BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Le calcul des variations et certaines familles de courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 29-52.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__29_1>

LE CALCUL DES VARIATIONS ET CERTAINES FAMILLES DE COURBES;

Par M. E. Cartan.

Considérons dans l'espace à $n+1$ dimensions une famille de courbes dépendant de $r > n$ constantes arbitraires

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_r$$

et telles que par chaque point de l'espace il en passe une infinité. Les conditions qui expriment que la courbe de paramètres

$$(c_1, c_2, \ldots, c_r)$$

coupe la courbe infiniment voisine de paramètres

$$(c_1 + dc_1, c_2 + dc_2, \ldots, c_r + dc_r)$$

sont fournies par un système d'équations

$$(1) \qquad \Omega_\mu(c_1, c_2, \ldots, c_r; dc_1, dc_2, \ldots, dc_r) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

homogènes en $dc_1, dc_2, \ldots, dc_r$.

M. Engel, dans un travail important paru assez récemment [1] et qui, depuis, a donné naissance à un certain nombre d'autres travaux de mathématiciens allemands [2], a eu l'idée de considérer les familles de courbes pour lesquelles l'une des équations (1) est linéaire, ou quadratique, etc., en $dc_1, \ldots, dc_r$.

Les plus intéressantes de ces familles de courbes sont celles pour lesquelles l'une des équations (1) est *linéaire* en $dc_1, \ldots, dc_r$; nous donnerons, dans ce qui va suivre, à une telle famille le nom de *famille de courbes de M. Engel.*

M. Engel a montré que si une famille de courbes est définie par ses équations différentielles, on peut toujours reconnaître sans intégration si elle jouit de la propriété indiquée. Il a montré qu'il en était ainsi pour les courbes caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre quelconque et a démontré la réciproque dans le cas de l'espace à trois dimensions. Enfin, dans une Note toute récente [3] il a montré que la recherche de l'extremum d'une intégrale définie

$$s = \int \omega(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

conduit à des familles de courbes (dans l'espace défini par les coordonnées $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, s$) jouissant de la propriété considérée.

En réalité, il y a des relations très étroites entre les familles de courbes de M. Engel et les familles de courbes (extrémales) auxquelles conduit le problème général du Calcul des variations, et aussi avec les caractéristiques des équations (et des systèmes

(1) *Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen,* Leipz., Ber., 1905, p. 161-232.

(2) Citons en particulier WERNER, *Ueber Systeme von drei Pfaffschen Gleichungen im Raume von fünf Dimensionen,* (*Inaugural Dissertation,* Leipzig, Teubner, 1908) et HAUSSLEITER, *Zur Theorie der Pfaffschen Systeme* (*Inaugural-Dissertation,* Berlin, Trenkel, 1909).

(3) *Ueber Kurvenschaaren die zu einem Differentialausdrucke kovariant sind* (*Jahresb. der Deutschen Math. Verein.,* t. XIX, 1910, p. 112-120).

d'équations en involution) aux dérivées partielles du premier ordre. Je me propose, dans cette Note, de montrer brièvement l'importance de ces relations; on verra, en particulier, que toute famille d'extrémales du problème général (problème de Mayer) du Calcul des variations est une famille de M. Engel, et que réciproquement toute famille de M. Engel est formée d'extrémales d'un problème déterminé du Calcul des variations.

J'en déduis une méthode, toute différente de celle de M. Engel, pour reconnaître si une famille de courbes définie par ses équations différentielles est une famille de M. Engel. Enfin j'indique comment on peut former, sous forme finie, les équations de toutes les familles de courbes de M. Engel, de manière à mettre en évidence les relations qui existent entre cette théorie et la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

I.

Désignons par $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ les coordonnées d'un point dans l'espace à $n+1$ dimensions et considérons dans cet espace une famille de courbes (C) dépendant de r paramètres $c_1, c_2, \ldots, c_r$ et définies par les équations

$$y_i = f_i(x; c_1, c_2, \ldots, c_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Si l'on considère sur la courbe $(c_1 + dc_1, \ldots, c_r + dc_r)$ le point $(x + dx, y_1 + dy_1, \ldots, y_n + dy_n)$, on a manifestement

$$dy_i - y'_i\, dx = \frac{\partial f_i}{\partial c_1} dc_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial c_r} dc_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en désignant par $(y'_1, \ldots, y'_n)$ les coefficients angulaires de la tangente à la courbe (C).

Si les deux courbes infiniment voisines ont un point commun, d'abscisse x, on a évidemment les n relations

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_1} dc_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial c_r} dc_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La famille considérée sera une famille de M. Engel si l'on peut trouver n coefficients

$$\rho_1(x; c_1, \ldots, c_r), \quad \rho_2(x; c_1, \ldots, c_r), \quad \ldots, \quad \rho_n(x; c_1, \ldots, c_r),$$

tels qu'on ait identiquement

$$\rho_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial c_1}dc_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial c_r}dc_r\right)+\ldots+\rho_n\left(\frac{\partial f_n}{\partial c_1}dc_1+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial c_r}dc_r\right)$$
$$\equiv C_1(c_1,\ldots,c_r)\,dc_1+\ldots+C_r\,dc_r,$$

les C ne dépendant pas de x.

Autrement dit, *pour qu'une famille de courbes* (C) *soit une famille de M. Engel, il faut et il suffit que les équations* (2) *et celles qu'on en déduit en les différentiant totalement entraînent une identité de la forme*

$$(3)\quad \rho_1(dy_1-y'_1\,dx)+\ldots+\rho_n(dy_n-y'_n\,dx)=C_1(c)\,dc_1+\ldots+C_r(c)\,dc_r.$$

De ce qui précède résulte que, si la famille de courbes (C) est une famille de M. Engel, en chaque point M (d'abscisse x) d'une courbe (C) on peut trouver n coefficients $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ non tous nuls tels que le vecteur MM′ obtenu en joignant le point M à un point infiniment voisin quelconque M′ d'une courbe (C′) *rencontrant* (C), satisfasse à la relation

$$(4)\qquad \rho_1(dy_1-y'_1\,dx)+\ldots+\rho_n(dy_n-y'_n\,dx)=0.$$

Autrement dit, *le lieu des courbes de la famille qui coupent la courbe* (C) *est, en chaque point* M *de* (C), *tangent à une multiplicité plane bien déterminée quand on se donne* (C) *et* M.

La réciproque de cette proposition est d'ailleurs vraie; car tout choix de coefficients ρ_i fonctions de $x, c_1, \ldots, c_r$, donne lieu à une identité de la forme

$$\rho_1(dy_1-y'_1\,dx)+\ldots+\rho_n(dy_n-y'_n\,dx)$$
$$=C_1(x;c)\,dc_1+\ldots+C_r(x;c)\,dc_r,$$

et si le premier membre de cette identité s'annule quel que soit x, sous la seule condition que les deux courbes (c) et $(c+dc)$ se coupent, le second membre s'annulera aussi dans les mêmes conditions. Par suite, deux courbes infiniment voisines qui se coupent satisfont à une relation de la forme

$$C_1(x_0;c)\,dc_1+\ldots+C_r(x_0;c)\,dc_r=0,$$

où l'on a donné à x_0 une valeur numérique fixe.

On peut déduire de ce qui précède la conséquence importante suivante :

Les tangentes en un point M *à celles des courbes d'une famille de M. Engel qui passent par le point* M *ne remplissent pas tout l'espace.*

Sinon, en effet, les courbes de la famille qui coupent une courbe particulière (C) en un point M′ suffisamment voisin d'un point donné M de (C) traverseraient le plan $X = x$ (où x désigne l'abscisse de M) en *tous* les points voisins de M, ce qui rendrait impossible l'existence d'une identité telle que (4).

D'après cela, le lieu des tangentes en un point M aux différentes courbes (C) d'une famille de M. Engel est une certaine multiplicité conique, définie par une ou plusieurs équations de la forme suivante :

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} g_1(y'_1, \ldots, y'_n; y_1, \ldots, y_n, x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_p(y'_1, \ldots, y'_n; y_1, \ldots, y_n, x) = 0 \end{array}\right. \qquad (p < n).$$

Ces équations (5) peuvent être regardées comme définissant un *système de Monge;* toutes les courbes de la famille satisfont à ce système de Monge. Nous dirons que la famille de M. Engel *correspond* au système de Monge (5).

Si, parmi les courbes d'une famille de M. Engel, on choisit des courbes dépendant de $r' < r$ paramètres, telles qu'il en passe une infinité par chaque point de l'espace, on obtient évidemment une nouvelle famille de M. Engel, que nous appellerons une *sous-famille* de la première. Pour que cette sous-famille corresponde au même système de Monge, il faut évidemment que toute courbe (C) de la première famille soit *tangente* en chacun de ses points à une *infinité* d'autres courbes de la famille. Réciproquement, s'il en est ainsi, la famille de M. Engel admet des sous-familles correspondant au même système de Monge.

Nous verrons plus loin comment on peut déterminer toutes les familles de M. Engel correspondant à un système de Monge donné.

II.

Dans le Calcul des variations on a été amené à se proposer le problème général suivant, connu sous le nom de *problème de Mayer* (1) :

On considère toutes les courbes satisfaisant à un système de Monge donné (5), *passant par un point donné* A *de coordonnées* $(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *et rencontrant une droite donnée parallèle à l'axe des* y_n (*de coordonnées* $x^1, y_1^1, \ldots, y_{n-1}^1$); *trouver le maximum ou le minimum de la coordonnée* y_n *de ce point de rencontre.*

Les courbes qui réalisent ce maximum ou ce minimum (au moins en tant qu'on ne considère que les conditions du premier ordre) sont appelées les *extrémales* du problème de Mayer. On démontre que, si une extrémale (Γ) réalise l'extremum de y_n quand on se donne un de ses points A et une droite (Δ) parallèle à l'axe des y_n et coupant (Γ), elle le réalise (en général) encore quand on se donne un autre quelconque de ses points A′ et une autre droite quelconque (Δ′).

Je vais d'abord démontrer la propriété suivante :

Toute famille d'extrémales d'un problème de Mayer, dans le cas où elle ne dépend que de constantes arbitraires, constitue une famille de M. Engel.

Nous supposons, bien entendu, que par chaque point de l'espace il passe une infinité d'extrémales de la famille considérée.

Soient

$$y_i = f_i(x; c_1, \ldots, c_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations des extrémales de la famille considérée. Prenons une d'entre elles (Γ) et sur cette courbe deux points quelconques $\mathrm{A}(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ et $\mathrm{M}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Toute extrémale passant par A et infiniment voisine de (Γ) satisfait aux équations

$$dy_i - y_i'\, dx = \frac{\partial f_i}{\partial c_1} dc_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial c_r} dc_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(1) *Voir* J. Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 223; Paris, Hermann, 1910.

en supposant que cette extrémale contienne le point M'

$$(x+dx, y_1+dy_1, \ldots, y_n+dy_n)$$

infiniment voisin de M. Or, par hypothèse, si l'on choisit $dc_1, \ldots,$ dc_r de manière qu'on ait

$$dx = dy_1 = \ldots = dy_{n-1} = 0,$$

on a aussi $dy_n = 0$. Donc, pour toute courbe de la famille infiniment voisine de (Γ), la relation

$$\frac{\partial f_n}{\partial c_1} dc_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial c_r} dc_r = 0$$

est une conséquence des relations

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_1} dc_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial c_r} dc_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et cela quel que soit x. Donc enfin, si l'on donne à x une valeur numérique fixe, toute courbe infiniment voisine de (Γ) et coupant (Γ) satisfait à une relation de la forme

$$C_1(c)\, dc_1 + C_2(c)\, dc_2 + \ldots + C_r(c)\, dc_r = 0.$$

La réciproque est vraie :

Toute famille de M. Engel, correspondant à un système de Monge donné, peut être regardée comme formée par des extrémales du problème de Mayer relatif au même système de Monge.

Considérons une quelconque (C) des courbes de la famille donnée. Prenons sur cette courbe un point fixe A et considérons une famille quelconque de courbes $(\mathcal{C})$ passant par A, ces courbes satisfaisant au système de Monge (5) (sans appartenir nécessairement à la famille de M. Engel), et dépendant d'un paramètre α; la courbe (C) elle-même sera supposée faire partie de ces courbes variables $(\mathcal{C})$ et correspondre à la valeur 0 du paramètre α. Par chaque point M d'une courbe $(\mathcal{C})$ il passe au moins une courbe (C) qui lui est tangente; nous pouvons par suite faire correspondre, au moins d'une manière, à chaque point de la courbe $(\mathcal{C})$ un système de valeurs des paramètres $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$. On a ainsi défini des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, c_1, c_2, \ldots, c_r$ de x et de α, et l'on a, quels que soient x et α, l'identité (3)

$$\rho_1(dy_1 - y'_1\,dx) + \ldots + \rho_n(dy_n - y'_n\,dx) = C_1(c)\,dc_1 + \ldots + C_r(c)\,dc_r.$$

Désignons par ω la valeur commune des deux membres de cette identité et employons deux symboles de différentiation, l'un d correspondant à $\alpha =$ const., l'autre δ correspondant à $x =$ const. On a, comme on sait,

$$d\omega^\delta - \delta\omega^d = \sum \left(\frac{\partial C_k}{\partial c_i} - \frac{\partial C_i}{\partial c_k}\right)(dc_i\,\delta c_k - dc_k\,\delta c_i).$$

Faisons dans cette égalité $\alpha = 0$; alors on a

$$dc_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

puisque, pour $\alpha = 0$, la courbe $(\mathcal{C})$ se réduit à la courbe (C) de paramètres constants. Donc, pour $\alpha = 0$,

$$d\omega^\delta - \delta\omega^d = 0.$$

Or ω^d est nul pour chaque valeur de α, puisque, quand on se déplace sur une courbe $(\mathcal{C})$, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ sont les paramètres directeurs de la tangente à cette courbe. On a donc finalement, pour $\alpha = 0$,

$$d\omega^\delta = 0;$$

comme enfin au point A, ω^δ est nul, puisque

$$\delta x = \delta y_1 = \ldots = \delta y_n = 0,$$

on voit que ω^δ est constamment nul tout le long de la courbe (C).

Si alors ρ_n est par exemple différent de zéro en un point arbitraire M de (C), et si l'on choisit les courbes $(\mathcal{C})$ de manière que le point de $(\mathcal{C})$ qui a même abscisse que M ait aussi mêmes coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on voit que, pour ces courbes $(\mathcal{C})$, on a

$$\delta y_n = 0;$$

(C) est donc une extrémale du problème de Mayer relatif au système de Monge (5).

Les deux théorèmes précédents ramènent la recherche des familles de M. Engel correspondant à un système de Monge donné (5) à la résolution d'un problème du Calcul des variations. On déterminera les extrémales du problème de Mayer relatif au système de Monge (5). Si les équations différentielles de ces extrémales entraînent d'autres équations de Monge que les équations (5), le problème est impossible. Sinon, toute famille formée d'extrémales et telle que les courbes de cette famille ne satisfassent à aucune équation de Monge autre que les équations (5) sera une famille de M. Engel correspondant au système (5).

III.

On peut aussi trouver directement les familles de M. Engel correspondant à un système de Monge donné; nous retrouverons ainsi les équations différentielles des extrémales du problème de Mayer.

Rappelons d'abord le théorème suivant :

Si l'on considère une expression de Pfaff

$$\omega = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_m\,dx_m, \tag{6}$$

où les X *sont des fonctions données des* m *variables indépendantes* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *les équations aux différentielles totales*

$$\sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right) dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

auxquelles on adjoint l'équation $\omega = 0$, ***forment un système complètement intégrable; si de plus*** $u_1, u_2, \ldots, u_h$ ***constituent un système d'intégrales premières indépendantes de ce système*** (7), ***l'expression*** ω ***peut se mettre sous la forme***

$$\omega = U_1\,du_1 + U_2\,du_2 + \ldots + U_h\,du_h, \tag{8}$$

où les U ***sont certaines fonctions de*** $u_1, u_2, \ldots, u_h$.

Si l'on forme le covariant bilinéaire ω' de l'expression ω, et si on l'exprime en fonction bilinéaire de m expressions

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m$$

linéairement indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_m$, soit

$$\omega' = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,m} \alpha_{ik}\,\omega_i\,\omega_k,$$

les équations du système (7) peuvent encore s'écrire

$$\sum_{k=1}^{k=m} \alpha_{ik}\,\omega_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on exprimait ω' au moyen de $\mu > m$ expressions

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\mu$$

liées elles-mêmes par $\mu - m$ relations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}\;\omega_1 + c_{12}\;\omega_2 + \ldots + c_{1\mu}\;\omega_\mu = 0, \\ c_{21}\;\omega_1 + c_{22}\;\omega_2 + \ldots + c_{2\mu}\;\omega_\mu = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{\mu-m,1}\,\omega_1 + c_{\mu-m,2}\,\omega_2 + \ldots + c_{\mu-m,\mu}\,\omega_\mu = 0 \end{array}\right.$$

les équations du système (7), en supposant encore

$$\omega' = \sum_{i,k}^{1,2,\ldots,\mu} \alpha_{ik}\,\omega_i\,\omega_k,$$

seraient

$$(7') \qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\mu} \alpha_{1k}\,\omega_k = l_1 c_{11} + l_2 c_{21} + \ldots + l_{\mu-m} c_{\mu-m,1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\sum \alpha_{\mu k}\,\omega_k = l_1 c_{1\mu} + l_2 c_{2\mu} + \ldots + l_{\mu-m} c_{\mu-m,\mu}; \end{array}\right.$$

dans ces formules on a désigné par $l_1, l_2, \ldots, l_{\mu-m}$ des expressions de Pfaff indéterminées auxiliaires.

Pour qu'une expression de Pfaff ω *puisse se mettre sous la forme* (8) *où* $u_1, \ldots, u_h$ *sont* h *fonctions données des* x; $U_1, \ldots, U_h$ *des fonctions quelconques des* u, *il faut et il suffit que le système* (7) *soit une conséquence des équations*

$$du_1 = du_2 = \ldots = du_h = 0.$$

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

Cela étant, considérons une famille de courbes de M. Engel et partons de l'identité (3),

$$(3)\quad \rho_1(dy_1 - y'_1\,dx) + \ldots + \rho_n(dy_n - y'_n\,dx) = C_1(c)\,dc_1 + \ldots + C_r(c)\,dc_r.$$

Nous supposons que la famille considérée corresponde à un système de Monge donné

$$(5)\quad \begin{cases} g_1(y'_1, \ldots, y'_n, y_1, \ldots, y_n, x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p(y'_1, \ldots, y'_n, y_1, \ldots, y_n, x) = 0; \end{cases}$$

nous supposerons les équations de ce système résolubles par rapport à $y'_1, \ldots, y'_p$.

Dans l'identité (3) les variables indépendantes sont

$$x, \quad c_1, c_2, \quad \ldots, \quad c_r;$$

mais on peut évidemment leur substituer les variables $x, y_1, \ldots, y_n$; $y'_{p+1}, \ldots, y'_n$, et en outre $r - 2n + p$ des c, soit $c_1, \ldots, c_{r-2n+p}$. Pour que l'identité (3) soit possible, il faut et il suffit qu'en tenant compte des équations

$$dc_1 = dc_2 = \ldots = dc_r = 0,$$

le système (7) relatif à l'expression

$$\omega = \rho_1(dy_1 - y'_1\,dx) + \ldots + \rho_n(dy_n - y'_n\,dx)$$

soit identiquement vérifié; autrement dit, que ce système (7) soit une conséquence des équations différentielles des courbes (C). Or écrivons ses équations sous la forme (7'), où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ sont respectivement

$$dx, \quad dy_1, \quad \ldots, \quad dy_n; \quad dy'_1, \quad \ldots, \quad dy'_n; \quad dc_1, \quad \ldots, \quad dc_{r-2n+p}.$$

Ces $r + p + 1$ expressions sont liées par les p relations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial y'_1}dy'_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_1}{\partial y'_n}dy'_n + \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n}dy_n + \dfrac{\partial g_1}{\partial x}dx = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_1}dy'_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_n}dy'_n + \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_p}{\partial y_n}dy_n + \dfrac{\partial g_p}{\partial x}dx = 0. \end{cases}$$

On a d'autre part

$$\omega' = d\rho_1(dy_1 - y'_1\,dx) + \ldots + d\rho_n(dy_n - y'_n\,dx) + \rho_1\,dx\,dy'_1 + \ldots + \rho_n\,dx\,dy'_n.$$

Le système (7′) contiendra d'abord les équations

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\,dc_1} = \ldots = \frac{\partial\omega'}{\partial\,dc_{r-2n+p}} = 0$$

qui seront des conséquences des équations

$$dy_1 - y'_1\,dx = \ldots = dv_n - y'_n\,dx = 0;$$

puis il restera, en tenant compte des équations précédentes et des équations $dc_i = 0$,

$$\rho_1\,dx = l_1\frac{\partial g_1}{\partial y'_1} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y'_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\rho_n\,dx = l_1\frac{\partial g_1}{\partial y'_n} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y'_n},$$
$$d\rho_1 = l_1\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$d\rho_n = l_1\frac{\partial g_1}{\partial y_n} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y_n},$$
$$y'_1\,d\rho_1 + \ldots + y'_n\,d\rho_n + \rho_1\,dy'_1 + \ldots + \rho_n\,dy'_n = -\left(l_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial x}\right).$$

On voit d'abord que la dernière de ces équations est une conséquence des précédentes [et des équations (5)]. Quant aux autres, elles peuvent s'écrire, en remplaçant l_i par $l_i\,dx$,

$$(10)\quad l_1\frac{\partial g_1}{\partial y_i} + l_2\frac{\partial g_2}{\partial y_i} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(l_1\frac{\partial g_1}{\partial y'_i} + l_2\frac{\partial g_2}{\partial y'_i} + \ldots + l_p\frac{\partial g_p}{\partial y'_i}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc, *pour que la famille de courbes considérée, satisfaisant aux équations de Monge* (5), *soit une famille de M. Engel, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux équations différentielles* (10) *dans lesquelles* $l_1, l_2, \ldots, l_p$ *désignent des fonctions inconnues auxiliaires de* x.

On reconnaît les équations des extrémales du problème de Mayer relatif au système de Monge (5).

Si le problème de Mayer est *ordinaire*, c'est-à-dire si le déterminant

$$
(11)\qquad \begin{vmatrix}
0 & \dots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y'_n} \\
\cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_1} & \dots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_n} \\
\dfrac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \dots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_1\,\partial y'_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\
\dfrac{\partial g_1}{\partial y'_n} & \dots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y'_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_n\,\partial y'_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2_n}
\end{vmatrix}
\qquad (f = l_1 g_1 + \dots + l_p g_p)
$$

n'est pas identiquement nul [en tenant compte des équations (5)], les équations différentielles (5) et (10) admettent une solution et une seule telle que pour $x = x^0$, les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n, y'_{p+1}, \dots, y'_n, l_1, \dots, l_p$ prennent des valeurs données. Comme d'autre part les rapports mutuels des l interviennent seuls, on voit que les équations (5) et (10) définissent une famille de courbes dépendant *en général* de $2n - 1$ constantes arbitraires. On aura la famille de M. Engel la plus générale correspondant au système de Monge (5) en prenant pour les valeurs initiales de $h \leq p - 1$ des rapports mutuels des l des fonctions arbitraires des valeurs initiales des autres quantités.

Il peut se faire que, avec l'hypothèse précédente, les courbes définies par les équations (5) et (10) dépendent de moins de $2n - 1$ constantes arbitraires. Par exemple, si l'on prend $n = 3$, $p = 2$, et si l'on suppose que les équations $g_1 = g_2 = 0$ ne contiennent que y'_1, y'_2, y'_3, on obtient une famille de courbes ne dépendant que de quatre paramètres (ce sont des droites).

Il peut arriver que les équations (5) et (10) soient incompatibles; il en est ainsi par exemple si $p = 1$, $n = 2$, et si l'équation $g_1 = 0$ est *linéaire* par rapport à y'_1, y'_2, sans que l'équation

$$
g\,dx \equiv \frac{\partial g}{\partial y'_1}dy_1 + \frac{\partial g}{\partial y'_2}dy_2 - \left(y'_1\frac{\partial g}{\partial y'_1} + y'_2\frac{\partial g}{\partial y'_2}\right)dx = 0
$$

soit complètement intégrable.

Il peut arriver aussi que les équations (5) et (10), sans être incompatibles, entraînent comme conséquence de nouvelles équations de Monge distinctes des équations données (5). C'est par exemple ce qui se passe si l'on prend, pour $n = 4$, deux équations de Monge linéaires en $y'_1, \ldots, y'_n$: il résulte alors des équations (5) et (10) une troisième équation de Monge également linéaire en $y'_1, \ldots, y'_n$.

Enfin il peut arriver que les équations (5) et (10), sans être incompatibles et sans entraîner de nouvelles équations de Monge, admettent des solutions dépendant de *fonctions* arbitraires. C'est ce qui a lieu par exemple si, pour n quelconque, on prend $p = 1$ avec

$$g_1 \equiv y'_1 = 0.$$

Le système (10) se réduit alors à

$$\frac{dl_1}{dx} = 0,$$

et l'on obtient les courbes

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = f_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x),$$

où $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sont des fonctions arbitraires de x.

Le cas où les équations (5) sont *linéaires* par rapport aux y' a été étudié, pour $p = n - 1$ ou $n - 2$, par M. Haussleiter [1]; avant lui M. Werner [2] avait étudié le cas particulier de 3 équations linéaires ($n = 4$) [3] : il y a alors une famille de M. Engel et une seule dépendant de 5 constantes arbitraires (au lieu de 7, comme l'indiquerait la formule générale).

Dans tous les cas, lorsqu'on a la solution générale du système formé des équations (5) et (10), on en peut déduire sans nouvelle intégration toutes les familles de M. Engel correspondant au sys-

---

(1) *Zur Theorie der Pfaffschen Systeme* (*Inaugural-Dissertation*, Berlin, Trenkel, 1909).

(2) *Ueber Systeme von drei Pfaffschen Gleichungen im Raume von fünf Dimensionen* (*Inaugural-Dissertation*, Leipzig, Teubner, 1908). Dans ce travail l'auteur cherche en outre dans quel cas, parmi les équations (1) qui expriment que deux courbes infiniment voisines de la famille se coupent, se trouve, outre une relation linéaire, une relation quadratique; dans un cas particulier important il existe *trois* relations quadratiques : pour tous les systèmes de trois équations de Pfaff à cinq variables où cela a lieu, la forme biquadratique binaire covariante est identiquement nulle [*voir* E. CARTAN, *Le système de Pfaff à cinq variables, etc.* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 156)].

(3) M. Hadamard, dans l'Ouvrage précédemment cité, étudie un exemple se rapportant à ce cas-là (t. I, p. 256).

tème de Monge (5). On peut aussi, d'après ce qui précède, reconnaître sans intégration si une famille de courbes donnée par ses équations différentielles est une famille de M. Engel : il suffit de former toutes les équations de la forme (5), qui sont des conséquences des équations différentielles données et de voir si les équations (10) qu'on en déduit sont encore des conséquences de ces mêmes équations différentielles.

L'équation de Pfaff qui est vérifiée par deux courbes infiniment voisines de la famille qui se coupent est, dans tous les cas,

$$(12)\qquad \begin{aligned}&\left(l_1\frac{\partial g_1}{\partial y'_1}+\ldots+l_p\frac{\partial g_p}{\partial y'_1}\right)(dy_1-y'_1\,dx)+\ldots\\&+\left(l_1\frac{\partial g_1}{\partial y'_n}+\ldots+l_p\frac{\partial g_p}{\partial y'_n}\right)(dy_n-y'_n\,dx)\qquad=0.\end{aligned}$$

IV.

On sait la relation qui existe en général entre le problème général du Calcul des variations et l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Si le déterminant (11) n'est pas identiquement nul en tenant compte des équations (5), la surface conique ayant pour sommet le point $(x, y_1, \ldots, y_n)$ et définie par les équations (5) peut être regardée comme l'enveloppe du plan

$$Y_n-y_n=p_1(Y_1-y_1)+\ldots+p_{n-1}(Y_{n-1}-y_{n-1})+p(X-x),$$

où les quantités $p_1, \ldots, p_{n-1}, p$ sont reliées à $x, y_1, \ldots, y_n$ par une relation unique

$$(13)\qquad F(p_1, \ldots, p_{n-1}, p, x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)=0.$$

Cette équation (13) définit une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et *les caractéristiques de cette équation se confondent avec les extrémales définies par les équations* (10).

Réciproquement, étant donnée une équation aux dérivées partielles quelconque du premier ordre, où y_n est la fonction inconnue des variables $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$, l'équation

$$dy_n-p_1\,dy_1-\ldots-p_{n-1}\,dy_{n-1}-p\,dx=0,$$

où les variables sont liées par la relation (13), est équivalente à une équation de la forme

$$dc - b_1\, da_1 - \ldots - b_{n-1}\, da_{n-1} = 0,$$

où $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}, c$ sont les $2n-1$ paramètres des multiplicités caractéristiques. Il résulte immédiatement de là que les *courbes caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles constituent une famille de M. Engel.

On n'épuise pas ainsi toutes les familles de courbes de M. Engel. Pour nous en rendre compte, nous allons, abandonnant le point de vue précédent où le système de Monge (5) a joué un rôle prépondérant, chercher à déterminer, sans aucun signe d'intégration, les équations finies de toutes les familles de courbes de M. Engel.

Partons pour cela de l'identité (3)

$$\rho_1\, dy_1 + \rho_2\, dy_2 + \ldots + \rho_n\, dy_n + \rho\, dx \equiv C_1(c)\, dc_1 + \ldots + C_r(c)\, dc_r,$$

que nous mettrons, ce qui est toujours possible, sous la forme

$$(3') \qquad \rho_1\, dy_1 + \ldots + \rho_n\, dy_n + \rho\, dx \equiv dc_1 - c_2\, dc_3 - \ldots - c_{2s-2}\, dc_{2s-1}.$$

Dans cette identité, nous pouvons regarder les ρ comme des fonctions de $x, y_1, \ldots, y_n$ et d'un certain nombre d'autres variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots$; les c seront aussi des fonctions bien déterminées de ces mêmes quantités, mais qui resteront constantes sur toute courbe de la famille.

Cela étant, si nous égalons par exemple les s fonctions $c_1, c_3, \ldots, c_{2s-1}$ à des constantes arbitraires, nous obtiendrons un système d'équations entre x, les y et les u. L'élimination des u entre ces équations nous donnera un certain nombre $k > 0$ d'équations indépendantes entre $x, y_1, \ldots, y_n$, ces équations contenant les s constantes arbitraires. On pourra toujours les écrire sous la forme

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{l} V_1(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h) = b_1, \\ V_2(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h) = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_k(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h) = b_k, \end{array}\right.$$

où l'on a posé $h = s - k$.

Si les a et les b sont regardés comme des constantes, le premier membre de l'identité (3') est identiquement nul, c'est-à-dire qu'il existe entre les différentielles de x, y_1, ..., y_n la relation

$$\rho_1\, dy_1 + \ldots + \rho_n\, dy_n + \rho\, dx = 0.$$

Or les seules relations qui existent entre ces différentielles proviennent de la différentiation totale des équations (14). On a donc des identités de la forme

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \beta_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial y_1} + \beta_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial y_1} + \ldots + \beta_k \dfrac{\partial V_k}{\partial y_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \rho_n = \beta_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial y_n} + \beta_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial y_n} + \ldots + \beta_k \dfrac{\partial V_k}{\partial y_n}, \\ \rho\ \ = \beta_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + \beta_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial x} + \ldots + \beta_k \dfrac{\partial V_k}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Les relations (3'), (14) et (15) entraînent alors

$$\begin{aligned} \beta_1\, db_1 + \ldots + \beta_k\, db_k - \left[\beta_1 \frac{\partial V_1}{\partial a_1} + \ldots + \beta_k \frac{\partial V_k}{\partial a_1}\right] da_1 - \ldots \\ - \left[\beta_1 \frac{\partial V_1}{\partial a_h} + \ldots + \beta_k \frac{\partial V_k}{\partial a_h}\right] da_h \\ \equiv dc_1 - c_2\, dc_3 - \ldots - c_{2s-2}\, dc_{2s-1}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que les rapports mutuels des coefficients de db_1, ..., db_k, da_1, ..., da_h dans le premier membre restent constants pour toute courbe de la famille de M. Engel.

Autrement dit, *à chaque courbe de la famille on peut faire correspondre* $2s$ *constantes* a, b, α, β, *les* s *dernières n'étant définies que par leurs rapports mutuels, et telles que les relations* (14) *et les relations suivantes*

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial a_1} + \beta_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial a_1} + \ldots + \beta_k \dfrac{\partial V_k}{\partial a_1} = \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial a_h} + \beta_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial a_h} + \ldots + \beta_k \dfrac{\partial V_k}{\partial a_h} = \alpha_h \end{array} \right.$$

soient vérifiées par tout point de la courbe

Bien entendu, les constantes α et β ne doivent pas être toutes nulles.

Les constantes a, b et les rapports mutuels des α et des β ne sont pas autre chose, à l'ordre près, que les constantes c_1, c_2, ..., c_{2s-1}.

Il résulte de là que *les s équations* (14) *et* (16) *sont indépendantes par rapport à x et aux y*, sinon il y aurait une relation nécessaire entre les c, ce qui n'est pas.

Deux cas sont alors à distinguer :

I. *Si s est égal à n*, les équations (14) et (16) définissent une famille de courbes, qui se confond manifestement avec la famille de courbes de M. Engel considérée. Cette famille de courbes dépend ainsi de $2n-1$ constantes arbitraires.

Réciproquement, si $s=n$, les équations (14) et (16) définissent une famille de courbes de M. Engel; car ces équations entraînent l'identité

$$\rho_1\,dy_1+\ldots+\rho_n\,dy_n+\rho\,dx=\beta_1\,db_1+\ldots+\beta_k\,db_k-\alpha_1\,da_1-\ldots-\alpha_h\,da_h,$$

où les ρ sont définis par les formules (15).

Il est facile de voir que les équations (14) définissent l'intégrale complète [1] d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les courbes caractéristiques sont précisément les courbes de la famille. Pour démontrer ce théorème en toute rigueur, considérons l'équation aux différentielles totales

$$(17)\qquad \rho_1\,dy_1+\rho_2\,dy_2+\ldots+\rho_n\,dy_n+\rho\,dx=0,$$

où les ρ sont donnés par les formules (15) et où les a et les β sont des paramètres arbitraires. Si nous regardons, dans cette équation aux différentielles totales, y_n comme une fonction de x, y_1, ..., y_{n-1}, elle est équivalente aux équations

$$(17')\quad p_1=\frac{\partial y_n}{\partial y_1}=-\frac{\rho_1}{\rho_n},\quad p_2=\frac{\partial y_n}{\partial y_2}=-\frac{\rho_2}{\rho_n},\quad \ldots,\quad p=\frac{\partial y_n}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho_n}.$$

L'élimination des a et des β entre ces n équations conduit à *une relation au moins* entre $x, y_1, \ldots, y_n, p, p_1, \ldots, p_{n-1}$. Je dis qu'il n'y en a pas plus d'une.

Sinon, en effet, les rapports mutuels de ρ, ρ_1, ..., ρ_n dépen-

---

[1] Au sens généralisé de Lie.

draient de $s - 2$ combinaisons au plus de $a_1, \ldots, a_h, \frac{\beta_2}{\beta_1}, \ldots, \frac{\beta_k}{\beta_1}$. Autrement dit, tous ces rapports satisferaient à une même équation aux dérivées partielles linéaires de la forme

$$(18) \qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \ldots + A_h \frac{\partial f}{\partial a_h} + B_1 \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \ldots + B_k \frac{\partial f}{\partial \beta_k} = 0,$$

les A et les B étant des fonctions des a et des β, non toutes nulles et telles, de plus, qu'on n'ait pas

$$\frac{A_1}{0} = \ldots = \frac{A_h}{0} = \frac{B_1}{\beta_1} = \ldots = \frac{B_k}{\beta_k}.$$

Pour faire le calcul d'une manière symétrique nous pouvons introduire un coefficient convenable λ tel que les $n+1$ fonctions

$$\lambda\rho, \quad \lambda\rho_1, \quad \ldots, \quad \lambda\rho_n$$

satisfassent à l'équation (18). Si l'on exprime cela, on constate que cela exprime aussi que les déterminants fonctionnels des premiers membres des équations (14) et (16) sont tous nuls par rapport à s quelconques des variables $x, y_1, \ldots, y_n$. Or nous avons vu que cela ne pouvait avoir lieu.

L'équation (17) entraîne donc *une* équation aux dérivées partielles du premier ordre. L'identité (3′) montre alors que les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles s'obtiennent en donnant aux c des valeurs constantes arbitraires. C'est précisément ce que nous voulions démontrer.

Par suite, *si l'on considère dans l'espace à $n+1$ dimensions une famille de courbes de M. Engel telle que l'équation de Pfaff*

$$C_1\, dc_1 + \ldots + C_r\, dc_r = 0,$$

qui exprime que deux courbes infiniment voisines de la famille se coupent, ne puisse pas, par un choix convenable des paramètres, être écrite de manière à contenir moins de $2n-1$ paramètres, cette famille de courbes est formée nécessairement par les courbes caractéristiques d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre, et réciproquement.

Les équations (14) et (16) définissent de la manière la plus générale une famille de courbes de cette espèce.

II. *Si s est inférieur à n*, on pourra ajouter aux équations (14) et (16) $n - s$ équations contenant $x, y_1, \ldots, y_n$; $a_1, \ldots, a_h$; $\beta_1, \ldots, \beta_h$, et, au besoin, d'autres paramètres en nombre quelconque $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Ces $n - s$ équations pourront être prises arbitrairement, sous la seule condition de former, avec les équations (14) et (16), un système de n équations indépendantes en x, $y_1, \ldots, y_n$. L'identité (3′) résultera, en effet, toujours des équations de ce système, en désignant par $\rho_1, \ldots, \rho_n$, ρ les quantités définies par les formules (15).

Dans le cas qui nous occupe, l'élimination des a et des β entre les n équations (17′) conduit à $n - s + 1$ relations au moins entre $x, y_1, \ldots, y_n, p, p_1, \ldots, p_{n-1}$, et l'on démontre, comme dans le premier cas, qu'il y en a exactement $n - s + 1$. *L'équation aux différentielles totales* (17) *peut donc être regardée comme équivalente à un système de $n - s + 1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre;* et ce système est en *involution*, car l'identité (3′) montre que l'équation

$$dy_n - p_1\, dy_1 - \ldots - p_{n-1}\, dy_{n-1} - p\, dx = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$dc_1 - c_2\, dc_3 - \ldots - c_{2s-2}\, dc_{2s-1} = 0,$$

où le nombre des variables a été diminué de $2(n - s + 1)$ unités. On voit de plus que les *surfaces caractéristiques* de ce système en involution s'obtiennent en donnant aux c des valeurs constantes, c'est-à-dire sont définies par les équations (14) et (16).

De là résulte le théorème suivant :

Si l'équation

$$C_1\, dc_1 + \ldots + C_r\, dc_r = 0$$

relative à une famille de courbes de M. Engel peut être écrite de manière à contenir seulement $2n - 2p + 1$ paramètres, mais ne peut pas être écrite de manière à en contenir un moindre nombre, il existe au moins un système en involution de p équations aux dérivées partielles du premier ordre tel que chaque courbe de la famille soit tout entière contenue sur une des surfaces caractéristiques de ce système en involution, *et tel que chaque surface caractéristique contienne au moins une courbe de la famille.*

La réciproque est vraie.

Le théorème précédent ne donne qu'un renseignement incomplet sur les familles de M. Engel, pour lesquelles s est inférieur à n. En effet d'abord le système en involution obtenu ne détermine pas complètement les familles de M. Engel correspondantes, et d'autre part à une famille de M. Engel donnée correspondent en général une infinité de systèmes en involution.

On arriverait à quelque chose de plus précis si l'on se proposait de *déterminer les multiplicités de dimension maxima engendrées par des courbes* (C) *de la famille de M. Engel et jouissant de la propriété que deux courbes quelconques* (C) *infiniment voisines tracées sur une de ces multiplicités se coupent.*

Le lieu des courbes de la famille qui passent par un point donné est une multiplicité de cette nature.

Ces multiplicités s'obtiennent en cherchant le lieu des courbes de la famille dont les $2s-1$ paramètres a, b, α, β sont liés par s relations telles qu'on ait

$$(18') \qquad \beta_1\, db_1 + \ldots + \beta_k\, db_k = \alpha_1\, da_1 + \ldots + \alpha_h\, da_h.$$

En particulier, on aura les multiplicités (14) si l'on prend pour les a et les b des constantes. Pour avoir les multiplicités cherchées dans le cas le plus général, considérons les équations autres que (14) et (16), qui servent à définir les courbes de la famille. On peut toujours imaginer ces équations de la forme suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h;\, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_\varkappa(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h;\, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 0; \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h;\, \beta_1, \ldots, \beta_k;\, \gamma_1, \ldots) = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Psi_\lambda(x, y_1, \ldots, y_n;\, a_1, \ldots, a_h;\, \beta_1, \ldots, \beta_k;\, \gamma_1, \ldots) = \delta_\lambda. \end{array} \right.$$

On a

$$\varkappa + \lambda = n - s;$$

les γ et les δ sont de nouvelles constantes arbitraires, qui peuvent d'ailleurs ne pas exister.

Cela étant, si l'on exprime les a, les b et les rapports mutuels des α et des β en fonction de $s - 1$ paramètres arbitraires de manière à satisfaire à l'équation (18'), on aura à éliminer ces $s - 1$ paramètres entre les équations (14), (16) et (19). L'élimination de ces paramètres entre les équations (14) et (16) donnera la multiplicité intégrale générale du système en involution dont il a été question plus haut, c'est-à-dire donnera une seule relation entre $x, y_1, \ldots, y_n$; par suite, l'élimination complète donnera $\varkappa + 1$ relations. On aura ainsi obtenu des multiplicités à $n - \varkappa$ dimensions. Ce n'est que dans certains cas particuliers que le nombre des dimensions pourra être inférieur à $n - \varkappa$.

Il résulte en particulier de là qu'on peut toujours supposer ce nombre atteint pour les multiplicités (14), c'est-à-dire *on peut toujours supvoser*, sans restreindre la généralité,

$$\varkappa = k - 1.$$

Les entiers k et h, ainsi définis, sont des nombres caractéristiques de la famille de courbes considérée.

On a évidemment l'inégalité

$$h + 2k - 1 \leqq n,$$

et, de plus, si $h = 0$, k ne peut être qu'égal à 1 [sinon, les équations (19) fourniraient des relations entre les seules variables $x, y_1, \ldots, y_n$].

Les multiplicités à $n - k + 1$ dimensions qu'on vient d'obtenir sont les intégrales d'un certain système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à k fonctions inconnues de $n - k + 1$ variables indépendantes.

Exemple. — Dans l'espace à trois dimensions, on a

$$h + 2k \leqq 3;$$

par suite, k est égal à 1. On a donc soit les courbes

$$V(x, y, z, \alpha) = b,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha;$$

soit les courbes

$$V(x, y, z) = b,$$
$$\Psi(x, y, z, \gamma_1, \ldots) = \delta.$$

Les multiplicités à deux dimensions engendrées par des courbes de la famille dont chacune coupe la courbe infiniment voisine sont :

Dans le premier cas, la surface intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégrale complète est la surface

$$V(x, y, z, a) = b;$$

Dans le second cas, l'une quelconque des surfaces

$$V(x, y, z) = b.$$

Si $n = 3$ (espace à quatre dimensions), on a

$$h + 2k \leqq 4,$$

ce qui donne $k = 1$, $h = 2$, 1 ou 0. On a donc les courbes suivantes :

$$1^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x, y_1, y_2, y_3;\, a_1, a_2) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \alpha_1, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = \alpha_2; \end{array} \right.$$

$$2^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x, y_1, y_2, y_3;\, a) = b, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \\ \Psi(x, y_1, y_2, y_3;\, a;\, \gamma_1, \ldots) = \delta; \end{array} \right.$$

$$3^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} V\ (x, y_1, y_2, y_3) = b, \\ \Psi_1(x, y_1, y_2, y_3;\, \gamma_1, \ldots) = \delta_1, \\ \Psi_2(x, y_1, y_2, y_3;\, \gamma_1, \ldots) = \delta_2. \end{array} \right.$$

Les multiplicités à trois dimensions engendrées par des courbes de la famille dont chacune coupe les courbes infiniment voisines sont définies respectivement de la manière suivante :

1° On a l'enveloppe de la surface

$$V(x, y_1, y_2, y_3;\, a_1, a_2) = f(a_1, a_2);$$

2° On a l'enveloppe de la surface

$$V(x, y_1, y_2, y_3;\, a) = f(a);$$

3° On a la surface

$$V(x, y_1, y_2, y_3) = b.$$

Si $n = 4$, on peut prendre en particulier $k = 2$, h étant nécessairement égal à 1. On a les courbes définies par les équations

$$\begin{gathered}
V_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ a) = b_1, \\
V_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ a) = b_2, \\
\frac{\partial V_1}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_2}{\partial a} = \alpha, \\
\Phi(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ \alpha, \beta) = 0.
\end{gathered}$$

Les multiplicités à trois dimensions engendrées par des courbes de la famille dont chacune coupe les courbes infiniment voisines s'obtiennent en éliminant a et b_2 entre les équations

$$\begin{gathered}
V_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ a) = f(a, b_2), \\
V_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ a) = b_2, \\
\frac{\partial V_1}{\partial a} - f'_{b_2} \frac{\partial V_2}{\partial a} = f'_a, \\
\Phi(x, y_1, y_2, y_3, y_4;\ a, -f'_{b_2}) = 0.
\end{gathered}$$

Au type précédent appartiennent les extrémales obtenues en partant d'un système de trois équations de Monge linéaires en y'_1, y'_2, y'_3, y'_4.