BULLETIN DE LA S. M. F.

CARTAN

Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 140-177.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__140_0>

LE PRINCIPE DE DUALITÉ ET CERTAINES INTÉGRALES MULTIPLES DE L'ESPACE TANGENTIEL ET DE L'ESPACE RÉGLÉ;

Par M. Élie Cartan.

On a considéré de tout temps, depuis qu'il y a des géomètres, des intégrales multiples relatives à des ensembles de points dans le plan ou dans l'espace, intégrales exprimant des propriétés *métriques* de ces ensembles, c'est-à-dire ne changeant pas de valeur lorsqu'on fait subir aux points un même déplacement dans le plan ou dans l'espace. De cette nature sont l'*aire* d'une portion du plan et le *volume* d'une portion de l'espace.

Il est tout naturel, après les développements qu'a pris dans ce siècle le *principe de dualité* qui nous fait regarder le plan comme engendré par des *droites* aussi bien que par des *points*, et l'espace comme engendré par des *plans* aussi bien que par des *points*, de se demander si certaines intégrales multiples étendues à des *ensembles de droites* dans le plan ou à des *ensembles de plans* dans l'espace ne jouiraient pas de propriétés analogues à l'*aire* et au *volume*, c'est-à-dire ne pourraient pas être invariantes lorsqu'on fait subir à toutes ces droites ou à tous ces plans un même déplacement. La question, ainsi posée, se réduit à un pur problème de calcul, grâce aux théories de M. Lie, qui permettent de former *toutes* ces quantités. Néanmoins, on peut les considérer à un point de vue plus élémentaire que celui que nécessiterait l'application des méthodes de M. Lie et les former *a priori*. Voici les principaux résultats auxquels on arrive.

Il existe dans le plan, regardé comme engendré par des droites, une intégrale double invariante exprimant une propriété métrique d'un ensemble quelconque de droites dépendant de deux paramètres, pourvu que parmi les droites de cet ensemble ne figure pas la droite de l'infini. *Si l'on prend l'ensemble des droites qui coupent un segment de droite donné, l'intégrale correspondante est égale au double de la longueur de ce segment; si l'on prend l'ensemble des droites qui coupent une courbe fermée convexe, on obtient le périmètre de cette courbe.*

Il existe encore dans le plan une autre intégrale simple étendue à des droites dépendant d'un seul paramètre : elle exprime simplement l'angle des deux droites limites.

Dans l'espace *tangentiel*, c'est-à-dire considéré comme engendré par des plans, il existe de même deux intégrales : l'une double, étendue à des ensembles de plans dépendant de deux paramètres, exprime l'aire découpée sur une sphère de rayon égal à l'unité par les normales aux plans menées par le centre de cette sphère. La deuxième est une intégrale triple et est donc étendue à des ensembles de plans quelconques, pourvu toutefois que le plan de l'infini ne soit pas l'un d'eux. *Étendue à l'ensemble des plans qui coupent un arc de courbe, cette intégrale est égale au produit de π par la longueur de cet arc de courbe.* Mais ce qui fait surtout l'intérêt de cette intégrale, c'est que *si on l'étend à l'ensemble des plans qui coupent une surface fermée convexe, pour fixer les idées, on a une nouvelle quantité, qu'on peut appeler le* périmètre *de cette surface, de la même dimension qu'une longueur; le* périmètre *ainsi défini d'une sphère est égal au quadruple de son diamètre; celui d'un cylindre droit est égal au périmètre ordinaire de sa base augmenté du double de la hauteur.* Le périmètre d'une surface fermée peut donc être regardé, en un certain sens, comme le *dualistique* du volume situé à l'intérieur de cette surface.

Enfin, on peut aussi regarder l'espace comme engendré par des droites, ce qui le rend son propre dualistique, et il existe aussi dans l'espace réglé des intégrales multiples *métriques*. Une de ces intégrales est une intégrale quadruple et, par suite, s'étend à des ensembles de droites quelconques; *étendue à l'ensemble des droites qui coupent une portion de surface, elle est égale au produit de π par l'aire de cette portion de surface; étendue à l'ensemble des droites qui coupent une surface fermée convexe, elle est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par l'aire de cette surface.*

Il existe deux autres intégrales de l'espace réglé, et elles sont doubles, par suite s'étendent à des ensembles de droites d'une congruence ; l'une d'elles représente l'aire découpée, sur une sphère de rayon égal à l'unité, par les parallèles à ces droites menées par le centre de la sphère. Quant à l'autre, elle jouit de la propriété de se reproduire, divisée par n, lorsque les droites de la congruence se réfractent à travers une surface dans un milieu d'indice n; de plus, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient normales à une même surface est que l'intégrale relative à tout *pinceau* de la congruence soit nulle, d'où résulte immédiatement que, *par réfraction, la congruence des droites normales à une surface se change en une congruence jouissant de la même propriété*, ce qui est un théorème bien connu.

La forme même de toutes ces intégrales suggère l'idée de les généraliser en définissant les angles et les distances au moyen de rapports anharmoniques relativement à une quadrique quelconque remplaçant le cercle imaginaire de l'infini. Ces intégrales généralisées jouissent de propriétés essentiellement analogues aux premières. Celles qui sont relatives à l'espace réglé conduisent même à des remarques intéressantes sur le complexe des tangentes à une quadrique; mais leur développement aurait été un peu étranger au sujet, et je me suis contenté d'indiquer l'existence de ces intégrales.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux intégrales du plan, le troisième aux intégrales de l'espace tangentiel, le quatrième aux intégrales doubles et le cinquième à l'intégrale quadruple de l'espace réglé.

§ 1.

Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, considérons un ensemble de droites

$$ux + vy + 1 = 0$$

et l'intégrale double

$$\int\int \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

étendue à toutes les droites de cet ensemble. Cette quantité jouit de la propriété remarquable de ne pas changer de valeur lorsqu'on fait subir à toutes les droites considérées un même déplacement dans le plan, ou encore, ce qui revient au même, lorsqu'on effectue un changement quelconque de coordonnées rectangulaires.

Pour démontrer ce fait et le mettre nettement en évidence, introduisons les coordonnées *homogènes* de la droite, c'est-à-dire remplaçons u et v par $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, où u, v, w devront être regardées comme fonctions de *deux* paramètres α et β. Alors ([1])

$$du\,dv = d\frac{u}{w}\,d\frac{v}{w} = \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{w^3}.$$

Par suite, l'intégrale double devient

$$(2)\qquad \iint \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, tout changement de coordonnées rectangulaires revient à effectuer sur u, v, w une substitution linéaire reproduisant la forme u^2+v^2 à un facteur constant près. Mais, par une substitution linéaire quelconque, le numérateur de la quantité sous le signe $\iint$ se reproduit, multiplié par le déterminant de la substitution ; car des formules

$$(3)\qquad \begin{cases} u = a u' + b v' + c w', \\ v = a' u' + b' v' + c' w', \\ w = a'' u' + b'' v' + c'' w', \end{cases}$$

([1]) On a, en effet,

$$du\,dv = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) d\alpha\,d\beta ;$$

si l'on pose

$$u = f(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \xi), \qquad v = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \xi),$$
$$du = A\,d\lambda + B\,d\mu + \ldots + C\,d\xi, \qquad dv = A'\,d\lambda + B'\,d\mu + \ldots + C'\,d\xi,$$

on a

$$du\,dv = (A\,d\lambda + B\,d\mu + \ldots + C\,d\xi)\,(A'\,d\lambda + B'\,d\mu + \ldots + C'\,d\xi),$$

à condition de remplacer, dans le produit du second membre effectué *sans altérer l'ordre des différentielles* de chaque produit partiel, $d\lambda\,d\lambda$ par 0 et $d\lambda\,d\mu = -\,d\mu\,d\lambda$ par $\frac{D(\lambda, \mu)}{D(\alpha, \beta)}\,d\alpha\,d\beta$.

on déduit

$$\begin{aligned}&u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv\\
&= \begin{vmatrix} u & v & w \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} dv'\,dw' + \ldots + \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} du'\,dv'\\
&= \Delta(u'\,dv'\,dw' + v'\,dw'\,du' + w'\,du\,dv').\end{aligned}$$

D'autre part, en ce qui regarde le dénominateur, il se reproduit, dans le cas présent, à un facteur constant près. Ce facteur est égal à Δ. En effet, d'abord $c = c' = 0$; de plus, si l'on exprime

$$ux + vy + w = \lambda(u'x' + v'y' + w'),$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} \lambda x' &= ax + a'y + a'', \\ \lambda y' &= bx + b'y + b'', \\ \lambda\ &= \qquad\qquad\quad c'', \end{aligned}\right.$$

formules qui doivent représenter un changement de coordonnées rectangulaires; donc

$$ab' - ba' = c''^2,$$

et comme la forme $u^2 + v^2$ se reproduit multipliée par le déterminant de la substitution en u, v (1), le facteur cherché est

$$(ab' - ba')^{\frac{3}{2}} = (ab' - ba')c'' = \Delta.$$

On voit donc finalement que la quantité sous le signe $\int\int$, dans l'intégrale (2), se reproduit par tout changement de coordonnées rectangulaires. *L'intégrale* (2) *exprime donc une propriété métrique de l'ensemble de droites considéré.*

Forme particulière de l'équation double. — Prenons pour u, v, w les coordonnées *normales* de la droite

$$u = \cos\alpha, \qquad v = \sin\alpha, \qquad w = -p;$$

---

(1) Si

$$u^2 + v^2 = h(u'^2 + v'^2),$$

le discriminant de la nouvelle forme, qui est égal à h^2, doit être égal au carré du déterminant de la substitution; d'où

$$h = ab' - ba'.$$

alors $du\,dv$ s'annule, et il reste

$$\iint (u\,dv - v\,du)\,dw = \iint dp\,d\alpha.$$

En particulier, si l'on considère l'ensemble des droites qui *coupent* un cercle donné de rayon R, cercle qu'on peut, d'après ce qui précède, supposer décrit de l'origine comme centre, il faut faire varier p de o à R et α de o à 2π; ce qui donne, dans ce cas,

$$\iint dp\,d\alpha = 2\pi R,$$

c'est-à-dire le *périmètre du cercle.* C'est un cas particulier du théorème suivant :

L'intégrale double $\displaystyle\iint \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$, *étendue à toutes les droites qui coupent une courbe fermée convexe, est égale au périmètre de cette courbe.*

Ce théorème est lui-même une conséquence du suivant :

L'intégrale double précédente, étendue à toutes les droites qui rencontrent un segment de droite donné, est égale au double de la longueur de ce segment.

Démonstration. — On pourrait démontrer ce théorème en donnant au segment une position particulière; mais on peut aussi le démontrer directement dans le cas général.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées normales de la droite qui porte le segment; on a

$$u_0^2 + v_0^2 = 1,$$
$$u_0 x + v_0 y + w_0 = 0,$$
$$u_0\,dx + v_0\,dy = 0.$$

Posons

$$\begin{cases} u_0 u + v_0 v = \lambda, \\ v_0 u - u_0 v = \mu, \\ u^2 + v^2 = 1\,; \end{cases}$$

on aura alors

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \tag{4}$$

et l'on devra donner à λ et μ toutes les valeurs, de façon que le rapport $\frac{u}{v}$ passe une fois et une seule par une valeur donnée; ce qu'on obtiendra en prenant μ positif et λ quelconque. On aura alors

$$\left\{\begin{aligned} u &= u_0\lambda + v_0\mu, \\ v &= v_0\lambda - u_0\mu, \\ w &= w_0\lambda + \mu(u_0 y - v_0 x) \end{aligned}\right.$$

et, par suite, en vertu de (4),

$$\begin{aligned} u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv &= (u\,dv - v\,du)\,dw \\ &= -\mu(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda)(u_0\,dy - v_0\,dx). \end{aligned}$$

Enfin on a

$$(u_0\,dy - v_0\,dx)^2 = (u_0^2 + v_0^2)(dx^2 + dy^2) - (u_0\,dx + v_0\,dy)^2 = dx^2 + dy^2,$$

de sorte que

$$\int\!\!\int \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\!\!\int \mu(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda)\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

En posant

$$\lambda = \sin\varphi, \qquad \mu = \cos\varphi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

cette intégrale se transforme enfin en

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 2s,$$

s désignant la longueur du segment.

Il résulte immédiatement de là que, *étant donné un arc de courbe quelconque, on obtient en coordonnées tangentielles le double de la longueur de cet arc en prenant l'intégrale double* $\int\!\!\int \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ *étendue aux droites qui coupent l'arc de courbe autant de fois qu'elles ont de points d'intersection avec cet arc.*

Ce théorème contient comme cas particulier celui qui est relatif à une courbe fermée convexe. Par exemple, pour l'ellipse

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

on peut obtenir toutes les droites en question en posant

$$u = \frac{r}{a}\cos\varphi, \qquad v = \frac{r}{b}\sin\varphi, \qquad r > 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

et alors

$$\int\int \frac{du\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\int \frac{a^2 b^2\,dr\,d\varphi}{r^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 b^2\,d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 2.

Au lieu de se placer en coordonnées rectangulaires, on peut aussi se placer en coordonnées obliques. Si alors

$$\varphi(u, v) = 0$$

est l'équation tangentielle des points circulaires à l'infini, il n'y a qu'à considérer l'intégrale double

$$\int\int \frac{\sqrt{\delta}(u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv)}{[\varphi(u, v)]^{\frac{3}{2}}},$$

δ désignant le discriminant de la forme φ. Cette intégrale est égale à la précédente; par exemple, si

$$\varphi(u, v) = u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta,$$

on a

$$\int\int \frac{\sin\theta(u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv)}{[u^2+v^2-2uv\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

Plus généralement considérons une conique, que nous appellerons *conique fondamentale* ou *conique absolue,* ayant pour équation tangentielle

(1) $$\varphi(u, v, w) = 0,$$

et considérons l'intégrale double

(2) $$\int\int \frac{\sqrt{\Delta}(u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv)}{[\varphi(u, v, w)]^{\frac{3}{2}}},$$

où Δ désigne le discriminant de la forme φ.

Si l'on effectue sur u, v, w une substitution linéaire quelconque de déterminant D, la forme φ se change en une forme φ', dont le discriminant Δ' est égal à ΔD^2, de sorte que

$$\begin{aligned} I &= \int\int \frac{\sqrt{\Delta}\,D(u'\,dv'\,dw' + v'\,dw'\,du' + w'\,du'\,dv')}{[\varphi'(u', v', w')]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int\int \frac{\sqrt{\Delta'}(u'\,dv'\,dw' + \ldots)}{\varphi'^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

I *conserve la même forme*. L'intégrale I, étendue à un ensemble de droites donné, représente donc une quantité attachée à cet ensemble de droites et à la conique fondamentale, *quantité qui se conserve par une substitution linéaire quelconque effectuée sur les droites et la conique.*

En particulier, on peut se proposer de chercher la signification de cette intégrale, lorsqu'on l'étend à l'ensemble des droites qui coupent un segment de droite donné, ou plus généralement un arc de courbe donné. Il faut naturellement, pour que cela ait un sens, que la forme φ ne puisse s'annuler pour aucune de ces droites, c'est-à-dire ou bien que φ *soit une forme définie,* ou bien, s'il n'en est pas ainsi, que *le segment considéré soit tout entier à l'intérieur de la conique fondamentale.*

Mais, avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler quelques définitions souvent usitées en Géométrie projective.

Étant donnés deux points A, B (à l'intérieur de la conique fondamentale, si cette dernière est réelle) appelons *distance* de ces deux points le logarithme, divisé par $2i$ (ou par 2, si la conique est réelle), du rapport anharmonique des points A, B et des deux points d'intersection de la droite AB avec la conique.

Étant de même données deux droites (se coupant à l'intérieur de la conique, si celle-ci est réelle), appelons *angle* de ces deux droites le logarithme, divisé par $2i$, du rapport anharmonique de ces deux droites et des deux tangentes à la conique menées par leur point d'intersection.

Cette dernière définition coïncide avec la définition ordinaire si la conique fondamentale est formée des deux points circulaires à l'infini.

Si l'on fait la perspective sur un plan d'une sphère, le point de vue étant au centre de la sphère, et qu'on prenne pour conique fondamentale l'intersection du plan et du cône asymptote de la sphère, on retombe sur la *distance* sphérique des points de la sphère dont on prend la perspective et sur l'*angle* des grands cercles qui se transforment en droites; de sorte qu'on a affaire, dans ce cas, à la Géométrie sphérique ordinaire.

Quoi qu'il en soit, cherchons, d'après ces définitions, l'expression de la distance d de deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Les coordonnées des points d'intersection de la conique avec la droite qui les joint sont de la forme

$$x_1 + \lambda x_2, \quad y_1 + \lambda y_2, \quad z_1 + \lambda z_2,$$

et il faut donner à λ les deux valeurs λ_1, λ_2, racines de l'équation

$$f(x_1, y_1, z_1) + 2\lambda(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1}) + \lambda_2 f(x_2, y_2, z_2) = 0,$$

où f désigne le premier membre de l'équation ponctuelle de la conique et f'_x, f'_y, f'_z ses *demi-dérivées.* On a donc par définition, si la conique est imaginaire,

$$e^{2id} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \frac{e^{id} - e^{-id}}{2i} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \sin d = \sqrt{\frac{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2) - (x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1})^2}{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}},$$

et de même, si la conique est réelle,

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} sh\, d &= \frac{e^d - e^{-d}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1})^2 - f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}}. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons de même, pour l'angle V de deux droites (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2), la formule

$$(4) \quad \sin V = \sqrt{\frac{\varphi(u_1, v_1, w_1)\varphi(u_2, v_2, w_2) - (u_2 \varphi'_{u_1} + v_2 \varphi'_{v_1} + w_2 \varphi'_{w_1})^2}{\varphi(u_1, v_1, w_1)\varphi(u_2, v_2, w_2)}}.$$

En particulier, la distance ds de deux points infiniment voisins

(x, y, z) et $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ est

$$ds = \sqrt{\frac{f(x, y, z)\,.\,f(dx, dy, dz) - (f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz)^2}{f(x, y, z)^2}},$$

et, si l'on choisit x, y, z de façon que $f(x, y, z)$ garde une valeur constante,

$$(5)\qquad ds = \sqrt{\frac{f(dx, dy, dz)}{f(x, y, z)}} \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{-\frac{f(dx, dy, dz)}{f(x, y, z)}},$$

suivant que la conique est imaginaire ou réelle.

De même l'angle dV de deux droites infiniment voisines est

$$(6)\qquad dV = \sqrt{\frac{\varphi(du, dv, dw)}{\varphi(u, v, w)}},$$

en supposant $\varphi(u, v, w)$ constant.

Cela étant, considérons l'intégrale I et cherchons sa valeur lorsqu'on l'étend à toutes les droites qui coupent un segment AB (situé à l'intérieur de la conique fondamentale, dans le cas où elle est réelle). Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite AB, et supposons que $f(x, y, z)$ est la forme *adjointe* de φ, ses coefficients étant les mineurs du discriminant de φ. Posons

$$u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} = \lambda.$$

Alors u, v, w sont déterminés par les équations

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} = \lambda, \\ ux + vy + wz = 0, \\ \varphi(u, v, w) = \varphi, \end{array} \right.$$

φ étant une valeur qu'on peut supposer constante. Pour résoudre les équations (7), introduisons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \varphi'_{u_0} & \varphi'_{v_0} & \varphi'_{w_0} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix},$$

cette dernière identité résultant de ce que f est la forme adjointe de φ.

On a, en faisant le produit de ces deux derniers déterminants,

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \varphi(u, v, w) & \lambda & 0 \\ \lambda & \varphi(u_0, v_0, w_0) & 0 \\ 0 & 0 & f(x, y, z) \end{vmatrix} = f(x, y, z)(\varphi\varphi_0 - \lambda^2$$

Si donc on pose

$$(v_0 f'_z - w_0 f'_y)\, u + (w_0 f'_x - u_0 f'_z)\, v + (u_0 f'_y - v_0 f'_x)\, w = \mu,$$

on aura

$$(8) \qquad \mu^2 + f(x, y, z)\lambda^2 = f(x, y, z)\, \varphi(u, v, w)\, \varphi(u_0, v_0, w_0).$$

On peut remarquer que, dans l'hypothèse faite, f est essentiellement positif (¹).

On a donc trois équations linéaires pour déterminer u, v, w en fonction de λ, μ, x, y, z, et il suffira de donner à μ des valeurs positives et à λ des valeurs positives ou négatives, de façon à satisfaire à l'équation (8). Enfin, on pourra s'astreindre à multiplier x, y, z par un facteur tel que $f(x, y, z)$ reste constant; alors λ et μ seront fonctions d'un même paramètre.

La résolution des équations donne, après un calcul facile,

$$(9) \quad \begin{cases} f(x, y, z)\, \varphi(u_0, v_0, w_0)\, u = u_0 f(x, y, z)\lambda + (\varphi'_{v_0} z - \varphi'_{w_0} y)\, \mu, \\ f(x, y, z)\, \varphi(u_0, v_0, w_0)\, v = v_0 f(x, y, z)\lambda + (\varphi'_{w_0} x - \varphi'_{u_0} z)\, \mu, \\ f(x, y, z)\, \varphi(u_0, v_0, w_0)\, w = w_0 f(x, y, z)\lambda + (\varphi'_{u_0} y - \varphi'_{v_0} x)\, \mu, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} & f^3 \varphi_0^3 (u\, dv\, dw + v\, dw\, du + w\, du\, dv) \\ & \quad = \begin{vmatrix} v_0 f & \varphi'_{w_0} x - \varphi'_{u_0} z \\ w_0 f & \varphi'_{u_0} y - \varphi'_{v_0} x \end{vmatrix} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)(\varphi'_{v_0} dz - \varphi'_{w_0} dy) + \ldots \\ & \quad = \mu f \varphi_0 (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \varphi'_{u_0} & \varphi'_{v_0} & \varphi'_{w_0} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(¹) Car si la conique est imaginaire, Δf est une forme définie positive; si elle est réelle, Δf est positif pour tout point à son intérieur; or ici Δ est le *carré* du discriminant de φ, donc toujours positif.

Pour calculer le déterminant du second membre, remarquons qu'il est égal à

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f'_{dx} & f'_{dy} & f'_{dz} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix}$$

et que, par suite, son carré est égal à

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(dx, dy, dz) & 0 & 0 \\ 0 & f(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(u_0, v_0, w_0) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} f(dx, dy, dz) f(x, y, z)\varphi(u_0, v_0, w_0).$$

Donc

$$I = \int\int \frac{\mu(\lambda d\mu - \mu d\lambda)}{f^2\varphi_0^2}\,\frac{\sqrt{f(dx, dy, dz) f(x, y, z)\varphi(u_0, v_0, w_0)}}{[\varphi(u, v, w)]^{\frac{3}{2}}};$$

ou, en posant

$$\lambda = \alpha\sqrt{\varphi\varphi_0}, \qquad \mu = \beta\sqrt{f\varphi\varphi_0},$$

$$I = \int\int \beta(\alpha d\beta - \beta d\alpha).ds = 2s, \tag{10}$$

s désignant la distance AB [1].

D'ailleurs, ce résultat était à prévoir par des considérations d'invariants. Si l'on considère une droite quelconque et deux points A et B sur cette droite, l'intégrale I, étendue à toutes les droites qui coupent le segment AB, est une fonction des deux extrémités qu'on peut désigner par $\overline{AB}$ et qui jouit manifestement de la propriété

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC};$$

de plus, c'est une fonction du segment AB qui ne change pas lorsqu'on effectue sur A, B et la conique fondamentale une même substitution linéaire. On peut démontrer que la *distance* des deux points A et B, telle qu'elle a été définie plus haut, est, à un fac-

---

[1] Dans le cas où la conique fondamentale est réelle, $\Delta\varphi$ est négatif et il faut prendre pour I

$$I = \int\int \frac{\Delta(u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv)}{(-\Delta\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui conduit au même résultat.

teur constant près, la seule fonction qui jouisse de cette propriété. Cela est d'ailleurs évident si la conique fondamentale se réduit aux deux points circulaires à l'infini.

Nous pouvons donc énoncer, sur l'intégrale double I, les mêmes théorèmes qu'au paragraphe premier; en particulier, sur la *longueur* d'un arc de courbe (relativement à la conique fondamentale) et le périmètre d'une ligne fermée convexe. Ces théorèmes s'appliquent immédiatement en Géométrie sphérique; u, v, w désignent alors les *coordonnées* d'un grand cercle de la sphère (coordonnées ponctuelles du pôle de ce grand cercle).

La formule qui donne ainsi sur une sphère le périmètre d'un triangle sphérique au moyen d'une intégrale double ne doit pas nous étonner; *cette intégrale double représente simplement l'aire de la portion de la sphère extérieure au triangle supplémentaire du triangle considéré*, d'après la signification même de u, v, w, si l'on prend

$$\varphi(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^3 = 1.$$

En effet, comme vérification, si a, b, c sont les côtés du triangle, son périmètre est $a + b + c$ et les angles du triangle supplémentaire sont $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. L'aire de ce triangle est donc

$$(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) - \pi = 2\pi - a - b - c$$

et l'aire de la portion de la sphère extérieure à ce triangle est bien

$$2\pi - (2\pi - a - b - c) = a + b + c.$$

D'ailleurs, l'intégrale double qui donne l'*aire* est tout à fait la dualistique de la première; il suffit de considérer

$$J = \int\int \frac{\sqrt{\Delta}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)}{[f(x, y, z)]^{\frac{3}{2}}},$$

Δ désignant maintenant le discriminant de f. En Géométrie ordinaire, $f = z^2$, et l'on a simplement, en faisant $z = 1$, l'intégrale $\int\int dx\,dy$. En Géométrie sphérique, on a l'aire d'une portion de la sphère. On démontre, d'une façon identique à celle de I, que cette intégrale, étendue à l'espace compris dans l'angle de deux droites (et dans son opposé par le sommet), aucun point de ces droites et aucun des points à l'intérieur n'étant sur la conique fondamentale, est égale au double de l'angle des deux droites; d'où l'on déduit immédiatement un théorème sur l'*aire* de la portion du plan extérieur à une courbe fermée convexe (conique fondamentale *imaginaire*) au moyen de la quantité dont varie l'*angle de contingence* lorsqu'on parcourt la courbe ($\pi - A + \pi - B + \pi - C$ dans le cas d'un triangle).

§ 3.

On peut généraliser les résultats précédents, presque sans modification, pour passer du plan à l'espace. Nous appellerons x, y, z, t les coordonnées ponctuelles et u, v, w, h les coordonnées tangentielles.

Si nous prenons d'abord les coordonnées cartésiennes rectangulaires, nous considérerons l'intégrale triple [1]

$$(1) \quad I = \iiint \frac{u\, dv\, dw\, dh + v\, dw\, du\, dh + w\, du\, dv\, dh - h\, du\, dv\, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}.$$

Cette intégrale se reproduit par toute transformation de coordonnées rectangulaires, le numérateur se reproduisant multiplié par le déterminant de la substitution, le dénominateur se trouvant multiplié par le même facteur.

Si l'on étend cette intégrale à un segment de droite, par exemple porté par l'axe des z, on doit trouver une quantité proportionnelle à la longueur de ce segment. En effet, si l'on pose

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$
$$wz + h = 0,$$

l'intégrale deviendra

$$\iiint - w(u\, dv\, dw + v\, dw\, du + w\, du\, dv)\, dz;$$

---

[1] Il est entendu que, si λ, μ, ν sont des fonctions de trois paramètres α, β, γ,

$$d\lambda\, d\mu\, d\nu = d\mu\, d\nu\, d\lambda = d\nu\, d\lambda\, d\mu = - d\lambda\, d\nu\, d\mu = \frac{D(\lambda, \mu, \nu)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

u, v, w prenant toutes les valeurs possibles sur la portion de la sphère de rayon 1 et de centre 0 située au-dessus du plan des xy, et z variant de z_1 à z_2; on peut donc poser

$$\left\{\begin{array}{l} u = \cos\theta\cos\varphi, \\ v = \cos\theta\sin\varphi, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ w = \sin\theta, \end{array}\right.$$

et alors

$$\text{(2)} \qquad I = (z_2 - z_1)\iint \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi = \pi(z_2 - z_1).$$

L'intégrale triple I *étendue à toutes les droites qui coupent un arc de courbe donné, chacune d'elles étant prise autant de fois qu'elle a de points d'intersection avec l'arc, est égale à la longueur de cet arc de courbe, multipliée par* π.

Par exemple, étendue à toutes les droites qui coupent une courbe fermée plane convexe, l'intégrale I est égale au périmètre de la courbe, multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi étendre l'intégrale I à l'ensemble des plans qui coupent une *surface* fermée convexe; on peut alors toujours supposer que l'origine est à l'intérieur de la surface; si l'on astreint u, v, w à satisfaire à la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

et si l'on considère la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, à chaque point M de la surface correspond, sur la sphère, un point m trace de la perpendiculaire au plan tangent en M menée par l'origine. Si alors p est la distance de l'origine au plan tangent, l'intégrale est

$$\text{(3)} \qquad I = \iint p\, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément de surface de la sphère en m.

On a donc là une nouvelle quantité *métrique* attachée à la surface fermée convexe et *indépendante du choix du point* O *à l'intérieur de la surface*. Pour une sphère, c'est $4\pi R$; pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

cette nouvelle quantité est l'intégrale double

$$\iint \sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}\, d\sigma,$$

u, v, w désignant les coordonnées d'un point de la sphère de rayon 1 concentrique à l'ellipsoïde.

Si l'on est en coordonnées obliques, ou d'une manière générale, si l'équation tangentielle du cercle imaginaire à l'infini est

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

on a

$$(4) \quad I = \iiint \frac{\sqrt{\delta}(u\,dv\,dw\,dh + v\,dw\,du\,dh + w\,du\,dv\,dh - h\,du\,dv\,dw)}{[\varphi(u, v, w)]^2},$$

δ désignant le discriminant de la forme φ.

Généralisation. — De la même façon qu'en Géométrie plane, considérons une quadrique, d'équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w, h) = 0,$$

que nous nommerons *quadrique fondamentale,* et l'intégrale triple

$$(5) \quad I = \iiint \frac{\sqrt{\pm\Delta}(u\,dv\,dw\,dh + v\,dw\,du\,dh + w\,du\,dv\,dh - h\,du\,dv\,dw)}{[\varphi(u, v, w, h)]^2},$$

Δ désignant le discriminant, supposé différent de zéro, de la forme φ.

Par une substitution linéaire effectuée sur u, v, w, h, le numérateur se reproduit multiplié par le déterminant D de la substitution, et le discriminant de la nouvelle forme φ est égal à $\Delta . D^2$, de sorte que I se change dans la même expression relative à la forme transformée φ'. De plus, si l'on multiplie φ par une constante m, le dénominateur est multiplié par m^2, mais, le discriminant Δ étant multiplié par m^4, le numérateur est également multiplié par m^2.

L'intégrale triple I, étendue à un ensemble de plans (dont aucun n'est tangent à la quadrique fondamentale), est donc une quantité attachée à cet ensemble de plans et à la quadrique, et qui ne change pas par une même substitution linéaire quelconque effectuée sur les plans et la quadrique.

On peut, comme dans le paragraphe précédent, définir la *dis-*

tance de deux points et l'*angle* de deux plans relativement à la quadrique fondamentale. En particulier, la distance de deux points infiniment voisins est

$$ds = \sqrt{\pm \frac{f(dx, dy, dz, dt)}{f(x, y, z, t)}}, \tag{6}$$

$f = 0$ désignant l'équation ponctuelle de la quadrique, la forme f étant assujettie à rester constante, les deux signes correspondant aux deux cas où la droite, qui joint les deux points, ne coupe pas ou coupe la quadrique.

De même, l'angle de deux plans infiniment voisins est

$$dV = \sqrt{\pm \frac{\varphi(du, dv, dw, dh)}{\varphi(u, v, w, h)}}, \tag{7}$$

les deux signes correspondant aux deux cas où les plans tangents à la quadrique menés par la droite d'intersection des deux plans sont imaginaires ou réels (la forme φ gardant la même valeur pour les deux plans).

Cela étant, cherchons la signification de l'intégrale I étendue à tous les plans qui coupent un segment de droite MN. Pour que cette intégrale ait un sens il faut que, d'aucun des points du segment MN, on ne puisse mener de plan tangent réel à la quadrique fondamentale.

On peut toujours, par une transformation homographique, faire en sorte que la droite MN ait pour équations

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

et que φ soit de la forme

$$\varphi = A u^2 + B v^2 + C w^2 + D h^2.$$

En écrivant que le plan (u, v, w, h) coupe le segment MN, nous obtenons

$$wz + ht = 0,$$

ce qui permet de poser

$$w = \lambda t, \qquad h = -\lambda z, \tag{8}$$

et, par suite :

$$\varphi = A u^2 + B v^2 + \lambda^2 (C t^2 + D z^2).$$

Comme u, v, λ peuvent prendre toutes les valeurs possibles et que φ doit garder un signe constant, il faut nécessairement que A, B, $Ct^2 + Dz^2$ aient, pour tous les points du segment MN, le même signe. Il y aura donc deux cas à distinguer :

Ou A, B, C, D ont le même signe, et alors on peut supposer

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2 + s^2;$$

Ou A, B, C sont de même signe, contraire à celui de D, et alors on peut supposer

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2 - s^2,$$

avec

$$t^2 - z^2 > 0.$$

Dans tous lès cas, on peut supposer $A = B = C = 1$ et de plus aussi

$$t^2 + Dz^2 = 1.$$

Alors, en prenant

$$u^2 + v^2 + \lambda^2 = 1, \tag{9}$$

φ garde une valeur constante. En portant les valeurs de u, v, w, h dans l'intégrale I, on obtient

$$I = \int\int\int \sqrt{\pm D}\, \lambda\, (\lambda du\, dv + u\, dv\, d\lambda + v\, d\lambda\, du)(z\, dt - t\, dz).$$

Mais on a

$$\begin{vmatrix} z & t \\ dz & dt \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Dz & t \\ Ddz & dt \end{vmatrix} = D(z\, dt - t\, dz)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Ddz^2 + dt^2 \end{vmatrix} = \pm ds^2;$$

donc

$$I = \int ds \int\int \lambda(\lambda\, du\, dv + u\, dv\, d\lambda + v\, d\lambda\, du) = \pi s, \tag{10}$$

s désignant la *distance* MN.

Le segment MN est quelconque, si la quadrique fondamentale est imaginaire, et il est tout entier à l'*intérieur* de la quadrique, si celle-ci est un ellipsoïde réel ou un hyperboloïde à deux nappes (quadrique réelle non réglée).

On déduit de là, dans le cas où la quadrique fondamentale est à génératrices imaginaires, que *l'intégrale* I, *étendue à tous les plans qui coupent un arc de courbe donné* (*situé tout entier à* *l'intérieur de la quadrique, si celle-ci est réelle), chacun de ces plans étant pris autant de fois qu'il a de points d'intersection avec l'arc, est égale à la* LONGUEUR *de cet arc de courbe (relativement à la quadrique fondamentale) multipliée par* $\frac{\pi}{2}$.

On pourrait de même considérer l'intégrale étendue à une surface fermée convexe (située tout entière à l'intérieur de la quadrique fondamentale, si celle-ci est réelle).

L'intégrale I est la *dualistique* de l'intégrale J

$$(11)\quad \mathrm{J} = \int\int\int \frac{\sqrt{\pm\Delta}(x\,dy\,dz\,dt + y\,dz\,dx\,dt + z\,dx\,dy\,dt - t\,dx\,dy\,dz)}{[f(x, y, z, t)]^2},$$

où Δ désigne le discriminant de la forme quadratique f. Cette intégrale, étendue à un certain ensemble de points, représente ce qu'on peut appeler le *volume* de cet ensemble relativement à la quadrique fondamentale. Si cette quadrique est à génératrices imaginaires, le *volume* de l'espace compris dans deux des dièdres opposés par l'arête formés par deux plans donnés (aucun des points de cet espace n'étant sur la quadrique, si celle-ci est réelle) est égal à l'*angle* des deux plans multiplié par π. On peut étendre aussi l'intégrale à tous les points d'où l'on peut mener un plan tangent à une portion de surface développable (limitée par deux de ses plans tangents); le *volume* obtenu est égal à la variation de l'*angle de contingence* de la développable, multipliée par $\frac{\pi}{2}$.

Revenons aux coordonnées rectangulaires ordinaires. Il y a une autre intégrale qui a une signification *métrique :* c'est l'intégrale double

$$\int\int \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}},$$

étendue à un ensemble de plans satisfaisant à une même relation (tangents à une même surface). Cette intégrale n'est autre chose que l'*aire de l'image sphérique de la portion de surface considérée,* car u, v, w peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'un point de la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, le point où la normale au plan (u, v, w, h) perce cette sphère.

Cette intégrale, qui est égale aussi, comme on sait, à

$$\iint \frac{d\sigma}{R_1 R_2},$$

$d\sigma$ désignant l'élément de surface de l'enveloppe des plans considérés, et $\frac{1}{R_1 R_2}$ la *courbure totale* de cette surface, n'a pas d'analogue, quand on remplace le cercle imaginaire de l'infini par une quadrique quelconque.

§ 4.

Dans le paragraphe précédent, nous avons surtout considéré l'espace comme engendré par des plans; regardons-le maintenant comme engendré par des droites. Il existe aussi, dans ce cas, des intégrales multiples qui, étendues à certains ensembles de droites, éléments de l'espace, jouissent de propriétés invariantes, lorsqu'on imprime un même déplacement quelconque dans l'espace à toutes ces droites.

Trois intégrales jouissent de cette propriété, deux intégrales doubles et une intégrale quadruple. Nous nous occuperons des deux premières dans ce paragraphe.

Les intégrales doubles en question sont naturellement étendues à des droites dépendant de *deux* paramètres, c'est-à-dire faisant partie d'une *congruence*; elles se rapportent donc à un *pinceau* de droites d'une congruence.

Pour arriver à la notion de la première de ces intégrales, considérons les droites (en nombre simplement infini) qui limitent le pinceau et supposons pris, sur chacune d'elles, un point M, de manière à former une courbe fermée C (entourant le pinceau à la façon d'un anneau).

Si x, y, z sont les coordonnées d'un point M de cette courbe; α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D correspondante, ds la différentielle de l'arc de la courbe C et, enfin, V l'angle de la droite D avec la tangente en M à la courbe C, considérons l'intégrale

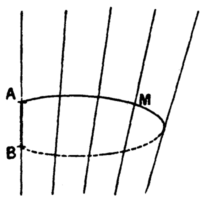
$$(1) \qquad I = \int \frac{\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \int \cos V\,ds,$$

prise le long de la courbe C. Cette intégrale ne dépend pas de la courbe choisie C entourant le pinceau, car si l'on remplace x, y, z par $x + \rho\alpha$, $y + \rho\beta$, $z + \rho\gamma$, l'intégrale I est simplement augmentée de

$$\int_{(C)} \frac{\rho(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \int_{(C)} d\left(\rho\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right) = 0.$$

On peut prendre, par exemple, pour C la courbe suivante. Partons d'un point A d'une des droites qui limitent le pinceau et considérons la trajectoire orthogonale issue de A des droites limites : en général elle ne reviendra pas au point A, mais coupera de nouveau la première droite en un certain point B différent de A. En prenant pour courbe C l'arc de courbe AMB ainsi dé-

Fig. 1.



terminé, augmenté du segment BA, la portion de l'intégrale I relative à l'arc AMB est nulle et celle qui est relative à BA n'est autre que la longueur de ce segment (*fig.* 1). On a donc

$$\text{(2)} \qquad I = AB.$$

Il résulte de là que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale* I *s'annule, quel que soit le pinceau pris dans la congruence, est que la congruence soit formée des droites normales à une surface.*

La condition est nécessaire; cela est évident d'après la formule (2). Elle est suffisante, car si l'on se donne arbitrairement un point A sur une des droites D de la congruence, on peut déterminer sur toute autre droite D′ un point M en considérant une surface réglée quelconque contenant D, D′ et formée de droites de la congruence et cherchant la trajectoire orthogonale des génératrices de cette surface qui passe par A; elle coupe la droite D′

en un point M *indépendant* de la surface considérée, en vertu de (2) et de l'hypothèse que I est identiquement nulle. La surface lieu des points M est alors manifestement normale à toutes les droites de la congruence.

L'intégrale I jouit de la propriété que si l'on divise un pinceau de droites en deux pinceaux partiels, l'intégrale relative au pinceau total est égale à la somme des intégrales relatives aux pinceaux partiels. Il est donc à prévoir qu'elle peut se représenter au moyen d'une intégrale double étendue à toutes les droites du pinceau. Avant de montrer ce point, nous pouvons déduire de la considération de cette intégrale I une conséquence importante.

Supposons que l'on fasse *réfracter* les droites d'une congruence dans un milieu d'indice n suivant les lois ordinaires de la réfraction. Les droites réfractées forment une nouvelle congruence. Cherchons ce que devient l'intégrale I relative à un pinceau de la première congruence lorsqu'on passe au pinceau réfracté. Si l'on partage le pinceau en pinceaux infiniment petits, chacun d'eux peut être considéré comme réfracté sur un plan, le plan tangent à la surface de séparation au point d'intersection de cette surface avec une des droites du pinceau. En appelant i l'angle d'incidence des droites du pinceau sur ce plan et θ l'angle que fait la projection sur le plan de chaque droite avec la tangente à la courbe C d'intersection du plan et du pinceau, on a

$$\mathrm{I} = \int\int_{(\mathrm{C})} \sin i \cos\theta \, ds = \sin i \int_{(\mathrm{C})} \cos\theta \, ds.$$

Dans le pinceau réfracté θ ne change pas, non plus que la courbe C, mais on a

$$\sin i' = \frac{1}{n} \sin i,$$

de sorte que

$$\mathrm{I} = n\mathrm{I}'. \tag{3}$$

La relation (3) étant vraie pour tout pinceau infiniment petit est évidemment vraie pour un pinceau quelconque :

L'intégrale I, *relative à un pinceau de droites d'une congruence, se reproduit donc, divisée par* n, *pour le pinceau réfracté dans un milieu d'indice* n.

Il résulte manifestement de là le théorème suivant, bien connu :

Étant donnée une congruence de droites normales à une surface, les droites résultant de leur réfraction dans un milieu d'indice n sont également normales à une surface.

Ces considérations mettent bien en évidence l'importance de l'intégrale I et par suite de l'intégrale double qui lui est égale. C'est cette intégrale double que nous allons maintenant déterminer. Pour cela, rappelons la définition des coordonnées plückériennes de la droite. Étant donnée une droite définie par deux points (x, y, z) et (x', y', z'), on appelle coordonnées de cette droite les six quantités α, β, γ, p, q, r déterminées par

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = x - x', & \beta = y - y', & \gamma = z - z', \\ p = yz' - zy', & q = zx' - xz', & r = xy' - yx'; \end{cases}$$

ces six quantités sont liées par la relation

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0;$$

de plus, si la droite est définie par les deux plans (u, v, w, h) et (u', v', w', h'), on a, à un facteur constant près,

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha = vw' - wv', & \beta = wu' - uw', & \gamma = uv' - vu', \\ p = uh' - hu', & q = vh' - hv', & r = wh' - hw'. \end{cases}$$

Cela étant, si l'on considère les droites d'une congruence, leurs coordonnées peuvent être regardées comme des fonctions de deux paramètres a et b, et l'intégrale de courbe I est de la forme

$$I = \int_{(C)} A\, da + B\, db;$$

elle peut se mettre, comme on sait, sous la forme d'une intégrale de surface

$$\int\int \left(\frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial B} \right) da\, db = \int\int dA\, da + dB\, db.$$

Autrement dit, en revenant à l'expression (1) de I,

$$(6) \qquad I = \int\int \left(d \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} dx + d \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} dy + d \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} dz \right).$$

C'est cette expression (6) qu'il s'agit de transformer en y introduisant les coordonnées de la droite.

En effectuant les calculs, on trouve, pour l'expression sous le signe $\int\int$,

$$\frac{[\beta(\beta\,d\alpha-\alpha\,d\beta)+\gamma(\gamma\,d\alpha-\alpha\,d\gamma)]\,dx+\ldots+[\alpha(\alpha\,d\gamma-\gamma\,d\alpha)+\beta(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)]\,dz}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le numérateur de cette expression peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)(\beta\,dz-\gamma\,dy)\\&\quad+(\gamma\,d\alpha-\alpha\,d\gamma)(\gamma\,dx-\alpha\,dz)+(\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha)(\alpha\,dy-\beta\,dx).\end{aligned}$$

Or on a l'identité résultant de (4),

$$\beta z-\gamma y=p,$$

d'où

$$\beta\,dz-\gamma\,dy=dp+y\,d\gamma-z\,d\beta,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}&(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)(\beta\,dz-\gamma\,dy)\\&\quad=(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)\,dp+(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)(y\,d\gamma-z\,d\beta)\\&\quad=(\beta\,d\gamma-\gamma\,d\beta)\,dp+(\beta z-\gamma y)\,d\beta\,d\gamma\\&\quad=p\,d\beta\,d\gamma+\beta\,d\gamma\,dp+\gamma\,dp\,d\beta.\end{aligned}$$

En introduisant la notation

$$\omega_{\lambda\mu\nu}=\lambda\,d\mu\,d\nu+\mu\,d\nu\,d\lambda+\nu\,d\lambda\,d\mu,$$

on voit donc que

$$(7)\qquad I=\int\int\frac{\omega_{p\beta\gamma}+\omega_{q\gamma\alpha}+\omega_{r\alpha\beta}}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est l'intégrale double cherchée.

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface peut donc s'écrire

$$\omega_{p\beta\gamma}+\omega_{q\gamma\alpha}+\omega_{r\alpha\beta}=0.$$

Si par exemple on détermine la droite par sa trace sur le plan des xy et ses deux premiers paramètres directeurs, le troisième γ

étant pris égal à l'unité, on a

$$p = -y, \qquad q = x, \qquad r = \alpha y - \beta x$$

et

$$\omega_p \beta\gamma + \omega_q \gamma\alpha + \omega_r \alpha\beta = (1+\beta^2)\,d\alpha\,dx + (1+\alpha^2)\,d\beta\,dy - \alpha\beta(d\alpha\,dy + d\beta\,dx).$$

Si donc on prend x et y pour paramètres de la congruence, l'équation cherchée est

$$(8) \qquad -(1+\beta^2)\frac{\partial\alpha}{\partial y} + (1+\alpha^2)\frac{\partial\beta}{\partial x} - \alpha\beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right) = 0;$$

si au contraire on prend α et β, l'équation est

$$(9) \qquad (1+\beta^2)\frac{\partial x}{\partial\beta} - (1+\alpha^2)\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \alpha\beta\left(\frac{\partial y}{\partial\beta} - \frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Tous ces résultats peuvent être généralisés en remplaçant le cercle imaginaire de l'infini par une quadrique quelconque. Les mêmes raisonnements peuvent être faits et l'on arrive aux mêmes théorèmes généraux, en particulier *sur les congruences de droites normales à une surface qui conservent cette propriété après réfraction dans un milieu d'indice n.*

La deuxième intégrale double de l'espace réglé. — On peut arriver à la notion de cette intégrale d'une manière tout à fait analogue à celle qui nous a conduit à la première intégrale double. Considérons un pinceau de droites d'une congruence; les droites qui limitent ce pinceau engendrent une surface réglée. Considérons une *développable* quelconque fermée circonscrite à cette surface [1]; si M est un point de contact de la développable et de la surface réglée, désignons par V l'angle des deux génératrices de ces deux surfaces qui passent par M et par $d\theta$ l'angle du plan tangent à la développable avec le plan tangent infiniment voisin. Considérons enfin l'intégrale

$$(10) \qquad J = \int \cos V\, d\theta$$

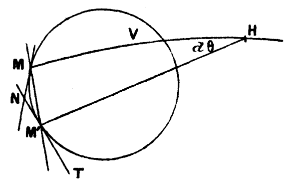
étendue à toute la courbe de contact. Cette intégrale est en quelque

[1] C'est-à-dire telle que la courbe de contact soit une courbe fermée.

sorte la *dualistique* de la première, la courbe C étant ici remplacée par la développable, la tangente à la courbe C par la génératrice de la développable et enfin la différentielle de l'arc par la différentielle de l'angle de contingence.

On voit d'abord que l'on peut transporter les droites du pinceau parallèlement à elles-mêmes d'une façon quelconque, en conservant parallèles à eux-mêmes les plans tangents à la développable, sans que l'expression $\cos V\, d\theta$ change de valeur. On peut donc supposer que le pinceau est formé de droites passant par un point fixe. Si l'on prend la trace de la figure sur la sphère ayant pour centre ce point et pour rayon l'unité, le pinceau découpe une courbe sphérique C, le plan tangent à la développable un grand cercle tel que MH. Si M et M' sont deux points infiniment voisins de la courbe C, MH et M'H les grands cercles correspondants,

Fig. 2.



l'angle V n'est autre que MH et $d\theta$ est égal à l'angle MHM'. Or, figurons l'arc de grand cercle MM' et les deux arcs de grand cercle MN, M'N tangent en M et M' à la courbe C. Dans le triangle MM'H (*fig.* 2), on a

$$\cos V \sin H = \cos \widehat{MM'H} \sin \widehat{M'MH} + \sin \widehat{MM'H} \cos \widehat{M'MH} \cos H,$$

et si H est infiniment petit

$$\cos V\, d\theta = \sin\left(\widehat{MM'H} + \widehat{M'MH}\right).$$

Or on a

$$\widehat{MM'H} + \widehat{M'MH} = \widehat{NMH} - \widehat{NMM'} + \pi - \left(\widehat{TM'H} + \widehat{NM'M}\right),$$

ou, en appelant $d\varepsilon$ l'angle de contingence des deux arcs de grand cercle MN, M'N,

$$\widehat{MM'H} + \widehat{M'MH} = -\,d\,\widehat{NMH} + \pi - d\varepsilon,$$

d'où finalement, en posant

$$\alpha = \widehat{\mathrm{NMH}},$$

on a

$$\cos V\, d\theta = d\alpha + d\varepsilon.$$

En intégrant le long de la courbe, α reprend sa valeur par hypothèse lorsqu'on revient au point de départ et il reste

$$J = \int d\varepsilon.$$

Mais, d'après le paragraphe 2, la variation de l'angle de contingence est égale à l'aire de la surface de la sphère extérieure à la courbe C. On peut donc prendre (§ 2)

$$(11)\qquad J = \int\int \frac{\alpha\, d\beta\, d\gamma + \beta\, d\gamma\, d\alpha + \gamma\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est la deuxième intégrale double, que nous aurions naturellement pu écrire immédiatement, mais dont l'analogie avec la première intégrale I est mise en évidence.

La condition pour que cette intégrale soit nulle, quel que soit le pinceau choisi dans la congruence, est, en supposant γ non identiquement nul et par suite, si l'on veut, égal à 1,

$$d\alpha\, d\beta = 0,$$

c'est-à-dire que α, β, γ sont fonctions d'un seul paramètre. Les droites de la congruence sont donc toutes parallèles aux génératrices d'un même cône.

La condition nécessaire et suffisante pour que, étant donnée une congruence de droites, on puisse faire passer par chaque droite D *de cette congruence un plan* P *tel que l'intersection de ce plan* P *et d'un quelconque des plans infiniment voisins soit perpendiculaire à la droite* D, *est que toutes les droites de la congruence soient parallèles aux génératrices d'un même cône.*

C'est l'analogue des congruences de droites normales à une surface.

Expression des intégrales I *et* J *dans un système quelconque de coordonnées.* — On peut arriver à ces expressions en se donnant l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini, calculant les deux intégrales de courbe et les transformant en intégrales doubles. Pour éviter les calculs, je me borne à prendre *a priori* leurs valeurs définitives et vérifier qu'elles sont égales aux intégrales doubles I et J exprimées en coordonnées rectangulaires.

Prenons d'abord la seconde. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'un plan et

$$(12) \qquad \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini. Soit enfin $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la *forme adjointe* de φ, qui, égalée à zéro, représente l'équation du plan double de l'infini. Étant donnée une droite définie par deux plans u et v, nous prendrons pour *coordonnées* de la droite les six expressions

$$q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k = -q_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

liées par la relation

$$q_{12} q_{34} + q_{23} q_{14} + q_{31} q_{24} = 0.$$

Posons enfin

$$(13) \qquad \begin{cases} d\omega_1 = u_2\, dq_{34} + u_3\, dq_{42} + u_4\, dq_{23}, \\ d\omega_2 = u_1\, dq_{43} + u_4\, dq_{31} + u_3\, dq_{14}, \\ d\omega_3 = u_1\, dq_{24} + u_2\, dq_{41} + u_4\, dq_{12}, \\ d\omega_4 = u_1\, dq_{32} + u_3\, dq_{21} + u_2\, dq_{13}. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que l'on a, par exemple,

$$u_2 q_{34} + u_3 q_{42} + u_4 q_{23} = 0,$$

d'où

$$d\omega_1 = -(q_{34}\, du_2 + q_{42}\, du_3 + q_{23}\, du_4) = -\begin{vmatrix} du_2 & du_3 & du_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}.$$

Nous poserons de même

$$d\omega'_1 = v_2\, dq_{34} + v_3\, dq_{42} + v_4\, dq_{23},$$

et les formules analogues.

Enfin posons

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi(q_{ik}) = \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4)\,\varphi(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ \qquad\qquad -(v_1\varphi'_{u_1} + v_2\varphi'_{u_2} + v_3\varphi'_{u_3} + v_4\varphi'_{u_4})^2, \end{cases}$$

les φ'_u désignant toujours les demi-dérivées de φ. Le second membre ne dépend manifestement que des $u_i v_k - v_i u_k$, et, égalé à zéro, il représente l'équation du complexe des droites isotropes (tangentes à la surface $\varphi = 0$). On a

$$\Phi(q_{ik}) = \Sigma(A_{i\lambda}A_{k\mu} - A_{i\mu}A_{k\lambda})\,q_{i\lambda}\,q_{k\mu}.$$

Considérons alors l'intégrale double

$$(15)\qquad \int\!\!\int \frac{d\omega'_1\,df'_{\omega_1} + d\omega'_2\,df'_{\omega_2} + d\omega'_3\,df'_{\omega_3} + d\omega'_4\,df'_{\omega_4}}{[\Phi(q_{12}, \ldots, q_{34})]^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifie immédiatement qu'au numérateur les u et les v n'entrent que par les combinaisons $u_i v_k - v_i u_k$. De plus le numérateur est du premier degré par rapport aux coefficients de f, c'est-à-dire du troisième degré par rapport à ceux de φ, et il en est de même du dénominateur; l'expression est donc homogène et de degré zéro par rapport aux A; elle ne dépend donc que de *l'équation*

$$\varphi(u) = 0,$$

et non de la *forme* φ elle-même.

Si nous effectuons maintenant sur les u et les v une même substitution linéaire

$$(16)\qquad u_i = \sum_{k=1}^{k=4} \lambda_{ik}\,u'_k,$$

la forme φ devient une certaine forme φ' et Φ se change dans la forme correspondante Φ'. Quant à la forme adjointe f de φ, elle devient la forme adjointe f' de φ' par la substitution

$$(17)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \Lambda_{ik}\,x'_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où Λ_{ik} désigne le mineur du déterminant de la substitution (16), relatif à λ_{ik} [1]. Or, par la substitution (16), il est facile de voir que $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$, $d\omega_4$ subissent précisément la substitution (17), de même $d\omega'_1$, ..., $d\omega'_4$. Il en résulte que le numérateur de l'intégrale (15) se reproduit, sauf que f est remplacé par f'.

L'intégrale (15) *est donc* invariante *par une transformation homographique quelconque.*

Or, pour
$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$
on a
$$\Phi = q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2$$
et
$$f = x_4^2,$$

de sorte que l'intégrale devient, au signe près,

$$\int\int \frac{d\omega_4\, d\omega'_4}{(q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \int\int \frac{q_{12}\, dq_{23}\, dq_{31} + q_{23}\, dq_{31}\, dq_{12} + q_{31}\, dq_{12}\, dq_{23}}{(q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, avec nos notations précédentes,

$$J = \int\int \frac{\alpha\, d\beta\, d\gamma + \beta\, d\gamma\, d\alpha + \gamma\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale (15) *est donc égale à* J.

Remarque. — On pourrait supposer que φ est une forme quadratique *quelconque*, et l'on a alors une intégrale double de l'espace réglé, où cette quadrique serait quadrique fondamentale.

---

(1) En effet, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ n'est autre chose que le discriminant de la forme

$$\psi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) + 2(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) u_5.$$

Par la substitution (16), à laquelle on ajoute $u'_5 = \frac{u_5}{\Delta}$, on obtient une substitution de déterminant 1 qui change, d'après (17), la forme ψ en une forme de *même discriminant*

$$\psi' = \varphi'(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) + 2(x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 + x'_4 u'_4) u'_5;$$

donc f se change par (17) en f'

Cette intégrale double est encore égale à l'expression (10),

$$J = \int \cos V \, d\theta,$$

définie de la même façon qu'en Géométrie ordinaire.

Si l'on remplace maintenant dans (15) les coordonnées tangentielles par les coordonnées ponctuelles, c'est-à-dire les u par les x, et les q_{ik} par

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$$

(d'ailleurs $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ sont proportionnels à q_{34}, $q_{42}, q_{23}, q_{14}, q_{31}, q_{12}$), on a une nouvelle intégrale double qui jouit de propriétés invariantes. Mais cette intégrale n'est définie que si la forme $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ [qui remplace $\varphi(u)$] est réductible à une somme d'*au moins* trois carrés indépendants, et dans le cas de la Géométrie ordinaire $f = x_4^2$. Mais remarquons que le dénominateur $F(p_{ik})$ qui, égalé à zéro, représente l'équation du complexe des tangentes à la surface $f = 0$, peut aussi bien être calculé en partant de l'équation tangentielle $q = 0$ de cette surface, et dans ces conditions l'intégrale conserve un sens en Géométrie ordinaire.

Si donc $\Phi(p_{ik})$ désigne le premier membre de l'équation du complexe des droites isotropes (calculé au moyen du premier membre φ de l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini), on peut considérer l'intégrale double

$$(18)\qquad \int\int \frac{d\varpi'_1 \, d\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varpi_1} + d\varpi'_2 \, d\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varpi_2} + d\varpi'_3 \, d\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varpi_3} + d\varpi'_4 \, d\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varpi_4}}{[\Phi(p_{12}, \ldots, p_{34})]^{\frac{3}{2}}},$$

où, par exemple,

$$d\varpi_1 = x_2 \, dp_{34} + x_3 \, dp_{42} + x_4 \, dp_{23},$$
$$d\varpi'_1 = y_2 \, dp_{34} + y_3 \, dp_{42} + y_4 \, dp_{23}..$$

Cette intégrale conserve sa valeur (à un facteur constant près) par toute transformation homographique.

Or, si l'on se place en coordonnées rectangulaires, on peut prendre

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$
$$\Phi = (u_2 v_3 - v_2 u_3)^2 + (u_3 v_1 - v_3 u_1)^2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 = p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2,$$

et l'intégrale est, au signe près,

$$\iint \frac{d\varpi_1\, d\varpi'_1 + d\varpi_2\, d\varpi'_2 + d\varpi_3\, d\varpi'_3}{(p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En calculant $d\varpi_1\, d\varpi'_1$, on trouve

$$d\varpi_1\, d\varpi'_1 = p_{23}\, dp_{34}\, dp_{42} + p_{34}\, dp_{42}\, dp_{23} + p_{42}\, dp_{23}\, dp_{34} = \omega_{p_{23}, p_{24}, p_{34}}.$$

En revenant à nos anciennes notations, nous retrouvons

$$\mathrm{I} = \iint \frac{\omega_{p\beta\gamma} + \omega_{q\gamma\alpha} + \omega_{r\alpha\beta}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui est bien la première des intégrales doubles considérées au commencement de ce paragraphe.

La formule (18) *permet donc d'écrire, en coordonnées tétraédriques, la condition pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface, connaissant l'équation tangentielle* $\varphi = 0$ *du cercle imaginaire de l'infini.*

Il est évident aussi qu'on peut remplacer dans cette formule φ par une forme quadratique quelconque, et l'on a alors l'intégrale de courbe

$$\int \cos \mathrm{V}\, ds,$$

V et s étant définis par rapport à la quadrique fondamentale $\varphi = 0$. Cette intégrale se reproduit à un facteur constant près, lorsque les droites se *réfractent* dans un milieu d'indice donné. *Le théorème relatif aux congruences de normales à une surface qui, par réfraction, conservent la même propriété, s'étend donc naturellement avec une quadrique fondamentale quelconque.*

§ 5.

Nous avons trouvé deux intégrales doubles exprimant des propriétés métriques de pinceaux de droites. Désignons symboliquement par $d\mathrm{I}$ et $d\mathrm{J}$ les quantités sous le signe $\iint$ de ces deux intégrales. On pourrait considérer l'intégrale quadruple

$$\iiiint dI\, dJ,$$

étendue à un ensemble de droites dépendant de quatre paramètres et elle exprimerait également une propriété métrique de cet ensemble. Dans le cas où l'on prend une quadrique fondamentale quelconque, cette intégrale quadruple existe en effet; mais, en Géométrie ordinaire, on vérifie, par un calcul simple, qu'elle est identiquement nulle. C'est, en effet,

$$\int\int\int\int \frac{\begin{bmatrix}(p\, d\beta\, d\gamma + \beta\, d\gamma\, dp + \gamma\, dp\, d\beta + \ldots \\ + r\, d\alpha\, d\beta + \alpha\, d\beta\, dr + \beta\, dr\, d\alpha)(\alpha\, d\beta\, d\gamma + \ldots + \gamma\, d\alpha\, d\beta)\end{bmatrix}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Si l'on fait $\gamma = 1$, ce qui est permis, il reste,

$$\iiiint \frac{(dp\, d\beta + d\alpha\, dq + r\, d\alpha\, d\beta + \alpha\, d\beta\, dr + \beta\, dr\, d\alpha)\, d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3},$$

expression identiquement nulle, puisque, en effectuant le produit symbolique du numérateur, chaque produit partiel contient deux différentielles identiques ($d\alpha$ ou $d\beta$).

Néanmoins il existe une intégrale quadruple de l'espace réglé, invariante par une transformation de coordonnées quelconques. Désignons toujours par $\Phi(p_{ik})$ le premier membre de l'équation du complexe des droites isotropes; par P le premier membre de l'équation du plan de l'infini, et par f le premier membre de l'équation d'une sphère quelconque et considérons

$$(1)\quad \int\int\int\int \frac{\begin{bmatrix}\mathrm{P}(d\omega'_1, d\omega'_2, d\omega'_3, d\omega'_4)\,\mathrm{P}(d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3, d\omega_4) \\ \times (d\omega'_1\, df'_{\omega_1} + d\omega'_2\, df'_{\omega_2} + d\omega'_3\, df'_{\omega_3} + d\omega'_4\, df'_{\omega_4})\end{bmatrix}}{[\Phi(p_{ik})]^3},$$

où les $d\omega_i$, $d\omega'_i$ sont déterminés par les formules (13)

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= u_2\, dq_{34} + u_3\, dq_{42} + u_4\, dq_{23} = u_2\, dp_{12} + u_3\, dp_{13} + u_4\, dp_{14}, \\ d\omega'_1 &= v_2\, dq_{34} + v_3\, dq_{42} + v_4\, dq_{23} = v_2\, dp_{12} + v_3\, dp_{13} + v_4\, dp_{14}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cette expression est homogène et de degré zéro en p_{ik}. Par une substitution linéaire, elle conserve la même forme. Elle est indépendante de la sphère choisie, car, si l'on remplace f par $f+\mathrm{PQ}$, le numérateur ne change pas. Enfin, si l'on multiplie les p_{ik} par un même facteur, fonction quelconque des quatre paramètres des droites, l'expression ne change pas non plus ([1]).

L'intégrale double (1) représente donc, à un facteur près, une quantité métrique attachée à tout ensemble de droites (dépendant de quatre paramètres).

En coordonnées rectangulaires, on a

$$\mathrm{P}=x_4, \qquad f=x_1^2+x_2^2+x_3^2, \qquad \Phi=p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2,$$

et l'intégrale devient

$$\mathrm{A}=\iiiint \frac{d\omega_4\, d\omega'_4\,(d\omega_1\, d\omega'_1+d\omega_2\, d\omega'_2+d\omega_3\, d\omega'_3)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}.$$

Or

$$\begin{aligned}
d\omega_1\, d\omega'_1 &= p_{12}\, dp_{13}\, dp_{14}+p_{13}\, dp_{14}\, dp_{12}+p_{14}\, dp_{12}\, dp_{13}=\omega_{p_{12},p_{13},p_{14}},\\
d\omega_2\, d\omega'_2 &= p_{21}\, dp_{24}\, dp_{23}+p_{24}\, dp_{23}\, dp_{21}+p_{23}\, dp_{21}\, dp_{24}=\omega_{p_{23},p_{21},p_{24}},\\
d\omega_3\, d\omega'_3 &= p_{31}\, dp_{32}\, dp_{34}+p_{32}\, dp_{34}\, dp_{31}+p_{34}\, dp_{31}\, dp_{32}=\omega_{p_{31},p_{32},p_{34}},\\
d\omega_4\, d\omega'_4 &= p_{41}\, dp_{43}\, dp_{42}+p_{43}\, dp_{42}\, dp_{41}+p_{42}\, dp_{41}\, dp_{43}=\omega_{p_{14},p_{24},p_{34}}.
\end{aligned}$$

Finalement, et en reprenant nos anciennes notations,

$$\mathrm{A}=\iiiint \frac{\omega_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\alpha qr}+\omega_{\beta rp}+\omega_{\gamma pq})}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}. \tag{2}$$

Cas particulier. — Supposons que nous étendions l'intégrale A à l'ensemble des droites qui coupent une aire plane donnée, qu'on peut toujours supposer dans le plan des xy. Alors, en prenant pour paramètres d'une de ces droites les coordonnées de son point d'intersection avec le plan des xy et ses deux premiers paramètres directeurs α et β, le troisième γ étant pris égal à l'unité, on a

$$\alpha=\alpha, \qquad \beta=\beta, \qquad \gamma=1, \qquad p=-y, \qquad q=x, \qquad r=\alpha y-\beta x$$

([1]) Cela résulte de ce que le numérateur est un produit (symbolique) de deux facteurs dont chacun contient les variables p par des combinaisons de la forme $\omega_{\lambda\mu\nu}=\lambda\, d\mu\, d\nu+\mu\, d\nu\, d\lambda+\nu\, d\lambda\, d\mu$, et cette expression se reproduit multipliée par h^3, si l'on remplace λ, μ, ν par $h\lambda, h\mu, h\nu$, h étant *quelconque*.

et

$$\omega_{\alpha qr} = \alpha^2\,dx\,dy - \alpha x\,dx\,d\beta + \alpha x\,dy\,d\alpha + x^2\,d\alpha\,d\beta,$$
$$\omega_{\beta rp} = \beta^2\,dx\,dy - \beta y\,dx\,d\beta + \beta y\,dy\,d\alpha + y^2\,d\alpha\,d\beta,$$
$$\omega_{\gamma pq} = dx\,dy,$$
$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = d\alpha\,d\beta,$$

d'où

$$A = \iiiint \frac{d\alpha\,d\beta\,dx\,dy}{(1+\alpha^2+\beta^2)^2} = S\iint \frac{d\alpha\,d\beta}{(1+\alpha^2+\beta^2)^2},$$

S désignant l'aire de la portion considérée du plan des xy, et l'intégrale double étant étendue à tout le plan des $\alpha\beta$. En calculant cette intégrale, on trouve

$$A = \pi S.$$

On déduit de là le théorème suivant :

L'intégrale quadruple A, *étendue à toutes les droites qui coupent une portion de surface, chacune d'elles étant prise autant de fois qu'elle a de points d'intersection avec celle-ci, est égale au produit de* π *par l'aire de cette portion de surface.*

En particulier, *l'intégrale* A, *étendue à toutes les droites qui coupent une surface fermée convexe, est égale au produit de* $\frac{\pi}{2}$ *par l'aire totale de cette surface.*

Étant donnée une surface fermée convexe, nous sommes donc arrivés à la notion de trois invariants métriques de cette surface :

1° *Le volume de l'espace compris à l'intérieur de la surface, invariant de dimension* 3 *par rapport à la longueur, qui s'exprime au moyen d'une intégrale triple de l'espace ponctuel*

$$\iiint dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les points à l'intérieur de la surface ;

2° *L'aire de la surface, invariant de dimension* 2, *qui s'exprime au moyen d'une intégrale quadruple de l'espace réglé*

$$\frac{2}{\pi}\iiiint \frac{\omega_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\alpha qr}+\omega_{\beta rp}+\omega_{\gamma pq})}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3},$$

étendue à toutes les droites qui coupent la surface ;

3° *Un autre invariant de dimension* 1, *qui s'exprime au moyen d'une intégrale triple de l'espace tangentiel*

$$\iiint \frac{u\,dv\,dw\,dh + v\,dw\,du\,dh + w\,du\,dv\,dh - h\,du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2},$$

étendue à tous les plans qui coupent la surface. Cette dernière intégrale est égale à $4\pi R$ pour une sphère de rayon R ; à $\pi(a+b+c)$ pour un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c ; à $\frac{\pi}{2}p$ pour un disque plan de périmètre p.

On pourrait appeler *périmètre de la surface fermée* l'intégrale précédente multipliée par $\frac{2}{\pi}$. *Le périmètre d'une sphère serait alors égal à* 8R, *et celui d'un cylindre droit au périmètre de la base augmenté du double de la hauteur.*

Il n'y a pas, dans l'espace tangentiel, d'autre intégrale multiple de la forme considérée qui soit invariante par tout déplacement dans l'espace, que les deux intégrales triple et double que nous avons considérées. Il n'y a pas non plus, dans l'espace réglé, d'autre intégrale multiple jouissant des mêmes propriétés que les trois intégrales, deux doubles considérées dans le § 4, et une quadruple considérée dans le § 5. D'ailleurs toutes ces intégrales multiples peuvent être trouvées par des résolutions d'équations différentielles. Ce sont, en effet, en employant une expression due à M. Poincaré, des *invariants intégraux* relatifs, les premiers au groupe de transformations des plans de l'espace, les seconds au groupe des droites de l'espace, lorsqu'on déplace, d'une façon quelconque, cet espace en lui-même. D'après les méthodes de M. Lie, on a le moyen de trouver tous ces *invariants intégraux*.

Ces considérations sont naturellement susceptibles d'extension dans plusieurs sens ; on peut, par exemple, substituer au groupe des mouvements un groupe quelconque et, prenant une famille de courbes ou de surfaces invariante par ce groupe, considérer des intégrales multiples de l'espace considéré comme engendré par les courbes ou les surfaces de cette famille ; certaines de ces intégrales pourront conserver leur valeur en effectuant sur les courbes ou les surfaces considérées une transformation quelconque du groupe. Par exemple, on peut considérer la famille des sphères de l'espace relativement au groupe à 10 paramètres des transformations qui conservent les angles ; ou, au lieu des sphères, on peut considérer les cercles de l'espace, relativement au même groupe. On a alors des quantités attachées à certains ensembles de sphères ou de cercles, et qui font corps avec ces ensembles vis-à-vis de toute transformation qui conserve les angles.