار توسیع داد. فرض کنیم M یک منیفلد m بعدی خانواده $\mathcal{F} = \{L_t\}_{t\in I}$یک گردایه از زیرمجموعه‌های همبند از منیفلد M باشند بطوریکه منیفلد M را افراز کنند.

$$M = \cup_{t\in I} L_t$$

$$L_t \cap L_s = \emptyset \quad t \neq s$$

سپس، یک عدد صحیح و مثبت $n < m$ و یک کارت موضعی (U, φ) روی M در نظر می‌گیریم. کارت (U, φ) را یک کارت n- برگ‌بندی شده (ورقه شده) نامیم . هرگاه، یک $t \in T$ موجود باشد بطوریکه $L_t \cap U \neq \emptyset$. آنگاه هر مولفه همبندی $L_t \cap U$ ، توسط φ به یک (n, c)- پلاک روی $\mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود. یک اطلس n برگ‌بندی شده متناظر با $\mathcal{F}$ روی منیفلد M، مجموعه تمام کارتهای n-برگ‌بندی شده می‌باشند که دامنه‌ی آنها M را بپوشاند. در این صورت افراز $\mathcal{F}$ روی منیفلد M یک برگ‌بندی از بعد n (هم‌بعد $p = m - n$) تعریف می‌کند هرگاه، یک اطلس برگ‌بندی از بعد n ماکسیمال متناظر با$\mathcal{F}$ روی منیفلد M موجود باشد. هر زیر مجموعه L_t، $t \in I$ را یک برگ از برگ‌بندی $\mathcal{F}$ نامیم.

برگ‌بندی $\mathcal{F}$ یک توپولوژی جدید $\tau(\mathcal{F})$ روی منیفلد M القاء می‌کند. فرض کنیم (U, φ) یک کارت برگ‌بندی شده و L_t یک برگ از $\mathcal{F}$ باشد به طوری‌که $L_t \cap U \neq \emptyset$. گیریم یک مولفه از $L_t \cap U$ توسط φ به روی یک پلاک P_c^n از $\mathbb{R}^m$ نگاشته شود. آنگاه یک پلاک (برگ موضعی) در M نسبت به برگ‌بندی $\mathcal{F}$ را با $M_c^t = \varphi^{-1}(P_c^n)$ نشان می‌دهیم. M نسبت به توپولوژی $\tau(\mathcal{F})$ هم باز و هم بسته است. همچنین، $(M, \tau(\mathcal{F}))$ به یک منیفلد از بعد n با کارتهای موضعی $(M_c^n, \varphi \mid_{M_c^t})$ تبدیل می‌شود. توپولوژی برگ‌دار $\tau(\mathcal{F})$ ظریفتر از توپولوژی اصلی روی M است.

هر برگ از $\mathcal{F}$، یک مولفه همبندی فضای $(M, \tau(\mathcal{F}))$ و یک زیر منیفلد جادهنده‌ی n بعدی در فضای (M, τ) است.

در نهایت یک رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی $(M, \mathcal{F})$ تعریف می‌کنیم. گوئیم y, z هم ارزند$(y \sim z)$

اگر وتنها اگر z, y هر دو به یک برگ از $\mathcal{F}$ تعلق داشته باشند. بنابراین برگ‌های $\mathcal{F}$ کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ هستند. فضای خارج قسمتی $M_{\mathcal{F}} = \frac{M}{\sim}$ را فضای برگ‌ها برای $\mathcal{F}$نامیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد و $i : L \longrightarrow M$ یک نگاشت ایمرسیون از منیفلد دیفرانسیل پذیر L به توی M باشد به‌طوری‌که :

۱) نگاشت i دو سوئی باشد.

۲) به ازای هر نقطه $m \in M$ یک کارت (U, φ, n) در m و اعداد صحیح p و q ، n ، $p + q = n$ و مجموعه های باز $V \subseteq \mathbb{R}^p$ و $W \subseteq \mathbb{R}^q$ موجود باشند به قسمی که

آ) $\varphi(U) = V \times W$

ب)$(\varphi o i)^{-1}(\{v\} \times W)$ برای هر $v \in V$ در L باز باشد.

پ) برای هر $v \in V$ ، نگاشت $\varphi o i : (\varphi o i)^{-1}(\{v\} \times W) \to \{v\} \times W$ یک دیفئومورفیسم باشد.

در این صورت، زوج (L, i) را یک **برگ‌بندی** روی منیفلد M نامیم.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنیم N, M و F منیفلدهایی بترتیب از بعدهای p, m و n باشند به‌طوری‌که $m = n + p$. گوئیم نگاشت $\pi : M \longrightarrow N$ یک کلاف تاری با مدل تاری F می‌باشد ، هرگاه برای هر نقطه $x \in N$ یک همسایگی باز V از x در N و یک دیفئومورفیسم $h : \pi^{-1}(V) \longrightarrow F \times V$ موجود باشد به‌طوری‌که برای نگاشت تصویر $P_2 : F \times V \longrightarrow V$ داشته باشیم $P_2 \circ h = \pi$.

π یک نگاشت پوشاست و هر تار $\pi^{-1}(x)$ یک زیرمنیفلد بسته دیفئومورف با F می‌باشدکه در منیفلد M نشاننده است. منیفلدهای M و N و نگاشت π را بترتیب فضای کل، فضای پایه و تصویر کلاف برداری نامیم. چون h دیفئومورفیسم و P_2 نگاشت تصویر است π دارای رتبه ثابت p روی M می‌باشد. بنابراین π یک سوبمرسیون است. لذا فضای کل از یک کلاف برداری دارای یک n- برگ‌بندی می‌باشد که برگ‌های آن مولفه‌های تارهای π هستند.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه لی از بعد m با عمل $*$ و H یک زیرگروه لی همبند n-بعدی از گروه لی G باشد. تابع

$$L_a : G \longrightarrow G$$

$$L_a(g) = a * g$$

را برای هر نقطه $a \in G$ تعریف کرده و آن را انتقال از چپ می‌نامیم. چون نگاشت‌های L_a , L_a^{-1} هر دو روی G هموار هستند نتیجه می‌گیریم L_a یک دیفئومورفیسم از گروه لی G به روی خودش می‌باشد. بنابراین همدسته چپ $a * H = L_a(H)$ یک زیر منیفلد از بعد n در G است. از این‌رو مجموعه همدسته‌های چپ $\{a * H\}$ یک برگ‌بندی $\mathcal{F}_H$ روی G مشخص می‌کنند. به علاوه، هرگاه H یک زیرگروه لی بسته باشد آنگاه $\frac{G}{H}$ یک منیفلد از بعد $(m-n)$ است و $\mathcal{F}_H$ تنها برگ‌بندی است که توسط نگاشت سوبمرسیون $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$ مشخص می‌شود. حال به توصیف یک حالت خاص و جالب از این برگ‌بندی می‌پردازیم.

صفحه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ را با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ یکی می‌گیریم. دایره $S^۱$ از $\mathbb{R}^۲$ را به عنوان مجموعه‌ی نقاط $\{e^{ti} \mid ۰ \leq t \leq ۲\pi\}$ از $\mathbb{C}$ فرض می‌کنیم. دایره $S^۱$ با عمل طبیعی

$$(e^{ti}, e^{si}) \longmapsto e^{(t+s)i}$$

به یک گروه لی تبدیل می‌شود. همچنین چون حاصلضرب دو گروه لی، یک گروه لی است. لذا چنبره‌ی $T^۲ = S^۱ \times S^۱$ نیز یک گروه لی می‌باشد. سپس با فرض اینکه λ یک عدد ثابت اصم باشد، زیرمنیفلد یک بعدی

$$H = \{(e^{\lambda ti}, e^{ti})\}_{t \in \mathbb{R}}$$

از چنبره‌ی $T^۲$ را تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که H یک زیرگروه لی همبند از $T^۲$ است. همچنین با توجه به اینکه λ یک عدد اصم می‌باشد، نتیجه می‌گیریم زیرگروه لی H در $T^۲$ چگال است که در این صورت برگ‌بندی $\mathcal{F}_H$ از چنبره‌ی $T^۲$ یک مثال از برگ‌بندی است که برگ‌های آن زیر منیفلدهای جادهنده‌ی ناسره هستند.

تعریف ۲.۲.۱. زیرمنیفلد S از منیفلد M را در نقطه $x \in S$ **کاملاً ژئودزی**[۱] گوئیم هرگاه به ازای هر بردار $v \in T_xS$ ، و هر ژئودزی دلخواه $x^\alpha = x^\alpha(t)$ روی M که توسط (x, v)

[۱] *totally geodesic*

مشخص می‌شود برای مقادیر کوچک پارامتر t، در زیر منیفلد S قرار گیرد. زیرمنیفلد S یک زیر منیفلد کاملاً ژئودزی است، هرگاه آن در هر نقطه $p \in S$ کاملاً ژئودزی باشد.

تعریف ۳.۲.۱. هرگاه (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد برگ‌بندی $\mathcal{F}$ روی M را **کاملاً ژئودزی** گوئیم هرگاه هر برگ $\mathcal{F}$ یک زیر منیفلد کاملاً ژئودزی از M باشد .

تعریف ۴.۲.۱. متر g **راشبه کلاف**[1] برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ روی منیفلد ریمانی (M, g) می‌نامیم هرگاه هر ژئودزی در منیفلد ریمانی (M, g) که بر توزیع نرمال بر $\mathcal{F}$ در یک نقطه مماس باشد در تمام طول آن مماس باقی بماند.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنیم $(\mathbb{R}^m, g)$ فضای اقلیدسی ۴-بعدی با ضرب اقلیدسی معمولی باشد. زیرمنیفلد باز M از $\mathbb{R}^4$ را به صورت

$$M = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : 2x^3 - (x^1)^2 > 0\}$$

تعریف می‌کنیم. توزیع‌های $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}^\perp$ روی منیفلد ریمانی (M, g) به‌ترتیب توسط

$$\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + L\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x^4} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - L\frac{\partial}{\partial x^3}\}$$

$$\{Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^2} - L\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^4}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} - x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + L\frac{\partial}{\partial x^4}\}$$

تولید می‌شوند، که در آن $L = \sqrt{2x^3 - (x^1)^2}$.

به سادگی دیده می‌شود، $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}^\perp$ توزیع‌های تکمیل‌کننده متعامد روی منیفلد ریمانی (M, g) هستند. به علاوه، هیچ یک از آن‌ها گسترنده نیستند.(نسبت به کروشه پایا نیستند.) لذا بنا بر قضیه فروبنیوس، هیچ‌کدام از توزیع‌های فوق انتگرال‌پذیر نمی‌باشند . می‌توان نشان داد g یک متر شبه‌کلاف روی منیفلد M است. بنابراین، این مثال، مثالی از یک متر شبه‌کلاف روی منیفلد ریمانی (M, g) به همراه دو توزیع تکمیل‌کننده‌ی غیرانتگرال‌پذیر می‌باشد. (رجوع شود به [۷]).

---

[1] *bundle like*

نماد گذاری

هرگاه $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ توزیع‌های تکمیل‌کننده روی منیفلد M باشند به‌طوری‌که

$$TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$$

آنگاه مرفیسم‌های تصویری از کلاف مماس TM به‌روی توزیع‌های $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ را به‌ترتیب با Q و Q' نشان می‌دهیم.

$$Q : TM \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$Q' : TM \longrightarrow \mathcal{D}'$$

تعریف ۵.۲.۱. نگاشت‌های

$$h : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$$

$$h' : \Gamma(\mathcal{D}^{\perp}) \times \Gamma(\mathcal{D}^{\perp}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D})$$

که به صورت

$$h(QX, QY) = Q'\tilde{\nabla}_{QX}QY \qquad (۲۰.۲.۱)$$

$$h'(Q'X, Q'Y) = Q\tilde{\nabla}_{Q'X}Q'Y \qquad (۲۱.۲.۱)$$

تعریف می‌شوند را به‌ترتیب دومین فرم اساسی روی $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}^{\perp}$ گوئیم. که در آن $\tilde{\nabla}$ الصاق لوی-چویتا است.

هرگاه $(M, g, \mathcal{F})$ یک منیفلد شبه‌ریمانی $n+p$ بعدی برگ‌بندی شده به همراه توزیع‌های ساختاری و متقاطع [۱] $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}^{\perp}$ به ترتیب با رتبه‌های n و p باشد. آنگاه نگاشت

$$h : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$$

---

[۱] *transversal*

$$h(QX,QY)=Q'\tilde{\nabla}_{QX}QY \qquad \forall X,Y\in\Gamma(TM)$$

را دومین فرم اساسی [۱] برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ می‌نامند.

فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک برگ‌بندی n بعدی روی منیفلد شبه‌ریمانی (M,g) با بعد $n+p$ باشد. یک چارچوب متحرک متعامد $\{E_1,...,E_n\}$ در $\Gamma(\mathcal{D})$ که $\mathcal{D}$ توزیع ساختاری برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ است را در نظر می‌گیریم. میدان برداری انحنای متوسط [۲] H از برگ‌بندی $\mathcal{F}$ توسط

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i h(E_i,E_i) \tag{۲۲.۲.۱}$$

تعریف می‌شود. که در آن $\varepsilon_\alpha=g(E_\alpha,E_\alpha)$.

تعریف ۶.۲.۱. یک برگ‌بندی $\mathcal{F}$ روی یک منیفلد شبه‌ریمانی (M,g) را کاملاً نافی [۳] گوئیم هرگاه دومین فرم اساسی h در رابطه زیر صدق کند

$$h(QX,QY)=g(QX,QY)H \qquad \forall X,Y\in\Gamma(TM) \tag{۲۳.۲.۱}$$

$\mathcal{F}$ یک برگ‌بندی کاملاً نافی است اگر و تنها اگر برگ‌های آن کاملاً نافی باشند.

مثال ۴.۲.۱. $\mathbb{R}^m$ را به‌عنوان فضایی از m-تایی‌های $x=(x^1,...,x^m)$ از اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. برای هر عدد صحیح q، $0<q<m$ تابع

$$g:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$g(x,y)=-\sum_{t=1}^{q}x^ty^t+\sum_{s=q+1}^{m}x^sy^s$$

را تعریف می‌کنیم. $\mathbb{R}^m_q=(\mathbb{R}^m,g)$ را یک فضای نیم-اقلیدسی [۴] با اندیس q نامند.

فرض کنیم $\mathbb{R}^{n+1}_q$، $n\geq 2$ یک فضای نیم-اقلیدسی از بعد $(n+1)$ با اندیس q، $(0\leq q\leq n)$ باشد. یک شبه-کره [۵] با شعاع $r>0$ در فضای $\mathbb{R}^{n+1}_q$ ، یک ابرسطح درجه دومی [۶] است که

[۱] $second\ fundamental\ form$

[۲] $mean\ curvature\ vector\ field$

[۳] $totally\ umbilical$

[۴] $semi-Euclidean$

[۵] $pseudo-sphere$

[۶] $hyperquadric$

توسط

$$S_q^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_q^{n+1} : g(x,x) = r^2\}$$

تعریف می‌شود. به‌طور مشابه، یک فضای شبه-هذلولوی [1] با شعاع $r > 0$ در $\mathbb{R}_{q+1}^{n+1}$ ابرسطح درجه دومی به صورت

$$H_q^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_{q+1}^{n+1} : g(x,x) = -r^2\}$$

است.

مجموعه‌های $S_q^n(r)$ و $H_q^n(r)$ دو ابرسطوح کاملاً نافی، به‌ترتیب در فضاهای $\mathbb{R}_q^{n+1}$ و $\mathbb{R}_{q+1}^{n+1}$ هستند. بنابراین مجموعه‌ی تمام شبه-کره‌ها در $\mathbb{R}_q^{n+1}$ (فضاهای شبه- هذلولوی در $\mathbb{R}_{q+1}^{n+1}$) یک برگ‌بندی کاملاً نافی روی $M = \mathbb{R}_q^{n+1} - \{0\}$ ($M = \mathbb{R}_{q+1}^{n+1} - \{0\}$) تعریف می‌کنند. به‌خصوص تمام کره‌ها به مرکز مبدا یک برگ‌بندی کاملاً نافی روی $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ایجاد می‌کنند.

۳.۱ هندسه فینسلری

تعریف ۱.۳.۱. یک **متر ریمانی** روی منیفلد M یک تابع G است که به هر نقطه $m \in M$ یک ضرب اسکالر ناتباهیده g_m روی T_mM نسبت می دهد ، به‌طوری‌که هرگاه نگاشت X،Y دو میدان برداری روی M باشند آنگاه نگاشت

$$G : M \longrightarrow C^\infty(TM \times TM) \qquad (۲۴.۳.۱)$$

$$m \mapsto g_m(X_m, Y_m)$$

یک تابع دیفرانسیل پذیر روی اشتراک دامنه های X، Y باشند.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم $\mathbb{M} = (M,g)$ یک منیفلد ریمانی و $X \in \Gamma(M)$ یک میدان برداری روی M باشد. به ازای هر نقطه‌ی $p \in M$، مجموعه‌ی باز $U \subset M$ را یک همسایگی حول p

[1] $pseudo-hyperbolic$

در نظر می‌گیریم. نگاشت $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \longrightarrow M$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر فرض شود به‌طوری‌که برای هر نقطه‌ی $q \in U$، منحنی $t \longrightarrow \varphi(t,q)$ یک مسیر [1] از میدان برداری X گذرنده از نقطه‌ی q در لحظه $t = ۰$ باشد. میدان برداری X را یک میدان برداری کشنده [2] گوئیم هرگاه به ازای هر $t_\circ \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ، نگاشت

$$\varphi(t_\circ) : U \subset M \longrightarrow M \qquad (۲۵.۳.۱)$$

یک نگاشت ایزومتری باشد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. یک تابع $F : V \to \mathbb{R}$ را یک **نرم مینکووسکی** روی فضای Vنامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

الف) برای هر بردار v داشته باشیم ، $F(v) \geq ۰$ و ($F(v) = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$).

ب) برای هر بردار $v \in V$ و $\lambda > ۰$ ، داشته باشیم $F(\lambda V) = \lambda F(v)$.

ج) تابع F روی مجموعه $V - \{۰\}$ یک نگاشت هموار از کلاس C^∞ باشد.

د) برای هر $۰ \neq v \in V$، فرم متقارن دوخطی $g_v : V \times V \to \mathbb{R}$ تعریف شده توسط رابطه زیر،

$$g_v(u,w) = \frac{۱}{۲} \frac{\partial^۲ F^۲(v + tu + sw)}{\partial t \partial s} \mid_{t=۰, s=۰} \qquad (۲۶.۳.۱)$$

یک ضرب داخلی باشد.

در این صورت، زوج (V, F) را یک فضای مینکووسکی می نامیم.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه دیک) [3] یک نرم مینکووسکی F اقلیدسی است اگر و تنها اگر $I = ۰$. که در آن I تاب کارتان متوسط می‌باشند.

تعریف ۴.۳.۱. تابع پیوسته $L : TM^\circ \longrightarrow (۰, \infty)$ به‌طوری‌که $(x,y) \mapsto L(x,y)$ $(TM^\circ = TM - \{۰\})$ را یک متر **شبه فینسلری** می نامیم هرگاه در شرایط زیر

---

[1] $trajectory$
[2] $killing\ vector\ field$
[3] $Deike$

صدق کند؛

الف)L روی TM° هموار باشد.

ب)L نسبت به y همگن مثبت از درجه ۲ باشد. به عبارت دیگر داشته باشیم

$$L(x,ky)=k^{۲}L(x,y) \quad ،\forall k>۰$$

ج) تانسور متری $g_{ij}(x,y)=\frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲}L}{\partial y^i\partial y^j}$ به ازای تمام $(x,y)\in TM^\circ$ دارای q مقدار ویژه منفی و$m-q$ مقدار ویژه مثبت باشد. آنگاه $F^m=(M,L)$ را یک منیفلد شبه فینسلری از مرتبه q می نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. یک تابع $F:TM\longrightarrow[۰,\infty[$ را یک **متر فینسلری** می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) F روی فضای $TM-\{۰\}$ از کلاس C^∞ باشد.

ب) برای هر نقطه $x\in M,$ تحدید نگاشت F به فضای مماس T_xM $(F_x:=F|_{T_xM})$ یک نرم مینکووسکی روی T_xM باشد.

مثال ۱.۳.۱. یک کلاس مهم از مترهای فینسلری، همان مترهای ریمانی هستند. فرض کنیم g یک متر ریمانی باشد. قرار می‌دهیم

$$F_x(Y)=\sqrt{g_x(y,y)} \qquad y\in T_xM$$

ملاحظه می‌شود که F_x یک نرم اقلیدسی است. خانواده تمام نرمهای اقلیدسی $F=\{F_x\}_{x\in M}$ یک متر فینسلری روی Mتشکیل می‌دهد.

تذکر

یک متر فینسلری F را ریمانی می‌نامیم هرگاه برای یک متر ریمانی g بتوان آن را به صورت فوق بیان کرد.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنیم $\alpha(y)=\sqrt{\alpha_{ij}(x)y^iy^j}$ و $\beta(y)=b_i(x)y^i$ بترتیب یک متر ریمانی و یک‌فرمی روی منیفلد M باشند. هرگاه

$$\|\beta\|_x=\sup_{y\in T_xM}\frac{\beta(y)}{\alpha(y)=1}<1 \qquad x\in M$$

آن‌گاه $F(y):=\alpha(y)+\beta(y)$ یک متر فینسلری روی M می‌باشد که آن را متر رندرز می‌نامیم.

فصل ۲

هندسه فینسلری و برگ بندی‌های طبیعی روی کلاف مماس

۱.۲ مقدمات.

فرض کنیم M یک منیفلد حقیقی از بعد m و TM کلاف مماس آن باشد. نگاشت $\pi : TM \longrightarrow M$ تصویر کانونی کلاف مماس به روی منیفلد M فرض شود. کارت موضعی (U, ϕ) حول نقطه $x \in U$ روی منیفلد M با مختصات موضعی (x^i) ، $i \in \{۱, ..., m\}$ یک کارت موضعی $(\pi^{-۱}(U), \phi)$ روی کلاف مماس TM با مختصات موضعی (x^i, y^i) تعریف می‌کند

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x \in \pi^{-۱}(U) \qquad (۱.۱.۲)$$

تبدیلات مختصاتی روی TM توسط

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^۱, ..., x^m) \qquad (۲.۱.۲)$$

$$\tilde{y}^i = J^i_j(x) y^j \qquad (۳.۱.۲)$$

مشخص می‌شود. که در آن

$$J^i_j(x) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{x}^j} \qquad (۴.۱.۲)$$

با توجه به روابط فوق در چارچوب‌های متحرک موضعی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ و $\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\}$ خواهیم داشت؛

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = J^j_i(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + J^j_{ik}(x) y^k \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \qquad (۵.۱.۲)$$

$$J^j_{ik}(x) = \frac{\partial^۲ \tilde{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} \qquad (۶.۱.۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = J^j_i(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \qquad (۷.۱.۲)$$

$$(x^۱, ..., x^m, y^۱, ..., y^m) \longmapsto (\tilde{x}^۱, ..., \tilde{x}^m, \tilde{y}^۱, ..., \tilde{y}^m)$$

$$J_i^j = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^m} \end{bmatrix}$$

و

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^m} & \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{x}^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \tilde{y}^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{y}^1}{\partial x^m} & \dfrac{\partial \tilde{y}^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{y}^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \tilde{y}^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{y}^m}{\partial x^m} & \dfrac{\partial \tilde{y}^m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial \tilde{y}^m}{\partial y^m} \end{bmatrix}$$

به‌طور طبیعی برای تبدیلات در چارچوب متحرک موضعی روی TM° به‌دست می‌آوریم؛

$$\frac{\partial}{\partial^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} y^k \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}$$

در تمام این بخش منیفلدها هموار و پیرافشرده در نظر گرفته می شوند.

جبر توابع هموار روی M (دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^∞) را با $C^\infty(M)$ نشان می دهیم و $\Gamma(TM)$ یک $C^\infty(M)$- مدول از بخش‌های هموار روی TM فرض می‌شود. نمادهای مشابه‌ای برای هر منیفلد دیگر یا کلاف برداری به کار می بریم.

یک ساختار فینسلری روی M تابعی است حقیقی و نامنفی ($F : TM \longrightarrow [0, \infty[$) روی کلاف مماس TM که شرایط زیر برای آن درست است.

۱) منظم بودن: یعنی تابع F روی $TM - \{0\}$، از کلاس C^∞ باشد.

۲) همگن مثبت از درجه یک باشد.

۳) تحدب قوی: یعنی ماتریس زیر به نام ماتریس هسیان، در تمام نقاط $TM - \{0\}$ مثبت معین باشد:

$$(g_{ij}) = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}\right] \qquad (۸.۱.۲)$$

دراین‌صورت $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری و F تابع اساسی $\mathbb{F}^m$ نامیده می شوند.

تذکر. تابع اساسی F از منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ روی $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ پوشاست. بدیهی است، $c \in \mathbb{R}^+$ دلخواه فرض شود. عضوی از TM° مانند (x, y) که $y \neq 0$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $F(x, y) = a$. با توجه به همگن مثبت بودن F به‌دست می‌آوریم

$$F(x, \frac{c}{a} y) = c$$

برگ‌بندی که روی TM° به‌وسیله تارهای $\pi : TM^\circ \longrightarrow M$ تعریف می شود را با نماد $\mathcal{F}_V$ نشان می‌دهیم و آن را برگ‌بندی عمودی روی TM° نامیم. یک توزیع مماس بر برگ‌بندی $\mathcal{F}_V$ ، یک توزیع عمودی [1] VTM° روی TM° است. بنابراین توزیع عمودی VTM° به طور موضعی توسط $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1}^m$ ، تولید می شود.

هرگاه

$$G^j = \sum_{h,k} \frac{1}{4} g^{jk} (\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^k \partial x^h} y^h - \frac{\partial F^2}{\partial x^k}) \tag{۹.۱.۲}$$

برای تعریف یک توزیع تکمیل‌کننده‌ی VTM° روی کلاف مماس TTM° توابع زیر را در نظر می گیریم.

$$G_i^j = \frac{\partial G^j}{\partial y^i} \tag{۱۰.۱.۲}$$

HTM° توزیع تکمیل کننده‌ی VTM° در کلاف مماس (TTM°) است که به‌طور موضعی به‌وسیله $\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_j G_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ به ازاء $i \in \{1, ..., m\}$ تولید می شود.

حال با استفاده از تجزیه $TTM^\circ = HTM^\circ \oplus VTM^\circ$ یک متر ریمانی G روی TM° ، به شرح زیر تعریف می کنیم ،

---

[1] *vertical distribution*

$$G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = G(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = g_{ij} \quad (۱۱.۱.۲)$$

$$G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = \circ \quad (۱۲.۱.۲)$$

HTM° را **توزیع افقی** و G را **متر سازاکی - فینسلر** [۱] روی TM° گوئیم.

دو میدان برداری L, L^* که به طور سرتاسری روی TM° تعریف می‌شوند، که به طور موضعی به‌صورت

$$L = \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (۱۳.۱.۲)$$

$$L^* = \sum_i y^i \frac{\delta}{\delta x^i} \quad (۱۴.۱.۲)$$

بیان می شوند . آنها را به‌ترتیب میدان‌های برداری لیوویل [۲] عمودی و افقی روی TM° می نامیم. از این رو توزیع‌های خطی $\mathcal{L} = span\{L\}$ و $\mathcal{L}^* = span\{L^*\}$ را توزیع‌های عمودی و افقی لیوویل روی TM° نامیم . با توجه به تجزیه $TTM^\circ = HTM^\circ \oplus VTM^\circ$ ، دستگاه مختصات موضعی $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=۱}^m$ ، را به عنوان یک چارچوب متحرک موضعی روی TM° در نظر می گیریم. هرگاه

$$R_{ij}^k = \frac{\delta G_i^k}{\delta x^j} - \frac{\delta G_j^k}{\delta x^i} \quad (۱۵.۱.۲)$$

$$G_{ij}^k = \frac{\partial G_j^k}{\partial y^i} \quad (۱۶.۱.۲)$$

$$[X, Y] = \sum_{i,j} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (۱۷.۱.۲)$$

آنگاه با محاسبه مستقیم به دست می‌آوریم :

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] = \sum_k R_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \quad (۱۸.۱.۲)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \sum_k G_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \quad (۱۹.۱.۲)$$

---

[۱] $Sasaki - Finsler$

[۲] $Liouville$

در این قسمت به اثبات درستی روابط فوق می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i}-G_i^t\frac{\partial}{\partial y^t},\frac{\partial}{\partial x^j}-G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right]\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_k G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right]-\left[\sum_t G_i\frac{\partial}{\partial y^t},\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_k G_j\frac{\partial}{\partial y^k}\right]\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]-\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_k G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right]}_{(I)}-\underbrace{\left[\sum_t G_i^t\frac{\partial}{\partial y^t},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]}_{(II)}\\ &\quad+\underbrace{\left[\sum_t G_i^t\frac{\partial}{\partial y^t},\sum_k G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right]}_{(III)}\end{aligned}$$

ابتدا (I) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_k G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right] &= \left(\frac{\partial G_j^1}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^1}+\frac{\partial G_j^2}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^2}+...+\frac{\partial G_j^m}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^m}\right)\\ &= \sum_k \frac{\partial G_j^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}\end{aligned}$$

برای محاسبه (II) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\sum_t G_i^t\frac{\partial}{\partial y^t}\right] &= \left(\frac{\partial G_i^1}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^1}+\frac{\partial G_i^2}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^2}+...+\frac{\partial G_i^m}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^m}\right)\\ &= \sum_k \frac{\partial G_i^t}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^t}\end{aligned}$$

به طریق مشابه (III) را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\left[\sum_t G_i^t\frac{\partial}{\partial y^t},\sum_k G_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right] &= \sum_{t,k}\left(G_i^t\frac{\partial G_j^k}{\partial y^t}-G_j^t\frac{\partial G_i^k}{\partial y^t}\right)\frac{\partial}{\partial y^k}\\ &= \sum_{j,k}\frac{\partial G_j^k}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^k}-\sum_k G_j^k\frac{\partial G_i^k}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^k}\end{aligned}$$

از طرفی چون $\sum_k \frac{\delta G_i^k}{\delta x^j}=\sum_k \frac{\partial G_i^k}{\partial x^j}-\sum_k G_j^k\frac{\partial G_i^k}{\partial y^k}$ و $\frac{\delta G_j^k}{\delta x^i}=\frac{\partial G_j^k}{\partial x^i}-G_i^j\frac{\partial G_j^k}{\partial y^j}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]=\frac{-\partial G_j^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}+\frac{\partial G_i^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}+G_i^j\frac{\partial G_j^k}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^k}-G_j^k\frac{\partial G_i^k}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^k}$$

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^j} - \textstyle\sum_k G_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] - \left[\textstyle\sum_k G_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \textstyle\sum_k G_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}\right] \\
&= \frac{\partial G_j^1}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \frac{\partial G_j^m}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^m} \\
&= \textstyle\sum_k \frac{\partial G_j^k}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_k G_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}
\end{aligned}
$$

هرگاه $\tilde{\nabla}$ الصاق لوی - چویتا [1] روی منیفلد ریمانی (TM°, G) باشد می توان لم زیر را به‌دست آورد.

لم ۱.۱.۲. اگر $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری باشد، آنگاه الصاق لوی چویتا $\tilde{\nabla}$ روی (TM°, G) در مختصات موضعی به صورت زیر بیان می شود،

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i} = \sum_k \left(-(C_{ij}^k + \frac{1}{2} R_{ij}^k) \frac{\partial}{\partial y^k} + F_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} \right) \tag{۲۰.۱.۲}$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{h,k} \left(G_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^k} - \frac{1}{2} g_{ij|h} g^{hk} \frac{\delta}{\delta x^k} \right) \tag{۲۱.۱.۲}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} &= \sum_{h,k} F_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} + (C_{ij}^k + \frac{1}{2} g_{ih} R_{lj}^h g^{lk}) \frac{\delta}{\delta x^k} \\
&= \tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta y^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{h,k} G_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}
\end{aligned} \tag{۲۲.۱.۲}
$$

که در آن

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_h g^{hk} (\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^h}) \tag{۲۳.۱.۲}$$

$$F_{ij}^k = \sum_h \frac{1}{2} g^{hk} (\frac{\delta g_{hi}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{hj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^h}) \tag{۲۴.۱.۲}$$

---

[1] $Levi - civita$

$$g_{ij|h} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^h} - \sum_k g_{kj} G^k_{ih} - g_{ik} G^k_{jh} \qquad (۲۵.۱.۲)$$

" | " علامت مشتق کواریانت متقاطع ورنسینو [۱] است.

برهان. هرگاه میدان‌های برداری $X, Y, Z \in \Gamma(TTM^\circ)$ دلخواه باشند، (رجوع شود به [۱] برای الصاق لوی چویتا $\tilde{\nabla}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ۲G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(G(Y,Z)) + Y(G(Z,X)) - Z(G(X,Y)) \\ &+G([X,Y],Z) - G([Y,Z],X) + G([Z,X],Y) \end{aligned}$$

با محاسبه مستقیم بدست می‌آوریم:

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{۱}{۲}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + g_{kh} R^h_{ij})$$

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}) = \frac{۱}{۲}(\frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{kj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k})$$

زیرا

$$۲G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}) = \frac{\delta}{\delta x^j}(G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k})) + \frac{\delta}{\delta x^i}(G(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}))$$

$$-\frac{\partial}{\partial y^k}(G(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^i})) + G(\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^i}\right], \frac{\partial}{\partial y^k})$$

$$-G(\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right], \frac{\delta}{\delta x^j}) + G(\left[\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right], \frac{\delta}{\delta x^i})$$

چون $\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right] = G^i_{kj}\frac{\partial}{\partial y^i}$ و $G^j_{ki}\frac{\partial}{\partial y^j}$ ، $Rij^k\frac{\partial}{\partial y^k} = -R^h_{ij}\frac{\partial}{\partial y^h}$ – عبارت فوق برابر است با:

[۱] *transversal Vranceanu covariant derivative*

$$= -\frac{\partial}{\partial y^k} g_{ji} - R^k_{ij} g_{kh} - G^j_{ki} G(\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\delta}{\delta x^j}) - G^i_{kj} G(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^i})$$

$$\Rightarrow G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{۱}{۲}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + g_{kh} R^k_{ij})$$

$$۲G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}) = \frac{\delta}{\delta x^j}(G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k})) + \frac{\delta}{\delta x^i}(G(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}))$$

$$-\frac{\delta}{\delta x^k}(G(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^i})) + G(\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^i}\right], \frac{\delta}{\delta x^k})$$

$$-G(\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}\right], \frac{\delta}{\delta x^j}) + G(\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right], \frac{\delta}{\delta x^i})$$

$$= \frac{\delta}{\delta x^j} g_{ik} + \frac{\delta}{\delta x^i} g_{kj} - \frac{\delta}{\delta x^k} g_{ji}$$

$$\Rightarrow G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}}, \frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}) = \frac{۱}{۲}(\frac{\delta g_{ik}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{kj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ji}}{\delta x^k})$$

حال، اگر مقادیر C^k_{ij} و F^k_{ij} را در طرف دیگر تساوی (۲۰.۱.۲) قرار دهیم خواهیم داشت

$$-(\frac{۱}{۲}\sum h g^{hk} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^h} + \frac{۱}{۲} R^h_{ij}) \frac{\partial}{\partial y^k} + (\frac{۱}{۲} g^{hk} (\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} + \frac{\delta g_{hj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^h})) \frac{\delta}{\delta x^k} \qquad (*)$$

و در نتیجه

$$G((*), \frac{\partial}{\partial y^k}) = -(\frac{۱}{۲} g^{hk} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^h} + \frac{۱}{۲} R^h_{ij}) = -(\frac{۱}{۲} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} + \frac{۱}{۲} g_{hk} R^h_{ij})$$

با برابر بوده دو طرف تساوی تحت متر G هم برای مولفه‌های عمودی و هم مولفه‌های افقی برهان کامل می‌شود. $\square$

تعریف ۱.۱.۲. متر G را نسبت به الصاق $\tilde{\nabla}$ موازی می‌نامیم هرگاه برای هر $X, Y, Z \in \Gamma(TTM^\circ)$ تساوی زیر درست باشد:

$$X(G(Y,Z)) = G(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + G(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \qquad (۲۶.۱.۲)$$

.

از روابط (۱۲.۱.۲) و(۲۶.۱.۲) نتیجه می‌شود،

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}) + G(\frac{\partial}{\partial y^i}, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\delta}{\delta x^k}) = ۰$$

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^k}) + G(\frac{\partial}{\partial y^i}, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\delta}{\delta x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^j}(G(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^k})) = ۰$$

همچنین بنا بر (۲۱.۱.۲) و (۲۲.۱.۲) بدست می‌آوریم:

$$g_{ij|k} = ۲\sum_h g_{ih}(F^h_{jk} - G^h_{jk})$$

در نتیجه، با استفاده از (۲۱.۱.۲) خواهیم داشت:

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i} = C^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} + g_{ih}(G^h_{jl} - F^h_{jl})g^{lk}\frac{\delta}{\delta x^k} \qquad (۲۷.۱.۲)$$

زیرا

$$g_{ij|l} = ۲\sum_h g_{ih}(F^h_{jl} - G^h_{jl})$$

پس

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i} &= C^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} - \frac{۱}{۲}g_{ij|l}g_{lk}\frac{\delta}{\delta x^k} \\ &= C^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} - \frac{۱}{۲}(۲g_{ih}(F^h_{jl} - G^h_{jl} - G^h_{jl}))g^{lk}\frac{\delta}{\delta x^k}\end{aligned}$$

سه الصاق فینسلری کلاسیک که در مطالعه هندسه فینسلری نقش مهمی دارند عبارتند از : الصاق کارتان CFC ، الصاق راند RFC و الصاق بروالد BFC

$CFC = (F^k_{ij}, G^k_i, C^k_{ij})$

$RFC = (F^k_{ij}, G^k_i, ۰)$

$BFC = (G^k_{ij}, G^k_i, ۰)$

الصاق کارتان روی منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m = (M, F)$ تصویر الصاق لوی- چویتا $\tilde{\nabla}$ از (TM°, G) به روی VTM° است. که آن را با علامت ∇ نشان می‌دهیم.

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}) = \sum_h C^h_{ij} g_{hk}$$

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^k}) = \sum_h F^h_{ij} g_{hk}$$

چون VTM° توسط $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_i$ تولید می‌شود، ضریب $\frac{\delta}{\delta x^i}$ در رابطه (۲۱.۱.۲) صفر می‌شود ، لذا

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_k C^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

و

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = V\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_k F^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

از این رو، ∇ یک الصاق خطی است که آن را الصاق کارتان روی F^m نامند.

تعریف ۲.۱.۲. یک منیفلد فینسلری را منیفلد **لندسبرگ** [۱] گوئیم هرگاه الصاق بروالد بر الصاق راند منطبق باشد.

$$F^k_{ij} = G^k_{ij}$$

تذکر. یک منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد ریمانی است اگر و تنها اگر متر فینسلری F تنها به (x^α) وابسته باشد. یعنی به ازای هر $i, j, k \in \{۱, ..., m\}$ داشته باشیم

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = ۰$$

چون

$$C^k_{ij} = \frac{۱}{۲} g^{kh} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^h}$$

[۱] $Landsberg$

در نتیجه $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد ریمانی است اگر و تنها اگر

$$C^k_{ij} = ۰ \qquad \forall a, b, c \in \{۱, ..., m\}$$

همچنین از رابطه

$$G^k_{ij} = F^k_{ij} + C^k_{ij|۰} \tag{۲۸.۱.۲}$$

نتیجه می‌شود یک منیفلد فینسلری ریمانی است اگر و تنها اگر لندسبرگ باشد.

از همگن بودن تابع اساسی F به درستی نتایج زیر پی می‌بریم:

$$۱) y^i C^k_{ij} = ۰$$

$$۲) y^i G^j_i = ۲G^j$$

$$۳) y^i G^j_{ik} = G^j_k$$

$$۴) y^i F^j_{ik} = G^j_k$$

با توجه به قضیه اویلر برای توابع همگن مثبت و روابط

$$C^c_{ab} = \frac{۱}{۲} d^{cd} \frac{\partial g_{ab}}{\partial y^d} \tag{۲۹.۱.۲}$$

$$G^c_{ab} = \frac{\partial G^c_b}{\partial y^a} \tag{۳۰.۱.۲}$$

خواهیم داشت:

$$۱) y^i C^c_{ij} = \frac{۱}{۲} g^{kh} y^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^h} = ۰ g_{ij} = ۰$$

$$۲) y^i G^j_i = y^i \frac{\partial G^j}{\partial y^i} = ۲G^j$$

$$۳) y^i G^k_{ij} = y^i \frac{\partial G^k_j}{\partial y^i} = ۱G^k_j$$

۲.۲ برگ بندی‌ها روی فضای (TM°, G)

در این بخش نشان می‌دهیم شش برگ‌بندی طبیعی روی کلاف مماس از یک منیفلد فینسلری وجود دارد . در ادامه بعضی از خواص آنها را بررسی می‌کنیم. جالب خواهد بود که، مطالعه

این برگ‌بندی‌ها اطلاعات مهمی از هندسه منیفلد فینسلری‌اش می‌دهند. ابتدا به بیان برخی از ویژگی‌های یک برگ‌بندی روی یک منیفلد ریمانی می‌پردازیم.

فرض کنیم (N,g) یک منیفلد ریمانی از بعد $(n+p)$ و $\mathcal{D}$ یک توزیع انتگرال‌پذیر از رتبه n روی آن باشد. آنگاه برگ‌بندی F تعریف شده بوسیله $\mathcal{D}$ را کاملاً ژئودزی (کاملاً نافی) می‌نامیم هرگاه هر برگ آن کاملاً ژئودزی (کاملاً نافی) جادهنده در (N,g) باشد. فضای متعامد تکمیل کننده توزیع $\mathcal{D}$ در کلاف مماس TN را با $\mathcal{D}^\perp$ نمایش می دهیم.

متر ریمانی g را شبه کلاف برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ نامند هرگاه هر ژئودزی در(N,g) که $\mathcal{D}^\perp$ در یک نقطه بر آن مماس باشد در تمام طول آن مماس باقی بماند.

اگر $\tilde{\nabla}$ یک الصاق لوی چویتا روی (N,g) باشد و داشته باشیم:

$$\forall X,Y\in\Gamma(D^\perp), g(\tilde{\nabla}_X Y+\tilde{\nabla}_Y X, Z)=0 \qquad (۳۱.۲.۲)$$

آنگاه متر ریمانی g شبه کلاف برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ است .

حال، با در نظر گرفتن منیفلد ریمانی (TM°, G) و برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}_V$ روی آن، می‌توان قضیه زیر را بیان و اثبات کرد.

قضیه ۱.۲.۲. متر سازاکی- فینسلر G برای برگ‌بندی $\mathcal{F}_V$ یک شبه کلاف است اگر و تنها اگر $\mathbb{F}^m=(M,F)$ یک منیفلد ریمانی باشد.

برهان. متر سازاکی - فینسلر G برای برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}_V$ شبه کلاف است اگر و تنها اگر برای الصاق لوی- چویتا $\tilde{\nabla}$ روی (TM°, G) داشته باشیم:

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\delta}{\delta x^i}+\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^k})=0, \qquad \forall i,j,k\in\{1,...,m\} \qquad (۳۲.۲.۲)$$

چون C_{ij} و R^k_{ij} نسبت به اندیس‌های i,j به‌ترتیب متقارن و پادمتقارن هستند با استفاده از روابط (۱۲.۱.۲) و (۱۲.۱.۲)و (۲۰.۱.۲) نتیجه می‌شود که عبارت فوق معادل با صفر بودن C^k_{ij} است ، و این معادل با ریمانی بودن متر F می‌باشد. جزئیات محاسبات برهان در زیر مشاهده می‌شود:

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\delta}{\delta x^i}+\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^k})=G(-(C^k_{ij}+\frac{۱}{۲}R^k_{ij})\frac{\partial}{\partial y^k}+F^k_{ij}\frac{\delta}{\delta x^k}$$

$$-(C^k_{ij}+\frac{۱}{۲}R^k_{ji})\frac{\partial}{\partial y^k}+F^k_{ij}\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\partial}{\partial y^k})$$

$$=-(C^k_{ji}+\frac{۱}{۲}R^k_{ji})G(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^k})+F^k_{ji}G(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\partial}{\partial y^k})$$

$$-(C^k_{ij}+\frac{۱}{۲}R^k_{ij})G(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^k})+F^k_{ij}G(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\partial}{\partial y^k})$$

چون $C^k_{ji}+\frac{۱}{۲}R^k_{ji}=-\frac{۱}{۲}R^k_{ij}$ و $G(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\partial}{\partial y^k})=۰$ پس:

$$G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\delta}{\delta x^i}+\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^k})=-۲C^k_{ij}G(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^k})$$
$$=-۲C^k_{ij}g_{kh}=۰\Longleftrightarrow C^k_{ij}=۰$$

$\square$

قضیه ۲.۲.۲. منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m=(M,F)$ یک منیفلد لندسبرگ است اگر و تنها اگر برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}_V$ روی منیفلد ریمانی (TM°,G) کاملا ژئودزی باشد.

برهان. ازآنجا که توزیع عمودی به‌وسیله، $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=۱}^m$ تولید می‌شود نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{F}_V$ کاملاً ژئودزی است اگر و تنها اگر به ازاء $i,j\in\{۱,...,m\}$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i}=C^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k}+g_{ij}(G^h_{jl}-F^h_{jl})g^{lk}\frac{\delta}{\delta x^k}\in\Gamma(VTM^\circ)$$

در نتیجه ضریب $\frac{\delta}{\delta x^k}$ باید صفر شود بنابراین خواهیم داشت

$$G^h_{jl}=F^h_{jl}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۱. هرگاه $(M, g_{ij}(x))$ یک منیفلد ریمانی باشد، آنگاه برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}$ روی فضای (TM°, G) کاملاً ژئودزی است و G برای برگ‌بندی $\mathcal{F}_V$ شبه کلاف می‌باشد.

حال با توجه به تجزیه $TTM^\circ = HTM^\circ \oplus VTM^\circ$ هر میدان برداری $X \in \Gamma(TTM^\circ)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$X = HX + VX = \sum_i (HX)^i \frac{\delta}{\delta x^i} + \sum_i (VX)^i \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad (۳۳.۲.۲)$$

که در آن H, V به‌ترتیب تصویر همریخت فضای TTM° روی فضاهای HTM° و VTM° می‌باشد .

$$H : TTM^\circ \longrightarrow HTM^\circ$$

$$V : TTM^\circ \longrightarrow VTM^\circ$$

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری باشد.آنگاه برای هر $X \in \Gamma(TTM^\circ)$ داریم:

$$\tilde{\nabla}_X L = VX \qquad (۳۴.۲.۲)$$

$$\tilde{\nabla}_X L^* = \sum_{i,j,k} \frac{۱}{۲} (HX)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + \sum_{i,j,k,h} ((VX)^k + \frac{۱}{۲} (VX)^i R_{ijh} y^h g^{jk})) \frac{\delta}{\delta x^k} \qquad (۳۵.۲.۲)$$

برهان. با استفاده از رابطه $\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - G^j_i \frac{\partial}{\partial y^j}$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{\delta y^i}{\delta x^j} = -G^i_j$$

$$\frac{\delta y^i}{\delta x^i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^i} - G^j_i \frac{\partial y^i}{\partial y^j} = -G^i_j$$

حال با محاسبه مستقیم و استفاده از رابطه

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\tilde{\nabla}_X L = \tilde{\nabla}_{HX+VX} L = \tilde{\nabla}_{\sum_i (HX)^i \frac{\delta}{\delta x^i} + (VX)^i \frac{\partial}{\partial y^i}} \sum y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$= \sum_i (HX)^i \tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \sum_j y^j \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_i (VX)^i \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \sum_j y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$= \sum_{i,j} (VX)^i y^j \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_{i,k} (VX)^i (\frac{\partial}{\partial y^i y^k}) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

$$= \sum_k ((VX)^k - (HX)^i G_i^k) \frac{\partial}{\partial y^k} + \sum_{i,j} (VX)^i y^j \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$+ \sum_{i,j} (HX)^i y^j \tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$= \sum_k ((VX))^k - (HX)^i G_i^k) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

$$+ \sum_{i,j} (VX)^i y^j (C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} + (g_{ih})(G_{jl}^h - F_{jl}^h) g^{lk}) \frac{\delta}{\delta x^k}]$$

$$+ \sum_{i,j} (HX)^i y^j [F_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k} + (C_{ji}^k + \frac{۱}{۲} g_{jh} R_{li}^h g^{lk}) \frac{\delta}{\delta x^k}]$$

$$= VX$$

با محاسبات مشابه دومین رابطه نیز ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری و $\tilde{\nabla}$ الصاق لوی‌چویتا روی (TM°, G) باشند. آنگاه خواهیم داشت:

۱)

$$\tilde{\nabla}_{VX}L = VX$$

۲)

$$\tilde{\nabla}_{HX}L = \circ, \quad \forall X \in \Gamma(TTM^{\circ})$$

۳)

$$\tilde{\nabla}_{L}L = L$$

۴)

$$\tilde{\nabla}_{L^*}L = \circ$$

۵)

$$\tilde{\nabla}_{L}L^* = L^*$$

۶)

$$\tilde{\nabla}_{L^*}L^* = \circ$$

برهان.

۱) به سادگی مشاهده می‌شود:

$$\tilde{\nabla}_{VX}L = V(VX) = VX$$

۲)

$$\tilde{\nabla}_{HX}L = V(HX) = \circ$$

۳) چون $L = \sum_i Y^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ خواهیم داشت:

$$\tilde{\nabla}_{\sum_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i}}L = \sum_i y^i \tilde{\nabla}_{\dfrac{\partial}{\partial y^i}} L = \sum_i y^i V \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} = L$$

۴)

$$\tilde{\nabla}_{\sum_i y^i \frac{\delta}{\delta x^i}}L = \sum y^i \tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i} L = \circ}$$

برای اثبات قسمت ۵و ۶ از (۳۵.۲.۲) استفاده کرده به‌دست می‌آوریم:

۵)

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_L L^* &= \frac{1}{2}(HL)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + ((VL)^k + \frac{1}{2}(VL)^i R_{ijh} y^h g^{jk}) \frac{\delta}{\delta x^k} \\ &= y^k \frac{\delta}{\delta x^k} = L^*\end{aligned}$$

۶)

$$\tilde{\nabla}_{L^*} L^* = \frac{1}{2}(HL^*)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + ((VL^*)^k + \frac{1}{2}(VL^*)^i R_{ijh} y^h g^{jk}) \frac{\delta}{\delta x^k} = 0$$

□

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری باشد آنگاه عبارات زیر برقرارند:

الف) میدانهای برداری لیوویل L و L^* دو برگ‌بندی کاملاً ژئودزی روی فضای (TM°, G) مشخص می‌کنند.

ب) توزیع $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^*$ انتگرال‌پذیر است و برگ‌بندی ایجاد شده توسط آن روی فضای (TM°, G) کاملاً ژئودزی است.

برهان. الف) برگ‌بندی‌هایی که توسط توزیع‌های L, L^* ایجاد می‌شوند کاملاً ژئودزی هستند اگر و تنها اگر به‌ترتیب $\tilde{\nabla}_L L \in \Gamma(\mathcal{L})$ و $\tilde{\nabla}^*_L L^* \in \Gamma(\mathcal{L}^*)$. چون $\tilde{\nabla}_L L = L$ و $\tilde{\nabla}_{L^*} L^* = 0$ لذا برگ‌بندی‌های میدان‌های برداری لیوویل کاملاً ژئودزی روی (TM°, G) هستند.

برای اثبات (ب) از قضیه فروبنیوس استفاده می‌کنیم. چون تاب الصاق لوی‌چویتا $\tilde{\nabla}$ صفر است پس

$$[L, L^*] = \tilde{\nabla}_L L^* - \tilde{\nabla}_{L^*} L$$

از آنجاکه $\tilde{\nabla}_L L^* = L^*$ و $\tilde{\nabla}_{L^*} L = 0$ خواهیم داشت:

$$[L, L^*] = \tilde{\nabla}_L L^* - \tilde{\nabla}_{L^*} L = L^* \in \Gamma(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^*)$$

در این‌صورت توزیع $\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^*$ یک توزیع انتگرال‌پذیر است. حال به ازای هر دو میدان برداری $X,Y\in\Gamma(\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^*)$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y &= \tilde{\nabla}_{L+L^*}(L+L^*)\\ &= \tilde{\nabla}_L L+\tilde{\nabla}_L L^*+\tilde{\nabla}_{L^*}L+\tilde{\nabla}_{L^*}L^*\\ &= L+L^*\in\Gamma(\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^*)\end{aligned}$$

درنتیجه برگ‌بندی که بوسیله $\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^*$ مشخص می‌شود کاملا ژئودزی است. $\square$

حال به معرفی دو برگ‌بندی دیگر روی (TM°,G) می‌پردازیم.

هرگاه $\mathcal{L}^\perp,\mathcal{L}'$ به‌ترتیب توزیع‌های متعامد تکمیل‌کننده $\mathcal{L}$ در فضاهای VTM° و TTM° باشند، آنگاه قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{F}^m=(M,F)$ یک منیفلد فینسلری باشد. آنگاه هر دو توزیع $\mathcal{L}'$و $\mathcal{L}^\perp$ انتگرال‌پذیرند .

برهان. فرض کنیم $X,Y\in\Gamma(\mathcal{L}^\perp)$ دو میدان برداری دلخواه باشند. بنابر بر خواص الصاق لوی- چویتا $\tilde{\nabla}$ روی فضای (TM°,G) بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned}G([X,Y],L) &= G(\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}-YX,L)\\ &= G(X,\tilde{\nabla}_Y L)-G(Y,\tilde{\nabla}_X L)\\ &= G(VX,VY)-G(VY,VX)=\circ\end{aligned}$$

بنابراین $[X,Y]\in\Gamma(\mathcal{L}^\perp)$. درنتیجه ، $\mathcal{L}^\perp$ انتگرال‌پذیر است. حال فرض کنیم $X,Y\in\Gamma(\mathcal{L}')$. از آن‌جا که VTM°یک توزیع انتگرال‌پذیر و $\mathcal{L}'$ یک زیر کلاف برداری از VTM° است طبق قضیه فروبنیوس توزیع VTM° نسبت به کروشه پایدار است. ($[X,Y]\in\Gamma(VTM^\circ)$). چون $G([X,Y],L)=\circ$ پس $[X,Y]\in\Gamma(\mathcal{L}')$ که مجدداً بنا بر قضیه فروبنیوس توزیع $\mathcal{L}'$ نیز انتگرال‌پذیر است. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم که برگ‌های برگ‌بندهایی که توسط توزیع‌های انتگرال‌پذیر $\mathcal{L}^{\perp}$ و $\mathcal{L}'$ مشخص می‌شوند به‌وسیله‌ی تابع اساسی F از $\mathbb{F}^m$ نیز تعریف می‌شوند. ابتدا، F را یک تابع هموار با مقدار مثبت روی TM° در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که دارای هیچ نقطه بحرانی [1] نباشد. برای نشان دادن این مطلب از ادغام $[g_{ij}(x,y)] = [\frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲} F^{۲}}{\partial y^i \partial y^j}]$ با $Y^i Y^j$ و همچنین با استفاده از قضیه اویلر [2] برای توابع همگن مثبت استفاده کرده، بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial F^{۲}}{\partial y^k} = ۲F\frac{\partial F}{\partial y^k} = \sum_{i,j,k}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}y^i y^j + g_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial y^k}y^j + g_{ij}y^i\frac{\partial y^j}{\partial y^k})$$

چون $C^k_{ij} g_{hk} y^i y^j = C^k_{ij} y^i = \circ$ پس عبارت فوق برابر خواهد بود با:

$$= \sum_{i,j,k} ۲C^k_{ij} g_{hk} y^i y^j + \sum_{i,j,k} g_{ij}\delta^k_i y^j + \sum_{i,j,k} g_{ij} y^i \delta^k_j = ۲g_{ik}y^i$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y^k} = \frac{۱}{F} g_{ik} y^i$$

لذا روی TM° خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial y^k} = \frac{۱}{F}\sum_i g_{ki}(x,y) y^i \neq \circ$$

۳.۲ برگ‌بندی‌های اساسی و شاخص‌دار

فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری و $F : TM^{\circ} \longrightarrow [\circ, \infty)$ تابع اساسی آن باشد، مولفه‌های همبندی [3] ابررویه‌های تراز [4] تابع F یک برگ‌بندی $\mathcal{F}_F$ روی فضای TM°

[1] $critical\ point$
[2] $Euler\ theorem$
[3] $connected\ components$
[4] $level\ hypersurfaces$

تعریف می‌کنند که آن را برگ‌بندی اساسی روی (TM°, G) می‌نامیم. هرگاه c یک مقدار ثابت مثبت باشد آنگاه هر برگ $IM(c)$ از برگ‌بندی اساسی $\mathcal{F}_F$ توسط معادله

$$F(x, y) = c$$

مشخص می‌شود.

$$IM(c) = \{v \in TM^\circ \mid F(v) = c\}$$

به علاوه $\{I_{x_\circ}M(c)\}_{c\in\mathbb{R}^+}$ خانواده ابررویه‌های تراز برای تابع اساسی $F_{x_\circ}(y) = F(x_\circ, y)$ روی فضای مماس $T_{x_\circ}M$ می‌باشند که هیچ نقطه بحرانی ندارند . $I_{x_\circ}M(c)$ را c- شاخص [1] منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌نامیم .

مجموعه تمام c- شاخص‌ها در نقطه $x_\circ$ یک برگ‌بندی هم‌بعد یک، روی منیفلد ریمانی mبعدی $(T_{x_\circ}M, g_{x_\circ})$ ایجاد می‌کنند که آن را برگ‌بندی شاخص‌دار در نقطه $x_\circ$ گوئیم و با نماد $I_{x_\circ}M$ $(I_{x_\circ}M = \cup I_{x_\circ}M(c))$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم $(M, \mathbb{F})$ یک منیفلد برگ‌بندی شده با متر فینسلری $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد و $T_x\mathcal{F}$ زیر فضایی از T_xM مماس بر برگ‌بندی باشد قرار می‌دهیم $Q_x = T_xM - T_x\mathcal{F}$.

$$Q = \cup_{x\in M} Q_x$$

Q را کلاف نرمال برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ می‌نامیم.

گرادیان F میدان برداری نرمال بر ابررویه تراز $IM(c)$ است آن را با نماد $gradF$ نشان می‌دهیم

$$G(gradF, X) = X(F), \qquad \forall X \in \Gamma(TTM^\circ)$$

میدان برداری X بر $IM(c)$ مماس است اگر وتنها اگر $\sum(HX)^i\dfrac{\delta F}{\delta x^i} + \sum(VX)^i\dfrac{\partial F}{\partial y^i} = \circ$

چون $gradF$ بر $IM(c)$ عمود است X بر $IM(c)$ مماس است اگر و تنها اگر $G(gradF, X) = \circ$.

---

[1] $c - indicatrix$

$$
\begin{aligned}
&G(gradF,X)=X(F)=(HX+VX).(F)\\
&=(\sum_i(HX^i)\frac{\delta}{\delta x^i}+\sum_i(VX)^i\frac{\partial}{\partial y^i}).(\sum_i\frac{\delta F}{\delta x^i},\sum_i\frac{\partial F}{\partial y^i})\\
&=\sum_i(HX)^i\frac{\delta F}{\delta x^i}+\sum_i(VX)^i\frac{\partial F}{\partial y^i}=٠
\end{aligned}
$$

زیرا $(\sum_i\frac{\delta F}{\delta x^i},\sum_i\frac{\partial F}{\partial y^i})=(\frac{\delta F}{\delta x^١},...,\frac{\delta F}{\delta x^m},\frac{\partial F}{\partial y^١},...,\frac{\partial F}{\partial y^m})$

همچنین

$$F^٢=G(L,L) \tag{٣۶.٣.٢}$$

زیرا

$$
\begin{aligned}
G(L,L)&=G(\sum_i y^i\frac{\partial}{\partial y^i},\sum_j y^j\frac{\partial}{\partial y^j})\\
&=\sum_{i,j}y^iy^jg_{ij}(X,Y)=F^٢(X,Y)
\end{aligned}
$$

حال $\frac{\delta}{\delta x^i}$ را در معادله فوق به کار می‌بریم.

$$\frac{\delta F}{\delta x^i}=\frac{٢}{F}G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}L,L)=٠ \qquad \forall i\in\{١,...,m\}$$

در این صورت $\frac{\delta F}{\delta x^i}=٠$.

با توجه به اینکه $X(G(Y,Z))=G(\tilde{\nabla}_XY,Z)+G(Y,\tilde{\nabla}xz)$ و $\tilde{\nabla}_{HX}L=٠$

$$
\begin{aligned}
&F^٢=G(L,L)\Rightarrow\frac{\delta F^٢}{\delta x^i}=٢F\frac{\delta F}{\delta x^i}\\
&\frac{\delta}{\delta x^i}.G(L,L)=G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}L,L)+G(L,\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}L)\\
&\qquad\qquad=٢G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}L,L)=٠\\
&\Longrightarrow\frac{٢\delta F}{\delta x^i}=\frac{٢}{F}G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}L,L)=٠ \qquad \forall X\in\Gamma(TTM^\circ)
\end{aligned}
$$

از این رو X بر $IM(c)$ مماس است اگر و تنها اگر $\sum(VX)^i\frac{\partial F}{\partial y^i}=٠$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y^i}=\frac{١}{F}\sum_j g_{ij}(x,y)yY^j\neq ٠\\
&٠=\sum_i(VX)^i\frac{\partial F}{\partial y^i}=\frac{١}{F}\sum_{i,j}g_{ij}(VX)^iy^j\\
&\Rightarrow g_{ij}(VX)^iy^j=٠
\end{aligned}
$$

که این رابطه هم ارز است با $g_{ij}(x,y)(VX)^i y^j = \circ$.

گزاره ۱.۳.۲. الف) برگ‌بندی اساسی $\mathcal{F}_F$ که توسط ابررویه‌های تراز تابع اساسی F روی منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$، ایجاد می‌شود تنها برگ‌بندی است که توسط توزیع انتگرال‌پذیر $\mathcal{L}^\perp$ بدست می‌آید.

ب) میدان برداری لیوویل عمودی، عمود بر برگ‌بندی $\mathcal{F}_F$ است.

ج) میدان برداری لیوویل افقی، مماس بر برگ‌بندی $\mathcal{F}_F$ است.

برهان. رجوع شود به [۱۲] صفحه ۱۴۰. $\square$

نقطه ثابت $x_{\circ=(x^i_\circ)}$ را روی M در نظر می‌گیریم. ابر رویه $I_{x_\circ}M(c)$، برای $c > \circ$ روی فضای $T_{x_\circ}M^\circ$ $(T_{x_\circ}M^\circ = T_{x_\circ}M - \{\circ\})$ به‌وسیله معادله زیر مشخص می‌شود :

$$F(x_\circ, y) = c \qquad\qquad \forall y \in T_{x_\circ}M^\circ$$

تعریف ۲.۳.۲. ابررویه $I_{x_\circ}M(۱)$ را شاخص منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ در نقطه‌ی $x_\circ$ نامیم.

در حالت کلی $I_{x_\circ}M(c)$ را c- شاخص برای $\mathbb{F}^m$ در نقطه $x_\circ$ گوئیم.

برای بررسی ویژگی‌های ابرویه $I_{x_\circ}M(c)$، $T_{x_\circ}M^\circ$ را به عنوان یک منیفلد ریمانی با متر ریمانی $g_{x_\circ} = (g_{ij}(x_\circ, y))$ در نظر می‌گیریم.

همچنین بنا بر گزاره قبل، میدان برداری لیوویل عمودی، عمود بر هر ابررویه $I_{x_\circ}M(c)$ از منیفلد ریمانی $(T_{x_\circ}M^\circ, g_{x_\circ})$ نیز می‌باشد .

تذکر. ویژگی‌های $I_{x_\circ}M(c)$ با دلایل مشابه برای ابررویه تراز $IM(c)$ نیز برقرار است.

تذکر. مجموعه تمام c- شاخص‌ها در نقطه $x_\circ$، یک برگ‌بندی هم‌بعد یک روی منیفلد ریمانی mبعدی $(T_{x_\circ}M^\circ, g_{x_\circ})$ مشخص می‌کند. که آن را برگ‌بندی شاخص‌دار در $x_\circ$ می‌نامیم و با نماد $I_{x_\circ}M$ نشان می‌دهیم.

حال میدان برداری یکه لیوویل عمودی را به صورت

$$l = \frac{۱}{F}L = \sum_i l^i \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad\qquad l^i = \frac{y^i}{F}$$

تعریف می‌کنیم.

از آنجاکه، $g_{ij} = \frac{F^{۲}}{y^iy^j}$ و $G(l,l) = ۱$، به‌دست می‌آوریم :

$$G(l,l) = G(\sum_i \frac{y^i}{F}\frac{\partial}{\partial y^i}, \sum_j \frac{y^j}{F}\frac{\partial}{\partial y^j}) = \sum_{i,j}\frac{y^iy^j}{F^{۲}}g_{ij} = ۱$$

فرض کنیم $g_{x_\circ}$ متر ریمانی القائی بوسیله g روی $I_{x_\circ}M(c)$ و ∇'_X, ∇''_X الصاقهای لوی-چویتا روی فضاهای $(T_{x_\circ}M^\circ, g_{x_\circ})$ و $(I_{x_\circ}M(c), g_{x_\circ})$ باشند و همچنین، h, B بترتیب دومین فرم اساسی روی $T_{x_\circ}M^\circ$ و $I_{x_\circ}M(c)$ به عنوان زیر منیفلدهایی از (TM°, G) و $(T_{x_\circ}M^\circ, g_{x_\circ})$ در نظر گرفته شوند. آنگاه،

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y + h(X,Y) \tag{۳۷.۳.۲}$$

$$\forall X, Y \in \Gamma(TI_{x_\circ}M(c))$$

$$\nabla'_X Y = \nabla''_X Y + B(X,Y)l \tag{۳۸.۳.۲}$$

برای هر دو میدان برداری دلخواه $X, Y \in \Gamma(TI_{x_\circ}M(c))$ با استفاده از روابط فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g_{x_\circ}(\nabla'_X Y, l) = G(\tilde{\nabla}_X Y, l) \\ &= -G(Y, \tilde{\nabla}_X l) = -G(Y, X(\frac{۱}{F})L + \frac{۱}{F}\tilde{\nabla}_X L) \\ &= -\frac{۱}{F}G(X,Y) = -\frac{۱}{F}g_{x_\circ}(X,Y) \end{aligned}$$

ازاین‌رو، برگ‌بندی شاخص‌دار در نقطه $x_\circ$ یک برگ‌بندی کاملاً نافی در $T_{x_\circ}M$ می‌باشد. . از آنجا که L میدان برداری نرمال بر هر c- شاخص است نتیجه می‌شود که برگ‌های توزیع انتگرال‌پذیر $\mathcal{L}'$، همان c- شاخص‌ها هستند.

گزاره ۲.۳.۲. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری باشد. آنگاه عبارات زیر برقرار هستند.

الف) به ازای هر $x \in M$، برگ‌بندی شاخص‌دار I_xM یک برگ‌بندی کاملا نافی از (T_xM, g_x) است.

ب) برگهای برگ‌بندی $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$ که بوسیله توزیع انتگرال‌پذیر $\mathcal{L}'$ مشخص می‌شوندc- شاخص‌های منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ هستند.

ج) هر برگ از برگ‌بندی $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$، یک زیرمنیفلد کاملاً نافی از یک برگ، از برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}_V$ می‌باشد .

برهان. رجوع شود به [۷]. $\square$

فصل ۳

انحنای منیفلدهای فینسلری

برای بررسی تفاوت‌های بین منیفلد M و فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ می‌توان از نگاشت‌های ایزومتری با طرح سوال‌هایی چون آیا منیفلد M به طور موضعی با فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ ایزومتری است یا خیر؟ یا چه نگاشت‌هایی تحت نگاشت‌های ایزومتری پایا می‌مانند؟ استفاده کرد.

ریمان برای معرفی یکی دیگر از این نگاشت‌ها از تعویض ترتیب مشتق‌گیری دوم کواریانت(همگرد) استفاده کرد، علت انتخاب مشتق دوم صفر بودن مشتق دوم خط راست در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است. در $\mathbb{R}^n$ برای هر تابع از کلاس حداقل $C^۲$ با تعویض ترتیب مشتق‌گیری، مقدار مشتق دوم تغییر نمی‌کند. اما در حالت کلی چنین نیست و این تفاوت در تعویض ترتیب مشتق‌گیری، میزان انحراف از مسطح بودن یا اصطلاحاً انحنا را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۰.۳. فرض کنیم ∇ یک الصاق خطی روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M باشد تابع $C^\infty(M)$ سه- خطی

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \qquad (۱.۰.۳)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$

را تانسور انحنا برای الصاق ∇ نامند.

با توجه به روابط ذکر شده در فصل قبل و تعریف تانسور انحنا بدست می‌آوریم:

$$R(\frac{\delta}{\delta x^c}, \frac{\delta}{\delta x^b})L = R^a_{bc}\frac{\partial}{\partial y^a} \qquad (۲.۰.۳)$$

$$R(\frac{\delta}{\delta x^c}, \frac{\delta}{\delta x^b})\frac{\partial}{\partial y^a} = R^d_{abc}\frac{\partial}{\partial y^d} \qquad (۳.۰.۳)$$

آنگاه

$$y^a R^d_{abc} = R^d_{bc} \qquad (۴.۰.۳)$$

با توجه به قرداد در هندسه فینسلری، R^d_{abc} مولفه‌های موضعی میدان تانسوری h-انحنای الصاق کارتان هستند.

فرض کنیم $\tilde{R}$ میدان تانسوری انحنای الصاق لوی-چویتا $\tilde{\nabla}$ روی (TM°, G) باشد. با توجه به معادله گاوس [۱] که در زیر آمده است

$$g(\tilde{R}(X,Y)QZ,QU) = g(R(X,Y)QZ,QU) \qquad (۵.۰.۳)$$

$$+g(Rh(X,QZ),h(Y,QU))$$

$$-g(h(Y,QZ),h(X,QU))$$

به‌دست می‌آوریم

$$G(\tilde{R}(X,Y)VZ,VU) = G(R(X,Y)VZ,VU) \qquad (۶.۰.۳)$$

$$+G(h(X,VZ),h(Y,VU))$$

$$-g(h(Y,VZ),h(X,VU))$$

که در آن h توسط رابطه

$$h(X,VZ) = H\tilde{\nabla}_X VZ, \qquad \forall X,Z \in \Gamma(TTM^\circ$$

مشخص می‌شود. قرار می‌دهیم

$$R_{abcd} = G(R(\frac{\delta}{\delta x^d},\frac{\delta}{\delta x^c})\frac{\partial}{\partial y^a},\frac{\partial}{\partial y^b}) = g_{be}R^e_{acd} \qquad (۷.۰.۳)$$

با توجه به رابطه (۶.۰.۳) نتیجه می‌گیریم

$$R_{abcd} + R_{bacd} = \circ$$

سپس، قرار می‌دهیم

$$R_{bcd} = g_{ba}R^a_{cd}$$

[۱] $\mathcal{D} - Gauss\ equation$

با استفاده از (۵.۰.۳) و (۷.۰.۳) به‌دست می‌آوریم

$$R_{bcd} = y^a R_{abcd}$$

از متقارن کج بودن R_{abcd} نسبت به (ab) و R_{abc} نسبت به (bc) استفاده کرده نتیجه می‌گیریم

$$y^b R_{bca} = \circ \tag{۸.۰.۳}$$

زیرا

$$R_{abc} + R_{bca} + R_{cab} = \circ$$

بنابراین

$$y^b R_{abc} + y^b R_{bca} + y^b R_{cab} = \circ$$
$$\Rightarrow -y^b R_{bca} + y^b R_{bca} - y^b R_{bca} = \circ$$
$$\Rightarrow y^b R_{bca} = \circ$$

هرگاه عبارت فوق را با y^k ترکیب کنیم خواهیم داشت

$$R_{acb} y^c = R_{bca} y^c \tag{۹.۰.۳}$$

زیرا

$$R_{abc} y^c + R_{bca} y^c + R_{cab} y^c = \circ$$
$$\Rightarrow R_{acb} y^c = R_{bca} y^c$$

همچنین از متقارن کج بودن R_{abc} نسبت به (bc) نتیجه می‌گیریم

$$R_{ab} = R_{acb} y^c$$

قضیه ۱.۰.۳. یک منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد با انحناء ثابت K است اگر وتنها اگر داشته باشیم

$$R_{ab} = K F^{۲} h_{ab}$$

۱.۳ کلاف شاخص‌دار با انحنای ثابت مثبت

ابررویه‌ی $IM(c)$ را به عنوان یک برگ از برگ‌بندی اساسی $\mathcal{F}_F$ روی (TM°, G) در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$IM(c) = \cup_{x\in M} I_x M(c) \tag{۱۰.۱.۳}$$

$IM(c)$ را کلاف c-شاخص دار روی M گوئیم. یک رابطه جالب بین هندسه‌ی کلاف c-شاخص‌دار روی M و انحنای منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m = (M, F)$ وجود دارد. برای نشان دادن این مطلب ابتدا به ذکر مقدماتی می‌پردازیم.

$$R_{abc} + R_{bca} + R_{cab} = \circ \tag{۱۱.۱.۳}$$

چون $y^b R_{bcd} = \circ$ و R_{abc} نسبت زوج (bc) پادمتقارن است به‌دست می‌آوریم:

$$R_{bca} y^c = R_{acb} y^c \tag{۱۲.۱.۳}$$

ازاین‌رو برای هر $a, c \in \{۱, ..., m\}$

$$R_{ab} = R_{acb} y^c \tag{۱۳.۱.۳}$$

مولفه‌های میدان تانسوری فینسلری متقارن از نوع $(\circ, ۲)$ روی TM° می‌باشند .

همچنین متر زاویه‌دار [۱] h_{ab} روی $\mathbb{F}^m$ (که توسط ماتسوموتو [۲] معرفی شد)، را در نظر می‌گیریم. هرگاه $l_a = \sum_b g_{ab} l^b = \sum_b g_{ab}\dfrac{y^b}{F}$ آنگاه $h_{ab} = g_{ab} - l_a l_b$.

تعریف ۱.۱.۳. میدان تانسوری [۳] فینسلری $\Lambda = (\Lambda_{ab})$ را به صورت

$$\Lambda_{ab} = R_{ab} - h_{ab} \tag{۱۴.۱.۳}$$

تعریف می‌کنیم. Λ یک فرم $C^\infty(TM^\circ)$-دو خطی متقارن روی $\Gamma(HTM^\circ)$ است که آن را فرم انحنای زاویه‌دار [۴] گوئیم.

---

[۱] $angular\ metric$
[۲] $Matsumoto$
[۳] $tensor\ field$
[۴] $curvature - angular\ form$

گزاره ۱.۱.۳. هرگاه $X \in \Gamma(HTM^\circ)$ یک میدان برداری دلخواه باشد. آنگاه، $\Lambda(L^*, X) = \circ$.
در این حالت فرم انحنای زاویه‌دار، تباهیده است.

برهان.

$$\Lambda_{ij} y^i = (R_{ij} - h_{ij}) y^i = (R_{ijk} y^k - h_{ij}) y^i$$
$$(R_{ijk} y^k - g_{ij} + l_i l_j) = y^i R_{ikj} y^k - y^i g_{ij} + y^i l_i l_j$$
$$= -y^i g_{ij} + \frac{۱}{F^۲} y^i g_{ik} y^k g_{jh} y^h = \circ$$

زیرا $g_{ik} y^k =< \dfrac{\partial y^k}{\partial y^i}, \dfrac{\partial y^k}{\partial y^k} >$. □

برگ‌بندی که توسط میدان برداری لیوویل L^* مشخص می‌شود را در نظر می‌گیریم. این برگ‌بندی، یک برگ‌بندی کاملا ژئودزی روی فضای (TM°, G) است. به علاوه، با توجه به اینکه $\tilde{\nabla}_{L^*} L^* = \circ$ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{F}_{L^*}$، یک برگ‌بندی کاملا ژئودزی روی کلاف c-شاخص‌دار $(IM(c), G)$ نیز می‌باشد. در ادامه متر ریمانی القایی روی $IM(c)$ که توسط متر سازاکی-فینسلر G روی TM°، القاء می‌شود را با همان نماد G نشان داده آن را متر سازاکی-فینسلر روی $IM(C)$ می‌نامیم . قضیه بعد یک شرط شایان توجه برای شبه کلاف بودن متر G برای برگ‌بندی فوق بیان می‌کند .

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری و $IM(c)$ یک کلاف c-شاخص‌دار روی M باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند:

۱) متر سازاکی - فینسلری G روی $IM(c)$ شبه کلاف برای برگ‌بندی لیوویل افقی $\mathcal{F}_{L^*}$ روی $IM(c)$ می‌باشد.

۲) فرم انحنای زاویه‌دار $\mathbb{F}^m$ روی $IM(c)$ متحد با صفر است.

برهان. در این برهان، تمام کلاف‌های برداری روی کلاف $IM(c)$ در نظر گرفته می‌شوند. گیریم $\mathcal{L}''$ توزیع متعامد تکمیل‌کننده‌ی توزیع لیوویل افقی $\mathcal{L}^*$ در HTM° باشد. آنگاه

$$\mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'' \oplus \mathcal{L}^*$$

بر $IM(c)$ مماس است. ($\mathcal{L}'$ توزیع تکمیل‌کننده‌ی $\mathcal{L}^*$ تا VTM° می‌باشد .)

G شبه کلاف برای $\mathcal{F}_{L^*}$ روی $IM(c)$ است اگر و تنها اگر

$$G(\bar{\nabla}_X L^*, Y) + G(\bar{\nabla}_Y L^*, X) = \circ \qquad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'') \qquad (۱۵.۱.۳)$$

که در آن $\bar{\nabla}$ الصاق لوی‌چویتا روی $(IM(c), G)$ است.

رابطه فوق هم ارز است با:

$$G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla}_Y L^*, X) = \circ \qquad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'') \qquad (۱۶.۱.۳)$$

(رابطه فوق بنا بر این قضیه است:g برای برگ‌بندی $\mathcal{F}$ شبه کلاف می‌باشد اگر و تنها اگر $\forall X, Y \in \Gamma(D^\perp), Z \in \Gamma(D) \qquad g(\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Y X, Z) = \circ$).

از آنجا که $\mathcal{L}$ کلاف نرمال بر $IM(c)$ است، برای آنالیز (تحلیل) رابطه فوق سه حالت رخ می‌دهد.

حالت اول . $X \in \Gamma(\mathcal{L}'), Y \in \Gamma(\mathcal{L}')$.

داریم

$$\tilde{\nabla}_X L^* = \frac{۱}{۲}(HX)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + ((VX)^k$$
$$+\frac{۱}{۲}(VX)^i R_{ijk} y^h g^{jk}) \frac{\delta}{\delta x^k}$$

و

$$\tilde{\nabla}_Y L^* \in \Gamma(HTM^\circ), \tilde{\nabla}_X L^* \in \Gamma(HTM^\circ) \qquad (۱۷.۱.۳)$$

چون $\mathcal{L}'$ و HTM° کلافهای برداری متعامد نسبت به G هستند رابطه (۱۶.۱.۳) به وضوح برقرار است .

حالت دوم. $X \in \Gamma(\mathcal{L}''), Y \in \Gamma(\mathcal{L}'')$.

$$\tilde{\nabla}_X L^* = \frac{۱}{۲}(HX)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + ((VX)^k$$

$$+\frac{۱}{۲}(VX)^i R_{ijk} y^h g^{jk})\frac{\delta}{\delta x^k}$$

($\mathcal{L}''$ مکمل $\mathcal{L}^\perp$ تا HTM° است پس فقط قسمت $\frac{\delta}{\delta x^i}$ باقی می‌ماند، و ضریب $(VX)^k$ صفر است.)

در نتیجه $\tilde{\nabla}_Y L^* \in \Gamma(VTM^\circ), \tilde{\nabla}_X L^* \in \Gamma(VTM^\circ)$ و رابطه مذکور برقرار است.

حالت سوم. هرگاه $X \in \Gamma(\mathcal{L}'), Y \in \Gamma(\mathcal{L}'')$ آنگاه،

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{۱۸.۱.۳}$$

$$Y = \sum_i Y^i \frac{\delta}{\delta x^i} \tag{۱۹.۱.۳}$$

که در آن، X^i و Y^i در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$g_{ij} X^i y^j = ۰$$

$$g_{ij} Y^i y^j = ۰$$

بنابراین با توجه به پادمتقارن بودن R_{ij}^k نسبت به (ij)، بدست می‌آوریم :

$$\begin{aligned}
&G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla}_Y L^*, X)\\
&= G(\tilde{\nabla}_{\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial y^i}} L^*, \sum_j Y^j \frac{\delta}{\delta x^j}) + G(\tilde{\nabla}_{\sum_j Y^j \frac{\delta}{\delta x^j}} L^*, \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial y^i})\\
&= \sum_i X^i Y^j G(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} L^*, \frac{\delta}{\delta x^j}) + \sum_{i,j} Y^j X^i G(\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} L^*, \frac{\partial}{\partial y^i})
\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(g_{ij} - R_{ij}) X^i Y^j = ۰ \Rightarrow g_{ij} X^i Y^j = R_{ij} X^i Y^j \tag{۲۰.۱.۳}$$

از طرف دیگر $h_{ij}X^iy^j = g_{ij}X^iY^j$.

بنابراین با ترکیب $\Lambda_{ij} = R_{ij} - h_{ij}$ با X^iY^j بدست خواهیم آورد :

$$\sum_{i,j} \Lambda_{ij}X^iY^j = 0 \qquad (۲۱.۱.۳)$$

$$\Lambda_{ij}X^iY^j = R_{ij}X^iY^j - h_{ij}X^iY^j$$
$$= g_{ij}X^iY^j - h_{ij}X^iY^j = 0$$
$$\Rightarrow \Lambda_{ij}X^iY^j = 0$$

حال یکریختی کلافهای برداری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi : \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}''$$
$$\Phi(X^i\frac{\partial}{\partial y^i}) = X^i\frac{\delta}{\delta x^i} = X^*$$

در این صورت به ازای هر $X^*, Y \in \Gamma(\mathcal{L}'')$ ، $\Lambda_{ij}X^iY^j = 0$ با $\Lambda(X^*, Y) = 0$ هم ارز است.
و در نهایت بنا بر روابط قبل روی $IM(c)$ رابطه‌ی مذکور معادل است با $\Lambda = 0$. در این صورت، اثبات قضیه کامل می‌شود . $\square$

تعریف ۲.۱.۳. یک میدان برداری $V : M \longrightarrow TM$ را میدان برداری کیلینگ [۱] گوئیم هرگاه هر تبدیل یک پارامتری موضعی از V، به طور موضعی ایزومتری باشد.

تذکر. هرگاه $<,>$ یک ضرب اسکالر باشد، X میدان برداری کیلینگ است اگر و تنها اگر

$$< \nabla_Y X, Z > + < \nabla_Z X, Y >= 0 \qquad \forall Y, Z \in \Gamma(M) \qquad (۲۲.۱.۳)$$

از اینکه $\mathcal{L}^\perp$ عمود بر توزیع لیوویل عمودی $\mathcal{L}$ است ، نتیجه می‌شود ، $\mathcal{L}^*$ یک میدان برداری کیلینگ روی $IM(c)$ است اگر و تنها اگر

$$G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla}_Y L^*, X) = 0 \qquad \forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{L}^\perp) \qquad (۲۳.۱.۳)$$

[۱] *Killing vector field*

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری و $IM(c)$ یک کلاف c-شاخص‌دار روی M باشد. آنگاه میدان برداری لیوویل افقی $\mathcal{L}^*$ یک میدان برداری کیلینگ روی $IM(c)$ است اگر و تنها اگر فرم انحنای زاویه‌دار روی $IM(c)$ متحد با صفر شود.

برهان. فرض کنیم L^* یک میدان برداری کیلینگ باشد آنگاه

$$G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla} Y L^*, X) = \circ$$

و از قضیه (۱.۱.۳) نتیجه می‌شود روی $IM(c)$، $\Lambda = \circ$.

برعکس. فرض کنیم روی $IM(c)$، $\Lambda = \circ$. آنگاه برای هر دو میدان برداری $X, Y \in \Gamma(\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'')$ به طور مشابه خواهیم داشت:

$$G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla}_Y L^*, X) = \circ$$

لذا حکم برقرار است. همچنین با توجه به $\tilde{\nabla}_{\mathcal{L}^*} L^* = \circ$ حکم در حالتی که $X = Y = L^*$ نیز برقرار است. کافیست قضیه را برای حالتی که $X = L^*$ و $Y \in \Gamma(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'')$ بررسی کنیم یعنی ثابت کنیم

$$G(\tilde{\nabla}_Y L^*, L^*) = \circ \quad \forall Y \in \Gamma(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}'') \qquad (۲۴.۱.۳)$$

ابتدا با استفاده از

$$\tilde{\nabla}_X L^* = \frac{۱}{۲}(HX)^i R^k_{ij} y^j \frac{\partial}{\partial y^k} + ((VX)^k + \frac{۱}{۲}(VX)^i R_{IJH} y^h g^{jk}) \frac{\delta}{\delta x^k}$$

مشاهده می‌کنیم برای هر میدان برداری $Y \in \Gamma(\mathcal{L}'')$، $\tilde{\nabla}_Y L^* \in \Gamma(VTM^\circ)$. از این رو برای هر میدان برداری $Y \in \Gamma(\mathcal{L}'')$،

$$G(\tilde{\nabla}_Y L^*, L^*) = \circ \qquad (۲۵.۱.۳)$$

حال فرض کنیم $Y \in \Gamma(\mathcal{L}')$ و $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ که در آن

$$g_{ij} Y^j y^j = \circ$$

در این حالت با استفاده از این رابطه و رابطه فوق $(\tilde{\nabla}_X L^*)$ بدست می‌آوریم که R_{ijk} نسبت به (jk) پادمتقارن است در نتیجه

$$G(\tilde{\nabla}_Y L^*, L^*) = g_{ij}Y^i y^j + \frac{۱}{۲}Y^i R_{ijk}y^j y^k = ۰$$

بنابراین

$$G(\tilde{\nabla}_X L^*, Y) + G(\tilde{\nabla}_Y L^*, X) = ۰ \tag{۲۶.۱.۳}$$

لذا L^* یک میدان برداری کیلینگ روی کلاف $IM(c)$ می‌باشد . $\square$

قضیه ۳.۱.۳. یک منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m = (M, F)$ دارای انحنای ثابت مثبت k است اگر و تنها اگر فرم انحنای زاویه‌دار Λ از $\mathbb{F}^m$ روی کلاف شاخص‌دار $IM(c)$ متحد با صفر باشد که در آن $c = \frac{۱}{\sqrt{k}}$.

برهان. فرض کنیم $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد فینسلری با انحنای مثبت و ثابت k باشد. هرگاه، $c = \frac{۱}{\sqrt{k}}$ فضای کل کلاف شاخص‌دار $IM(c)$، توسط $F(x, y) = \frac{۱}{\sqrt{k}}$ مشخص می‌شود.

$$R_{ij} = kF^۲ h_{ij} \Rightarrow R_{ij} = k(\frac{۱}{\sqrt{k}})^۲ h_{ij}$$

در نتیجه به ازای هر $(x, y) \in IM(c)$،

$$R_{ij}(x, y) = h_{ij}(x, y) \tag{۲۷.۱.۳}$$

حال چون $\Lambda_{ij} = R_{ij} - h_{ij}$ پس روی کلاف $IM(c)$ داریم، $\Lambda = ۰$

برعکس. فرض کنیم روی $IM(c)$، $\Lambda = ۰$. در نتیجه $R_{ij} = h_{ij}$. نشان می‌دهیم برای هر $(x, y) \in IM(c)$ ، $R_{ij} = kF^۲ h_{ij}$. فرض کنیم $(x, y) \in TM^\circ \backslash IM(c)$. از آنجا که TM° یک برگ‌بندی اساسی $\mathcal{F}_F$ می‌پذیرد ، $c^* > ۰$ وجود دارد بطوریکه $(x, y) \in IM(c^*)$ و $F(x, y) = c^*$.

چون F همگن مثبت از درجه یک است داریم:

$$F(x, \frac{c}{c^*}y) = c \tag{۲۸.۱.۳}$$

یعنی $(x, \frac{c}{c^*}y) \in IM(c)$ بنابراین

$$R_{ij}(x, \frac{c}{c^*}y) = h_{ij}(x, \frac{c}{c^*}y)$$

زیرا $R_{ij}(x,y) = h_{ij}(x,y)$. چون $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$ ، h_{ij}ها همگن مثبت از درجه صفر نسبت به (y^k) می‌باشند از طرف دیگر چون G_i^jها همگن مثبت از درجه یک می‌باشند و

$$R_{ij}^k = \frac{\delta G_i^k}{\delta x^j} - \frac{\delta G_j^k}{\delta x^i}$$

در نتیجه R_{ij}^k همگن مثبت از درجه یک می‌باشد.

چون $R_{ij} = R_{ikj}y^k$ لذا R_{ij} همگن مثبت از درجه ۲ نسبت به (y^k) است . در نتیجه

$$R_{ij}(x,y) = \frac{{c^*}^۲}{c^۲} h_{ij}(x,y) \tag{۲۹.۱.۳}$$

$$= kF^۲(x,y)h_{ij}(x,y)$$

بنابراین، به ازای هر نقطه $(x,y) \in TM^\circ - IM(c)$

$$R_{ij} = kF^۲ h_{ij} \tag{۳۰.۱.۳}$$

$$R_{ij} = kF^۲ h_{ij} \underbrace{\Longrightarrow}_{R_{ij}=h_{ij}} kF^۲ = ۱$$
$$\Longrightarrow F = \frac{۱}{\sqrt{k}}$$

بنابراین $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد فینسلری با انحنای ثابت مثبت k است. □

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M,F)$ یک منیفلد فینسلری باشد و c, k دو عدد مثبت فرض شوند بطوریکه، $c\sqrt{k} = ۱$. آنگاه عبارات زیر معادلند:

الف) $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد فینسلری با انحنای ثابت k است.

ب) متر سازاکی - فینسلر G روی کلاف شاخص‌دار $IM(c)$، شبه کلاف برای برگ‌بندی لیوویل افقی $\mathcal{F}_{L^*}$ روی کلاف شاخص‌دار $IM(c)$ است.

ج) میدان برداری لیوویل افقی یک میدان برداری کیلینگ روی فضای $(IM(c), G)$ می‌باشد .

د) فرم انحنای زاویه‌دار Λ از $\mathbb{F}^m$ روی کلاف شاخص‌دار $IM(c)$ متحد با صفر است.

برهان. هم ارز بودن (الف) و (ج) از لم و قضیه زیر نتیجه می‌شود.

لم ۱.۱.۳. میدان برداری لیوویل افقی واحد l یک میدان برداری کیلینگ روی کلاف شاخص IM است اگر و تنها اگر

$$h_{ij}(x,y) = R_{i\circ j}(x,y), \qquad \forall (x,y) \in IM \tag{۳۱.۱.۳}$$

قضیه ۵.۱.۳. منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ دارای انحنای ثابت $K = ۱$ است اگر و تنها اگر میدان برداری لیوویل افقی واحد، یک میدان‌برداری کیلینگ روی کلاف شاخص IM باشد.

برهان. فرض کنیم $K = ۱$، بنابر رابطه (۳۱.۱.۳) به‌دست می‌آوریم

$$K(x,y,X) = \frac{R_{i\circ j X^i X^j}}{F^۲ h_{ij} X^i X^j} \tag{۳۲.۱.۳}$$

درنتیجه، روی کلاف IM خواهیم داشت، $F(x,y) = ۱$.

برعکس. فرض کنیم ξ یک میدان برداری کیلینگ روی کلاف IM باشد. آنگاه بنابر روابط فوق، برای هر $(x,y) \in IM$ و هر میدان برداری X خواهیم داشت

$$K(x,y) = ۱$$

حال، اگر $(x,y) \in TM^\circ - IM$، آنگاه یک $a \in (\circ,\infty) - \{۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $F(x,y) = a$.

چون F نسبت به y همگن مثبت از درجه یک است، $F(x,(\frac{۱}{a}y) = ۱$ درنتیجه

$$(x,(\frac{۱}{a})y) \in IM$$

. و بنابر رابطه (۳۲.۱.۳) به‌دست می‌آوریم

$$h_{ij}(x,\frac{۱}{a}y) = R_{i\circ j}(x,\frac{۱}{a}y) \tag{۳۳.۱.۳}$$

چون h_{ij} و $R_{i\circ j}$ به‌ترتیب همگن مثبت از درجه ○ و ۲ هستند عبارت زیر درست است.

$$R_{i\circ j} = F^۲(x,y) h_{ij}(x,y)$$

بنابراین، از رابطه (۳۱.۱.۳) نتیجه می‌شود $K(x,y,X)=1$ و برهان کامل می‌شود. □

میدان تانسوری انحنای $R'=(R'^b_{acd})$ الصاق لوی- چویتا $\tilde{\nabla}'$ روی (M,g) در شرایط زیر صدق می‌کند

$$1)y^a R'^b_{acd}(x)=R^b_{cd}(x,y)$$

$$2)\frac{\partial R^b_{cd}}{\partial y^a}(x,y)=R'^b_{acd}(x)$$

هرگاه روی منیفلد M داشته باشیم $R'=0$ آنگاه فضای (M,g) را موضعاً اقلیدسی [1] نامیم. یک منیفلد فینسلری را موضعاً اقلیدسی گوئیم، هرگاه یک منیفلد ریمانی با متر موضعاً اقلیدسی باشد.

قضیه ۶.۱.۳. اگر $\mathbb{F}^m=(M,F)$ یک منیفلد فینسلری باشد آنگاه، شرایط زیر معادلند.

الف) متر فینسلری F، یک متر موضعاً اقلیدسی است.

ب) متر سازاکی- فینسلر G شبه کلاف برای برگ‌بندی عمودی $\mathcal{F}_V$ است و توزیع HTM° انتگرال‌پذیر می‌باشد.

ج) HTM° یک توزیع انتگرال‌پذیر مماس بر برگ‌بندی کاملاً ژئودزی $\mathcal{F}_H$ روی (TM°,G) است.

د) توزیع HTM° روی (TM°,G) نسبت به الصاق لوی-چویتای $\tilde{\nabla}$ موازی است.

ه) HTM° و VTM° توزیع‌های مماس بربرگ‌بندی‌های کاملاً ژئودزی روی (TM°,G) هستند.

برهان. متر فینسلری F به‌طور موضعی اقلیدسی است اگر و تنها اگر

$$C^c_{ab}=0,\qquad R^c_{ab}=0 \tag{۳۴.۱.۳}$$

با توجه به رابطه فوق و قضیه (۱.۲.۲) مشاهده می‌شود عبارت‌های (الف) و (ب) هم‌ارزند. حال فرض کنیم (۳۴.۱.۳) درست باشد، از قضایای قبل نتیجه می‌شود HTM° انتگرال‌پذیر

[1] locally Euclidean

و برگ‌بندی $\mathcal{F}_V$ کاملاً ژئودزی است. برعکس. اگر (ج) برقرار باشد آنگاه با استفاده از روابط (۱۸.۱.۲) و (۲۰.۱.۲) رابطه (۳۴.۱.۳) به‌دست آمده، به معادل بودن (الف) و (ج) پی می‌بریم .
اگر (۳۴.۱.۳) درست باشد با استفاده از (۲۰.۱.۲)و (۲۲.۱.۲) خواهیم داشت

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^b}}\frac{\delta}{\delta x^a} = F^c_{ab}\frac{\delta}{\delta x^c} \tag{۳۵.۱.۳}$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^a}}\frac{\delta}{\delta x^b} = (F^c_{ab} - G^c_{ab})\frac{\partial}{\partial y^b} \tag{۳۶.۱.۳}$$

بنابراین منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ ریمانی است، لذا یک منیفلد لندسبرگ است، و

$$\tilde{\nabla}\frac{\partial}{\partial y^a}\frac{\delta}{\delta x^b} = 0 \tag{۳۷.۱.۳}$$

با توجه به روابط فوق مشاهده می‌شود HTM° نسبت به الصاق $\tilde{\nabla}$ موازی است ازاین‌رو (الف) ، (د) را نتیجه می‌دهد.(الف$\Longleftarrow$ د)
هرگاه (د) برقرار باشد، چون تاب $\tilde{\nabla}$ برابر با صفر است HTM° یک توزیع انتگرال‌پذیر است. □

۲.۳ منیفلدهای لندسبرگ تعمیم‌یافته با انحنای عددی

سه الصاق فینسلری کلاسیک عبارتند از: الصاقهای بروالد[۱] ، کارتان [۲] و راند[۳]. که به‌طورکامل به‌وسیله‌ی زوج (HTM°, ∇) مشخص می‌شوند که در آن ∇ یک الصاق خطی روی VTM° می‌باشد . هرگاه ضرایب موضعی نسبت به الصاق‌های فینسلری مذکور به صورت زیر باشند،

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\partial}{\partial y^i} = F^k_{ij} \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^i} = C^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{۳۸.۲.۳}$$

آنگاه ضرایب موضعی، الصاق کارتان CFC ، الصاق بروالد BFC و الصاق راند RFC به‌ترتیب با سه‌تایی‌های $(G^k_i, F^k_{ij}, C^k_{ij})$، $(G^k_i, G^k_{ij}, 0)$ و $(G^k_i, F^k_{ij}, 0)$ مشخص می‌شوند. که در آن

---
[۱] $Berwald$
[۲] $Cartan$
[۳] $Rund$

$$F_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{kh} \left(\frac{\delta g_{hi}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{hj}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^h} \right) \tag{۳۹.۲.۳}$$

$$C_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{kh} \frac{\delta g_{hi}}{\delta y^j} \qquad G_{ij}^k = \frac{\delta G_i^k}{\delta y^j} \tag{۴۰.۲.۳}$$

و هرگاه $C_{ij|۰}^k = C_{ij|h}^k y^h$ آنگاه

$$G_{ij}^k = F_{ij}^k + C_{ij|۰}^k \tag{۴۱.۲.۳}$$

h- انحنای میدانهای تانسوری فینسلری الصاق‌های CFC, BFC, RFC را به‌ترتیب با $K_{ijh}^k, H_{ijh}^k, R_{ijh}^k$ نشان می‌دهند .

تعریف ۱.۲.۳. یک منیفلد فینسلری را یک منیفلد لندسبرگ [۱] گوئیم هرگاه الصاق بروالد $BFC = (G_i^k, C_{ij}^k, ۰)$ بر الصاق راند $RFC = (G_i^k, F_{ij}^k, ۰)$ منطبق باشد.

تعریف ۲.۲.۳. منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ را یک منیفلد لندسبرگ تعمیم‌یافته[۲] گوئیم هرگاه h- انحنای میدان‌های تانسوری فینسلری الصاق‌های بروالد و راند بر هم منطبق باشند.

گزاره ۱.۲.۳. $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد لندسبرگ است اگر و تنها اگر $C_{ij|۰}^k = ۰$.

برهان. بنا بر رابطه (۴۱.۲.۳) واضح است. □

روی کلاف TM میدان برداری لیوویل $L = \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ و فرم هیلبرت $\eta = \sum_i \eta_i dx^i$ موجود هستند و رابطه‌ی بین این دو میدان تانسوری فینسلری به صورت

$$\eta_i = \frac{۱}{F} g_{ij} y^j = \frac{\partial F}{\partial y^i} \tag{۴۲.۲.۳}$$

$$\eta_i y^i = F \tag{۴۳.۲.۳}$$

می‌باشد. همچنین

[۱] Landsberg

[۲] Generalized Landsberg

$$h_{ij} = g_{ij} - \eta_i \eta_j$$

مولفه‌های موضعی متریک زاویه‌دار

$$h_{ij} = g_{ij} - \eta_i \eta_j \tag{۴۴.۲.۳}$$

است. با محاسبه مستقیم به‌دست می‌آوریم

$$h_{ij|k} = 0 \tag{۴۵.۲.۳}$$

تعریف ۳.۲.۳. یک منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ را C- کاهش‌پذیر [1] گوئیم هرگاه عبارت زیر برای میدان تانسوری کارتان درست باشد.

$$C_{ijk} = \frac{1}{m+1}(h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{jk}C_i) \tag{۴۶.۲.۳}$$

که در آن $C_i = C_{ijk}g^{jk}$.

تذکر۱. برای تغییر اندیس‌های i, j و تفریق کردن از نماد $\mathcal{A}_{(ij)}$ استفاده می‌کنیم برای مثال

$$\mathcal{A}_{(ij)}\{T^r_{ik}S_{rj}\} = T^k_{ik}S_{rj} - T^r_{jk}S_{rj} \tag{۴۷.۲.۳}$$

تذکر۲. در این بخش تمام منیفلدها و نگاشت‌ها از کلاس حداقل C^5 و مشتقات کواریانت نسبت به الصاق کارتان می‌باشد و مشتقات h و v-کواریانت یک میدان تانسوری فینسلری را با نماد | و || نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۳. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد. تانسور انحنای ریچی [2] به ازای هر دو میدان برداری $X, Y \in T_pM$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ric(X,Y) := g^{il} < R(\frac{\partial}{\partial x^i}, X)Y, \frac{\partial}{\partial y^l} > \tag{۴۸.۲.۳}$$

مولفه‌های تانسور ریچی که از انقباض اندیس‌های اول و آخر (یا اثر [3] ماتریس) تانسور انحنای ریمان به‌دست می‌آید، در مختصات موضعی معمولاً با R_{jk} داده می‌شود.

$$R_{jk} := g^{il}R_{ijkl} \tag{۴۹.۲.۳}$$

[1] $C - reducible$
[2] $Rici$
[3] $trace$

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد. انحنای عددی تابعی عددی است که برابر اثر تانسور ریچی $S := trRic$ و یا اثر ماتریس مربوط به $S := R^i_i$ است. مولفه‌های انحنای عددی که از انقباض اندیس‌های تانسور انحنای ریچی به‌دست می‌آید، در مختصات موضعی معمولاً با تابع $S = g^{jk}R_{jk}$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. هرگاه $\mathbb{F}^m(m > ۳)$ یک منیفلد لندسبرگ تعمیم یافته با انحنای عددی R باشد آنگاه $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد ریمانی، با انحنای ثابت $R \neq ۰$می‌باشد .

برای اثبات این قضیه به سه قضیه دیگر نیازمندیم.

قضیه ۱. فرض کنیم $\mathbb{F}^m$ $(m > ۳)$ یک منیفلد لندسبرگ تعمیم یافته باشد، $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد لندسبرگ است هرگاه C- کاهش‌پذیر باشد .

برهان. با استفاده از روابط (۴۵.۲.۳) و (۴۶.۲.۳) به‌دست می‌آوریم:

$$C_{ijk|۰} = \frac{۱}{m+۱}(h_{ij}C_{k|۰} + h_{ik}C_{j|۰} + h_{jk}C_{i|۰}) \qquad (۵۰.۲.۳)$$

برای اثبات لندسبرگ بودن $\mathbb{F}^m$ کافی است ثابت کنیم $C_{ijk|۰} = ۰$ برای این منظور، از روابط (۴۲.۲.۳) ، (۴۳.۲.۳) و (۴۴.۲.۳) نتیجه می‌شود که

$$h_{ij} = h_{ir}h_{js}g^{rs} \qquad (۵۱.۲.۳)$$

زیرا

$$\begin{aligned} h_{ir}h_{js}g^{rs} &= (g_{ir} - \eta_i\eta_r)(g_{js} - \eta_j\eta_s)g^{rs} \\ &= g_{ir}g_{js}g^{rs} - g_{ir}g^{rs}\eta_j\eta_s \\ &\quad -\eta_i\eta_r g_{js}g^{rs} + \eta_i\eta_r\eta_j\eta_s g^{rs} \end{aligned}$$

چون $g^{ir}g_{rs} = \delta_{is}$ لذا رابطه فوق برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} &= g_{ij} - \eta_j\eta_i - \eta_i\eta_j + \eta_i\eta_j \\ &= g_{ij} - \eta_i\eta_j \\ &= h_{ij} \end{aligned}$$

با استدلال مشابه خواهیم داشت:

$$C_{i|\circ} = h_{ir} C_{s|\circ} g^{rs} \tag{۵۲.۲.۳}$$

همچنین از روابط (۵۰.۲.۳) و (۵۱.۲.۳) و محاسبات تقریبا طولانی نتیجه می‌شود که:

$$\mathcal{A}_{(jk)}\{h_{ij}h_{lk}g^{rs}C_{r|\circ}C_{s|\circ} + h_{lk}C_{i|\circ}C_{j|\circ} + h_{ij}C_{l|\circ}C_{k|\circ}\} = \circ \tag{۵۳.۲.۳}$$

و چون $F^{۲} = \sum\limits_{i,j} g_{ij}y^i y^j$

$$h_{ij}g^{ij} = m - ۱ \tag{۵۴.۲.۳}$$

زیرا

$$\begin{aligned} h_{ij}g^{ij} &= \sum_{i,j}(g_{ij} - \eta_i\eta_j)g^{ij} \\ &= \sum_{i,j} g_{ij}g^{ij} - \eta_i\eta_j g^{ij} \\ &= m - \frac{۱}{F^{۲}}\sum_{i,j} g_{ij}y^j g_{ji}y^i g^{ij} \\ &= \frac{۱}{F^{۲}}\sum_{i,j} g_{ij}y^i y^j \\ &= m - ۱ \end{aligned}$$

در نهایت، با ترکیب رابطه‌ی (۵۳.۲.۳) با $g^{ij}g^{tk}$ به‌دست می‌آوریم :

$$(m+۱)(m-۲)g^{rs}C_{r|\circ}C_{s|\circ} = \circ \tag{۵۵.۲.۳}$$

چون متر فینسلری g مثبت معین و $m \geq ۳$ است، نتیجه می‌گیریم برای هر $i \in \{۱, ..., m\}$ ، $C_{i|\circ} = \circ$ که در این صورت، $C_{ijk|\circ} = \circ$ ، بنابراین $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد لندسبرگ است. □

قضیه ۲. هرگاه $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد لندسبرگ تعمیم یافته با انحنای عددی ناصفر R باشد آنگاه $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد فینسلری C- کاهش‌پذیر است .

برهان. چون تانسور h- انحنای الصاق کارتان روی منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^m$ با رابطه

$$R_{ijkl} = \frac{\partial R_{jkl}}{\partial y^i} - g^k_{ij}R_{rkl} \tag{۵۶.۲.۳}$$

مشخص می‌شود و

$$2C^r_{ij}R_{rkl} = \frac{\partial R_{jkl}}{\partial y^i} + \frac{\partial R_{ikl}}{\partial y^j} \tag{۵۷.۲.۳}$$

زیرا

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0 \Rightarrow \frac{\partial R_{jkl}}{\partial y^i} - g^r_{ij}R_{rkl} + \frac{\partial R_{ikl}}{\partial y^j} - g^r_{ji}R_{rkl} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R_{jkl}}{\partial y^i} + \frac{\partial R_{ikl}}{\partial y^j} = (g^r_{ij} + g^k_{ji})R_{rkl}$$

و چون $g^r_{ij} + g^r_{ji} = 2C^r_{ij}$

$$2C^r_{ij}R_{rkl} = (g^r_{ij} + g^r_{ji})R_{rkl} \tag{۵۸.۲.۳}$$

$$= \frac{\partial R_{jkl}}{\partial y^i} + \frac{\partial R_{ikl}}{\partial y^j}$$

با ترکیب رابطه (۲.۱۷) با y^k به رابطه زیر می‌رسیم

$$2C^r_{ij}R_{rkl}y^k = \frac{\partial (R_{jkl}y^k)}{\partial y^j} + \frac{\partial (R_{ikl}y^k)}{\partial y^j} - R_{jil} - R_{ijl} \tag{۵۹.۲.۳}$$

حال با محاسبات بسیار طولانی و استفاده از روابط (۴۲.۲.۳) ، (۴۴.۲.۳) و (۴۳.۲.۳) عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$C_{ijl} = -\frac{1}{3R}\left(h_{ij}\frac{\partial R}{\partial y^l} + h_{il}\frac{\partial R}{\partial y^j} + h_{jl}\frac{\partial R}{\partial y^i}\right) \tag{۶۰.۲.۳}$$

که از آن C- کاهش‌پذیر بودن $\mathbb{F}^m$ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳. فرض کنیم $\mathbb{F}^m(m \geq 3)$ یک منیفلد لندسبرگ با انحنای عددی R باشد آنگاه $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد ریمانی با انحنای ثابت $R \neq 0$ می‌باشد .

برهان. رجوع شود به [۲۳]. □

برهان قضیه (۱.۲.۳). فرض کنیم $\mathbb{F}^m(m \geq 3)$ یک منیفلد لندسبرگ تعمیم یافته با انحنای عددی ناصفر R باشد آنگاه بنا بر قضیه ۱و ۲ نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{F}^m$یک منیفلد لندسبرگ است. حال با توجه به قضیه ۳ حکم برقرار می‌باشد. □

۳.۳ منیفلدهای راندرز با انحنای ثابت مثبت

هندسه منیفلدهای فینسلری با انحنای پرچم ثابت یکی از موضوع‌های اساسی در هندسه فینسلری است. پرفسور اکبرزاده ثابت کرد (تحت شرایطی روی توسیع تانسور کارتان) یک منیفلد فینسلری با انحنای پرچم [1] ثابت K،

الف) به طور موضعی مینکووسکی است هرگاه $K = \text{۰}$.

ب) یک منیفلد ریمانی است هرگاه $K = \text{۱}$.

متر راندرزی، یک متر فینسلری خاص است، که توسط راندرز معرفی شد. اگر $K > \text{۱}$، آنگاه یک متر راندرزی [2] روی کلاف مماس کره‌ی واحد $S^{\text{۲}n+\text{۱}}$ (برای $n \geq \text{۱}$)، وجود دارد به‌طوری‌که منیفلد فینسلری $\mathbb{F}^{\text{۲}n+\text{۱}} = (S^{\text{۲}n+\text{۱}}, F)$ دارای انحنای پرچم ثابت K می‌باشد که به طور تصویری تخت نیست. در این بخش، منیفلدهای راندرزی که نوع خاصی از منیفلدهای فینسلری محسوب می‌شوند، با انحنای پرچم ثابت مثبت ، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

۱.۳.۳ منیفلدهای فینسلری با انحنای پرچم ثابت

در این بخش، ابتدا مفهوم انحنای پرچم ثابت یک منیفلد فینسلری را شرح می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک منیفلد فینسلری باشد، ماتریس هسیان [3]

$$[g_{ij}(x,y)] = \left[\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\frac{\partial^{\text{۲}} F^{\text{۲}}}{\partial y^i \partial y^j}\right] \qquad (\text{۶۱.۳.۳})$$

در هر نقطه $(x,y) \in TM^\circ$ مثبت معین است.

میدان برداری لیوویل عمودی $L = \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ یک بخش سرتاسری روی کلاف برداری قائم VTM° است . میدان برداری فینسلری واحد $l = (\frac{\text{۱}}{F})L$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{ij}(x,y) l^i l^j = \text{۱} \qquad (\text{۶۲.۳.۳})$$

$$l^i = \frac{y^i}{F} \qquad (\text{۶۳.۳.۳})$$

---

[1] *flag curvature*

[2] *Randers metric*

[3] *Hessian*

با استفاده از نمادهایی که در فصل قبل معرفی شدند میدان تانسوری فینسلری زیر را تعریف می‌کنیم

$$R_j^k = l^h\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{G_h^k}{F}\right) - \frac{\delta}{\delta x^h}\left(\frac{G_j^k}{F}\right)\right) \qquad (۶۴.۳.۳)$$

$$R_{ij} = g_{ik}R_j^k \qquad (۶۵.۳.۳)$$

یک پرچم $l \wedge V$ در نقطه‌ی $x \in M$ که توسط میدان برداری فینسلری l و بردار مماس $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ مشخص می‌شود را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۳.۳. انحنای پرچم برای پرچم $l \wedge V$، عدد $K(l,V)$

$$K(l,V) = \frac{V^i R_{ij} V^j}{g_{ij}V^iV^j - (g_{ijl^i}V^i)^{۲}} \qquad (۶۶.۳.۳)$$

است.

در حالتی که به ازای هر $i \in \{۱, ..., m\}$ ، عدد $K(l,V)$ به (x^i, y^i, V^i) وابسته نباشد، یعنی $K(l,V)$ یک تابع ثابت باشد، گوئیم $\mathbb{F}^m$ یک منیفلد فینسلری با انحنای پرچم ثابت است.

فرض کنیم M یک منیفلد m بعدی همراه با متر ریمانی $a = ({}_{ij}(x))$ و یک فرمی $b = (b_i(x))$ باشد که b همواره مخالف صفر است. تابع $F(x,y)$ روی TM° را تعریف می‌کنیم:

$$F : TM^\circ \longrightarrow [۰, \infty)$$

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j + b_i(x)y^i} \qquad (۶۷.۳.۳)$$

تابع F مثبت مقدار روی کل فضای TM° است اگر و تنها اگر طول $\parallel b \parallel$ از یک فرمی b در رابطه‌ی زیر صدق کند،

$$\parallel b \parallel^{۲} = b_i(x)b^i(x) < ۱ \qquad (۶۸.۳.۳)$$

که در آن $b^i(x) = \sum_j a^{ij}(x)b_j(x)$ و $[a^{ij}(x)]$ معکوس ماتریس $[a_{ij}(x)]$ می‌باشد .

تعریف ۲.۳.۳. یک متر فینسلری که با رابطه‌ی (۶۷.۳.۳) تعریف می‌شود را یک متر راندرزی و $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_j)$ را یک منیفلد راندرزی می‌نامیم.

حال، برای بیان قضیه‌ی یاسودا- شیمادا [1]، یک فرمی

$$\beta = b^j(b_{j|i} - b_{i|j})dx^i \quad (۶۹.۳.۳)$$

را که در آن مشتق کواریانت نسبت به الصاق لوی- چویتا است، را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱.۳.۳. (یاسودا- شیمادا) فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرزی باشد بطوریکه روی M، داشته باشیم $\beta = ۰$.

$\mathbb{F}^m$ دارای انحنای ثابت مثبت K است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) طول $\| b \|$ از ۱- فرمی b روی M ثابت باشد.

۲) مشتق کواریانت b نسبت به الصاق لوی- چویتا که توسطه‌ی متر ریمانی a روی M تعریف می‌شود در شرط زیر صدق می‌کند:

$$b_{i|j} + b_{j|i} = ۰ \quad (۷۰.۳.۳)$$

۳) تانسور انحنای منیفلد ریمانی (M, g) توسط

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= K(۱- \| b \|^۲)(a_{hj}a_{ik} - a_{hk}a_{ij}) \\ &\quad +K(b_i b_k a_{hj} + b_h b_j a_{ik} - b_i b_j a_{hk} - b_h b_k a_{ij}) \\ &\quad -b_{h|j}b_{i|k} + b_{h|k}b_{i|j} + ۲b_{h|i}b_{k|j} \end{aligned}$$

مشخص می‌شود.

برای میدان‌های برداری X, Y, Z روی M، R تانسور انحنای الصاق لوی- چویتا ∇ روی منیفلد ریمانی (M, a) را با R نمایش می‌دهیم.

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad (۷۱.۳.۳)$$

---

[1] $Yasuda - Shimada$

که مولفه‌های موضعی آن به صورت زیر می‌باشند:

$$R_{hijk} = a(R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \qquad (۷۲.۳.۳)$$

قضیه ۲.۳.۳. هرگاه $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرزی m بعدی با انحنای پرچم ثابت باشد و روی M داشته باشیم $\beta = ۰$ آنگاه m یک عدد فرد $۲n + ۱$ است. به‌علاوه M یک فرم فضای سازاکی [۱] یکریخت با کره‌ی $S^{۲n+۱}$ است، مشروط بر آنکه یک منیفلد همبند ساده و کامل نسبت به متر ریمانی $a = (a_{ij})$ باشد.

۲.۳.۳ فرم‌های فضای سازاکی

هدف در این بخش اثبات قضیه فوق است، برای این منظور به ذکر مقدمات و ابزارهای لازم می‌پردازیم.

تعریف ۳.۳.۳. اگر M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر از بعد $۲n + ۱$ باشد. و ξ, φ و η به‌ترتیب میدان تانسوری از نوع $(۱, ۱)$, یک میدان برداری و یک ۱- فرمی روی M باشند به قسمی که

$$\varphi^۲ = -۱ + \eta \otimes \xi \qquad (۷۳.۳.۳)$$

$$\eta(\xi) = ۱$$

که در آن I نگاشت همانی روی $\Gamma(TM)$ است. آنگاه گوئیم M دارای یک (φ, ξ, η)- ساختار است.

در [۱۳] (صفحه‌ی ۲۰ و ۲۱) ثابت شده است که

$$\varphi(\xi) = ۰ \qquad (۷۴.۳.۳)$$

$$\eta \circ \varphi = ۰ \qquad (۷۵.۳.۳)$$

همچنین یک متر ریمانی a روی M وجود دارد به‌قسمی‌که:

$$a(\varphi X, \varphi Y) = a(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \qquad (۷۶.۳.۳)$$

[۱] $Sasakian\ space\ form$

اگر در رابطه‌ی فوق قرار دهیم $Y = \xi$ به‌دست می‌آوریم:

$$\eta(X) = a(X, \xi), \qquad \forall X \in \Gamma(TM) \tag{۷۷.۳.۳}$$

زیرا

$$a(\varphi X, \varphi\xi) = a(X, \xi) - \eta(X)\eta(\xi)$$

چون $\eta(\xi) = ۱$ و $\varphi(\xi) = ۰$ پس $a(\varphi X, \varphi\xi) = ۰$ در نتیجه $a(X, \xi) = \eta(X)$.
به‌طور مشابه، به جای Y قرار می‌دهیم $\varphi(X)$ به‌دست می‌آوریم:

$$a(\varphi X, X) = ۰, \qquad \forall X \in \Gamma(TM) \tag{۷۸.۳.۳}$$

تعریف ۴.۳.۳. یک منیفلد ریمانی $(۲m + ۱)$بعدی (M, g) را یک منیفلد سازاکی [۱] گوئیم هرگاه منیفلد M یک خودریختی ϕ روی کلاف مماس TM، یک میدان برداری ξ و یک فرمی η بپذیرد که در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{cases} \phi^۲ = -Id + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = ۱, \quad \phi\xi = ۰, \quad \eta \circ \phi = ۰ \\ g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = g(X, \xi) \\ (\tilde{\nabla}_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -\phi X \end{cases}$$

که در آن X و Y میدان‌های برداری دلخواه روی TM و ∇ الصاق ریمانی نسبت به g است.

گزاره ۱.۳.۳. منیفلد M همراه با یک (φ, ξ, η, a)- ساختار یک منیفلد سازاکی است اگر و تنها اگر رابطه زیر برای الصاق لوی- چویتا ∇ نسبت به متر ریمانی a درست باشد:

$$(\nabla_X \varphi)Y = a(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{۷۹.۳.۳}$$

برهان. رجوع شود به [۱۳] صفحه‌ی ۷۳. □

---
[۱] $Sasakian\ manifold$

قضیه ۳.۳.۳. R تانسور انحنای لوی- چویتا روی منیفلد M فرض شود. هرگاه (M,a) یک منیفلد ریمانی از بعد $(2n+1)$ و ξ یک میدان برداری کیلینگ روی M باشد به‌طوری‌که

$$R(X,Y)\xi = a(Y,\xi)X - a(X,\xi)Y, \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{۸۰.۳.۳}$$

آنگاه M یک منیفلد سازاکی است.

برهان. رجوع شود به [۱۱]. $\square$

یک منیفلد قطع شده توسط یک صفحه را در نظر می‌گیریم، مجموعه نقاط مشترک بین صفحه و منیفلد را بخش صفحه‌ای [1] نامیم. توزیع خطی تولید شده توسط میدان برداری ξ روی M را با $\{\xi\}$ نشان می‌دهیم. توزیع تکمیل‌کننده متعامد بر $\{\xi\}$ را با $\{\xi\}^{\perp}$ نمایش داده، آن را توزیع تماسی [2] روی M گوئیم. یک بخش صفحه‌ای در فضای مماس T_xM را φ- بخش نامیم هرگاه یک بردار $X \in \{\xi\}^{\perp}_X$ موجود باشد بطوریکه $\{X, \varphi X\}$ یک پایه متعامد یکه برای بخش صفحه‌ای باشند.

انحنای بخشی [3] $H(X)$ که توسط φ- بخش تولید شده با $\{X, \varphi X\}$ مشخص می‌شود، را φ- انحنای بخشی گویند.

ازاین‌رو برای هر بردار یکه‌ی $X \in \{\xi\}^{\perp}_X$ خواهیم داشت:

$$H(X) = a(R(X,\varphi X)\varphi X, X) \tag{۸۱.۳.۳}$$

تعریف ۵.۳.۳. یک منیفلد سازاکی M با φ- انحنای بخشی ثابت c را فرم فضای سازاکی [4] نامیم و آن را با $M(c)$ نشان می‌دهیم.

در این بخش از فرم‌های فضای سازاکی $M(c)$ با $c > -3$ استفاده می‌کنیم. مثال‌های فراوانی از از فرم‌های فضای سازاکی وجود دارند، به عنوان نمونه در [۱۴] نشان داده شده است ، برای هر $\varepsilon > 0$، روی کره‌ی S^{2n+1} یک ساختار از فرم فضای سازاکی با φ- انحنای بخشی

---

[1] $plane\ section$

[2] $contact\ distribution$

[3] $sectional\ curvature$

[4] $Sasakianspaceform$

$c = -۳ + \frac{۴}{\varepsilon}$ وجود دارد که آن را با $S^{۲n+۱}(c)$ نشان می‌دهند. به عنوان مثالی دیگر قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنیم $M(c)$ یک منیفلد سازاکی کامل و همبند از بعد $(۲n + ۱)$ و φ-انحنای بخشی ثابت $c > -۳$ باشد، آنگاه M با کره‌ی $S^{۲n+۱}(c)$ یکریخت است.

برهان. رجوع شود به [۲۴]. □

تذکر. یکریختی M با کره‌ی $S^{۲n+۱}(c)$ بدان معنی است که M با کره‌ی $S^{۲n+۱}(c)$ دیفئومورف باشد و نگاشت دیفئومورفیسم مابین آن‌ها ساختار تانسورهای روی $M(c)$ را به ساختار تانسورهای روی $S^{۲n+۱}(c)$ نظیر کند.

۳.۳.۳ چند لم اصلی

در این قسمت به اثبات قضیه (۲.۳.۳) می‌پردازیم. به این منظور برخی از روابط مابین منیفلدهای راندرزی با انحنای پرچم ثابت و مثبت و کلاس خاصی از فرم‌های فضای سلزاکی را با اثبات چند لم بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۳. هرگاه $\mathbb{F}^m = (M, F^\star, a^\star_{ij}, b^\star_i)$ یک منیفلد هموار راندرزی با انحنای پرچم ثابت و مثبت $K^\star$ باشد آنگاه، یک متر راندرزی $F = (a_{ij}, b_i)$ با انحنای پرچم ثابت $K = ۱$ روی فضای TM° وجود دارد.

برهان. ابتدا روی منیفلد M یک متر ریمانی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij}(x) = K^\star a^\star_{ij}(x) \tag{۸۲.۳.۳}$$

a_{ij} متر ریمانی است. زیرا از ضرب یک اسکالر در متر ریمانی $a^\star_{ij}$ تشکیل شده است پس خواص متر ریمانی را دارا می‌باشد، سپس ۱- فرمی $b_i(x)$

$$b_i(x) = \sqrt{K^\star} b^\star_i(x) \tag{۸۳.۳.۳}$$

در نظر می‌گیریم. تابع

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i = \sqrt{K^\star}F^\star(x,y) \qquad (۸۴.۳.۳)$$

یک متر راندرزی جدید روی فضای TM° است.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i \\ &= \sqrt{K^\star a^\star_{ij}(x)y^i y^j} + \sqrt{K^\star}b^\star_i(x) \\ &= \sqrt{K^\star}(\sqrt{a^\star_{ij}(x)y^i y^j} + b^\star_i(x)) \\ &= \sqrt{K^\star}F^\star(x,y) \end{aligned}$$

روابط (۸۴.۳.۳) و (۶۱.۳.۳) ایجاب می‌کند:

$$g_{ij}(x,y) = K^\star g^\star_{ij}(x,y) \qquad (۸۵.۳.۳)$$

$$g^{ij}(x,y) = \frac{۱}{K^\star}g^{ij\star}(x,y) \qquad (۸۶.۳.۳)$$

زیرا

$$\begin{aligned} &[g_{ij}(x,y)] = [\frac{۱}{۲}K^\star\frac{\partial^۲ F^{\star ۲}}{\partial y^i \partial y^j}] = K^\star[\frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ F^{\star ۲}}{\partial y^i \partial y^j}] = K^\star[g^\star_{ij}(x,y)] \\ &\Rightarrow g_{ij}(x,y) = K^\star g^\star_{ij}(x,y) \end{aligned}$$

چون ماتریس $[g^{ij}(x,y)]$ معکوس ماتریس $[g_{ij}(x,y)]$ است، لذا (۸۶.۳.۳) نیز به طریق مشابه برقرار است.

مترهای راندرزی F و $F^\star$ الصاق‌های غیرخطی کانونی یکسانی تعریف می‌کنند. بنابراین،

$$G^j_i = G^{j\star}_i$$

و در نتیجه

$$R_{ij} = R^\star_{ij} \qquad (۸۷.۳.۳)$$

محاسبات زیر برابری $R_{ij} = R^\star_{ij}$ را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
R_{ij} = g_{ik}R^k_j &= g_{ik}\sum_h l^h(\frac{\delta}{\delta x^i}(\frac{G^k_h}{F}) - \frac{\delta}{\delta x^h}(\frac{G^k_j}{F})) \\
&= K^\star g^\star_{ik}\sum_h l^h(\frac{\delta}{\delta x^i}((\frac{G^{k\star}_h}{\sqrt{K^\star}F^\star}) - \frac{\delta}{\delta x^h}(\frac{G^{k\star}_j}{\sqrt{K^\star}F^\star})) \\
&= K^\star g^\star_{ik}\sum_h \frac{y^h}{\sqrt{K^\star}F^\star}(\frac{\delta}{\delta x^i}((\frac{G^{k\star}_h}{\sqrt{K^\star}F^\star}) - \frac{\delta}{\delta x^h}(\frac{G^{k\star}_j}{\sqrt{K^\star}F^\star})) \\
&= g^\star_{ik}\sum_h l^{h\star}(\frac{\delta}{\delta x^i}(\frac{G^{k\star}_h}{F^\star}) - \frac{\delta}{\delta x^h}(\frac{G^{k\star}_j}{F^\star})) \\
&= g^\star_{ik}R^{k\star}_j = R^\star_{ij}
\end{aligned}$$

همچنین مولفه‌های متر زاویه‌دار h به طور موضعی برابر خواهد بود با:

$$h_{ij} = K^\star h^\star_{ij} \qquad (۸۸.۳.۳)$$

که تساوی مذکور از روابط (۸۴.۳.۳) و(۸۵.۳.۳) با محاسبات زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j \\
&F^\star = \frac{F}{\sqrt{K^\star}} \Rightarrow \frac{۱}{F^{\star ۲}} = \frac{K^\star}{F^۲} \\
&l_i = g_{ij}l^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j &= K^\star g^\star_{ij} - g_{ij}l_j g_{ji}l^i \\
&= K^\star g^\star_{ij} - K^\star g^\star_{ij}\frac{y^j}{\sqrt{K^\star}F^\star}K^\star g^\star_{ji}\frac{y^i}{\sqrt{K^\star}F^\star} \\
&= K^\star(g^\star_{ij} - l^\star_i l^\star_j) = K^\star h^\star_{ij}
\end{aligned}$$

چون $F^\star$ یک متر راندرزی با انحنای پرچم ثابت مثبت $K^\star$ است و نیز داریم $R_{ij} = Kh_{ij}$ به‌دست می‌آوریم:

$$R^\star_{ij} = K^\star h^\star_{ij} \qquad (۸۹.۳.۳)$$

همچنین،

$$R_{ij} = R^\star_{ij} = K^\star h^\star_{ij} = h_{ij}$$

از تساوی $R_{ij} = h_{ij}$ نتیجه می‌شود $K = ۱$. بنابراین، F یک متر راندرزی با انحنای پرچم ثابت $K = ۱$ است. □

یک منیفلد راندرزی $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ با انحنای پرچم ثابت $K = ۱$ و $\beta = ۰$ را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم منیفلد M یک فرم فضای سازاکی است.

۱- فرمی جدید $\eta = (\frac{۱}{\| b \|})b$ را روی منیفلد M تعریف می‌کنیم. η یک ۱- فرمی واحد است و

$$a_{ij}\eta_i\eta_j = ۱ \qquad (۹۰.۳.۳)$$

با استفاده از روابط (۷۰.۳.۳) و(۷۲.۳.۳) و (۱.۳.۳) عبارات زیر نتیجه می‌شوند:

$۱)\ \eta_{i|j} + \eta_{j|i} = ۰$

$۲)\ R_{ihjk} = (۱- \| b \|^۲)(a_{hj}a_{ik} - a_{hk}a_{ij})$

$+ \| b \|^۲\ (\eta_i\eta_j a_{hj} + \eta_h\eta_j a_{ik} - \eta_i\eta_j a_{hk} - \eta_h\eta_k a_{ij}$

$-\eta_{h|j}\eta_{i|k} + \eta_{h|k}\eta_{i|j} + ۲\eta_{h|i}\eta_{k|j}$

$۳)\eta_{i|j|k} = \eta_j a_{ik} - \eta_i a_{jk}$

چون $b_{i|j} + b_{j|i} = ۰$ لذا (۱) برقرار است.

درستی (۲) از پادمتقارن بودن R_{ihjk} نسبت به (ih) و

$$\| b \| \eta = b \Rightarrow \| b \| \eta_t = b_t$$

برمی‌آید .

برای اثبات (۳) از رابطه‌ی (۷۰.۳.۳) استفاده می‌کنیم.

$$\eta_{i|j|k} = \frac{۱}{\| b \|}b_{i|j|k} = \frac{۱}{\| b \|}(\| b \| \eta_j a_{ik} - \| b \| \eta_i a_{jk})$$
$$= \eta_j a_{ik} - \eta_i a_{jk}$$

هرگاه $\xi^i = a^{ij}\eta_j$،آنگاه میدان برداری واحد $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ را روی منیفلد M تعریف می‌کنیم.

نشان می‌دهیم روابط زیر برقرارند.

الف)

$$a_{ik}\xi^k_{|j}a_{jk}\xi^k_{|i} = ۰ \qquad (۹۱.۳.۳)$$

ب)

$$a_{ih}\xi^h_{|j|k} = (a_{ik}a_{jh} - a_{jk}a_{ih})\xi^h \tag{۹۲.۳.۳}$$

ابتدا به اثبات الف می‌پردازیم،

$$\xi^k = a^k_i\eta_i \Rightarrow \xi^k_{|j} = a^{ki}\eta_{i|j}$$
$$\Rightarrow a_{ik}\xi^k_{|j} = a_{ik}a^{ki}\eta_{i|j} = \eta_{i|j}$$

چون $\eta_{i|j} + \eta_{j|i} = ۰$ پس

$$a_{ik}\xi^k_{|j} + a_{jk}\xi^k_{|i} = \eta_{i|j} + \eta_{j|i} = ۰$$

رابطه‌ی (ب) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم: چون $\xi^h = a^{hi}\eta_i$ به‌دست می‌آوریم:

$$\xi^h_{|j|k} = a^{hi}\eta_{i|j|k}$$

با ضرب طرفین در a_{ih} خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_{ih}\xi^h_{|j|k} &= a_{ih}a^{hi}\eta_{i|j|k} \\ &= \eta_j a_{ik} - \eta_i a_{jk} \\ &= a_{ik}a_{jh}\xi^h - a_{jk}a_{ih}\xi^h \end{aligned}$$

روی منیفلدهای سازاکی نیز توزیع تکمیل‌کننده‌ی $\{\xi\}^\perp$ عمود بر توزیع خطی $\{\xi\}$ روی M را توزیع تماسی روی منیفلد M نامیم. $X \in \Gamma(\{\xi\}^\perp)$ اگر وتنها اگر $\eta(X) = ۰$.

لم ۲.۳.۳. هرگاه $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرزی با انحنای پرچم ثابت $K = ۱$ و $\beta = ۰$ باشد. آنگاه m، (بعد منیفلد M) عدد فرد $۲n + ۱$ برای $n > ۰$ است.

برهان. با به کارگیری الصاق لوی- چویتا نسبت به متر ریمانی $a = (a_{ij})$ روی منیفلد M و میدان برداری ξ ، یک میدان تانسوری

$$\varphi^i_j = -\xi^i_{|j} \tag{۹۳.۳.۳}$$

تعریف می‌کنیم. سپس، با استفاده از رابطه (۹۳.۳.۳) و $\eta_{i|j} + \eta_{j|i} = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\varphi^i_j \varphi^j_k = -a^{ih} a^{js} \eta_{j|h} \eta_{s|k} \qquad (۹۴.۳.۳)$$

چون $\xi^i = a^{ij}\eta_j$ پس

$$\begin{aligned}\varphi^i_j \varphi^j_k &= \xi^i_{|j} \xi^i_{|k} = a^{ih} \xi^i_{j|h} a^{js} \xi^j_{k|s} \\ &= -a^{ih} a^{js} \xi^i_{j|h} \xi^j_{s|k}\end{aligned}$$

همچنین

$$a^{js} \eta_{j|h} \eta_s = 0 \qquad (۹۵.۳.۳)$$

که از مشتق کواریانت گرفتن از $a^{js}\eta_j\eta_s = 0$ و $a^{js}\eta_{j|h}\eta_s = 0$ و استفاده از روابط $a^{ij}\eta_i\eta_j = 1$ و (۳) نتیجه می‌شود

$$\varphi^i_j \varphi^j_k = -\delta^i_k + \xi^i \eta_k \qquad (۹۶.۳.۳)$$

در زیر چگونگی محاسبه عبارت فوق بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\varphi^i_j \varphi^j_k &= -a^{ih} a^{js} \eta_{j|h} \eta_{s|k} \\ &= -a^{ih}(a_{hk} - \eta_h \eta_k) \\ &= -\delta^i_k - \xi^i \eta_k\end{aligned}$$

هرگاه $X = \sum_k X^k (\dfrac{\partial}{\partial x^k})$ یک میدان برداری از توزیع تماسی روی منیفلد M باشد آنگاه

$$\varphi^i_j \varphi^j_k X^k = -X^i \qquad (۹۷.۳.۳)$$

زیرا $\eta_k X^k = 0$.

بنابراین، تحدید میدان تانسوری φ به توزیع تکمیل‌کننده متعامد $\{\xi\}^\perp$ یک ساختار تقریباً مختلط می‌باشد. ازاین‌رو ، تارهای توزیع $\{\xi\}^\perp$ از بعد زوج $2n$ هستند. از آنجا که $\{\xi\}^\perp_x$ به همراه توزیع خطی $\{\xi\}_x$ فضای مماس بر نقطه‌ی x روی منیفلد M را تشکیل می‌دهند و بعد فضای مماس در هر نقطه، با بعد منیفلد برابر می‌باشد به فرد بودن بعد منیفلد M پی می‌بریم. یعنی $m = 2n+1$. □

لم ۳.۳.۳.

فرض کنیم $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرزی با انحنای پرچم ثابت $K = 1$ و $\beta = 0$ باشد. آنگاه M یک منیفلد سازاکی است.

برهان. بنا بر روابط (۹۱.۳.۳) و (۹۰.۳.۳) یک میدان برداری کیلینگ ξ روی منیفلد M موجود است.

$$\xi^i_{|j|k} = \delta^i_k \eta_j - a_{jk}\xi^i \qquad (۹۸.۳.۳)$$

زیرا بنا بر رابطه (۹۲.۳.۳) داریم:

$$a_{ih}\xi^h_{|j|k} = (a_{ik}a_{jh} - a_{jk}a_{ih})\xi^h \qquad (۹۹.۳.۳)$$

پس

$$a_{hi}\xi^i_{|j|k} = (a_{hk}a_{ji} - a_{jk}a_{hi})\xi^i \qquad (۱۰۰.۳.۳)$$

با ضرب طرفین تساوی در a^{hi} تساوی مذکور نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\xi^i_{|j|k} &= (a^{hi}a_{hk}a_{ji} - a^{hi}a_{jk}a_{hi})\xi^i \\
&= \delta^i_k a_{ji}\xi^i - a_{jk}\xi^i \\
&= \delta^i_k \eta_j - a_{jk}\xi^i
\end{aligned}$$

حال با تفریق $\xi^k_{|i|j}$ از $\xi^k_{|j|i}$ رابطه‌ی (۸.۳) به دست می‌آید.

$$\xi^k_{|i|j} = \delta^k_j \eta_i - a_{ij}\xi^k$$
$$\xi^k_{|j|i} = \delta^k_i \eta_j - a_{ji}\xi^k$$

$$\begin{aligned}
\xi^k_{|i|j} - \xi^k_{|j|i} &= \delta^k_j \eta_i - \delta^k_i \eta_j - a_{ij}\xi^k + a_{ji}\xi^k \\
&= \delta^k_j \eta_i - \delta^k_i \eta_j
\end{aligned}$$

در این صورت، بنابر قضیه (۳.۳.۳) حکم برقرار است. $\square$

هرگاه M یک منیفلد سازاکی و $x=\sum_i X^i(\dfrac{\partial}{\partial x^i})$ یک میدان برداری واحد از توزیع تماسی روی منیفلد M باشد. آنگاه روابط زیر برقرارند:

$$\eta_i X^i=\eta_i\varphi^i_j X^j=\text{۰} \quad (\text{۱۰۱.۳.۳})$$

$$a_{ij}\varphi^i_k X^k\varphi^j_h X^h=a_{ij}X^iX^j=\text{۱} \quad (\text{۱۰۲.۳.۳})$$

$$a_{ij}\varphi^i_k X^kX^j=\text{۰} \quad (\text{۱۰۳.۳.۳})$$

$$\eta_{i|j}X^iX^j=\text{۰} \quad (\text{۱۰۴.۳.۳})$$

$$\eta_{i|j}X^i\varphi^j_kX^k=-\eta_{j|i}X^i\varphi^j_kX^k=\text{۱} \quad (\text{۱۰۵.۳.۳})$$

قضیه ۵.۳.۳. هرگاه $\mathbb{F}^m=(M,F,a_{ij},b_i)$ یک منیفلد راندرزی با انحنای پرچم ثابت $K=\text{۱}$ و $\beta=\text{۰}$ باشد. آنگاه، M یک فرم فضای سازاکی با φ- انحنای بخشی ثابت $c\in(-\text{۳},\text{۱})$ است.

برهان. $X=\sum_i X^i(\dfrac{\partial}{\partial x^i})$ یک میدان برداری واحد از توزیع تماسی روی M فرض شود

$$H(X)=R_{hijk}X^iX^k\varphi^h_sX^s\varphi^j_tX^t \quad (\text{۱۰۶.۳.۳})$$

با استفاده از روابط (۷۲.۳.۳) و (۸۱.۳.۳) به درستی رابطه فوق پی می‌بریم.

$$H(X)=a(R(\textstyle\sum_h X^h(\dfrac{\partial}{\partial x^h}),\varphi\sum_i X^i(\dfrac{\partial}{\partial x^i}))\varphi\sum_j X^j(\dfrac{\partial}{\partial x^j}),\sum_k X^k\dfrac{\partial}{\partial x^k})$$
$$=R_{hijk}X^iX^k\varphi^h_sX^s\varphi^j_tX^t$$

بنا بر لم قبل، M یک منفلد سازاکی است. لذا کافیست ثابت کنیم انحنای بخشی $H(X)$ روی M ثابت است.

مولفه‌های تانسور انحنا که در رابطه ۲ معرفی شدند را در رابطه‌ی (۱۰۶.۳.۳) جایگزین کرده با استفاده از (۱۰۳.۳.۳) و (۱۰۴.۳.۳) و (۱۰۵.۳.۳) به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
H(X) &= (۱- \parallel b \parallel^۲)\{(a_{hj}\varphi^h_s X^s \varphi^j_t X^t)(a^{ik}X^iX^k) - (a_{hk}\varphi^h_s X^s X^k)(a^{ij}X^i\varphi^i_t X^t)\} \\
&+\|b\|^۲\{(\eta_i X^i)(\eta_k X^k)a_{hj}\varphi^h_s X^s\varphi^j_t X^t + (\eta_h\varphi^h_s X^s)(\eta_j\varphi^j_t X^t)a_{ik}X^iX^k \\
&-(\eta_i X^i)(\eta_j\varphi^j_t X^t)a_{hk}\varphi^h_s X^s X^k - (\eta_h\varphi^h_s X^s)(\eta_k X^k)a_{ij}X^i\varphi^j_t X^t \\
&-(\eta_{h|j}\varphi^h_s X^s\varphi^j_t X^t)(\eta_{i|k}X^iX^k) + (\eta_{h|k}\varphi^h_s X^s X^k)(\eta_{i|j}X^i\varphi^i_t X^t) \\
&+۲(\eta_{h|j}\varphi^h_s X^s X^i)(\eta_{k|j}X^k\varphi^j_t X^t)\} \\
&= (۱ - \|b\|^۲) - ۳\|b\|^۲ \\
&= ۱ - ۴\|b\|^۲
\end{aligned}
$$

$\|b\|$ روی منیفلد M ثابت است. بنابراین، M یک فرم فضای سازاکی با φ- انحنای بخشی $c = ۱ - ۴ \parallel b \parallel^۲$ است. به علاوه، از آنجا که $۱ > \parallel b \parallel > ۰$ است نتیجه می‌شود $۱ > c > ۳-$.

$\square$

نتیجه ۳. هرگاه $\mathbb{F}^m = (M, F^\star, a^\star_{ij}, b^\star_i)$ یک منیفلد راندرزی با انحنای پرچم ثابت مثبت $K^\star$ و $\beta = ۰$ باشد. آنگاه، M یک فرم فضای سازاکی با φ- انحنای بخشی $c \in (-۳, ۱)$ است.

برهان. بنا بر لم (۱.۳.۳) یک متر راندرزی $F = (a_{ij}, b_i)$ با انحنای پرچم ثابت $K = ۱$ روی TM° وجود دارد. لذا بنابر قضیه قبل ، حکم برقرار است. $\square$

در پایان این بخش، برهان قضیه (۲.۳.۳) را بیان می‌کنیم. هرگاه $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرزی صادق در شرایط قضیه (۲.۳.۳) باشد، بنابر نتیجه فوق و قضیه (۴.۳.۳) نتیجه می‌گیریم فرم فضای سازاکی M، با کره‌ای از بعد فرد یکریخت است.

۴.۳ مثال‌هایی از فضاهای فینسلری با انحنای ثابت

هر متر ریمانی با انحنای ثابت λ به طور موضعی با یک متر ریمانی کانونی با انحنای ثابت λ ایزومتری است. اما این موضوع برای مترهای فینسلری درست نیست. برای هر λ، تعداد نامتناهی متر فینسلری غیر ایزومتری با انحنای ثابت λ وجود دارد.

۱.۴.۳ تاب کارتان

تاب کارتان [1] یک کمیت نااقلیدسی برای فضاهای نااقلیدسی است. از آنجا که هر فضای مماس روی یک منیفلد فینسلری یک فضای مینکووسکی است، تاب کارتان برای یک منیفلد فینسلری قابل تعریف است.

فرض کنیم $\mathbb{V} = (V, F)$ یک فضای مینکووسکی n بعدی باشد. ضرب داخلی g_y در V مستقل از انتخاب $y \in V - \{0\}$ است اگر و تنها اگر تابع F اقلیدسی باشد.

برای یک بردار $y \in V - \{0\}$، $C_y(u, v, w)$ را تعریف می‌کنیم

$$C_y(u, v, w) := \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[g_{y+tw}(u, v)] \mid_{t=0} \qquad (۱۰۷.۴.۳)$$

که در آن $u, v, w \in V$.

$$C_y(u, v, w) = \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t}[F^2(y + ru + sv + tw)] \mid_{r=s=t=0} \qquad (۱۰۸.۴.۳)$$

بنابراین، برای هر بردار $y \in V - \{0\}$، C_y یک فرم متقارن چندخطی روی فضای برداری V است.

از همگن بودن F نتیجه می‌شود که برای هر دو بردار $v, w \in V$

$$C_y(y, v, w) = 0$$

تعریف ۱.۴.۳. خانواده $C = \{C_y\}_{y \in V - \{0\}}$ را تاب کارتان گویند.

خانواده $\{b_i\}_{i=1}$ را یک پایه برای فضای برداری V و $F(y) = F(y^i b_i)^{-1}$ را یک تابع از $(y^i) \in \mathbb{R}^n$ می‌انگاریم، هرگاه $(g^{ij}(y)) := (g_{ij}(y))^{-1}$ آنگاه $I_y(u)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$I_y(u) := \sum_{i,j=1} g^{ij}(y) C_y(b_i, b_j, u) = \sum_{i,j=1} g^{ij}(y) C_{ijk}(y) u^k \qquad (۱۰۹.۴.۳)$$

[1] Cartan torsion

که در آن $u = u^i b_i$ و

$$C_y(u, v, w) := C_{ijk}(y) u^i v^j w^k \tag{۱۱۰.۴.۳}$$

$$g_y(u, v) = g_{ij}(y) u^i v^j \tag{۱۱۱.۴.۳}$$

تعریف ۲.۴.۳. خانواده $I = \{I_y\}_{y \in V - \{\circ\}}$ را تاب کارتان متوسط [۱] نامند.

قضیه ۱.۴.۳. $\mathbb{F}^m = (M, F)$ یک فضای فینسلری کامل با انحنای ثابت $k = \lambda$ فرض شود، هرگاه تاب کارتان (متوسط) کراندار باشد آنگاه

الف) اگر $\lambda = \circ$ آنگاه F یک متر لندسبرگ (ضعیف) است.

ب) اگر $\lambda < \circ$ آن‌گاه F یک متر ریمانی است.

برهان. $C(t)$ را یک ژئودزی با سرعت یکه در یک فضای فینسلری (M, F) فرض می‌کنیم، و $V = v(t)$ را یک میدان برداری موازی [۲] دلخواه در طول c می‌انگاریم ،

$$C(t) := C_{\dot{c}(t)}(V(t), V(t), V(t))$$

$$L(t) := L_{\dot{c}(t)}(V(t), V(t), V(t))$$

$$I(t) := I_{\dot{c}(t)}(V(t))$$

$$J(t) := J_{\dot{c}(t)}(V(t))$$

را در نظر می‌گیریم، چون

$$L_{\dot{c}(t)}(U(t), V(t), W(t)) = \frac{d}{dt}[C_{\dot{c}(t)}(U(t), V(t), W(t))]$$

$$J_{\dot{c}(t)}(V(t)) = \frac{d}{dt}[I_{\dot{c}(t)}(V(t))]$$

پس

$$L(t) = C'(t) \tag{۱۱۲.۴.۳}$$

---

[۱] *mean Cartan torsion*

[۲] *parallel*

$$J(t) = I'(t) \tag{۱۱۳.۴.۳}$$

به علاوه

$$L(t) = C'(t) = 0 \tag{۱۱۴.۴.۳}$$

$$J'(t) + \lambda I(t) = 0 \tag{۱۱۵.۴.۳}$$

بنابراین، $C(t)$ و $I(t)$ در تساوی‌های زیر صدق می‌کنند،

$$C'' + \lambda C(t) = 0$$

$$I''(t) + \lambda I(t) = 0$$

جواب عمومی معادله‌های فوق به صورت زیر است:

$$C(t) = s_\lambda(t)L(0) + s'_\lambda(t)C(0) \tag{۱۱۶.۴.۳}$$

$$I(t) = s_\lambda(t)J(0) + s'_\lambda(t)I(0) \tag{۱۱۷.۴.۳}$$

که در آن $s_\lambda(t)$ جواب یکتا برای معادله زیر است:

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \tag{۱۱۸.۴.۳}$$

حال فرض کنیم F کامل باشد، آنگاه هر ژئودزی در بازه $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌شود. دو حالت $\lambda = -1$ و $\lambda = 0$ را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: $\lambda = -1$

در این حالت معادله (۱۱۶.۴.۳) به صورت

$$C(t) = sinh(t)L(0) + cosh(t)C(0)$$

است. اگر C کراندار باشد، آنگاه

$$L(\circ) = \circ = C(\circ)$$

چون ژئودزی c دلخواه فرض شد، نتیجه می‌شود که $C = \circ$ لذا F ریمانی است.
با استدلال مشابه و استفاده از معادله (۱۱۷.۴.۳) می‌توان نشان داد هرگاه I کراندار باشد، آنگاه $I = \circ$. در این صورت، بنا بر قضیه دیک F ریمانی است.

حالت دوم: $\lambda = \circ$

در این حالت معادله (۱۱۶.۴.۳) به‌صورت

$$C(t) = tL(\circ) + C(\circ)$$

خواهد بود. هرگاه C کراندار باشد، آنگاه $L(\circ) = \circ$.
چون c دلخواه است، نتیجه می‌شود که $L = \circ$ و F یک متر لندسبرگ است. با استدلال مشابه و استفاده از معادله (۱۱۷.۴.۳) مشاهده می‌شود که هرگاه I کراندار باشد، آنگاه $J = \circ$. از این رو، F یک متر لندسبرگ ضعیف می‌باشد. $\square$

تعریف ۳.۴.۳. فرض کنیم Ω یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^n = (R^n, |\ .\ |)$ باشد. مجموعه‌ی Ω چنان فرض شود که برای هر پاره‌خط L در $\mathbb{R}^n$، هرگاه نقطه‌ی انتهایی L مشمول در Ω باشد، آنگاه تمام L در Ω قرار گیرد. مجموعه‌ی Ω را اکیداً [1] گوئیم.
برای هر زوج مرتب از نقاط $p, q \in \Omega$، L_{pq} شعاع خارج شده از p و گذرنده از q فرض شود. از آنجا که Ω اکیداً محدب است، تنها یک نقطه $z_{pq} := L_{pq} \cap \partial\Omega$ وجود دارد. تعریف می‌کنیم:

$$d(pq) := ln\frac{|\ z_{pq} - p\ |}{|\ z_{pq} - q\ |}$$

d را متر فانک [2] نامیم.

---
[1] *strictly convex*
[2] *Funk metric*

مثال ۱.۴.۳. فرض کنیم d یک متر فانک روی یک ناحیه‌ی اکیداً محدب Ω در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. و Ω محدب قوی باشد. متر فانک d روی Ω توسط یک متر فینسلری القاء می‌شود. برای یافتن این متر فینسلری، نقطه $x \in \Omega$ و بردار $y \in T_x\Omega - \{0\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم L_y شعاع خارج شده از x و گذرنده از y باشد. و $z = L_y \cap \Omega$.

بنابر تعریف متر فانک،

$$d(p,q) = ln\frac{| z_{pq} - p |}{| z_{pq} - q |}$$

باید در شرط زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} F(y) &= lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{d(x, x+\varepsilon y)}{\varepsilon} \\ &= lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}ln\frac{| z-x |}{| z-x-\varepsilon y |} \\ &= \frac{< y, z-x >}{| z-x |^2} \end{aligned}$$

$y \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n$.

معادله فوق هم ارز است با:

$$x + \frac{y}{F(y)} = z \in \partial\Omega \tag{۱۱۹.۴.۳}$$

هرگاه d توسط یک متر فینسلری القاء شود، آنگاه F توسط (۱۱۹.۴.۳) مشخص می‌شود.

$$F(y) = \frac{y}{z-x}$$

F یک متر فینسلری است که متر فانک d را القاء می‌کند.

تعریف ۴.۴.۳. هرگاه

$$R^i_k(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j\partial x^k} + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j\partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \tag{۱۲۰.۴.۳}$$

آن‌گاه برای هر بردار $y \in T_xM - \{0\}$ یک تبدیل خطی

$$R_y = R^i_k(y)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k|_x : T_xM \longrightarrow T_xM$$

تعریف می‌کنیم.

$$R = \{R_y : T_xM \longrightarrow T_xM \mid y \in T_xM - \{0\}, \quad x \in M\} \qquad (۱۲۱.۴.۳)$$

R را انحنای ریمان می‌نامیم.

تعریف ۵.۴.۳. هرگاه M یک منیفلد فینسلری و $P \subset T_xM$ یک صفحه مماس باشد، آن‌گاه برای هر بردار $y \in P - \{0\}$ انحنای پرچم [1] $K(P,y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(P,y) := \frac{g_y(R_y(u),u)}{g_y(y,y)g_y(u,u) - g_y(y,u)g_y(y,u)} \qquad (۱۲۲.۴.۳)$$

که در آن، $u \in P$ چنان برداری است که $P = span\{y,u\}$.

انحنای پرچم $K(P,u)$ مستقل از انتخاب $u \in P$ است. عدد $K(P,u)$ را انحنای پرچم برای پرچم (P,y) نامند.

مثال ۲.۴.۳. فرض کنیم F یک متر فانک روی یک مجموعه‌ی محدب قوی $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باشد، ضرایب ژئودزی G^i از F به‌صورت زیر مشخص می‌شوند.

$$G^i(y) = \frac{1}{2}F(y)y^i \qquad (۱۲۳.۴.۳)$$

مشاهده می‌شود که ژئودزی‌ها، خطوط مستقیم در Ω هستند و F به طور تصویری تخت می‌باشد.

با جایگزین کردن رابطه (۴.۱۲) در

$$R^i_k(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial y^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^j}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}\} \qquad (۱۲۴.۴.۳)$$

و با استفاده از $F_{x_i} = FF_{y^i}$ به‌دست می‌آوریم:

$$R^i_k = -\frac{1}{4}\{F^2(y)\delta^i_k - g_{kl}(y)y^ly^i\} \qquad (۱۲۵.۴.۳)$$

[1] $flag\ curvature$

و بدون اندیس برای $u \in T_xM$

$$R_y(u) = -\frac{۱}{۴}\{g_y(y,y)u - g_y(y,u)y\} \qquad (۱۲۶.۴.۳)$$

در نتیجه، برای هر صفحه مماس $P = span\{y,v\} \subset T_xM$، انحنای پرچم K از F برابر است با:

$$K(P,y) = -\frac{۱}{۴}$$

زیرا

$$K(P,y) = \frac{-\frac{۱}{۴}(g_y(g_y(y,y)u,u) - g_y(g_y(y,u)y,u))}{g_y(y,y)g_y(u,u) - g_y(y,u)g_y(y,u)} = -\frac{۱}{۴}$$

مثال ۳.۴.۳. F را یک متر فانک روی یک مجموعه‌ی محدب قوی $\Omega\mathbb{R}^n$ فرض می‌کنیم. متر کلاین [۱] $\tilde{F}$ روی Ω به صورت زیر تعریف می‌شود ،

$$\tilde{F}(y) := \frac{۱}{۲}\{F(y) + F(-y)\}$$

چون $\tilde{F}$ یک متر فانک است در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند،

$$\tilde{F}_{x^k y^i} y^k = \tilde{F}_{x^i} \qquad (۱۲۷.۴.۳)$$

همچنین

$$\tilde{G}^i(y) = \frac{۱}{۲}\{F(y) - \tilde{F}(-y)\}y^i \qquad (۱۲۸.۴.۳)$$

ضرایب ژئودزی $\tilde{G}^i$ برای متر $\tilde{F}$ می‌باشند . همان‌طور که مشاهده می‌شود ، ژئودزی‌ها خطوط مستقیم در Ω و $\tilde{F}$ به طور تصویری تخت است. مانند مثال قبل به‌دست می‌آوریم :

$$\tilde{R}^i_k = -\{\tilde{F}^۲(y)\delta^i_k - \tilde{g}_{kl}(y)y^l y^i\}$$

و بدون اندیس

$$\tilde{R}_y(u) = -\{\tilde{g}_y(y,y)u - \tilde{g}_y(y,u)y\} \qquad u \in T_xM \qquad (۱۲۹.۴.۳)$$

---

[۱] $Klein$

در این صورت، برای $P=span\{y,u\}$، انحنای پرچم $\tilde{K}$ از $\tilde{F}$ به‌صورت $\tilde{K}(P,y)=-1$ است، زیرا

$$\tilde{K}(P,y)=\frac{-g_y(\tilde{g}_y(y,y)u,u)+g_y(\tilde{g}_y(y,u)y,u)}{(g_y(y,y)g_y(u,u)-g_y(y,u)g_y(y,u)}=-1 \qquad (130.4.3)$$

مثال ۴.۴.۳. فرض کنیم V^3 یک فضای برداری حقیقی از بعد ۳ باشد و $V^3\otimes\mathbb{C}$ فضای برداری مختلط باشد، پایه $\{b_1,b_2,b_3\}$ را برای V^3 در نظر می‌گیریم. Q روی $V^3\times\mathbb{C}$ را به صورت

$$Q(u,v)=e^{i\alpha}u^1v^1+e^{i\beta}u^2v^2+e^{-i\alpha}u^3v^3 \qquad (131.4.3)$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن $u=u^ib_i$ و $v=v^ib_i$ ، $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. برای هر بردار $X\in V^3-\{0\}$، کروشه X ($[X]$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x]:=\{tx\mid t>0\} \qquad (132.4.3)$$

لذا مجموعه‌ی $S^2:=\{[x]\mid\ x\in V^3-\{0\}\}$ با کره‌ی واحد $\mathbb{S}^2$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$، دیفئومورف است. برای هر بردار $Y\in V^3$، بردار مماس بر منحنی $c(t):=[X,tY]$ در لحظه‌ی $t=0$ به‌صورت $[X,Y]\in T_{[X]}S^2$ نمایش می‌دهیم.

تعریف می‌کنیم:

$$F:S^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$F([X,Y]):=\mathcal{R}\left[\sqrt{\frac{Q(X,X)Q(Y,Y)-Q(X,Y)^2}{Q(X,X)^2}}-i\frac{Q(X,Y)}{Q(X,X)}\right] \qquad (133.4.3)$$

که در آن، $\mathcal{R}[.]$ قسمت حقیقی یک عدد مختلط را نشان می‌دهد. F خوش‌تعریف است. هرگاه $|\ \beta\ |\leq\alpha<\frac{\pi}{2}$ آنگاه F یک متر فینسلری روی S^2 است. برایانت [1] ثابت کرد که F دارای انحنای ثابت $K=1$ می‌باشد . حال یک کلاس خاص از مترهای برایانت روی کره S^2 با $\alpha=\beta$ معرفی می‌کنیم. فرض کنیم بردار $y\in T_x\mathbb{R}^2$ را دلخواه باشد و

[1] $Brayant$

$$Y := (y, \circ) \in \mathbb{R}^{۳} \qquad X := (x, ۱) \in \mathbb{R}^{۳}$$

داریم

$$Q(X,X) = e^{i\alpha} \mid X \mid^{۲} + e^{-i\alpha}$$
$$Q(X,Y) = e^{i\alpha} < x, y >$$
$$Q(Y,Y) = e^{i\alpha} \mid y \mid^{۲}$$

بنابراین

$$Q(X,X)Q(Y,Y) - Q(X,Y)^{۲} = e^{۲\alpha i}(\mid x \mid^{۲} \mid y \mid^{۲} - < x, y >^{۲}) + \mid y \mid^{۲}$$

قسمت حقیقی $-iQ(X,Y)/Q(X,X)$ برابر است با

$$\mathcal{R}\left[-i\frac{Q(X,Y)}{Q(X,X)}\right] = \frac{sin(۲\alpha) < x, y >}{\mid x \mid^{۴} + ۲cos(۲\alpha) \mid x \mid^{۲} + ۱}$$

برای یک عدد مختلط z، قسمت حقیقی $\sqrt{z}$ توسط عبارت زیر مشخص می‌شود

$$\mathcal{R}(\sqrt{z}) = \sqrt{\frac{\mathcal{R}(z) + \mid z \mid}{۲}}$$

برای

$$Z = \frac{Q(x,x)Q(y,y) - Q(x,y)^{۲}}{Q(x,x)^{۲}} = \frac{e^{۲\alpha i}(\mid x \mid^{۲} \mid y \mid^{۲} - < x, y >^{۲}) + \mid y \mid^{۲}}{۲^{۲\alpha i} \mid x \mid^{۴} + ۲ \mid x \mid^{۲} + e^{-۲\alpha i}}$$

$$\mid Z \mid = \frac{\sqrt{(\mid x \mid^{۲} \mid y \mid^{۲} - < x, y >^{۲})^{۲} + ۲cos(۲\alpha)(\mid x \mid^{۲} \mid y \mid^{۲} - < x, y >^{۲}) \mid y \mid^{۲} + \mid y \mid^{۴}}}{\mid x \mid^{۴} + ۲cos(۲\alpha) \mid x \mid^{۲} + ۱}$$

$$\mathcal{R}(Z) = \frac{\mid x \mid^{۲} \mid y \mid^{۲} - < x, y >^{۲} + cos(۲\alpha) \mid y \mid^{۲}}{\mid x \mid^{۴} + ۲cos(۲\alpha) \mid x \mid^{۲} + ۱} + ۲\left(\frac{sin(۲\alpha) < x, y >}{\mid x \mid^{۴} + ۲cos(۲\alpha) \mid x \mid^{۲} + ۱}\right)^{۲}$$

به‌دست می‌آوریم

$$F([X,Y]) = \sqrt{\frac{\mathcal{R}(Z) + \mid Z \mid}{۲}} + \frac{sin(۲\alpha) < x, y >}{\mid x \mid^{۴} + ۲cos(۲\alpha) \mid x \mid^{۲} + ۱}$$

تعریف می‌کنیم

$$F_\alpha(y) := F([X,Y]), \quad y \in T_xR^۲$$

که در آن $X = (x, ۱)$ و $Y = (y, ۰) \in \mathbb{R}^۳$. یک متر فینسلری F_α روی $\mathbb{R}^۲$ به‌دست می‌آوریم. نگاشت عقب‌کش [1] متر فینسلری F روی کره‌ی $S^۲$ توسط رابطه

$$\psi(x) := \left(\frac{x}{\sqrt{۱+ \mid x \mid^۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۱+ \mid x \mid^۲}}\right)$$

می‌توان F_α را به یک متر فینسلری تعمیم داد به‌طوری‌که روی $\mathbb{R}^۲$ بدون تغییر باشد. متر تعمیم‌یافته F_α روی $\mathbb{R}^۲$ نیز دارای انحنای ثابت $K = ۱$ است. تنها متر ریمانی کروی [2] روی $\mathbb{R}^۲$ را با $F_\circ$ نشان می‌دهیم.

$$F_\circ(y) = \frac{\sqrt{\mid y \mid^۲ + (\mid x \mid^۲ \mid y \mid^۲ - < x, y >^۲)}}{۱+ \mid x \mid^۲}$$

تمام F_αها به‌طور نقطه‌ای به متر اقلیدسی تصویر می‌شوند.

---

[1] $pull - back$

[2] $spherical\ Riemannian$

[۱۰پت]رپرت

پیوست ۱

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A

angular .... زاویه‌دار

angular metric .... متر زاویه‌دار

B

bounded .... کراندار

bundle .... کلاف

bundle-like .... شبه‌کلاف

C

canonical .... کانونی

codimension .... هم‌بعد

coefficient .... ضریب

clopen .... هم‌باز و هم بسته

complete .... کامل

complementary .... تکمیل‌کننده

component .... مولفه

compact .... فشرده

connected .... همبند

connection .... الصاق

convex . . . . محدب

constant . . . . ثابت

covariant-derivative . . . . مشتق کوواریانت

C-reducible . . . . c-کاهش‌پذیر

critical . . . . بحرانی

curvature . . . . انحنا

curvature-angular form . . . . فرم انحنای زاویه‌دار

curvature tensor . . . . تانسور انحنا

D

degree . . . . درجه

dimension . . . . بعد

differentiable . . . . دیفرانسیل‌پذیر

diffeomorphism . . . . دیفئومرفیسم

distribution . . . . توزیع

E

eigenvalue . . . . مقدار ویژه

F

field . . . . میدان

fibre . . . . تار

flag . . . . پرچم

flag curvature . . . . انحنای پرچم

flat . . . . تخت

foliation . . . . برگ‌بندی

folium . . . . برگ

form . . . . فرم

fundamental . . . . اساسی

Funk metric . . . . متر فانک

G

generalized . . . . تعمیم‌یافته

gradient . . . . گرادیان

H

Hessian . . . . هسیان

homogeneous . . . . همگن

homeomorphism . . . . هومئومورفیسم

homomorphism . . . . همریختی

hyperbolic . . . . هذلولوی

hyper plane . . . . ابرصفحه

hyper quadric . . . . ابرسطح درجه دوم

hyper surface . . . . ابررویه

horizantal . . . . افقی

horizantal distribution . . . . توزیع افقی

I

immersion . . . . جادهنده

index . . . . اندیس

indicatrix .... شاخص
indicatrix bundle .... کلاف شاخص‌دار
induced .... القایی
integrable .... انتگرال‌پذیر
involutive .... گسترنده
isometry .... ایزومتری
isomorphism .... یکریختی

K

Killing vector field .... میدان برداری کیلینگ

L

Landsberg .... لندسبرگ
leaf .... برگ
length .... طول
Legender .... لژاندر
level .... تراز
Liouville .... لیوویل
locally .... موضعی
locally frame field .... چارچوب متحرک موضعی

M

manifold .... منیفلد
matrix .... ماتریس
Minkowski norm .... نرم مینکووسکی

N

non -degenarated . . . . ناتباهیده

non-Euclidean . . . . نا اقلیدسی

non-invariant . . . . غیرپایا

non linear . . . . غیرخطی

non linear connection . . . . الصاق غیرخطی

O

orthogonal . . . . متعامد

P

parallel . . . . موازی

plane . . . . صفحه

plaque . . . . پلاک

positive . . . . مثبت

pseudo-group . . . . شبه‌گروه

R

Randers metric . . . . متر راندرزی

rank . . . . رتبه

ray . . . . شعاع

Riemannian metric . . . . متر ریمانی

S

Sasaki-finsler metric . . . . متر سازاکی- فینسلر

scaler . . . . عدد

scaler curvature . . . . انحنای عددی

segment . . . . پاره خط

simply . . . . ساده

skew symmetry . . . . پادمتقارن

sphere . . . . کره

symmetry . . . . متقارن

symmetry form . . . . فرم متقارن

strictly convex . . . . اکیداً محدب

straight . . . . مستقیم

strongly convex . . . . محدب قوی

structure . . . . ساختار

sub manifold . . . . زیرمنیفلد

submersion . . . . پوشاننده

T

tangent . . . . مماس

tangent bundle . . . . کلاف مماس

tangent vector . . . . بردار مماس

tensor . . . . تانسور

tensor field . . . . میدان تانسوری

torsion . . . . تاب

torus . . . . چنبره

totally geodesic . . . . کاملاً ژئودزی

totally umbilical .... کاملاً نافی

translation .... انتقال

U

umbilical .... نافی

unit .... واحد

V

vector .... بردار

vector bundle .... کلاف برداری

vector field .... میدان برداری

vertical .... عمودی

vertical distribution .... توزیع عمودی

کتاب‌نامه

[1] A. Bejanco, H. R. Farran, Finsler Geometry and natural Foliation on the tangent bundle, Reports on mathematical physics, vol. 58, No. 1 (2006) 131-145.

[2] A. Bejanco, H. R. Farran, On the vertical bundle of a pseudo - Finsler manifold, Internat J. math Math sci. vol. 22, No.3 (1999) 637-642.

[3] A. Bejanco, H. R. Farran, On totally geodesic foliations with bundle- like metric , Journal of Geometry. 85 (2006) 7-14.

[4] A. Bejanco, H. R. Farran,Generalized Landsberg manifolds of scaler curvature, Bull. Korean Math. Soc. 37. No.3 (2000) 543-550.

[5] A. Bejanco, H. R. Farran, Randers manifolds of positive constant curvature, IJMMS vol. 18 (2003) 1155-1165.

[6] A. Bejanco, H. R. Farran, A geometric characterization of Finsler manifolds of constant curvature $K = 1$, Internat. J. Math. Sci vol. 23. No. 6 (2000) 399-407.

[7] A. Bejanco, H. R. Farran, Foliations and geometric structures, published by springer, Netherlands (2006).

[8] A, Bejanco, H. R. Farran, Finsler metrics of positive constant flag curvature on Sasakian space forms, Hokkaido Math. J. 31, no. 2 (2002) 459–468.

[9] A. Miernowski, A note on transversally Finsler foliations, Annales universitatis mariae Curie- Sklodowska Lublin -Polonia, vol. Lx,(2006) 57-64.

[10] C. T. J. Dodson, A short review on Landsberg spaces, Invited paper, Workshop on Finsler and semi-Riemannian geometry, San Luis potosi, Mexico, 24-26 May (2006).

[11] C. Shibata and M. Kitayama, On Finsler spaces of constant positive curvature, Proceedings of the Romanian-Japanese colloquium on Finsler geometry (Iasi. Brasov, 1984) (Brasov), Univ. Brasov, (1984) 139–157.

[12] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen: Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Graduate Texts in Math., Springer, New York (2000).

[13] D. E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics, vol. 509, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[14] D. L. Johnson, L. B. Whitt, Totally geodesic foliations, J. Differential geometry, vol 15 (1980) 225-2350.

[15] F. Brickell, R. S. Clark, Differentiable manifolds: An Introduction, Van Nostrand reinhold company, London (1970).

[16] H. Akbar-Zadeh, Sur les espaces de Finsler à courbures sectionnelles constantes [On Finsler spaces with constant sectional curvature], Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5) 74 , no. 10 (1988) 281–322 (French).

[17] I. Moerdijk, J. Mrcun, Introduction to foliations and Lie groupoids , Cambridge university press (2003).

[18] M. P. Docarmo, Riemannian Geometry, Birkhauser Boston (1992).

[19] M. Jozefowicz, R. Wolak, Finslerian foliations of compact manifolds are Riemannian, Differential geometry and its applications, vol. 26 (2008) 224-226.

[20] R. L. Bryant, Finsler structures on the 2-sphere satisfying K = 1, Finsler Geometry (Seattle, Wash, 1995), Contemporary Mathematics, vol. 196, (1996) 27–41.

[21] R. Q. Barranco, Totally geodesic Riemannian foliations with locally symmetric leaves, elsiver, C. R. Acad. Sci, ser 1342 (2006) 421-426.

[22] S. Numata, On Landsberg spaces of scalar curvature, J. Korean Math. Soc. 12 (1975) 97-100.

[23] S. Numata, On Landsberg spaces of scalar curvature, J. Korean Math. Soc. 12 (1975) 97-100.

[24] S. Tanno, Sasakian manifolds with constant -holomorphic sectional curvature, Tôhoku Math. J. (2) 21 (1969), 501–507.

[25] Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Scientific publishing co. Pte. Ltd. USA (2001).

Abstract

Finsler geometry has many applications in other sciences for example physics, biology ,... . Since foliations has a fundamental important role in geometry, here we will study the foliations of the tangent bundle of a Finslerian manifolds which is called the natural foliations. and will investigate their properties. Then the significance of curvature for the Finslerian spaces will be described and some of examples of these concepts will be given.

Yazd University

Faculty of Mathematics

Thesis Submitted

for the Degree of M. Sc.

Geometry-Topology

Title:

Foundations of Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle

Supervisor: Dr. A. Dehghan Nezhad

Advisor: Dr. H. Khorshidi

By: Zohre Aral

July 2010