Bulletin de la S. M. F.

Elie Cartan

La notion d’orientation dans les différentes géométries

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 47-70.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__47_0>

LA NOTION D'ORIENTATION DANS LES DIFFÉRENTES GÉOMÉTRIES ;

Par M. ÉLIE CARTAN (*).

Le terme d' « orientation » intervient souvent en géométrie et dans des sens assez variés. En géométrie élémentaire, la notion de droite orientée, de plan orienté, est banale. On oriente aussi une courbe, une surface; on parle de surfaces orientables et de surfaces non orientables; mais là on sort à proprement parler du domaine de la géométrie élémentaire pour entrer dans celui de la topologie.

Je voudrais de ces différentes acceptions du mot « orientation » envisager un aspect particulier et en dégager ce qu'il a d'essentiel. Sous cet aspect, la nature topologique du terme « orientation » passe à l'arrière-plan et la notion de groupe vient jouer un rôle prépondérant. J'illustrerai les considérations qui vont suivre de quelques exemples empruntés à des géométries bien connues, la géométrie élémentaire réelle ou complexe, et la géométrie projective, réelle ou complexe.

I. — Généralités.

1. Plaçons-nous en géométrie élémentaire dans le plan ou dans l'espace. Cette géométrie a pour objet l'étude des propriétés des figures qui se conservent par un certain groupe d'opérations qu'on appelle déplacements. Ces déplacements forment une famille continue ou *connexe*, qu'on peut du reste compléter par une autre famille d'opérations, non liées aux premières d'une manière continue, et qui s'obtiennent en combinant les déplacements proprement dits avec une symétrie par rapport à une droite en

(*) Conférence faite à la Société mathématique de France, le 27 février 1941.

géométrie plane, par rapport à un point ou un plan en géométrie dans l'espace. Mais nous ferons jouer, dans ce qui suit, aux déplacements proprement dits le rôle prépondérant. Nous conviendrons de dire comme d'habitude que deux figures qui peuvent se déduire l'une de l'autre par un déplacement sont directement égales.

2. Une famille de figures sera dite former un *corps* si elle jouit de la double propriété suivante :

1° Tout déplacement transforme une figure de la famille en une autre figure de la famille.

2° Il existe toujours un déplacement au moins, transformant une figure quelconque de la famille en toute autre figure de la famille.

Cette seconde propriété exprime, dans le langage de la théorie des groupes, que le groupe des déplacements transforme *transitivement* entre elles les figures de la famille.

Tout corps est déterminé par une quelconque de ses figures F_0; il est alors formé de la figure F_0 et de ses transformées par les différents déplacements. Toute figure F_0 détermine un corps. La famille des points, la famille des droites, la famille des plans constituent des corps; la famille des sphères ne constitue pas un corps; un déplacement quelconque transforme bien une sphère donnée en une autre sphère, mais cette autre sphère a le même rayon que la première.

C'est uniquement de l'orientation des figures d'un corps que nous allons nous occuper.

II. — Le théorème fondamental.

3. Partons de la notion bien connue de *droite orientée*. Les droites en géométrie élémentaire constituent un corps. Une droite orientée est une figure distincte de la droite, plus riche que la droite en propriétés géométriques. Les remarques suivantes sont immédiates :

1° *On peut passer, par continuité, d'une droite* D *orientée dans un certain sens à la même droite* D *orientée en sens opposé.*

2° *Dans ce passage on est obligé de prendre comme intermédiaires des droites distinctes de* D.

Cette seconde remarque est presque triviale et exprime simplement le fait que les deux droites orientées auxquelles donne naissance la droite D sont deux êtres géométriques essentiellement distincts.

La première propriété, en tenant compte du fait que les droites forment un corps, exprime que les droites orientées forment elles-mêmes un corps. En effet, soient D_1 et D_2 les deux droites orientées auxquelles donne naissance la droite D. Considérons la suite continue des droites orientées qui fait passer de D_1 à D_2 et la suite continue des droites non orientées correspondantes; à chaque instant on peut passer de D à une droite de la suite par un déplacement; il existe donc un déplacement continu faisant passer de D_1 à D_2. Si alors D_1 et D'_1 sont deux droites orientées quelconques et si l'on considère l'un des déplacements qui amènent la droite D sur la droite D', ou bien ce déplacement amène D_1 sur D'_1, ou bien il amène D_1 sur D'_2, mais, dans ce dernier cas, un déplacement ultérieur amène D'_2 sur D'_1. Les droites orientées sont donc toutes directement égales.

Nous dirons que les figures d'un corps sont *géométriquement orientables* si l'on peut faire correspondre à chaque figure F de ce corps deux ou plusieurs figures distinctes F_1, F_2, ..., telles que ces nouvelles figures satisfassent aux conditions 1° et 2°. Elles forment alors un nouveau corps. Le corps des droites en géométrie élémentaire est géométriquement orientable.

4. Comment peut-on reconnaître que les figures d'un corps sont géométriquement orientables? Il est facile d'indiquer une condition nécessaire. Considérons le *groupe de stabilité* d'une figure F du corps : c'est le groupe g formé par l'ensemble des déplacements proprement dits qui laissent invariante cette figure.

Deux cas sont possibles suivant que le groupe de stabilité g est connexe ou n'est pas connexe. Dans le premier cas les figures F ne peuvent être géométriquement orientées. Supposons en effet qu'elles le soient et soient F_1, F_2 deux figures orientées provenant de la figure F du corps. Il existerait un déplacement amenant en coïncidence F_1 et F_2; ce déplacement, laissant la figure F invariante, ferait partie du groupe de stabilité g de F; comme ce groupe est connexe, ce déplacement pourrait être relié au déplacement nul par une suite continue de déplacements appartenant à g et par suite laissant tous fixe la figure F. Mais cela est contraire à la condition 2° énoncée plus haut. Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que les figures d'un corps soient géométriquement orientables, il est nécessaire que le groupe de stabilité d'une figure de ce corps ne soit pas connexe.*

Comme vérification remarquons que le groupe de stabilité d'une droite D en géométrie élémentaire dans l'espace se décompose en deux familles distinctes de déplacements :

1° les translations parallèles à D, les rotations autour de D et les déplacements hélicoïdaux d'axe D; ces déplacements forment un groupe connexe g_0;

2° les rotations de 180° autour d'une droite quelconque perpendiculaire à D; ils peuvent tous s'obtenir en combinant les déplacements de g_0 avec une rotation de 180° autour d'une perpendiculaire particulière à D; la famille g_1 de déplacements qu'ils constituent n'est pas un groupe.

5. Le théorème précédent admet une réciproque. La démonstration sera plus facile à comprendre si nous reprenons l'exemple des droites orientées. Attachons à une droite particulière D_0 de l'espace un trièdre trirectangle direct particulier T_0, dont l'axe des x soit porté par la droite D_0, et appliquons à ce trièdre T_0 les différents déplacements du groupe g_0 qui forme la première famille du groupe de stabilité de D_0; nous obtenons une famille $\mathcal{T}_1$ de trièdres qui tous ont leurs axes des x portés par D_0 et *dirigés dans le même sens*. Si nous appliquons maintenant à T_0 les déplacements de la seconde famille g_1 qui, avec g_0, constitue le

groupe de stabilité de D_0, nous obtenons une seconde famille $\mathcal{T}_2$ de trièdres qui tous ont leurs axes des x portés par D_0 et dirigés dans le même sens, inverse du sens relatif à la famille $\mathcal{T}_1$. Si l'on prend maintenant une droite quelconque D, on associera à cette droite les deux familles de trièdres qui se déduisent des familles $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ par un des déplacements qui amènent D_0 en D. Les figures formés par les diverses familles de trièdres ainsi obtenues forment un corps et chacune d'elles peut être assimilé à une droite orientée, attendu qu'elle est formée de tous les trièdres tri-rectangles directs dont l'axe des x est porté par une droite donnée dans un sens déterminé de cette droite. Les considérations précédentes mettent en évidence la relation intime qui existe entre la décomposition du groupe de stabilité de la droite en deux familles connexes distinctes et la possibilité de dédoubler chaque droite en deux droites orientées.

6. On peut présenter les mêmes considérations, mais d'une manière plus abstraite, pour un corps quelconque ($\mathcal{C}$). Le groupe de stabilité g d'une figure particulière F_0 du corps est formé de plusieurs familles connexes distinctes g_0, g_1, ..., g_p, la première g_0 contenant le déplacement nul et formant par elle-même un groupe. Remarquons qu'on a symboliquement $g_i g_0 = g_0 g_i = g_i$, c'est-à-dire que le produit d'un déplacement de g_i par un déplacement de g_0 appartient à g_i : cela tient à ce que si l'on fait varier le déplacement de g_0 et le déplacement de g_i, on obtient une famille connexe de déplacements de g et cette famille, contenant tous les déplacements de g_i, ne peut qu'être identique à g_i.

Cela posé les différentes figures F du corps ($\mathcal{C}$) peuvent être représentées d'une manière abstraite par l'ensemble des déplacements qui amènent F_0 à coïncider avec F; on peut représenter cet ensemble (ou ce *complexe*) de déplacements par la notation Tg, où T désigne un des déplacements qui amènent F_0 en F : cela signifie que tout déplacement qui fait coïncider F_0 avec F peut être obtenu en effectuant d'abord un des déplacements de g, qui laisse fixe F_0, puis le déplacement particulier T qui amène F_0 en F. La notation précédente met en évidence la manière dont les figures F du corps sont transformées entre elles par un déplacement; car si l'on applique le déplacement T' à la figure représentée par le complexe Tg, on obtient la figure représentée par le complexe $T'(Tg)$ ou $(T'T)g$.

La caractérisation des figures du corps par des complexes Tg permet de voir que, sous certaines conditions qu'il est inutile de préciser et auxquelles doit satisfaire un sous-groupe donné g du groupe des déplacements, il existe un corps $(\mathcal{C})$ engendré par une figure F_0 invariante par g et dont les différentes figures sont définies d'une manière abstraite par les complexes Tg [1].

Revenons maintenant à notre problème. Nous supposons que le groupe g se décompose en p familles connexes distinctes g_0, $g_1, \ldots, g_{p-1}$ de déplacements. Le complexe Tg pourra se décomposer lui aussi en p complexes distincts Tg_0, Tg_1, $\ldots$, Tg_{p-1} dont chacun définit d'une manière abstraite une figure $(F)_1$, $(F)_2$, $\ldots$, $(F)_p$, et toutes ces figures forment un nouveau corps. La figure origine de ce corps, représentée par le complexe g_0, provient d'une des p orientations possibles de la figure F_0 et les p figures orientées, qui proviennent de la figure F du corps initial représentée par le complexe Tg, seront représentées par les complexes respectifs Tg_0, Tg_1, Tg_2, $\ldots$, Tg_{p-1}, ou encore

$$Tg_0, \quad T_1 g_0, \quad T_2 g_0, \quad T_{p-1} g_0,$$

en désignant respectivement par T_1, T_2, $\ldots$, T_{p-1} des déplacements particuliers pris respectivement dans les complexes Tg_1, Tg_2, $\ldots$, Tg_{p-1}.

On a ainsi défini d'une manière abstraite une *démultiplication* du corps $(\mathcal{C})$, chaque figure de $(\mathcal{C})$ donnant naissance à p nouvelles figures. Les figures du corps $(\mathcal{C})$ sont ainsi susceptibles de p orientations géométriques différentes. La définition concrète de ces orientations est plus ou moins intuitive, plus ou moins simple, plus ou moins facile, mais on en conçoit la possibilité. On peut toujours du reste orienter de p manières différentes la figure F_0 du corps dont le groupe de stabilité est g en attachant à cette figure tous les trièdres directs qui se déduisent d'un trièdre fixe T_0 par les différents déplacements de la famille g_0, de la famille g_1, $\ldots$,

---

[1] La possibilité de définition concrète de ces figures est liée à la nécessité pour le sous-groupe g_0 de satisfaire aux conditions auxquelles il vient d'être fait allusion, en particulier d'être *fermé* dans le groupe total des déplacements.

de la famille g_{p-1} ; il conviendra pour la simplicité de la représentation de choisir T_0 de manière que les p familles de trièdres obtenues soient en relation géométrique intuitive avec la figure F_0.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que les figures d'un corps soient géométriquement orientables, il est nécessaire et suffisant que le groupe de stabilité d'une figure du corps se décompose en plusieurs familles connexes de déplacements.*

7. Ce qui vient d'être dit pour les corps de la géométrie élémentaire est naturellement valable pour les corps de toute autre géométrie au sens de F. Klein, c'est-à-dire fondée sur un groupe G. Dans une telle géométrie nous pourrons dire encore que deux figures directement égales sont deux figures qui peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation du groupe G susceptible d'être reliée d'une manière continue à la transformation identique; toutes ces transformations, que nous pourrons encore appeler *déplacements*, engendrent un groupe connexe; c'est le plus grand sous-groupe connexe du groupe G. Le procédé d'orientation indiqué en géométrie élémentaire au moyen de familles de trièdres trirectangles pourra le plus souvent être généralisé en se servant de familles de repères [2].

III. — Exemples tirés de la géométrie euclidienne complexe.

8. Les déplacements de la géométrie euclidienne complexe à trois dimensions, rapportés à un trièdre trirectangle fixe, sont définis par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z + x_0,\\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + y_0,\\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + z_0,\end{aligned}\right.$$

où α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont les neuf cosinus directeurs de

(2) *Voir* É. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* (Paris, Gauthier-Villars, 1937).

trois directions rectangulaires avec un déterminant égal à 1; les x_0, y_0, z_0 sont des constantes.

Considérons le corps des droites complexes non isotropes (les droites isotropes forment un autre corps particulier). Ce corps est géométriquement orientable. Partons en effet de la droite particulière D_0 constituée par l'axe Oz. Le groupe de stabilité de D_0 est donné par les équations (1) où l'on fait $\gamma = \gamma' = x_0 = y_0 = 0$. On a ensuite

$$\gamma''^2 = 1, \qquad \alpha'' = \beta'' = 0, \qquad \text{avec} \quad \gamma''(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 1.$$

Deux cas sont possibles :

1° $\gamma'' = 1$, $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$, ce qui donne une première famille continue g_0 formant groupe;

2° $\gamma'' = -1$, $\alpha\beta' - \beta\alpha' = -1$, ce qui donne une seconde famille continue g_1.

Le corps des droites non isotropes est donc géométriquement orientable en géométrie élémentaire complexe. On peut s'en rendre compte analytiquement d'une manière simple en choisissant l'une des deux manières de définir la droite par ses cosinus directeurs. Géométriquement la définition de l'orientation est plus difficile car la droite complexe est une variété à deux dimensions réelles homéomorphe au plan de la géométrie élémentaire réelle, et l'orientation géométrique, dont nous avons démontré la possibilité, ne peut avoir aucun rapport avec l'orientation *topologique* qui consisterait à fixer un sens positif de rotation dans cette variété à deux dimensions que constitue la droite complexe. En effet une des transformations de g_1 qui, appliquée à la droite complexe D_0, change son orientation géométrique, est définie par les équations

$$x' = x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z;$$

or le nombre complexe z définit la position d'un point de D_0 et le changement de signe de z définit, dans le plan réel homéomorphe à la droite complexe, une rotation de 180° autour d'un de ses points, rotation qui n'altère pas l'*orientation topologique* qu'on peut donner à ce plan.

9. Nous avons supposé la droite D_0 non isotrope. Considérons maintenant le corps des droites isotropes. Soit Δ_0 l'une d'elles, par exemple la droite $x + iy = 0$, $z = 0$. Le groupe de stabilité de cette droite doit laisser invariant le plan isotrope $x + iy = 0$ qui contient la droite. Il est donc défini par des équations de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' + iy' &= a(x + iy), \\ z' &= bz + c(x + iy), \\ x' - iy' &= h(x - iy) + kz + l(x + iy) + p. \end{aligned} \right.$$

En exprimant que l'ensemble des termes du second degré en x, y, z dans l'expression de $x'^2 + y'^2 + z'^2$ est égal à $x^2 + y^2 + z^2$, on trouve

$$ah = 1, \qquad b^2 = 1, \qquad ak + 2bc = 0, \qquad c^2 + al = 0;$$

en exprimant d'autre part que le déterminant de la substitution effectuée sur $x + iy$, z, $x - iy$ (abstraction faite du terme constant p) est égal à un, on obtient

$$ahb = 1, \qquad \text{d'où} \quad b = 1.$$

On a donc

$$b = 1, \qquad h = \frac{1}{a}, \qquad k = -\frac{2c}{a}, \qquad l = -\frac{c^2}{a},$$

et comme a est un nombre complexe assujetti à la seule condition de ne pas être nul, les déplacements du groupe de stabilité de D_0 forment une seule famille connexe.

Les droites isotropes ne sont donc pas géométriquement orientables en géométrie euclidienne complexe. Il est évident que le procédé d'orientation intuitif fondé sur la considération des cosinus directeurs tombe ici en défaut, *mais cela seul ne suffirait pas à prouver l'impossibilité d'une orientation géométrique des droites isotropes.*

IV. — Exemples tirés de la géométrie projective.

10. Nous rappellerons d'abord quelques théorèmes sur le groupe des homographies réelles ou complexes d'un espace projectif à n dimensions. Dans un tel espace un point est représenté par

$n+1$ coordonnées homogènes non toutes nulles et une homographie par une substitution linéaire à déterminant non nul, ou plutôt par une infinité de telles substitutions qui se déduisent de l'une d'entre elles par multiplication de tous les coefficients par un facteur ρ non nul.

Dans le domaine complexe, nous avons le théorème suivant :

Les homographies de l'espace projectif complexe à un nombre quelconque de dimensions forment un groupe continu (connexe).

Ce théorème est facile à démontrer directement. Soient deux homographies

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k, \qquad x'_i = \sum_k b_{ik} x_k;$$

la substitution linéaire

$$x'_i = \sum_k (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_k,$$

où λ est une constante complexe, a son déterminant nul pour $n+1$ valeurs au plus de λ. Dans le plan de la variable complexe λ, on peut donc aller du point $\lambda = 0$ au point $\lambda = \infty$ par un chemin ne rencontrant aucune des valeurs critiques de λ : les deux homographies données sont ainsi reliées entre elles par une suite continue d'homographies.

11. Dans le domaine réel, les choses sont un peu moins simples. On démontre d'abord que le groupe des homographies réelles de l'espace projectif réel à n dimensions contient le même nombre de familles connexes que le groupe des homographies réelles qui reproduisent la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2$ à un facteur constant près ([3]). Ce groupe est, comme on le voit facilement, formé d'une seule famille connexe si n est pair ($n+1$ impair)

([3]) Ce dernier groupe est un sous-groupe clos maximum du premier; la propriété invoquée peut être liée à la théorie des espaces riemanniens symétriques. *Voir* É. Cartan, *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple* (*Ann. Éc. Norm.*, 44, 1927, p. 345-467).

et de deux familles connexes si n est impair ($n+1$ pair); celle de ces deux familles qui forme un groupe est définie par les substitutions linéaires orthogonales de déterminant 1 portant sur x_1, x_2, ..., x_{n+1}.

Théorème. — *Le groupe des homographies réelles directes (jouant ici le rôle du groupe des déplacements en géométrie élémentaire) est formé de toutes les homographies réelles si le nombre n des dimensions de l'espace est pair, des homographies de déterminant positif, si le nombre n des dimensions de l'espace est impair.* Nous parlerons, dans ce dernier cas, du groupe des homographies *directes* de l'espace.

A. *Les corps des variétés planes en géométrie projective.*

12. Les corps les plus simples en géométrie projective sont les corps des points, des droites, des plans, etc., des variétés linéaires à $p < n$ dimensions. Cherchons ceux de ces corps qui sont géométriquement orientables.

1° *Géométrie projective complexe.* — Prenons par exemple le corps des variétés planes à $n-p$ dimensions et considérons pour fixer les idées la variété plane $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$. Le groupe de stabilité de cette variété est défini par les homographies

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x'_1 \;\; = a_{11} \;\;\; x_1 + \ldots + a_{1p}\, x_p, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x'_p \;\; = a_{p1} \;\;\; x_1 + \ldots + a_{pp}\, x_p, \\
x'_{p+1} = a_{p+1,1}\, x_1 + \ldots + a_{p+1,p}\, x_p + a_{p+1,p+1}\, x_{p+1} + \ldots + a_{p+1,n+1}\, x_{n+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x'_{n+1} = a_{n+1,1}\, x_1 + \ldots + a_{n+1,p}\, x_p + a_{n+1,p+1}\, x_{p+1} + \ldots + a_{n+1,n+1}\, x_{n+1}.
\end{array}
\right.
$$

Il est très facile de voir que toutes ces homographies forment une seule famille connexe, d'où la conclusion suivante :

Théorème. — *Le point, la droite, le plan, etc., ne sont pas géométriquement orientables en géométrie projective complexe.*

On remarquera, en ce qui concerne l'orientabilité géométrique de la droite, le rôle important joué par la nature du groupe de la géométrie considérée; la droite complexe est orientable en géométrie euclidienne complexe et ne l'est pas en géométrie projective complexe.

2° *Géométrie projective réelle.* — Le groupe de stabilité de la variété plane réelle $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ est donné par les formules (3) où les coefficients sont réels.

a. Supposons le nombre de dimensions n de l'espace pair ($n+1$ impair). — Des deux entiers p et $n+1-p$ l'un est pair et l'autre impair; supposons par exemple p impair; alors la substitution linéaire que les formules (3) entraînent sur $x_1, x_2, \ldots, x_p$ peut toujours, en changeant au besoin de signe tous les coefficients de (3), être supposée de déterminant positif, et toutes ces substitutions peuvent être reliées l'une à l'autre d'une manière continue. Quant au déterminant des coefficients de $x_{p+1}, \ldots, x_{n+1}$ dans les expressions de $x'_{p+1}, \ldots, x'_{n+1}$, déterminant de degré pair, il peut être soit positif, soit négatif, et les deux cas sont irréductibles l'un à l'autre; les homographies correspondant à chacun de ces cas forment une famille connexe de sorte que le groupe de stabilité contient deux familles connexes distinctes, d'où :

Théorème. — *En géométrie projective réelle d'un espace projectif à un nombre pair de dimensions, le point, la droite, le plan, etc., sont géométriquement orientables.*

b. Supposons maintenant le nombre n de dimensions de l'espace impair ($n+1$ pair). — Les deux entiers p et $n+1-p$ sont de même parité. Si ces entiers sont impairs, des deux déterminants, de degrés p et $n+1-p$, dont il est question dans le raisonnement ci-dessus, l'un peut toujours être rendu positif et l'autre est alors nécessairement positif si l'on veut que le déterminant de l'homographie (3) soit positif, condition nécessaire pour que cette homographie soit directe; le groupe de stabilité est donc connexe.

Supposons maintenant les deux entiers p et $n+1-p$ pairs. Si alors l'homographie (3) est directe, c'est que les deux déterminants de degrés p et $n+1-p$ dont il a été question sont ou bien tous les deux positifs ou bien tous les deux négatifs, d'où deux familles connexes distinctes pour le groupe de stabilité.

Théorème. — *Dans l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions, la droite, la variété plane à 3 dimensions, à 5 dimensions, etc., sont géométriquement orientables; le point, le plan à 2 dimensions, etc., ne sont pas géométriquement orientables.*

13. *Remarque.* — On peut faire, au sujet des résultats obtenus pour l'espace projectif réel à un nombre pair de dimensions, une remarque intéressante : dans un tel espace le point est *géométriquement* orientable, mais l'espace n'est pas *topologiquement* orientable. La première propriété est une conséquence de la seconde. En effet, considérons le cas le plus simple, celui du plan : dire que le plan projectif n'est pas topologiquement orientable, c'est dire que si l'on fixe en un point donné A_0 du plan un sens de rotation positif autour de ce point et si l'on transporte par continuité ce sens positif de rotation aux différents points d'une ligne continue, il est possible de trouver une ligne continue fermée partant de A_0 et y revenant telle que le sens positif de rotation qu'on aura été amené à attacher au point A_0 à l'arrivée soit différent du sens positif de rotation qu'on lui avait attaché au départ. Mais cela même exprime que le fait d'attacher au point du plan un sens positif de rotation constitue un procédé d'*orientation géométrique* du point. Il ne faudrait pas cependant conclure de cette remarque que l'orientabilité géométrique du point entraîne la non-possibilité d'orientation topologique de l'espace, car l'orientation géométrique du point peut avoir un tout autre caractère concret que celui indiqué plus haut. Ce dernier caractère (orientabilité topologique) tient à ce qu'il existe, dans le groupe de stabilité du point, des transformations telles que le déterminant fonctionnel des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes soit négatif au point considéré [1], mais le groupe de stabilité peut se décomposer en plusieurs familles distinctes pour chacune desquelles le déterminant fonctionnel est positif. Un exemple est

[1] D'une manière générale l'espace d'une géométrie de Klein dont le groupe est transitif (les points forment un corps) est topologiquement orientable si les transformations du groupe de stabilité du point sont toutes à déterminant fonctionnel positif. *Voir* É. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (*Mém. Sc. Math.*, XLII, n° 34, 1930, p. 29-30).

fourni par l'espace à quatre dimensions des droites de l'espace projectif réel à trois dimensions : cet espace a les droites pour *éléments générateurs*, il est orientable. Les éléments de cet espace (les droites) sont géométriquement orientables, cependant l'espace lui-même est topologiquement orientable.

B. *Le corps des quadriques en géométrie projective.*

14. Portons maintenant notre attention sur les quadriques non dégénérées de la géométrie projective.

1° *Géométrie projective complexe.* — Les quadriques forment un corps unique, l'équation de toute quadrique étant réductible à la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 0.$$

On démontre ([3]) que le groupe de stabilité de cette quadrique contient autant de familles continues distinctes que le groupe des homographies réelles qui reproduisent à un facteur constant près la forme quadratique définie positive $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2$: si n est pair ce groupe est connexe; si n est impair il se décompose en deux familles connexes distinctes. Ces deux familles peuvent être caractérisées géométriquement de la manière suivante : La quadrique donnée contient deux familles distinctes de variétés planes à $\frac{n-1}{2}$ dimensions; la partie g_0 du groupe de stabilité qui forme un groupe est constituée par les homographies qui transforment entre elles les variétés génératrices de chaque famille; la partie g_1 par les homographies qui transforment les variétés génératrices de chaque famille dans les variétés génératrices de l'autre famille (pour $n = 3$, on a les deux familles bien connues de génératrices rectilignes d'un quadrique).

Théorème. — *En géométrie projective complexe à un nombre pair de dimensions, la quadrique n'est pas géométriquement orientable; en géométrie projective complexe à un nombre impair de dimensions, la quadrique est géométriquement orientable avec deux orientations distinctes; les figures résultant de ces orientations sont les* DEMI-QUADRIQUES, *considérées* *chacune comme lieu d'une des familles de variétés génératrices à $\frac{n-1}{2}$ dimensions de la quadrique initiale.*

Ce théorème exprime donc en particulier que, dans l'espace projectif complexe à trois dimensions, on peut obtenir une suite continue de demi-quadriques telle qu'en partant d'une demi-quadrique donnée on arrive à la demi-quadrique complémentaire de la demi-quadrique initiale.

2° *Géométrie projective réelle.* — Ici les quadriques réelles ne forment plus un seul corps; on peut toujours réduire l'équation d'une quadrique à la forme

$$(4)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+2}^2-\ldots-x_{p+q}^2=0\qquad (p+q=n+1),$$

et l'ensemble des quadriques dont l'équation est réductible à cette forme avec les mêmes valeurs pour les entiers p et q (dont on peut supposer que le premier est supérieur ou égal au second) constitue un corps.

Le groupe de stabilité de la quadrique (4) contient le même nombre de familles connexes distinctes que la portion γ de ce groupe qui laisse invariante la figure formée par les deux variétés planes ([3])

$$x_1=x_2=\ldots=x_p=0,\qquad x_{p+1}=x_{p+2}=\ldots=x_{p+q}=0.$$

Si $p\neq q$, le groupe γ est défini par l'ensemble des deux substitutions linéaires orthogonales

$$(5)\qquad x'_i=\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\,x_k\qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

$$(6)\qquad x'_{p+j}=\sum_{k=1}^{k=q} b_{jk}\,x_{p+k}\qquad (j=1,2,\ldots,q).$$

Les substitutions (5) contiennent deux familles connexes distinctes, ainsi que les substitutions (6), mais il ne faut pas oublier que ce qui nous intéresse ce sont les *homographies directes* représentées par ces substitutions linéaires.

Cela posé nous avons plusieurs cas à considérer.

a. L'espace est à un nombre pair de dimensions. — Dans ce cas toute homographie de l'espace est directe. Comme $p+q$ est impair, p par exemple est impair et q est pair; on peut alors s'arranger pour que le déterminant de la substitution (5) soit positif; le déterminant de la substitution (6) sera alors soit positif, soit négatif, d'où deux familles distinctes d'homographies directes pour le groupe γ.

THÉORÈME. — *Toute quadrique réelle de l'espace projectif réel à un nombre donné pair de dimensions est géométriquement orientable.*

b. L'espace est à un nombre impair de dimensions. — Dans ce cas les homographies directes de l'espace sont celles de déterminant positif. La somme $p+q$ étant paire, p et q sont de même parité.

Si p et q sont impairs, on peut s'arranger pour que le déterminant de la substitution (5) soit positif : il faudra alors que le déterminant de (6) soit aussi positif pour que l'homographie d'espace qu'elles définissent soit directe. Le groupe γ est donc connexe et par suite aussi le groupe de stabilité de la quadrique.

Il y a exception si $p=q$, parce qu'alors il faudrait ajouter aux homographies (5) et (6) celles qu'on obtient en les combinant avec les homographies

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\, x_{p+k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

$$x'_{p+j} = \sum_{k=1}^{k=p} b_{jk}\, x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

le groupe de stabilité contient ainsi deux familles connexes distinctes.

THÉORÈME. — *Toute quadrique réelle de l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions est non géométriquement orientable si la forme quadratique premier membre de son équation est décomposable en une somme d'un nombre impair* *de carrés positifs et d'un nombre impair de carrés négatifs, exception faite du cas où il y a autant de carrés positifs que de carrés négatifs.*

Si maintenant p et q sont pairs, pour que les homographies d'espace du groupe γ soient directes, il faut et il suffit que les déterminants des deux substitutions (5) et (6) soient du même signe, ce qui donne deux cas possibles suivant qu'ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Ce nombre est doublé si $p = q$.

Théorème. — *Toute quadrique réelle de l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions est géométriquement orientable si le premier membre de son équation est réductible à un nombre pair p de carrés positifs et un nombre pair q de carrés négatifs. Les orientations de la quadrique sont au nombre de 4 si $p = q$.*

On remarquera les différences profondes qui distinguent le cas de la géométrie projective réelle du cas de la géométrie projective complexe.

15. Dans l'espace projectif réel à trois dimensions, on voit que la quadrique non réglée n'est pas géométriquement orientable ($p = 3$, $q = 1$), tandis que la quadrique réglée est susceptible de *quatre* orientations différentes ($p = 2$, $q = 2$). Mais il importe de remarquer que les homographies de son groupe de stabilité laissent toutes invariante chacune des deux familles de génératrices rectilignes de la quadrique et les quatre orientations possibles peuvent être interprétées d'une manière concrète en orientant la suite à une dimension des génératrices de la première famille et en orientant la suite à une dimension des génératrices de la seconde famille.

Il est facile de vérifier *a posteriori* la légitimité de cette interprétation en prenant dans chacune des quatre familles du groupe de stabilité de la quadrique une homographie particulière. En désignant par

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

l'équation de la quadrique, on pourra prendre les quatre homographies

$$\begin{array}{lllll}
1. & x'_1 = x_1, & x'_2 = x_2, & x'_3 = x_3, & x'_4 = x_4; \\
2. & x'_1 = x_1, & x'_2 = -x_2, & x'_3 = x_3, & x'_4 = -x_4; \\
3. & x'_1 = x_3, & x'_2 = x_4, & x_3 = x_1, & x'_4 = x_2; \\
4. & x'_1 = x_3, & x'_2 = -x_4, & x'_2 = x_1, & x'_4 = -x_2.
\end{array}$$

En désignant par $\lambda = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4}$ et $\mu = \dfrac{x_1 + x_3}{x_2 - x_4}$ les paramètres des génératrices des deux familles, on trouve que, pour les quatre homographies considérées, les paramètres subissent les transformations

$$\begin{array}{lll}
1. & \lambda' = \lambda, & \mu' = \mu; \\
2. & \lambda' = -\lambda, & \mu' = -\mu; \\
3. & \lambda' = \lambda, & \mu' = -\mu; \\
4. & \lambda' = -\lambda, & \mu' = \mu.
\end{array}$$

Si l'on oriente d'une certaine manière la suite des génératrices de chaque famille, la seconde transformation change l'orientation des suites de génératrices de chacune des deux familles, la troisième change l'orientation de la suite de génératrices de la seconde famille et la quatrième change l'orientation de la suite de génératrices de la première famille. On remarquera que les deux dernières transformations échangent entre elles les deux régions entre lesquelles la quadrique partage l'espace ambiant.

Le fait qu'aucune orientation géométrique d'une quadrique réglée de l'espace réel à trois dimensions n'échange entre elles les deux familles de génératrices tient à ce que ces deux familles sont *qualitativement* distinctes ou, ce qui revient au même, ne forment pas deux figures *directement* égales. En effet prenons une génératrice de la première famille et imaginons un mobile parcourant cette génératrice dans un certain sens, le plan tangent au point mobile tournera dans un certain sens qui sera par exemple dextrorsum par rapport au mobile. Si l'on prend une génératrice de la seconde famille, la rotation du plan tangent se fera dans le sens sinistrorsum par rapport au mobile. Dans le domaine complexe, des considérations de cette nature ne peuvent plus avoir de sens, puisque les deux demi-quadriques attachées à la quadrique sont *directement égales*, comme cela résulte de la nature de l'orientation susceptible d'être attribuée à une quadrique complexe. La solution du problème de l'orientation géométrique est donc toute différente suivant qu'on est en géométrie projective réelle ou en géométrie projective complexe.

C. — *Autres problèmes d'orientation en géométrie projective.*

16. Considérons l'espace projectif complexe à n dimensions résultant par exemple de l'introduction des points complexes dans l'espace projectif réel à n dimensions. Cet espace réel s'appelle *une chaîne spatiale* ([5]), il engendre, en géométrie projective complexe, un corps formé de l'espace projectif réel et de ses transformés par les homographies complexes. Tous les éléments de ce corps sont directement égaux entre eux. Ces éléments sont-ils susceptibles d'orientation ? En particulier l'espace projectif réel est-il *géométriquement* orientable dans l'espace projectif complexe ?

Pour répondre à cette question, il nous suffit de remarquer que si l'espace a un nombre pair de dimensions, le groupe de stabilité de l'espace projectif réel, c'est-à-dire le groupe des homographies réelles, est connexe et par suite *l'espace projectif réel à un nombre pair de dimensions n'est pas géométriquement orientable dans l'espace projectif complexe*. Au contraire le groupe des homographies réelles de l'espace projectif à un nombre impair de dimensions se décompose en deux familles connexes distinctes suivant le signe du déterminant, alors que le groupe des homographies complexes est connexe. Par suite *l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions est géométriquement orientable dans l'espace projectif complexe*.

Quel est le caractère de ces orientations ? Il suffit de remarquer qu'une homographie de déterminant *négatif* change l'orientation topologique de l'espace (par exemple deux droites orientées dextrorsum sont changées en deux droites orientées sinistrorsum).

([5]) *Voir* É. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

Par suite les deux orientations *géométriques* qu'on peut donner à l'espace projectif réel peuvent être identifiées à leurs deux orientations *topologiques* possibles. Nous remarquons que l'espace réel à un nombre pair de dimensions n'est pas topologiquement orientable [6].

Dans le problème dont nous venons de nous occuper l'orientabilité *topologique* de l'espace projectif réel se confond avec l'orientabilité *géométrique* de cet espace à l'intérieur de la géométrie projective complexe. Cependant il ne faudrait pas en conclure à l'identité de ces deux notions dans toute géométrie susceptible d'exister dans le domaine réel et dans le domaine complexe.

17. Traitons le même problème pour l'espace anallagmatique à trois dimensions. L'espace anallagmatique réel à trois dimensions est assimilable à la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0 \tag{7}$$

de l'espace projectif réel à quatre dimensions, et le groupe anallagmatique réel n'est autre que le groupe des transformations homographiques qui laissent invariante la quadrique (7) : ces transformations, d'après ce qui a été dit plus haut (n° 14), se décomposent en deux familles connexes distinctes (les transformations anallagmatiques directes et inverses). Dans le domaine complexe les homographies qui laissent invariante la quadrique (7) ne comprennent, au contraire, qu'une famille connexe (il n'y a que des transformations anallagmatiques complexes directes). Par suite l'espace anallagmatique réel est géométriquement orientable à l'intérieur de l'espace anallagmatique complexe. Les deux orientations, dont l'espace anallagmatique réel est susceptible, peuvent être identifiées à leurs deux orientations topologiques, car une inversion réelle de module positif par exemple change l'orientation topologique de l'espace anallagmatique. Les résultats sont donc analogues à ceux qui ont

---

[6] Il n'est pas mauvais de remarquer que l'espace d'une géométrie de Klein ne peut être *géométriquement* orientable dans cette géométrie, parce que son groupe de stabilité est confondu avec le groupe des transformations directes de la géométrie; il est donc formé d'une seule famille connexe.

été obtenus pour l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions.

Si l'on prend au contraire l'espace anallagmatique réel à deux dimensions (la sphère réelle), on montre facilement qu'elle n'est pas géométriquement orientable à l'intérieur de la sphère complexe, alors qu'elle est cependant topologiquement orientable. En effet les homographies directes de la sphère complexe sont celles qui laissent invariante chacune des deux familles de génératrices et parmi celles-là celles qui sont réelles ne forment qu'une famille connexe (transformations anallagmatiques réelles directes).

D'une manière générale l'espace anallagmatique réel à un nombre quelconque de dimensions est topologiquement orientable, mais il n'est géométriquement orientable à l'intérieur de l'espace anallagmatique complexe que s'il est à un nombre impair de dimensions.

En revanche on démontre que l'espace des sphères orientées réelles à un nombre quelconque de dimensions est toujours orientable à l'intérieur de la géométrie des sphères orientées complexes ; dans un tel espace l'élément générateur est non le point, mais la sphère orientée.

18. Citons encore un problème analogue. Nous avons vu que l'espace projectif réel à trois dimensions est orientable à l'intérieur de l'espace projectif complexe et que cette orientation correspond à l'orientation *topologique* de l'espace. Considérons maintenant, dans la même géométrie projective réelle à trois dimensions, l'espace réglé, c'est-à-dire l'espace à quatre dimensions dont les *éléments* sont les droites. Le résultat précédent étant fondé uniquement sur la considération du groupe des homographies complexes et du groupe des homographies réelles de l'espace, s'étend à l'espace réglé : l'espace réglé réel est géométriquement orientable à l'intérieur de l'espace réglé complexe et le changement d'orientation géométrique se produit quand on effectue dans l'espace réglé réel une homographie réelle inverse : dans l'espace projectif ponctuel une telle homographie inverse change l'orientation *topologique* de l'espace : mais il n'en est plus de même dans l'espace projectif réglé ; en effet l'homographie inverse

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3, \qquad x'_4 = - x_4,$$

qui fait partie du groupe de stabilité de la droite $x_1 = x_2 = 0$, transforme les coordonnées plückeriennes non homogènes $\frac{p_{13}}{p_{34}}, \frac{p_{14}}{p_{34}}, \frac{p_{23}}{p_{34}}, \frac{p_{24}}{p_{34}}$ qui définissent analytiquement les droites voisines de la droite donnée suivant une substitution linéaire de déterminant positif (la 1^re^ et la 3^e^ coordonnées sont invariables, les deux autres sont changées de signe). Par suite les orientations géométriques dont est susceptible l'espace réglé réel n'ont rien à voir avec les orientations *topologiques* qu'on peut donner à cet espace à quatre dimensions : elles sont de nature toute différente, bien que liées aux orientations topologiques de l'espace projectif *ponctuel*. Pour avoir une interprétation qui ne fasse intervenir que des notions simples de la géométrie réglée, nous pouvons remarquer que les complexes linéaires réels forment deux corps distincts. Si l'on considère une droite quelconque D n'appartenant pas à un complexe linéaire donné et sa droite polaire D′, le plan focal d'un point mobile décrivant D dans un certain sens tourne autour de D′ dans un sens qui induit sur la droite D′ un sens positif déterminé; ce sens est dextrorsum ou sinistrorsum par rapport au sens choisi sur D, d'où deux corps distincts de complexes linéaires, qu'on peut appeler le corps des complexes dextrorsum et le corps des complexes sinistrorsum. On peut alors trouver une suite continue d'homographies *complexes* partant de l'homographie identique et y revenant de telle sorte qu'appliquées à un complexe linéaire réel dextrorsum elles le fassent passer à un complexe réel sinistrorsum : c'est ainsi qu'on peut exprimer l'orientabilité géométrique de l'espace projectif réglé réel à l'intérieur de l'espace projectif réglé complexe, et non pas par un changement de l'orientation topologique de cet espace considéré comme espace à quatre dimensions de droites.

V. — L'orientation géométrique en géométrie différentielle.

19. La notion d'orientation géométrique intervient très fréquemment en géométrie différentielle. Dans la théorie des courbes les formules de Frenet et celles qui les généralisent dans les différentes géométries de Klein se rapportent toujours à un élément de courbe de l'espace (du premier ordre, du second ordre) géométriquement orienté. En géométrie élémentaire réelle, les éléments de courbe du premier ordre constituent un corps susceptible de deux orientations distinctes. Il en est de même en géométrie euclidienne complexe pour les éléments du premier ordre non isotropes, qui comportent également deux orientations distinctes. Pour une courbe isotrope, les éléments du premier ordre ne sont pas orientables, ceux du second ordre constituent un corps comportant deux orientations.

Un cas intéressant et simple est celui des courbes en géométrie projective plane. En géométrie réelle, un élément du premier ordre admet quatre orientations différentes, car on peut fixer arbitrairement le sens de parcours positif de la courbe à partir du point considéré et le sens de rotation positif autour de ce point (7); un élément du second ordre (en supposant le point non d'inflexion) n'admet plus que deux orientations parce qu'on peut fixer d'une manière intrinsèque le sens de rotation positif autour du point quand on a fixé le sens de parcours positif de la courbe; les éléments du troisième ordre et du quatrième ordre admettent les deux mêmes orientations; quant aux éléments du cinquième ordre (8) (en supposant le point non sextactique) ils ne sont plus géométriquement orientables, car il existe un sens positif intrinsèque sur la courbe, par exemple celui qui fait passer la courbe de l'extérieur à l'intérieur de la conique osculatrice. En géométrie projective complexe au contraire les éléments des quatre premiers ordres ne sont pas orientables et ceux du cinquième ordre admettent trois orientations distinctes (pour un point non sextactique); cela revient à dire qu'il y a trois manières de choisir un système de coordonnées non homogènes tel que l'équation de la courbe au voisinage d'un point donné placé à l'origine commence par des termes de la forme

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 + \ldots;$$

(7) N'oublions pas qu'en géométrie projective plane réelle, le point est orientable aussi bien que la droite.

(8) Les éléments de chacun des cinq premiers ordres constituent un corps, si l'on exclut les cas des points d'inflexion et des points sextactiques.

le passage d'un de ces systèmes aux deux autres s'effectue en remplaçant respectivement

1° x par jx, y par j^2y $(j^2+j+1=0)$;

2° x par j^2x, y par jy;

une interprétation concrète simple de ces orientations ne semble pas facile.