Ueber Flächentransformationen.

Von A. V. Bäcklund in Lund.

I.

Im vorigen Jahre hatte ich mir die Frage gestellt, ob es unter den Flächentransformationen eines dreifach ausgedehnten Raumes solche gäbe, für welche nicht Berührung 1. Ordnung, sondern erst Berührung 2. Ordnung, Osculation, die Rolle einer Invariante spielte. Diese Frage habe ich sodann in einem Aufsatze im X. Bande der Jahresschrift der Universität Lund (Sept. 1874) behandelt und bin dabei zu dem Resultate gelangt, dass diejenigen Transformationen, bei denen schon Berührung 1. Ordnung eine invariante Beziehung ist, d. i. die Lie'schen Berührungstransformationen, auch die einzigen sind, die Berührung höherer Ordnungen invariant lassen. Zu derselben Zeit war in dem VIII. Bande der Mathematischen Annalen eine Arbeit von Lie *) erschienen, in der die nämliche Frage nach Osculationstransformationen aufgeworfen ist. Desshalb habe ich es unternehmen wollen, die erwähnte frühere Untersuchung von mir etwas umständlicher darzulegen, sowie einige darin nur angedeutete Punkte näher auszuführen. — Ich fange hier damit an, den Beweis für die Nicht-Existenz einer besonderen Osculationstransformation der ebenen Curven zu geben und werde diesen Beweis erst rein geometrisch, sodann rein analytisch führen (§ 1., 2.). Erst dann gebe ich eine genauere Uebersicht über die weiterhin zu behandelnden Fragestellungen.

§ 1.

Geometrischer Beweis für das Fehlen einer besonderen Osculationstransformation der ebenen Curven.

1. Die Osculationstransformation würde eine jede Curve der Ebene in eine oder einige, nur nicht unendlich viele Curven derselben Ebene, weiterhin je zwei einander osculirende Curven in zwei gleichfalls ein-

---

*) Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen. Von Sophus Lie. S. 223, Note.

ander osculirende Curven verwandeln. Wenn also auf eine Figur, bestehend aus einer Curve C und zwei einander unendlich benachbarten Curven $C' \, C''$, welche C in zwei benachbarten Punkten osculirten, eine Osculationstransformation angewandt würde, so müsste eine neue Figur resultiren, bestehend aus einer Curve Γ, der transformirten von C, und zwei einander benachbarten Curven $\Gamma' \, \Gamma''$, transformirten Curven von $C' \, C''$, — die Γ in zwei benachbarten Punkten osculirten. Weil $C' \, C''$ in zwei benachbarten Punkten eine und dieselbe Curve osculirten, so müssten sie sich selbst berühren und aus demselben Grunde müssten auch $\Gamma' \, \Gamma''$ sich berühren. *So dass eine jede Osculationstransformation die Eigenschaft besitzen müsste, je zwei unendlich benachbarte einander berührende Curven in zwei Curven derselben Art zu verwandeln.*

Diese Eigenschaft kommt aber, *wie ich sogleich zeigen werde,* einzig und allein den Lie'schen Berührungstransformationen zu, und damit ist der Beweis für das Fehlen einer besonderen Osculationstransformation geleistet.

2. Wenn in der Ebene $(x y)$ eine Transformation der genannten Art vorhanden ist, die also eine jede Curve der Ebene in eine Curve, je zwei unendlich benachbarte einander berührende Curven in zwei unendlich benachbarte ebenfalls einander berührende Curven überführt, so müssen, wenn $\lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3$ die Parameter irgend eines dreifachen Curvensystems $\psi(x y \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$ sind, und wenn

$$\varphi(\lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3) = 0 \tag{1}$$

die Bedingung dafür ausdrückt, dass zwei benachbarte Curven (λ) $(\lambda + d\lambda)$ sich berühren, die aus den Curven (λ) durch die genannte Transformation hervorgegangenen Curven, oder kürzer, die den Curven (λ) entsprechenden Curven durch eine Gleichung

$$f(x y \lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3) = 0 \tag{2}$$

repräsentirt sein, welche so beschaffen ist, dass, wenn man $x \, y \, p$ aus dieser Gleichung und aus den drei folgenden:

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} & f'(x) + p f'(y) = 0, \\ & \sum \frac{df}{d\lambda} d\lambda = 0, \\ & \sum \frac{df'(x)}{d\lambda} d\lambda + p \sum \frac{df'(y)}{d\lambda} d\lambda = 0 \end{aligned} \right.$$

eliminirt, man die Gleichung (1) wiederbekommt. Denn dann bildet die letztere Gleichung die Berührungsbedingung für zwei consecutive Curven (λ), sowie für zwei consecutive Curven (2). So dass, wenn zwei unendlich benachbarte Curven (λ) sich berühren, die entsprechenden Curven (2) sich auch berühren müssen.

Wenn umgekehrt irgend zwei dreifache Curvensysteme zu derselben Differentialgleichung als Berührungsbedingung Anlass geben, so wird durch dieselben eine Transformation begründet von genau dem oben angegebenen Charakter.

Gesetzt, es wäre gegeben ein dreifaches Curvensystem, etwa das erste System (λ), so wird man zu einer wesentlichen Beziehung zwischen diesem Systeme und irgend einem anderen (2) in folgender Weise geführt.

Werden die Parameter λ als Punktcoordinaten eines Raumes R_3 mit drei Dimensionen, die Variabeln $x\,y$ als willkürliche Constanten aufgefasst, so stellt die Gleichung (2) ein System von ∞^2 Flächen in R_3 dar; die Gleichung (1) ordnet jedem Punkte des R_3 einen elementaren Complexkegel zu und, weil (1) durch die Gleichungen (3) aus (2) resultirt, müssen je zwei unendlich benachbarte Flächen (2) nach einer Curve sich schneiden, deren sämmtliche Linienelemente ($\lambda\, d\lambda$) der Gleichung (1) genügen, also elementaren Complexkegeln (1) angehören; oder, in anderen Worten, diese Schnittcurven sollen Curven des Complexes (1) sein. — Durch irgend einen Punkt des R_3 gehen ∞^1 Flächen (2). Ihre Tangentenebenen in dem Punkte werden von einem Kegel umhüllt, der in der Nähe des Punktes mit demjenigen Kegel zusammenfällt, der von den durch den Punkt bestimmten Linienelementen der Schnittcurven je zweier benachbarter der ∞^1 Flächen erzeugt ist. Dies ist aber gerade der vom Punkte ausgehende elementare Complexkegel (1). Folglich wird eine jede der ∞^2 Flächen (2) in einem jeden ihrer Punkte von dem dazu gehörigen Kegel (1) berührt. Also: *die Flächen* (2) *bilden eine Lösung mit zwei willkürlichen Constanten* $x\,y$ *derjenigen partiellen Differentialgleichung* 1. *Ordnung, deren elementare Complexkegel durch die Gleichung* (1) *dargestellt sind.*

Nun sollen immer zwei benachbarte Integrale der partiellen Gleichung 1. Ordnung — ich nenne sie kurz $\Phi = 0$ — nach einer Charakteristik dieser Gleichung sich schneiden. Es muss dann die durch die Gleichungen:

$$f = 0, \quad f'(x) + p f'(y) = 0$$

dargestellte Curve eine Charakteristik von $\Phi = 0$ sein, und zwar wird einem jeden Werthsysteme $x\,y\,p$ eine bestimmte Charakteristik entsprechen*). D. h. einfach unendlich vielen Curven (2), die ein ge-

*) Das Resultat dieser Ueberlegung ist einfach folgendes: Eine jede gewöhnliche nicht-lineare Differentialgleichung $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ kann in unbegrenzt vielen Weisen durch ∞^3 Curven $\psi(x\,y\,p\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0$, $\chi(x\,y\,p\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0$ ersetzt werden, oder es ist, nach Lie, durch $\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0$ ein gewisser Curvencomplex be-

meinsames Element xyp besitzen, entsprechen ∞^1 Punkte (λ), die eine Charakteristik von $\Phi = 0$ bilden. — Stellen wir das *Curvensystem* (λ) durch seine Gleichung in Punktcoordinaten $x\,y$ dar:

$$(4) \qquad \psi(x\,y\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0\,;$$

dasselbe wird — wenn $x\,y\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ in obiger Weise interpretirt werden — eine Lösung mit $x\,y$ als zwei willkürlichen Constanten von $\Phi = 0$ sein, und einer jeden Schaar Curven λ (d. i. Curven (4)), die in einem und demselben Punkte sich berühren, muss daher eine Charakteristik von $\Phi = 0$ entsprechen. Nun giebt es nicht mehr als ∞^3 Charakteristiken von $\Phi = 0$, so dass im Allgemeinen eine Charakteristik keine Schaar von ∞^1 Charakteristiken umhüllt, und darum müssen umgekehrt den Punkten (λ) einer beliebigen Charakteristik von $\Phi = 0$ einfach unendlich viele Curven (λ), Curven (4), entsprechen, die sich in einem und demselben Punkte berühren. Also, einfach unendlich vielen Curven (2), die sich in einem Punkte berühren, entsprechen einfach unendlich viele Curven (λ), die ebenfalls in einem Punkte sich berühren, — indem den beiden Curvenschaaren dieselbe Charakteristik entspricht.

Hiermit ist bewiesen worden, *dass, wenn zwischen zwei dreifachen Curvensystemen ein Entsprechen etablirt ist, in der Art, dass je zwei benachbarten einander berührenden Curven des einen Systems zwei ebensolche des anderen Systems entsprechen, dann auch allen in einem Punkte sich berührenden Curven des einen Systems ebensolche Curven des andern entsprechen müssen.* Folglich ist die Transformation, die von dem einen zum andern Curvensysteme führt, eine Transformation von Linienelementen (xyp). Sie muss weiterhin je zwei vereinigt liegende Elemente in zwei ebensolche Elemente überführen, denn zwei vereinigt liegende Linienelemente gehören immer einer (reellen oder imaginären) Curve des einen Systems an und die entsprechenden Elemente werden sich an die entsprechende Curve anschliessen. — *Eine jede Transformation der anfangs angegebenen Art ist also eine Lie'sche Berührungstransformation.* W. z. z. w.

---

gründet. Es giebt nun blos ein einziges Curvensystem dieses Complexes, welches durch ein Gleichungssystem der Form:

$$\psi(x\,y\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) = 0\,, \qquad \psi'(x) + p\,\psi'(y) = 0$$

darstellbar ist. Es sind dies die Charakteristiken der mit $\varphi(\lambda\,d\lambda) = 0$ zusammenhängenden partiellen Gleichung 1. Ordnung.

Mag auch bemerkt sein, was aus dem Obigen folgt, dass eine jede gewönliche nicht-lineare Differentialgleichung $\varphi(\lambda\,d\lambda) = 0$ als Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Curven eines dreifachen Curvensystems interpretirt werden kann.

§ 2.

Analytischer Beweis desselben Satzes.

3. Da eine jede Curve der Ebene ein Werthsystem $xypp' \cdots$ *) besitzt, wodurch sie umgekehrt völlig bestimmt wird, so muss in erster Hand eine jede Curventransformation zweier Räume (xy) (XY) der Ebene, — diese Räume auf einander ausgebreitet gedacht, — eine Transformation von Werthsystemen $xypp' \cdots$ und $XYPP' \cdots$ sein. Insbesondere würde eine Osculationstransformation Werthsysteme $(xypp')$ in $(XYPP')$ überführen und natürlich alle derartigen einer Curve in (xy) angehörenden Werthsysteme in entsprechende Werthsysteme, die einer Curve in (XY) angehörten, verwandeln. — Eine jede Osculationstransformation würde daher durch Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} x &= F\ (XYPP'), \\ y &= F_1\ (\qquad\quad), \\ p &= \Phi_1\ (\qquad\quad), \\ p' &= \Phi_2\ (\qquad\quad) \end{aligned}$$

definirt sein, wo die $F \cdots \Phi_2$ so zu bestimmen wären, dass immer das Gleichungssystem

(a) $$dy - p\,dx = 0, \quad dp - p'dx = 0$$

in das ähnliche System

(b) $$dY - P\,dX = 0, \quad dP - P'dX = 0$$

überginge. Denn dies ist die analytische Bedingung dafür, dass, wenn zwei benachbarte Elemente $(x \cdots p')$ $(x + dx \cdots p' + dp')$ einer Curve angehören, die entsprechenden Elemente $(X \cdots P')$ $(X + dX \cdots P' + dP')$ ebenfalls einer Curve zukommen.

Nun betrachte ich folgende Reihe von ∞^1 consecutiven Elementen $(xypp')$:

$$\begin{aligned} &x_0\, y_0\, p_0\, p', \\ &x_0\, y_0\, p_0\, p' + dp', \\ &x_0\, y_0\, p_0\, p' + 2\,dp', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es genügen je zwei benachbarte dieser Elemente den Gleichungen (a), — denn nun sind $dx = dy = dp = 0$, — und von den entsprechenden ∞^1 Elementen $(XYPP')$ müssen also je zwei benachbarte den Gleichungen (b) genügen, d. h. diese ∞^1 Elemente werden an eine

*) $p = \dfrac{dy}{dx}$, $p' = \dfrac{dp}{dx}$, $\cdots$

Curve sich anschliessen. Durch Elimination von P, P' aus den Gleichungen:

$$x_0 = F\,(XYPP'),$$
$$y_0 = F_1\,(\qquad),$$
$$p_0 = \Phi_1\,(\qquad)$$

soll selbstverständlich die Gleichung jener *dem Linienelemente* $(x_0\,y_0\,p_0)$ *entsprechenden* Curve, und in ähnlicher Weise die Gleichung einer *dem Linienelemente* (XYP) *entsprechenden* Curve in (xy) erhalten werden. — Oder, wenn aus den Transformationsgleichungen die Grösse P' eliminirt wird, eine jede Osculationstransformation müsste zu zwei Gleichungen führen:

$$\text{(c)} \qquad f\,(xypXYP) = 0\,, \qquad \varphi\,(xypXYP) = 0\,,$$

die sowohl in den Variabeln xyp als in den XYP ein gemeinsames Integral besässen. Umgekehrt würden zwei Gleichungen (c), die in der nämlichen Beziehung zu einander ständen, eine Osculationstransformation bestimmen, *vorausgesetzt, dass* die Gleichungen

$$f=0,\quad \varphi=0,\quad \frac{df}{dx}+p\frac{df}{dy}+p'\frac{df}{dp}=0,\quad \frac{df}{dX}+P\frac{df}{dY}+P'\frac{df}{dP}=0\text{*)}$$

für ein jedes beliebiges Werthesystem $(XYPP')$ bez. $(xypp')$ ein Werthesystem $(xypp')$ bez. $(XYPP')$ oder einige solche Werthesysteme ergeben.

Aber ich werde zeigen, dass Gleichungssysteme von der Eigenschaft (c) *nicht zu allen Werthesystemen* $(xypp')$ *der Ebene führen können,* indem jene Gleichungen den dreifach unendlich vielen (XYP) nur zweifach unendlich viele Curven zuordnen, also durch die erwähnte Rechnung nur die ∞^3 Elemente $(xypp')$ dieser Curven zum Vorschein kommen können. Damit ist dann bewiesen, dass keine besondere Osculationstransformation stattfindet.

4. Werden P bez. p aus den Gleichungen (c) eliminirt, so entstehen zwei Gleichungen:

$$\text{(d)} \qquad p = f(xyXY)\,, \qquad P = \varphi\,(xyXY)\,,$$

die jene vollständig ersetzen und die sowohl im Raume (xy) wie im Raume (XY) ein gemeinsames Integral besitzen sollen. Nun wird diese Beziehung der Gleichungen (d) zu einander algebraisch durch die Relationen:

---

*) Combinirt, wenn es nöthig wäre, mit den Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dx}+p\frac{d\varphi}{dy}+p'\frac{d\varphi}{dp}=0,\qquad \frac{d\varphi}{dX}+P\frac{d\varphi}{dY}+P'\frac{d\varphi}{dP}=0,$$

die, wegen des zwischen $f\ \varphi$ geltenden Zusammenhangs, stets mit den obigen Gleichungen vereinbar sind.

$$\frac{d\varphi}{dx} + f\frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \frac{df}{dX} + \varphi\frac{df}{dY} = 0$$

ausgedrückt, woraus durch Elimination von f eine Gleichung zur Bestimmung von φ hervorgeht:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right) + \varphi\frac{d}{dY}\left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0\,.$$

Dieselbe kann in die Form gebracht werden:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy}\right)\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) = 0\,;$$

d. h. wenn $\frac{d\varphi}{dx} + p\frac{d\varphi}{dy} = 0$, so muss auch sein:

$$\left(\frac{d}{dx} + p\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right) = 0\,.$$

Die Differentiale von φ und von $\left(\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY}\right)$, beide als Functionen von x, y betrachtet, sollen also gleichzeitig verschwinden, darum

$$\frac{d\varphi}{dX} + \varphi\frac{d\varphi}{dY} = \psi(XY\varphi)\,.$$

Das Integral dieser Gleichung ist von der Form:

eine arb. Function von $\big(\Psi_1(XY\varphi)\,\Psi_2(XY\varphi)\,xy\big) = 0.$

Setzt man hier P statt φ, so hat man die zweite der Gleichungen (d). Sie ist nur zweifach unendlich in Bezug auf XYP, es werden daher den ∞^3 (XYP) nur ∞^2 Curven in (xy) zugeordnet und also giebt es, nach dem eben Auseinandergesetzten, keine besondere Osculationstransformation der Curven einer Ebene. W. z. z. w.

II.

Die Frage liegt nun nahe: In wie weit lassen jene für die Ebene gefundenen Resultate auf Räume mehrerer Dimensionen sich erweitern? Diese Frage werde ich erledigen, indem ich allgemein das Problem der Aufstellung aller derjenigen Transformationen eines Raumes von $n+1$ Dimensionen, die die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, die Flächen dieses Raumes, in einander überführen, behandle. — Von derartigen Transformationen ist a priori einleuchtend, dass es derer zwei wesentlich verschiedene Classen geben muss: die eine umfasst diejenigen Transformationen, die eine jede Fläche des einen Gebietes $(zx_1x_2\cdots x_n)$ des Raumes im Allgemeinen in nur eine Fläche (bez. einige Flächen) des anderen Gebietes $(ZX_1X_2\cdots X_n)$ überführen, die zweite Classe dagegen die, welche einer jeden Fläche eines der Gebiete unendlich viele des anderen entsprechen lassen.

Fasse ich wiederum Räume von 2 Dimensionen, Ebenen, in Betracht. — Weil eine jede Curve der Ebene durch ein Werthesystem $(xypp'\cdots)$ völlig bestimmt ist, und weil die Bedingung dafür, dass zwei unendlich benachbarte derartige Werthesysteme einer und derselben Curve angehören, durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\text{(A)} \qquad dy - p\,dx = 0, \quad dp - p'dx = 0, \cdots$$

so muss eine jede Curventransformation zweier Gebiete (xy), (XY) durch Gleichungen zwischen $xypp'\cdots$, $XYPP'\cdots$, die das Gleichungssystem (A) in das ähnliche System:

$$\text{(B)} \qquad dY - P\,dX = 0, \quad dP - P'dX = 0, \cdots$$

überführen, charakterisirt sein. D. h. um eine Curventransformation aufzustellen, bilde man beliebig zwei Gleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} X = F\,(xypp'\cdots p^k), \\ Y = F_1(xypp'\cdots p^l), \end{cases}$$

und leite aus ihnen, indem man der oben gestellten Bedingung von dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungssysteme (A), (B) genügt, die folgenden Gleichungen her:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} P = \Phi\,(xypp'\cdots), \\ P' = \Phi_1(\qquad\quad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Im Allgemeinen wird es dann geschehen, dass die Gleichungen (C), (D) nach $xypp'\cdots$ sich nicht auflösen lassen, — dann gehört die Transformation der oben erwähnten zweiten Classe zu, sie wird eine *mehrdeutige* Transformation sein. Zwar wird nämlich eine jede Curve in (xy) in nur eine Curve des Gebietes (XY) verwandelt, aber einer Curve des letzten Gebietes entsprechen unendlich viele Curven des ersten, nämlich alle Integrale einer gewissen Differentialgleichung*). — Wenn aber die Gleichungen (C) so gewählt worden wären, dass dieselben mit etwa den k ersten der Gleichungen (D) ein System bildeten, das in Bezug auf $xyp\cdots p^{k-1}$ aufgelöst werden könnte, so dass diese Gleichungen auch in folgender Form darstellbar wären:

$$\begin{aligned} x &= f\,(XYP\cdots), \\ y &= f_1(\qquad\quad), \\ p &= \varphi\,(\qquad\quad), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

*) Oder möglicherweise eines Systems von mehreren Differentialgleichungen.

so würde die Transformation zu der ersten der obigen Classen gehören, sie würde eine *eindeutige* (d. h. endlich-deutige) Transformation sein. Denn in erster Linie würde sie eine Transformation von gleichnamigen Curvenstücken $(xyp \cdots p^{k-1})$ und $(XYP \cdots P^{k-1})$ sein, und weiter würden solchen Stücken $(xyp \cdots p^{k-1})$, die zu einer Curve sich vereinigen, gleichnamige Stücke entsprechen, die ebenfalls zu einer Curve sich vereinigen.

Hinsichtlich der Transformationen dieser Classe besteht der Satz, dass sie ausschliessend Berührungstransformationen sind, wie diese von Herrn Lie definirt werden. Alle eindeutigen Curventransformationen sind also Transformationen von (xyp) in (XYP). Es ist schon bewiesen worden, dass keine anderen Curventransformationen von $(xypp')$ an $(XYPP')$ existiren; im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass auch keine besonderen Berührungstransformationen höherer Ordnungen stattfinden.

Gehen wir zu Räumen mit einer beliebigen Zahl, $n+1$, Dimensionen über. Um in allgemeinster Weise eine Transformation zu bilden, die aus allen Flächen (M_n) wiederum Flächen macht, darf man beliebig $n+1$ Gleichungen:

$$(C')\quad \begin{cases} Z\ = F\ (zx_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n\, p_{11} p_{12} \cdots p_{nn} \cdots p_{klm} \cdots), \\ X_1 = F_1\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = F_n\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \end{cases}$$

nehmen und aus ihnen durch Differentiation und Elimination die folgenden ableiten:

$$(D')\quad \begin{cases} P_k = \Phi_k\ (z \cdots x_k \cdots p_k \cdots p_{kl} \cdots p_{klm} \cdots), \\ P_{kl} = \Phi_{kl}(\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad (k, l, m, \cdots = 1\ 2 \cdots n), \end{cases}$$

so dass das Gleichungssystem:

$$(A')\quad dz - \sum p_k dx_k = 0\,, \quad dp_k - \sum p_{kl} dx_l = 0\,, \ \cdots \ \text{in inf.}$$

invariant bleibt.

Im Allgemeinen wird durch (C′) eine mehrdeutige Transformation begründet; nur wenn (C′) eine Lie'sche Berührungstransformation ist, — und von diesem Satze wird der 4. Paragraph handeln, — nur dann ist die Flächentransformation eindeutig (endlich-deutig).

Ich habe schon früher, wie bemerkt, die Frage discutirt, ob es nicht andere eindeutige Flächentransformationen gäbe, als gerade die Lie'schen Berührungstransformationen, und den Beweis dieses Charakters der letzteren Transformationen in einem Aufsatze in der Jahresschrift der Universität Lund für zwei und für drei Dimensionen geleistet. Gleichzeitig hatte Lie in einer Abhandlung in den Mathematischen Annalen dieselbe Frage aufgeworfen und dazu die andere gefügt, ob partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung Umformungen gestatten, die keine Berührungstransformationen sind. Der in meinem früheren Aufsatze geführte Beweis für die Nicht-Existenz von Berührungstransformationen höherer Ordnung, welche sich auf die Gesammtheit aller Flächen beziehen, zeigte sogleich, wie auch Lie brieflich mir mittheilte, dass keine derartigen für den Inbegriff der Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung geltenden Transformationen stattfinden könnten; in dem gegenwärtigen Aufsatze habe ich dies als Corollar eines meiner früheren Sätze hingestellt.

In dem 5. Paragraphen werde ich eine aus den Auseinandersetzungen der vorangehenden Paragraphen herfliessende Abbildung einer partiellen Gleichung 1. Ordnung eines Raumes mit $n+1$ Dimensionen auf einen Raum mit n Dimensionen erwähnen, um daraus einen Schluss hinsichtlich der Transformation von Gleichungen 1. Ordnung zu ziehen.

Es wird eine solche Abbildung schon durch eine Berührungstransformation begründet, und sie ist auch von Lie, wie ich aus einer Bemerkung in seiner Abhandlung „Allgemeine Theorie partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung“ Abh. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania für 1874, S. 218, schliessen muss, bei seinen synthetischen Untersuchungen zur Hülfe genommen worden.

Zum Schlusse finden sich einige kurze Bemerkungen über eine Classe mehrdeutiger Transformationen des Raumes von drei Dimensionen.

Uebrigens muss ich hier bemerken, wie auch in meinem früheren Aufsatze geschehen ist, dass ich im Sommer des vorigen Jahres mit Herrn Felix Klein in München insbesondere über die Frage nach Osculationstransformationen der Ebene im Gespräche gewesen bin, und dass, wenn auch bei diesen Unterhaltungen die Aufgabe nicht erledigt wurde, doch die Lösung derselben durch einige von ihm aufgeworfene neue Gesichtspunkte, unter denen sich die Frage betrachten liesse, wesentlich gefördert worden ist.

§ 3.

Ueber die eindeutigen Transformationen der ebenen Curven.

5. Ich nehme zunächst die Betrachtungen der zweiten Nummer in einer etwas erweiterten Form wieder auf. — Statt eines dreifachen

Curvensystems (4) behandle ich ein System mit $k+1$ willkürlichen Parametern λ:

(5) $$f(xy\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}) = 0$$

und wende auf dieses das frühere, in der zweiten Nummer für das System (4) gebrauchte Verfahren an. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}$ werden als Punktcoordinaten eines Raumes R_{k+1} mit $k+1$ Dimensionen, xy als willkürliche Constanten aufgefasst. Durch Elimination von xyp aus den Gleichungen:

(6) $$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad f = 0, \quad f'(x) + pf'(y) = 0, \\ \sum \frac{df}{d\lambda} d\lambda = 0, \quad \sum \frac{df'(x)}{d\lambda} d\lambda + p \sum \frac{df'(y)}{d\lambda} d\lambda = 0 \end{array}\right.$$

resultirt eine Gleichung

(7) $$\psi(\lambda d\lambda) = 0,$$

die nun die Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Curven λ, Curven (5), ist.

Von dieser Gleichung mag vor Allem Folgendes bemerkt sein. Man erkennt aus den Gleichungen (6), wenn man $xyp\lambda$ constant setzt, — dann die Werthe von λ so gewählt, dass den zwei ersten der Gleichungen (6) Genüge geleistet wird, — dass einem jeden solchen Werthesysteme ∞^{k-2} Werthe von $\frac{d\lambda_i}{d\lambda_{k+1}}$ entsprechen. Und zwar sind diese Werthe der Form:

$$d\lambda_i = \alpha_1 d\lambda_i^{(1)} + \alpha_2 d\lambda_i^{(2)} + \cdots \alpha_{k-1} d\lambda_i^{(k-1)},$$
$$(i = 1\ 2 \cdots k+1),$$

wo die α beliebig zu nehmen sind. — Die Strahlen des irgend einem Punkte (λ) zugehörenden Kegels $\psi = 0$ ordnen sich darum zu einfach unendlich vielen ebenen Büscheln von $k-2$ Dimensionen zusammen, und der Kegel selbst soll daher in Ebenencoordinaten durch $k-1$ Gleichungen repräsentirt sein. Seien

(8) $$\left\{\begin{array}{l} \psi_1\ (\lambda_1\cdots\lambda_{k+1}\ \pi_1\cdots\pi_{k+1}) = 0, \\ \psi_2\ (\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{k-1}(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{array}\right.$$

diese $k-1$ Gleichungen, homogen in Bezug auf π. Es wird dann zunächst die Berührungsbedingung (7) durch dieses System von partiellen Gleichungen 1. Ordnung im R_{k+1} zu ersetzen sein. Hiermit ist aber jene Gleichung (7) noch nicht vollständig charakterisirt. Es gilt nämlich weiter, dass die Flächenelemente $(\lambda\pi)$ der Mannigfaltigkeiten (5), — M_k im Raume R_{k+1}, — den Gleichungen (8) genügen, dass also die Gleichungen (8) das Mannigfaltigkeitssystem (5) als eine gemeinsame Lösung mit zwei willkürlichen Constanten $x\ y$ besitzen.

Umgekehrt wird auch jedes System $k-1$ partieller Gleichungen 1. Ordnung in R_{k+1}, das eine gemeinsame Lösung mit zwei willkürlichen Constanten gestattet, zu einer Gleichung $\psi(\lambda\, d\lambda) = 0$ führen, welche als Berührungsbedingung zweier benachbarter Curven eines $k+1$-fachen Systems

$$f(xy\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}) = 0$$

gedeutet werden kann. Und die Gleichung eines jeden solchen Curvensystems wird, wenn $x\ y$ bloss als willkürliche Constanten betrachtet werden, stets eine gemeinsame vollständige Lösung des Systems der partiellen Differentialgleichungen darstellen.

Durch die hieraus fliessende Abbildung des Gleichungssystems (8) auf die Ebene wird einem jeden Linienelement (xyp) der Ebene eine charakteristische M_{k-1}, Schnittmannigfaltigkeit von $k-1$ Dimensionen zweier unendlich benachbarter Integral-M_k, einem jeden Elemente $(xypp')$ eine charakteristische M_{k-2}, der Schnitt dreier consecutiver Integral-M_k, entsprechen, u. s. w. Den Punkten einer charakteristischen M_{k-1} entsprechen somit diejenigen Curven (5), die sich in einem Punkte berühren, den Punkten einer charakteristischen M_{k-2} diejenigen (5), die sich in einem Punkte osculiren, u. s. w.

Und weiter, was hier besonders hervorgehoben sein möge, wenn zwischen zwei $k+1$-fachen Curvensystemen:

$$f(xy\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}) = 0\,,$$
$$\varphi(\qquad\qquad) = 0$$

eine solche Correspondenz feststeht, dass je zwei benachbarten einander berührenden Curven des einen Systems zwei benachbarte ebenfalls einander berührende Curven des anderen Systems entsprechen, dann müssen allen Curven $f = 0$, die sich in einem Punkte berühren, Curven $\varphi = 0$ entsprechen von genau derselben Eigenschaft. Denn beide Curvensysteme geben zu demselben Systeme partieller Differentialgleichungen (8) Anlass und den beiden Schaaren von in einem Punkte sich berührenden $f = 0$ bez. $\varphi = 0$ entspricht eine und dieselbe charakteristische M_{k-1}. Was darauf hinauskommt, dass für alle Transformationen der Ebene, bei denen zwei benachbarte einander berührende Curven in ähnliche Curven verwandelt werden, die Berührung 1. Ordnung eine invariante Beziehung sein muss; also, alle jene Transformationen sind Lie'sche Berührungstransformationen. — Wie nun schon in der zweiten Nummer erwiesen war.

6. Eine Curventransformation, die Berührung 2. Ordnung unverändert lässt, ist, wie schon gezeigt, eine gewöhnliche Berührungstransformation; eine Transformation, die Berührung 3. Ordnung unverändert lässt, würde je zwei benachbarte mit einander eine Berührung der 2. Ordnung eingehende Curven in zwei ähnliche Curven verwandeln; oder, auch sie sollte, behaupte ich, eine Transformation der früher in der vorangehenden Nummer erörterten Classe sein, die zwei benachbarte, eine Berührung der 1. Ordnung eingehende Curven in ähnliche verwandelt. Wenn nämlich $C' C''$ irgend zwei unendlich benachbarte eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Curven bezeichnen, so kann immer eine C gelegt werden, die $C' C''$ unendlich benachbart ist und die in zwei dem Berührungspunkte dieser Curven benachbarten Punkten dieselben osculirt. Eine jede Transformation der genannten Art wird $C' C'' C$ in $\Gamma' \Gamma'' \Gamma$ umformen, und von diesen Curven soll die letztere die beiden ersteren in zwei benachbarten Punkten osculiren. Weil aber $\Gamma' \Gamma''$ eine und dieselbe Curve Γ in zwei benachbarten Punkten osculiren, gehen sie mit einander selbst eine Berührung der 1. Ordnung ein. Also werden hierbei irgend zwei benachbarte einander berührende Curven $C' C''$ in zwei ähnliche $\Gamma' \Gamma''$ übergeführt, — wie behauptet war.

Von einer Transformation der letzten Art ist aber schon gezeigt worden, dass sie eine Lie'sche Berührungstransformation ist. Darum giebt es keine andere Transformation, bei welcher Berührung 3. Ordnung eine invariante Beziehung ist.

In derselben Weise folgt, dass keine besondere Berührungstransformation 4., 5. $\cdot\cdot$ Ordnung existirt. Es muss aber, wie oben bewiesen wurde, eine jede eindeutige Curventransformation eine Transformation von gleichnamigen Curvenstücken $(xyp \cdot\cdot p^k)$ $(XYP \cdot\cdot P^k)$, also entweder eine Berührungstransformation 1. oder 2. oder 3., 4. $\cdot\cdot\cdot$ Ordnung sein. Also schliesslich: *eine jede eindeutige Transformation der Curven einer Ebene muss eine Lie'sche Berührungstransformation sein.*

§ 4.

Ueber Transformationen von Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, M_n, eines Raumes von $n+1$ Dimensionen.

7. Erstens bemerke ich, dass, wenn eine Fläche, eine M_n, mit zwei einander unendlich benachbarten Flächen in zwei unendlich benachbarten Punkten pp' eine Berührung der r^{ten} Ordnung eingehen soll, so müssen die beiden letzteren Flächen im Punkte p' eine Berührung von der $r-1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen. Und umgekehrt, wenn zwei unendlich benachbarte Flächen eine Berührung der $r-1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen, so ist es in unbegrenzt vielen Weisen möglich, Flächen zu construiren, die mit denselben in der Nähe des Berührungspunktes eine Berührung der r^{ten} Ordnung eingehen. Eine jede Flächentrans-

formation, die Flächen, welche mit einander eine Berührung der 2. Ordnung eingehen, in ebensolche überführt, wird daher je zwei unendlich benachbarte mit einander eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Flächen in zwei derartige Flächen verwandeln; und aus dem nämlichen Grunde muss eine Transformation, bei welcher Berührung 3. Ordnung invariant bleibt, je zwei unendlich benachbarte Flächen, die eine Berührung der 2. Ordnung besitzen, in zwei unendlich benachbarte ebenfalls eine Berührung der 2. Ordnung besitzende Flächen verwandeln. Durch Wiederholung des in der vorangehenden Nummer geführten Raisonnements, — durch Construction einer Fläche C, die mit zwei beliebigen einander benachbarten in einem Punkte eine Berührung der 1. Ordnung besitzenden Flächen $C'\,C''$ in dem Berührungspunkte benachbarten Punkten eine Berührung der 2. Ordnung eingeht und die selbst diesem Flächenpaare $C'C''$ unendlich benachbart ist, — sieht man, dass auch diese Transformation je zwei unendlich benachbarte einander berührende Flächen in zwei Flächen von genau derselben Eigenschaft verwandeln muss. U. s. w. So dass schliesslich eine jede Flächentransformation, für welche Berührung gewisser Ordnung erhalten bleibt, von der Eigenschaft sein muss, dass sie je zwei unendlich benachbarte eine Berührung der 1. Ordnung besitzende Flächen in ähnliche Flächen umformt. Nun muss eine jede eindeutige Flächentransformation eine Transformation von gleichnamigen Flächenstücken $(z\,x_k p_k p_{ki}\cdots)$ $(Z\,X_k\,P_k\,P_{ki}\cdots)$, für eine jede derselben also Berührung gewisser Ordnung eine invariante Beziehung sein. Darum, *eine jede eindeutige Flächentransformation muss eine solche Transformation sein, die Berührung 1. Ordnung zweier unendlich benachbarter Flächen invariant lässt.*

8. Betrachten wir ein $n+2$-faches Flächensystem, etwa:

$$f(z x_1 \cdots x_n\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+2}) = 0\,; \tag{9}$$

die Bedingungsgleichung dafür, dass zwei den Parametern λ $\lambda + d\lambda$ entsprechende Flächen sich berühren, wird durch Elimination von $z\,x\,p$ aus den folgenden $2n+2$ Gleichungen erhalten:

$$\left\{\begin{array}{c} f = 0\,, \quad f'(x_k) + p_k f'(z) = 0\,, \\ \sum \frac{df}{d\lambda} d\lambda = 0, \quad \sum \frac{df'(x_k)}{d\lambda} d\lambda + p_k \sum \frac{df'(z)}{d\lambda} d\lambda = 0, \\ (k = 1\ 2 \cdots n)\,, \end{array}\right. \tag{10}$$

die eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\varphi(\lambda\, d\lambda) = 0 \tag{11}$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung geben.

Fasst man $z\,x$ als willkürliche Constanten, $\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_{n+2}$ als Punktcoordinaten eines Raumes R_{n+2} auf, so stellt in diesem Raume die Gleichung (11) ein System von elementaren Kegeln und in demselben Raume die Gleichung (9) ein solches $n+1$-faches System von M_{n+1} dar, deren jede (wegen der Gleichungen (10)) in jedem ihrer Punkte von ∞^{n-1} benachbarten M_{n+1} nach einer Mannigfaltigkeit einer Dimension geschnitten wird, deren Linienelemente Strahlen von elementaren Kegeln (11) ausmachen. In Folge hiervon werden die ∞^n durch einen und denselben Punkt (λ) hindurchgehenden Mannigfaltigkeiten (9), vermittelst ihrer Flächenelemente in diesem Punkte, einen Kegel (11) erzeugen. Sei also $\Phi=0$ die partielle Gleichung 1. Ordnung, deren charakteristische Kegel (oder elementare Complexkegel) durch die Gleichung (11) vorgestellt sind, so erkennen wir, *dass ein jedes Flächensystem* (9), *für welches* $\varphi=0$ *eine Berührungsbedingung ist, eine vollständige Lösung mit* $n+1$ *willkürlichen Constanten* $z\,x_1\cdots x_n$ *der partiellen Gleichung* $\Phi=0$ *bildet.*

Wenn daher die Flächen zweier $n+2$-facher Flächensysteme:

$$(12)\qquad f(z x_1\cdots x_n\;\lambda_1\cdots\lambda_{n+2})=0\,,\qquad \varphi(z x_1\cdots x_n\;\lambda_1\cdots\lambda_{n+2})=0$$

in der Art einander zugeordnet sind, dass je zweien Flächen $f(\lambda^{(1)})=0$, $f(\lambda^{(1)}+d\lambda)=0$, die sich berühren, zwei ebenfalls sich berührende Flächen $\psi(\lambda^{(1)})=0$, $\psi(\lambda^{(1)}+d\lambda)=0$ entsprechen, so muss jede der beiden Gleichungen, wenn z,x als Constanten, die λ als Variabeln interpretirt werden, eine vollständige Lösung einer und derselben partiellen Differentialgleichung $\Phi=0$ sein. Hierbei werden die Parameter λ derjenigen ∞^1 Flächen irgend einer der Lösungen, die sich in einem Punkte berühren, die also ein gemeinsames Werthesystem $(z\,x\,p)$ besitzen, im Raume R_{n+2} Coordinaten für die Punkte einer Charakteristik von $\Phi=0$, und umgekehrt. So dass die eben beschriebenen Flächensysteme (12), auf Grund der erwähnten gegenseitigen Beziehung derselben, in demjenigen Zusammenhange mit einander stehen müssen, dass, wenn ∞^1 Flächen des einen Systems in einem Punkte sich berühren, die entsprechenden Flächen des anderen Systems ebenfalls in einem Punkte sich berühren. *Desswegen muss das eine Flächensystem aus dem anderen durch eine Lie'sche Berührungstransformation hergeleitet werden können.*

Also, nach dem in der vorigen Nummer Auseinandergesetzten, *eine jede eindeutige Flächentransformation muss eine Lie'sche Berührungstransformation sein.*

9. Von $n+k$-fach unendlich vielen Flächen

$$(13)\qquad f(z x_1\cdots x_n\;\lambda_1\cdots\lambda_{n+k})=0$$

giebt es ∞^{k-1}, die ein gegebenes Element $(z\,x\,p)$ enthalten. Fasst man $\lambda_1 \cdots \lambda_{n+k}$ als Punktcoordinaten eines Raumes R_{n+k} auf, so wird die Bedingungsgleichung für die Berührung zweier benachbarter Flächen (13) durch eine Differentialgleichung

$$\psi(\lambda\, d\lambda) = 0$$

dargestellt, die ein solches System von $k-1$, in Bezug auf π homogenen, Gleichungen 1. Ordnung in R_{n+k}:

$$(14)\qquad \begin{cases} \Psi_i(\lambda_1 \cdots \lambda_{n+k}\ \pi_1 \cdots \pi_{n+k}) = 0\,, \\ \qquad (i = 1\, 2 \cdots k-1) \end{cases}$$

begründet, das eine gemeinsame Lösung mit $n+1$ willkürlichen Constanten gestattet. *Die Gleichung $f = 0$, — wo $z\,x$ als willkürliche Constanten fungiren, — sowie ein jedes System von ∞^{n+k} Mannigfaltigkeiten M_n im Raume R_{n+1}, für welches $\psi = 0$ die Berührungsbedingung ausmacht, bildet eine solche gemeinsame Lösung.*

Es wird hierdurch eine Beziehung zwischen dem Raume R_{n+1} und dem von den Elementen $(\lambda\,\pi)$ des Gleichungssystems (14) eingenommenen Raume begründet. Später werde ich hierauf wieder zurückkommen.

10. *Corollar des Satzes der 8. Nummer.* — Von zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung des Raumes R_{n+1}, von denen bekannt ist, erstens, dass jede derselben ein k-faches System von Integral-M_n zulässt ($k > n+2$) (k so gross, dass die Elemente $(z\,x_k\,p_k\,p_{kl})$ dieser Integrale alle Elemente der Differentialgleichungen werden), — und zweitens, dass sie nicht durch eine gewöhnliche Berührungstransformation aus einander hergeleitet werden können, gilt es, dass keine Transformation existirt, die alle Integral-M_n der beiden Gleichungen in der Art einander zuordnen, dass dabei Berührung 2. Ordnung erhalten bleibt. Eine solche Transformation würde nämlich je zwei unendlich benachbarte sich berührende Integrale des einen der k-fachen Systeme in zwei ähnliche Integrale eines anderen überführen, und wäre somit, nach der 8. Nummer, eine gewöhnliche Berührungstransformation.

11. Beiläufig will ich auf Folgendes aufmerksam machen. Dass in dem Raume mit drei Dimensionen, dem gewöhnlichen Punktraume, keine besondere Transformation stattfindet, wobei Berührung 2. Ordnung eine invariante Beziehung hat, lässt sich analytisch so ausdrücken: Es giebt kein Gleichungspaar:

$$\begin{aligned} &F(z\,x\,y\,p\,q\,Z\,X\,Y\,P\,Q) = 0\,, \\ &\Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0\,, \end{aligned}$$

das in Bezug sowohl auf $z \cdots q$ als $Z \cdots Q$ *fünffach* unendlich ist, und dessen Gleichungen sowohl hinsichtlich $z \cdots q$ als $Z \cdots Q$ als

Variabeln einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen. (Vgl. Nr. 4.)

Zwar giebt es unbegrenzt viele Gleichungspaare der *letzteren* Eigenschaft, z. B.:

$$F\big(\varphi\,(zxypq)\ \psi\,(ZXYPQ)\big) = 0\,,$$
$$\Phi\,\big(\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\ \ \psi\ \psi_1\ \psi_2\ \psi_3\quad\big) = 0\,,$$

wo $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ bez. $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3$ Integrale der Gleichung $(\varphi,\,\chi) = 0$ bez. $(\psi,\,\Theta) = 0$ sind, aber dieselben begründen nicht eine Transformation aller Flächen des Raumes. So z. B. werden durch die genannten Gleichungen blos die Integrale der Gleichungen $\varphi = C$, $\psi = C$ erhalten.

§ 5.

Einiges von Transformationen partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung.

12. Aus der 8. Nummer *folgt, dass eine jede partielle* Gleichung $\Phi = 0$ erster Ordnung des Raumes R_{n+1}, deren charakteristische Kegel durch eine Gleichung $\varphi(\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}\ d\lambda_1 \cdots d\lambda_{n+1}) = 0$ dargestellt sind, vermittelst irgend einer vollständigen Lösung $f(zx_1 \cdots x_{n-1}\ \lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}) = 0$ auf den Raum $R_n(zx_1 \cdots x_{n-1})$ abzubilden ist. Einem jeden Flächenelemente dieses Raumes entspricht eine Charakteristik von $\Phi = 0$, einer jeden Fläche, M_{n-1} des R_n*), eine Integral-M_n von $\Phi = 0$, insbesondere den ∞^{n+1} Flächen $f = 0$ die Conoide von $\Phi = 0$, d. i. die Integrale, erzeugt von Charakteristiken, die durch einen und denselben Punkt hindurchgehen.

In Folge dieser Abbildung der partiellen Differentialgleichung $\Phi = 0$ auf R_n muss die allgemeinste Transformation dieser Gleichung in sich selbst, die so beschaffen ist, dass sie Integrale in Integrale überführt, aus der allgemeinsten Flächentransformation des R_n zu entwickeln sein. Nun ist letztere Transformation, wenn sie einer Fläche immer eine Fläche (nicht ∞ Flächen) zuordnet, nothwendig eine Lie'sche Berührungstransformation. *Dem entsprechend erhalten wir eine Transformation, welche die Charakteristiken der partiellen Gleichung $\Phi = 0$ mit einander vertauscht, als die allgemeinste Transformation, die ein Integral der Gleichung wiederum in ein Integral (nicht ∞ Integrale) überführt.*

Zwei partielle Gleichungen 1. Ordnung $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, deren charakteristische Kegel jeder durch eine Gleichung dargestellt sind, beziehen wir auf einen und denselben Raum R_n und dadurch auf einander.

---

*) Sowie einer jeden Mannigfaltigkeit niederer Dimensionen, als Inbegriff von ∞^{n-1} Flächenelementen (zxp) betrachtet.

Die allgemeinste Transformation, die ein Integral der einen Gleichung in ein Integral der anderen überführt, ist eine solche, die die Charakteristiken von $\Phi = 0$ mit denjenigen von $\Psi = 0$ vertauscht. Sie ist das Bild der Berührungstransformation des R_n.

Ich hatte bei meiner früheren Darstellung diese Transformationen als Lie'sche Berührungstransformationen des Raumes (λ) bezeichnet, deswegen, weil eine jede derselben durch eine Gleichung

$$F(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}\, \Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{n+1}) = 0,$$

die die Zuordnung von Conoiden*) der einen Gleichung und Integralen anderer Art der anderen Gleichung bestimmt, ausgedrückt werden könnte. Eine solche Transformation**) umfasst indess nur die Flächenelemente $(\lambda \pi)$ der Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, *keineswegs alle Flächenelemente des R_{n+1}, des Raumes (λ)*. Transformationen, die alle Elemente des R_{n+1} anbetreffen und die die Integral-M_n von $\Phi = 0$ in diejenigen von $\Psi = 0$ umformen, sind folgenderweise analytisch zu formuliren.

Statt $\lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}$, $\Lambda_1 \cdots \Lambda_{n+1}$ als Coordinaten der Punkte zweier Gebiete von R_{n+1} schreibe ich $z x_1 \cdots x_n$, $z' x_1' \cdots x_n'$; weiter nehme ich an, dass $\Phi_i\ \Psi_i$ so bestimmt seien, dass ein jedes der beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{llll}
X_1 = \Phi & (z x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n), & X_1 = \Psi & (z' x_1' \cdots x_n'\, p_1' \cdots p_n'),\\
X_2 = \Phi_1 & (\qquad\qquad), & X_2 = \Psi_1 & (\qquad\qquad),\\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
X_n = \Phi_{n-1} & (\qquad\qquad), & X_n = \Psi_{n-1} & (\qquad\qquad),\\
Z = \Phi_n & (\qquad\qquad); & Z = \Psi_n & (\qquad\qquad);\\
P_1 = \Phi_{n+1} & (\qquad\qquad), & P_1 = \Psi_{n+1} & (\qquad\qquad),\\
P_2 = \Phi_{n+2} & (\qquad\qquad), & P_2 = \Psi_{n+2} & (\qquad\qquad),\\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
P_n = \Phi_{2n} & (\qquad\qquad), & P_n = \Psi_{2n} & (\qquad\qquad),
\end{array}$$

eine Berührungstransformation des Raumes R_{n+1} begründet. — Die Gleichung $\Phi = 0$ bez. $\Psi = 0$ wird nun, in der oben genannten Weise, durch folgende Gleichungen auf den Raum $R_n : X_1 = 0$ abgebildet:

$$X_2 = \Phi_1 \cdots X_n = \Phi_{n-1}\ Z = \Phi_n\ P_2 = \Phi_{n+2} \cdots P_n = \Phi_{2n},$$

bez.

$$X_2 = \Psi_1 \cdots X_n = \Psi_{n-1}\ Z = \Psi_n\ P_2 = \Psi_{n+2} \cdots P_n = \Psi_{2n}.$$

---

*) Als Punkte λ aufgefasst.

**) Einige von Lie über diesen Theil meines früheren Aufsatzes gefällte Bemerkungen haben mich dazu veranlasst, die folgenden Entwickelungen dieser Nummer zu geben.

Und die fragliche Transformation von $\Phi = 0$ an $\Psi = 0$ ist also der Form:

$$(a) \qquad \begin{cases} \Phi_1 \quad = \Psi_1 \quad \cdots \Phi_n \; = \Psi_n \,, \\ \Phi_{n+2} = \Psi_{n+2} \cdots \Phi_{2n} = \Psi_{2n} \,, \end{cases}$$

(b) eine arbitr. Function von $(z x_1 \cdots x_n \, p_1 \cdots p_n ; \; z' x'_1 \cdots x'_n \, p'_1 \cdots p'_n) = 0$,

(c) sammt einer Gleichung zwischen Φ und Ψ, die, wenn Φ gleich Null gesetzt wird, Ψ verschwinden lässt.

Die Zahl der Gleichungen ist $2n+1$ und durch dieselben werden somit $z x_1 \cdots x_n \, p_1 \cdots p_n$ in $z' x'_1 \cdots x'_n \, p'_1 \cdots p'_n$ ausgedrückt.

*Dies ist im Allgemeinen keine Flächentransformation, keine Lie'sche Berührungstransformation des Raumes R_{n+1}**). Wir sehen dies am einfachsten ein, indem wir für die Gleichung (b) schreiben:

$$\Phi_{n+1} = W(z' x_1' \cdots x_n' \, p_1' \cdots p_n') \,,$$

wo (Ψ_1, W) von Null verschieden ist, aber (Φ_1, Φ_{n+1}) gleich Null. Eine Berührungstransformation würde zwei in Involution liegende Functionen Φ_1, Φ_{n+1} in zwei ähnliche Functionen verwandeln, also keineswegs in Ψ_1, W.

Für die Gleichung (c) schreiben wir:

$$\Phi = \Psi,$$

und sehen daraus, *dass eine Schaar von partiellen Gleichungen $\Phi = C$ in eine Schaar von Gleichungen $\Psi = C$ durch Transformationen übergeführt werden könne, die keine Berührungstransformationen des R_{n+1} sind, aber doch ein jedes Integral jeder Gleichung $\Phi = C$ in ein Integral der entsprechenden $\Psi = C$ verwandeln.*

13. Die mehrdeutigen Flächentransformationen des R_n sind die Bilder aller der anderen Transformationen, die in der Weise eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung des R_{n+1} in sich selbst resp. eine andere Gleichung derselben Ordnung desselben Raumes überführen, dass aus Integral-M_n immer wiederum Integral-M_n werden. — Eine jede solche Transformation, die zwei Gleichungen 1. Ordnung $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ in einander überführt, lässt einem Integrale der einen Gleichung, z. B. $\Phi = 0$, ein Integral der anderen Gleichung, $\Psi = 0$, dagegen einem Integrale der letzteren unendlich viele Integrale der ersteren entsprechen.

Vorstehendes überträgt sich leichtverständlich auf partielle Gleichungen 1. Ordnung jeder Art des R_{n+1}, da irgend zwei Gleichungen

*) Vgl. hierzu einen Ausspruch von Lie in seiner Arbeit: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen". Math. Annalen Bd. VIII, S. 223.

1. Ordnung stets durch eine Berührungstransformation in einander übergeführt werden können.

---

14. Ein System von k partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $n+1$ Variabeln, die eine gemeinsame Lösung mit $n-k+1$ *) willkürlichen Constanten gestatten, wird nach der 9. Nummer durch irgend eine gemeinsame vollständige Lösung:

$$f(zx_1 \cdots x_{n-k}\, \lambda_1 \cdots \lambda_{n+1}) = 0$$

auf den Raum $(zx_1 \cdots x_{n-k})$ von $n-k+1$ Dimensionen in der Art zu beziehen sein, dass einem jeden Flächenelemente dieses R_{n-k+1} eine charakteristische M_k des Gleichungssystems, einer jeden Fläche des R_{n-k+1} (M_{n-k} dieses Raumes) eine Integral-M_n des Systems entspricht. Zwei Gleichungssysteme, deren jedes aus k Gleichungen besteht und jedes ∞^{n-k+1} Integral-M_n besitzt, können auf den Raum R_{n-k+1} abgebildet und damit auf einander selbst bezogen werden. Die allgemeinste Transformation des einen Gleichungssystems in das andere, die eine jede Integral-M_n des einen Systems in eine Integral-M_n des anderen überführt, wird folglich das Bild der allgemeinsten eindeutigen Flächentransformation des Raumes R_{n-k+1} sein. Bei einer jeden derartigen Transformation der Gleichungssysteme in einander geht also eine jede charakteristische M_k des einen Systems in eine charakteristische M_k des anderen über.

15. In dieser Nummer soll insbesondere betrachtet werden ein System von vier partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit sieben Variabeln λ, das ∞^3 Integral-M_6, etwa

$$f(zxy\lambda_1 \cdots \lambda_7) = 0,$$

besitzt.

Dies Gleichungssystem werde auf den Raum R_3 abgebildet. Dabei wird dann einem jeden Flächenelemente $(zxypq)$ eine charakteristische M_4, einem jeden Elemente $(zxypqrst)$ eine charakteristische M_1, der Schnitt von einfach unendlich vielen benachbarten, durch einen und denselben Punkt λ hindurchgehenden charakteristischen M_4, entsprechen.

Einer jeden Fläche des R_3 entspricht eine Integral-M_6 und diese soll eine M_3 (etwa als Cuspidalmannigfaltigkeit) enthalten, welche aus ∞^2 charakteristischen M_1 besteht**).

---

*) $n > k$.

**) Durch jede M_2 kann eine Integral-M_6 gelegt werden, durch eine M_3 blos, wenn dieselbe von ∞^2 Streifen erzeugt ist, die einer charakteristischen M_4 angehören.

Werden aus den ∞^8 Elementen $(zxypqrst)$ des R_3 ∞^7 durch eine Gleichung $F(zxypqrst)=0$ ausgeschieden, so ist dies mit einem Ausscheiden von ∞^7 charakteristischen M_1 identisch. Das Auffinden von Integralflächen der partiellen Gleichung 2. Ordnung $F=0$ und das Auffinden derartiger Integral-M_3 des Gleichungssystems im R_7, deren jede von ∞^2 der ausgeschiedenen charakteristischen Streifen (M_1) erzeugt ist, sind folglich äquivalente Probleme.

§ 6.

Einiges von einer Classe mehrdeutiger Flächentransformationen des Raumes von drei Dimensionen.

16. Wie in der Einleitung gezeigt, ist durch irgend drei Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} X = F\ (zxypq), \\ Y = F_1(\qquad), \\ Z = F_2(\qquad) \end{cases}$$

eine Flächentransformation vollständig bestimmt. Sie wird eine eindeutige Transformation, falls, — bei Befriedigung der Bedingung, dass das Gleichungssystem

$$dz = p\,dx + q\,dy,\quad dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy, \cdots \text{in inf.}$$

in das ähnliche

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,\ dP = R\,dX + S\,dY,$$
$$dQ = S\,dX + T\,dY, \cdots \text{in inf.}$$

transformirt werden soll, — die Grössen P, Q ebenfalls nur $zxypq$, nicht die höheren Differentialquotienten enthalten; andernfalls, wenn man durch die erwähnte Rechnung bekommt:

$$P = \Phi_1\ (zxypqrst),$$
$$Q = \Phi_2\ (\qquad);$$

so ist die Transformation (15) eine mehrdeutige Flächentransformation.

Diese Transformation ordnet jedem Punkte (XYZ) eine Schaar von ∞^2 Elementen $(zxypq)$, einem jeden Flächenelemente $(ZXYPQ)$ auf einem jeden der dem Punkte (XYZ) zugehörenden Elemente $(zxypq)$ eine Schaar von ∞^1 Werthesystemen (rst) zu. Eine jede Fläche des Gebiets (xyz) wird in eine Fläche des Gebiets (XYZ), eine jede Fläche des letzteren Gebiets in alle Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $f(FF_1F_2) = 0$ übergeführt.

Einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $\varphi(ZXYPQ) = 0$

entspricht eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die ein erstes Integral mit zwei willkürlichen Constanten $\lambda\,\mu$ besitzt:

$$f(FF_1F_2\lambda\mu) = 0\ ^{*)}.$$

Den linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung im Gebiete (XYZ) entsprechen partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im Gebiete (xyz), die in $r\,s\,t\;\; rt - s^2$ linear sind und die ein erstes Integral besitzen von der Form:

$f(FF_1F_2)$ gleich einer willkürlichen Function von $\varphi(FF_1F_2)$.

17. Besonders will ich, wegen ihrer Anwendung auf eine gewisse Classe partieller Gleichungen 2. Ordnung, auf die folgende Transformation aufmerksam machen:

$$(16)\qquad \begin{cases} X = x\,, \\ Y = y\,, \\ Z = q\,. \end{cases}$$

Die übrigen Gleichungen dieser Transformation, die in der angeführten Weise herzuleiten sind, werden:

$$(16')\qquad \begin{cases} P = s, \\ Q = t, \\ R = v, \quad \left(v = \dfrac{d^3 z}{dx^2\,dy},\quad w = \dfrac{d^3 z}{dx\,dy^2},\quad \varpi = \dfrac{d^3 z}{dy^3}\right) \\ S = w, \\ T = \varpi, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ich betrachte eine Gleichung 2. Ordnung im Gebiete (xyz), die von $z\,p$ frei ist, also die Form hat:

$$F(xyqrst) = 0,$$

oder, nach r aufgelöst:

$$(17)\qquad r = f(xyqst)\ ^{**)},$$

und bilde die entsprechende Figur des Gebietes (XYZ).

Durch Differentiation der Gleichung (17) in Bezug auf y bekommt man:

$$v = \frac{df}{dy} + t\,\frac{df}{dq} + w\,\frac{df}{ds} + \varpi\,\frac{df}{dt}\,,$$

---

*) Der Transformation (15) wird auch von P. du Bois-Reymond in dessen Arbeit: „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen" Leipzig 1864, S. 173 erwähnt.

**) In ganz derselben Art lässt sich die Gleichung:

$$r = f(xyqst) + z\varphi(x) + p\psi(x)$$

behandeln.

eine Gleichung, die im (XYZ) auf Grund der Gleichungen (16), (16') die folgende lineare zum Bilde hat:

$$R - S\frac{df}{dP} - T\frac{df}{dQ} = \frac{df}{dY} + Q\frac{df}{dZ}\,. \tag{18}$$

Dieselbe wird dann das Bild aller Gleichungen

$$r = f(xyqst) + \text{eine arbiträre } F(x).$$

Einer jeden Fläche des Raumes (XYZ) entsprechen die Integrale einer Gleichung

$$q = F(xy)\,,$$

deren Lösung von der Form ist:

$$z = \varphi(xy) + \Psi(x), \tag{19}$$

wo Ψ eine willkürliche Function bedeutet.

Weil einem jeden Integrale der Gleichung (18) u. A. Integrale der Gleichung (17) entsprechen müssen, so mag, wenn $Z = F(XY)$ eine Integralfläche von (18) bedeutet, die willkürliche Function Ψ in (19) so bestimmt werden können, dass letztere Gleichung ein Integral von (17) darstellt. Und die zur Bestimmung von Ψ dienende Gleichung giebt*) Ψ gleich einer determinirten Function von x: $F(x)$, vermehrt um $cx + c'$, wo c, c' ganz willkürlich sind.

Das Problem der Integration der Gleichung 2. Ordnung (17) *ist hiermit auf das Problem der Integration der linearen Gleichung 2. Ordnung* (18) *zurückgeführt.*

Durch die angewandte Transformation entsprechen irgend zwei Integralen der Gleichung (17), die in einem Punkte eine Berührung der n^{ten} Ordnung eingehen, zwei Integrale der Gleichung (18), die in einem Punkte eine Berührung der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen, und demgemäss werden Charakteristiken der Gleichung (17) Charakteristiken der Gleichung (18) entsprechen.

Das hier Auseinandergesetzte bildet eine Erweiterung der bekannten Legendre'schen Theorie**) der Gleichungen

$$F(rst) = 0\text{***}),$$

die $xyzpq$ nicht enthalten. — Um die Legendre'sche Form der entsprechenden linearen Gleichung (18) zu erhalten, würde man sich statt der Transformation (16) einer aus ihr durch eine reciproke Transformation

---

*) Durch eine zweimalige Quadratur.

**) Vgl. Boole: Differential-Equations, Cambridge 1859, p. 369.

***) Ich bin neuerdings durch Lie auf diese Legendre'sche Theorie aufmerksam gemacht.

$$X' = P, \quad Y' = Q, \quad Z' = PX + QY - Z$$

herzuleitenden:

$$X' = s, \quad Y' = t, \quad Z' = sx + ty - q$$

zu bedienen haben.

Die fragliche Gleichung wird dann

$$R\frac{df}{dY} - S\frac{df}{dX} - T = 0. -$$

Die vorangehende Theorie bleibt natürlich im Wesentlichen unverändert, wenn auf die zu Grunde gelegenen Gleichungen (16), (17) eine beliebige Berührungstransformation angewendet wird.

Helsingborg, 18. Juli 1875.