BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 12-48.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__12_1>

SUR L'ÉQUIVALENCE ABSOLUE DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SUR CERTAINES FAMILLES DE COURBES;

PAR M. E. CARTAN.

Dans un article récent (¹) M. Zervos généralise un théorème démontré par M. D. Hilbert dans un paragraphe de son article *Ueber den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen* (*Festschrift Heinrich Weber*, 5 mars 1912, p. 130-146). Ce théorème affirme l'impossibilité d'exprimer la solution générale

(¹) *Journal d. reine und angew. Math.*, t. 143, 1913, p. 300.

de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

par des formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \\ y = \psi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \\ z = \chi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \end{cases}$$

où φ, ψ, χ sont des fonctions déterminées de leurs arguments, où t est un paramètre variable, où w est une fonction *arbitraire* de t et où $w_1, \ldots, w_r$ en sont les dérivées successives. Le même problème peut se poser pour un système d'équations différentielles ordinaires, *dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.* J'ai démontré dans un article qui doit prochainement paraître dans le *Journal de Crelle* qu'on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire ce système différentiel pour que sa solution générale soit susceptible d'une forme analogue à (1) : la recherche de cette solution générale dépend alors de la réduction à sa forme canonique d'une équation aux différentielles totales à trois variables indépendantes. On peut même admettre, sans complications supplémentaires, que dans les seconds membres des formules (1) entrent des constantes arbitraires en nombre fini.

Le problème dont je viens de parler est un cas particulier d'un problème beaucoup plus général, dont il est question dans l'article cité plus haut de M. Hilbert, mais qui n'y est pas résolu. Ce problème, énoncé sous sa forme la plus générale, est le suivant :

Reconnaître si deux systèmes différentiels donnés sont absolument équivalents (1), *c'est-à-dire si l'on peut établir une correspondance univoque entre les solutions de l'un et les solutions de l'autre.*

Je substitue à cet énoncé un peu vague un énoncé beaucoup plus précis, mais qui me semble le plus large de ceux qu'on peut actuellement soumettre à l'analyse et le seul du reste qui semble important dans les applications. Cette substitution d'énoncé est tout à fait analogue à celle que j'ai proposée autrefois en ramenant

(1) Appartiennent à la même classe, d'après la terminologie de M. Hilbert.

la notion d'isomorphisme de deux groupes continus (correspondance univoque entre les transformations, respectant la loi de composition de ces transformations), à une notion analogue à celle de similitude, mais très élargie; ces deux notions étaient d'ailleurs équivalentes dans le cas des groupes finis, mais ce changement de point de vue a permis d'édifier la théorie de la structure des groupes infinis.

Je m'occupe dans cet article de l'équivalence absolue de deux systèmes différentiels *tels que la solution générale de chacun d'eux dépende d'une fonction arbitraire d'un argument.* Je ramène, dans ce cas particulier, la recherche de l'équivalence absolue à un problème classique, celui de l'équivalence de deux systèmes de h équations aux différentielles totales à $h+2$ variables vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles à $h+2$ variables. J'ai consacré il y a quelques années un Mémoire étendu (¹) à la résolution de ce dernier problème dans le cas $h=3$.

J'arrive à la solution du problème de l'équivalence absolue en substituant à chacun des systèmes différentiels donnés, ce qui est toujours possible, un système d'un certain nombre n d'équations aux différentielles totales à $n+2$ variables, dont $n+1$ dépendantes et 1 indépendante; le nombre n n'est pas nécessairement le même pour les deux systèmes. Grâce à la notion de système *dérivé* d'un système de Pfaff, qui repose elle-même sur la notion de covariant bilinéaire, je définis ce que j'appelle la *classe* (²) h d'un système (S) de n équations de Pfaff à $n+2$ variables (³) : c'est un entier tel que le système (S) et ses systèmes dérivés successifs (S'), ..., $(S^{(n-h)})$ soient respectivement formés de n, $n-1$, ..., h équations linéairement indépendantes, le système dérivé $(S^{(n-h+1)})$ n'étant formé que de $h-2$ équations. Le nombre h existe toujours, à moins que, quel que soit $p \leqq n$, le système $(S^{(n-p)})$ ne soit formé de p équations linéairement indépendantes au plus; on conviendra de dire dans ce cas que le système (S) est de classe *zéro : Ces systèmes de classe zéro sont les seuls dont la solution générale*

(¹) *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXVII, 1910, p. 109.

(²) Cette expression n'a pas le même sens que dans l'article de M. Hilbert.

(³) C'est aussi la classe du système différentiel qu'on a ramené au système (S).

soit susceptible de la forme (1). Si h n'est pas nul, il est au moins égal à 2.

Un système de classe h est toujours équivalent, sauf dans certains cas pour $h = 0$, à un système normal de $h + 1$ équations de Pfaff à $h + 3$ variables; pour que deux systèmes normaux de classe h soient absolument équivalents, il faut et il suffit qu'on puisse passer de l'un à l'autre par un changement de variables (effectué aussi bien sur les variables dépendantes que sur la variable indépendante), autrement dit qu'ils soient équivalents vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles à $h + 3$ variables. Pour arriver à ce résultat, je démontre un théorème intéressant par lui-même, c'est qu'*il est impossible d'exprimer la solution générale d'un système* (Σ) *au moyen de formules dépendant d'une manière déterminée d'une solution d'un autre système* (S), *si la classe de* (Σ) *est supérieure à celle de* (S); *cela est également impossible si, les deux classes étant les mêmes, les deux systèmes ne sont pas absolument équivalents.*

L'impossibilité pourrait cesser si la classe de (Σ) était *inférieure* à celle de (S).

La théorie précédente est développée dans la première Partie de cet article (I-VII). Dans la seconde Partie je détermine tous les systèmes différentiels de *classe zéro* obtenus en exprimant qu'il y a une relation donnée à l'avance entre la courbure et la torsion d'une courbe gauche (VIII-IX) ou entre la courbure, la torsion et la dérivée de la courbure par rapport à l'arc (X-XIV). Dans le premier cas, on ne trouve que les courbes pour lesquelles le rapport de la torsion à la courbure a une valeur donnée. Dans le second cas, on trouve, en dehors des courbes tracées sur une sphère de rayon constant donné, trois familles de courbes nouvelles, du reste imaginaires. Elles sont définies respectivement par les équations

$$\frac{dR}{iR\,ds} = \frac{1}{T} + \frac{1}{a},$$

$$\frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\,ds} + \frac{1}{T} + \frac{i}{a} = 0,$$

$$\frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\,ds} + \frac{1}{T} + i\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{aR} = 0,$$

où a désigne une longueur donnée. Les courbes de chacune de ces familles se déduisent par des générations simples des courbes minima ; il se trouve même que l'arc de chacune des courbes des deux premières familles est égal au *pseudo-arc* de la courbe minima correspondante, multiplié par le facteur constant $\sqrt{a}$.

Enfin, dans les deux derniers paragraphes (XV-XVI), je résous le même problème (au moins dans le cas d'une relation entre la courbure et la torsion) en géométrie non euclidienne elliptique. En dehors de la famille des courbes planes, on trouve une famille de courbes qui peuvent être regardées comme les analogues des hélices de l'espace euclidien : ce sont les trajectoires sous un angle (non euclidien) constant des droites qui rencontrent deux génératrices imaginaires conjuguées fixes de la quadrique fondamentale; le cas de l'angle droit donne les courbes dont la torsion est égale à la racine carrée de la courbure de l'espace elliptique, elles peuvent aussi être définies comme les courbes d'un certain complexe linéaire.

Des problèmes analogues pourraient se résoudre aussi facilement en géométrie conforme, en géométrie projective, etc., grâce à la méthode employée qui consiste à utiliser les expressions de Pfaff qui définissent la structure du groupe correspondant et qui représentent les composantes relatives du mouvement infiniment petit d'une figure de référence mobile.

Les résultats de la première Partie de cet article (I-VII) ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (2 février 1914); ceux de la seconde Partie (VIII-XVI), d'une Communication à la Société mathématique de France (14 janvier 1914).

Je dois ajouter que la généralisation de la théorie de l'équivalence absolue aux systèmes différentiels dont la solution générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument n'est pas immédiate et soulève d'assez grosses difficultés : la solution du problème de l'équivalence absolue dans ce nouveau cas n'est certainement pas susceptible d'un énoncé aussi simple que dans le cas examiné dans cet article.

I.

Nous nous proposons d'étudier l'équivalence absolue de deux systèmes différentiels, lorsque la solution générale de chacun de ces systèmes dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Pour cela, nous avons d'abord à nous demander ce qu'il faut entendre par systèmes équivalents. La première idée qui vient à l'esprit, et qu'il s'agira de préciser, est la suivante : *deux systèmes seront dits « absolument équivalents » lorsqu'on pourra établir une correspondance univoque* (au moins dans un champ fonctionnel suffisamment petit) *entre les solutions de ces deux systèmes*.

A cette notion très large, qu'il semble difficile de soumettre telle quelle aux recherches dans l'état actuel de l'Analyse, nous allons en substituer une autre qui semble encore la plus large de celles qu'on puisse définir analytiquement avec précision. Étant donné un système (S) d'équations différentielles en x, y, z, ..., u, l'une de ces variables étant indépendante et les autres dépendantes, nous dirons qu'un système (Σ) par rapport aux variables x, y, z, ..., u et à de nouvelles variables dépendantes, v, ..., w, est le *prolongement* du système (S) si les relations entre x, y, ..., w qui correspondent à une solution quelconque de (Σ) définissent une solution de (S) et si de plus toute solution de (S) peut être déduite par le procédé précédent d'une solution et d'une seule de (Σ). Il est clair que si (Σ) est le prolongement de (S), au sens qui vient d'être dit, il existe une correspondance univoque entre les solutions de (S) et les solutions de (Σ). Cela posé, deux systèmes (S) et (S$'$) seront dits *équivalents* si l'on peut trouver un système (Σ) prolongé de (S) et un système (Σ') prolongé de (S$'$) tels que (Σ) et (Σ') soient deux systèmes différentiels au même nombre de variables et résultent l'un de l'autre par un changement de variables. Il est bien clair que si (S) et (S$'$) sont équivalents au sens précédent il existe une correspondance univoque entre les solutions de ces deux systèmes.

II.

Il résulte de cette définition que le premier problème préliminaire à résoudre dans l'étude de l'équivalence absolue est la recherche des systèmes prolongés d'un système donné. Il existe un procédé évident pour prolonger un système donné ; il consiste à adjoindre aux fonctions inconnues primitives une ou plusieurs dérivées de ces fonctions : nous allons voir que c'est au fond le seul. Remarquons d'abord qu'on peut appliquer ce procédé pour ramener le système différentiel à un système d'équations aux différentielles totales. Si l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument on aura par exemple un système (S) de n équations de Pfaff à $n+2$ variables, dont une indépendante et $n+1$ dépendantes; soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n+1}, \quad x_{n+2}$$

ces variables et soient

$$(1) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = 0$$

les équations du système (S).

Soit (Σ) un système prolongé de (S); on peut prolonger (Σ) lui-même par dérivation de manière à le ramener à un système de $n+r$ équations de Pfaff à $n+r+2$ variables; soient

$$(2) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, & \ldots, & \omega_n = 0, \\ \varpi_1 = 0, & \ldots, & \varpi_r = 0 \end{cases}$$

ces équations, les variables étant

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n+2}; \qquad y_1, \quad \ldots, \quad y_r.$$

Il est impossible que les expressions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_r$ soient linéairement indépendantes par rapport à $dy_1, dy_2, \ldots, dy_r$; sinon, en effet, à toute solution du système (S) correspondrait pour le système (Σ) une infinité de solutions dépendant de r constantes arbitraires et qu'on obtiendrait en intégrant les équations différentielles ordinaires

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_r = 0,$$

où l'on supposerait les variables x exprimées toutes en fonction de la variable indépendante.

Il est d'autre part impossible que les expressions ϖ_i, considérées comme formes linéaires en $dy_1, \ldots, dy_r$, se réduisent à $r-2$ indépendantes; sinon, en effet, les équations (2) entraîneraient comme conséquence

$$dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_{n+1} = dx_{n+2} = 0,$$

ce qui est absurde.

Il résulte de là que, si l'on suppose les équations (1) résolubles par rapport à dx_3, dx_4, ..., dx_{n+2}, les équations (2) entraînent une relation et une seule de la forme

$$dx_2 - u\,dx_1 = 0.$$

Le coefficient u dépend évidemment des variables y_i, sinon toute solution de (S), provenant par hypothèse d'une solution de (Σ), satisferait à l'équation

$$\frac{dx_2}{dx_1} = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$$

et la solution générale de (S) ne dépendrait que de constantes arbitraires et non pas d'une fonction arbitraire d'un argument.

On voit ainsi que le système (Σ) est prolongé du système (S$'$) formé des $n+1$ équations de Pfaff

$$(3) \qquad \omega_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = 0, \qquad dx_2 - u\,dx_1 = 0,$$

lequel est lui-même un prolongement du système (S). On peut d'ailleurs supposer, par un changement de variables, $u = y_1$.

Le raisonnement précédent peut se répéter en remplaçant le système (S) par le système (S$'$) et l'on arrive ainsi au théorème suivant :

Étant donné un système (S) *de n équations de Pfaff à $n+2$ variables, dont $n+1$ dépendantes $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$ et 1 indépendante x_1, les premiers membres des équations étant résolubles par rapport à $dx_3, dx_4, \ldots, dx_{n+2}$, tout système* ($\Sigma$) *de $n+r$ équations de Pfaff à $n+r+2$ variables qui peut être regardé comme le prolongement de* (S), *peut être obtenu, à un changement de variables près, en adjoignant aux $n+1$ fonctions inconnues primitives les r premières dérivées de x_2 par rapport à x_1.*

III.

Considérons deux systèmes d'équations différentielles, l'un (S) en X, Y, ..., U, l'autre (s) en $x, y, \ldots, z$, et supposons que la solution générale de chacun de ces systèmes dépende d'une fonction arbitraire d'un argument. Nous dirons que *la solution géné-*

rale de (S) *dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (s), si l'on peut l'exprimer par des formules.

$$(4)\qquad \begin{cases} X = f(x, y, \ldots, z, y', \ldots, z^{(n)}), \\ Y = \varphi(x, y, \ldots, z, y', \ldots, z^{(n)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z = \psi(x, y, \ldots, z, y', \ldots, z^{(n)}), \end{cases}$$

où $f, \varphi, \ldots, \psi$ sont des fonctions déterminées de leurs arguments, x étant la variable indépendante du système (s), $y, \ldots, z$ les valeurs des fonctions $y, \ldots, z$ correspondant à une solution arbitraire de (s), $y', \ldots, z^{(n)}$, les dérivées prises jusqu'à un certain ordre de ces fonctions.

Des résultats du paragraphe précédent, ainsi que de la définition adoptée plus haut pour l'équivalence, résulte le théorème suivant :

Pour qu'un système (S) *soit équivalent à un système* (s), *il faut que la solution générale de* (S) *dépende d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (s) *et que réciproquement la solution générale de* (s) *dépende d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (S).

Le fait que ces conditions sont suffisantes résultera des développements ultérieurs. Quoi qu'il en soit on voit que le premier problème que nous avons maintenant à résoudre est celui de reconnaître si la solution générale d'un système (S) dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire d'un autre système (s).

IV.

Avant d'aller plus loin, il est intéressant d'indiquer un cas, qui nous sera utile dans la suite, où l'on peut affirmer qu'un système de n équations de Pfaff à $n+2$ variables est le prolongement d'un système de $n-1$ équations de Pfaff.

Soit le système (S), *non complètement intégrable,*

$$(1)\qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = 0,$$

à $n+2$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$; supposons les équations résolubles par rapport à $dx_3, \ldots, dx_{n+2}$. Les n covariants bilinéaires $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$ ne sont pas tous nuls en tenant compte des équations (1); on peut du reste supposer choisis les premiers membres de ces équations de manière qu'on ait [1]

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega'_1 \equiv 0, \quad \omega'_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \omega'_{n-1} \equiv 0,\\ &\qquad \omega'_n \equiv a[dx_1\, dx_2], \end{aligned} \right. \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

le coefficient a n'étant pas nul. Le système (S′)

$$(6)\qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{n-1} = 0$$

est dit le système dérivé du système (S).

Les covariants bilinéaires $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n-1}$, si l'on tient compte uniquement des équations (6), seront des combinaisons linéaires des trois expressions

$$[\omega_n\, dx_1], \quad [\omega_n\, dx_2], \quad [dx_1\, dx_2];$$

mais les relations (5) montrent qu'ils ne contiennent aucun terme en $[dx_1\, dx_2]$; ce sont donc uniquement des combinaisons linéaires de

$$[\omega_n\, dx_1], \quad [\omega_n\, dx_2],$$

parmi lesquelles deux au plus seront indépendantes. *Supposons qu'il y en ait une et une seule indépendante;* autrement dit, supposons, ce qui ne diminue en rien la généralité, qu'on ait

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega'_1 \equiv 0, \quad \omega'_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \omega'_{n-2} \equiv 0,\\ &\qquad \omega'_{n-1} \equiv b[\omega_n\, dx_1] + c[\omega_n\, dx_2], \end{aligned} \right. \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),$$

les coefficients b et c n'étant pas nuls tous les deux. *Je dis que le système* (S) *peut être regardé comme le prolongement de* (S′).

Pour être sûr que l'énoncé précédent a un sens il faut remarquer que les équations (6) peuvent être écrites de manière à ne contenir que $n+1$ variables, à savoir les intégrales premières du sys-

---

[1] J'écris $[dx_1\, dx_2]$ à la place de $dx_1\, \delta x_2 - dx_2\, \delta x_1$; l'indication

$$(\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

signifie que, dans le second membre, j'ai remplacé $dx_3, \ldots, dx_{n+2}$ par leurs valeurs tirées des équations (1).

tème [1]

$$(8)\quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{n-1} = 0, \quad \omega_n = 0, \quad b\,dx_1 + c\,dx_2 = 0;$$

soient

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{n+1}$$

ces $n+1$ variables. C'est du système (S') à $n+1$ variables que (S) peut être regardé comme le prolongement.

En effet d'une part toute solution de (S) satisfaisant aux équations (1) satisfait à plus forte raison aux équations (6) ; elle établit donc entre les ξ_i des relations définissant une solution de (S'). D'autre part les ξ_i étant les intégrales premières du système (8), on voit que l'équation $\omega_n = 0$ établit une relation linéaire entre les $d\xi_i$, autrement dit que le système (S) s'obtient en ajoutant aux équations de (S') une relation qu'on peut supposer de la forme

$$d\xi_2 - u\,d\xi_1 = 0,$$

si les équations de (S') sont résolubles par rapport à $d\xi_3, \ldots, d\xi_{n+1}$. Le coefficient u est une fonction indépendante de $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$; sinon en effet le système (S) serait complètement intégrable. Chaque solution de (S') donne ainsi pour u une valeur déterminée, de sorte que toute solution de (S') est fournie par une solution et *une seule* de (S). Le système (S) résulte donc du prolongement du système (S').

Le résultat précédent peut être énoncé sous une forme simple si l'on introduit la notion de *système dérivé* d'un système de Pfaff donné. Si

$$(9)\qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_r = 0$$

sont les équations de ce système, le système dérivé est par définition formé de toutes les équations de la forme

$$l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \ldots + l_r\omega_r = 0,$$

où $l_1, \ldots, l_r$ sont des fonctions quelconques des variables telles que la combinaison linéaire

$$l_1\omega'_1 + l_2\omega'_2 + \ldots + l_r\omega'_r$$

---

(1) Cela résulte d'un théorème général sur les systèmes de Pfaff dont il est inutile de rappeler ici l'énoncé.

des covariants bilinéaires $\omega'_1, \ldots, \omega'_r$, s'annule en tenant compte des équations (9).

D'après cela, *étant donné un système* (S) *de n équations de Pfaff à $n+2$ variables, on forme les systèmes dérivés successifs* (S'), (S''), ..., $S^{(n-h)}$. *Si les systèmes* (S'), (S''), ..., $(S^{(n-h)})$ *sont respectivement formés de $n-1$, $n-2$, ..., h équations indépendantes, le système* $(S^{(n-h-1)})$ *peut être regardé comme un système de $h+1$ équations à $h+3$ variables, et le système* (S) *peut en être regardé comme un prolongement.*

V.

Cela posé, deux cas peuvent se présenter.

Ou bien le nombre des équations linéairement indépendantes des systèmes dérivés successifs d'un système (S) de n équations de Pfaff à $n+2$ variables diminue d'une unité au plus quand on passe d'un système dérivé quelconque au suivant.

Ou bien on arrive à un système dérivé $(S^{(n-h)})$ tel que le système dérivé suivant $(S^{(n-h+1)})$ contienne deux équations linéairement indépendantes de moins que $(S^{(n-h)})$.

Remarquons que le deuxième cas ne peut se présenter que si les systèmes dérivés (S'), ..., $(S^{(n-h-1)})$, $(S^{(n-h)})$ sont formés respectivement de $n-1$, ..., $h+1$, h équations linéairement indépendantes ; si en effet l'un de ces systèmes était son propre système dérivé, il en serait de même de $(S^{(n-h)})$.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. Si l'on n'arrive jamais à un système dérivé qui soit son propre dérivé, le système $S^{(n-1)}$ sera formé d'une équation à trois variables réductible par conséquent à la forme

$$dy - y'\,dx = 0,$$

et le système (S) pourra en être regardé comme le prolongement. La solution générale de (S) s'exprimera au moyen d'une fonction arbitraire de x et de ses dérivées. Si au contraire le système $(S^{(n-h)})$ est son propre système dérivé, il est complètement intégrable ; le système $(S^{(n-h-1)})$ sera réductible à la forme.

$$dx_1 = 0, \quad \ldots, \quad dx_h = 0, \quad dy - y'\,dx = 0,$$

et la solution générale de (S) s'exprimera au moyen de h constantes arbitraires, d'une fonction arbitraire de x et de ses dérivées successives. On peut d'ailleurs démontrer facilement, par des procédés analogues à ceux qui vont être employés plus loin, que si pour un autre système (S'), h' est supérieur à h, la solution générale de (S') ne peut pas dépendre d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de (S). Autrement dit *deux systèmes* (S) *et* (S') *qui rentrent dans le premier cas sont équivalents si l'entier h a pour tous les deux la même valeur.*

Plaçons-nous maintenant dans le second cas. On dira que le système (S) est *normal* si (S') étant formé de $n - 1$ équations, (S'') est formé de $n - 3$ équations linéairement indépendantes. *Tout système* (S) *est donc un système normal ou le prolongement d'un système normal;* la *classe* du système (S) sera le nombre, diminué de 1, des équations linéairement indépendantes du système normal dont (S) est le prolongement. La classe est au moins égale à 2. Si elle est égale à 2 (S) est le prolongement d'un système de trois équations de Pfaff à cinq variables.

Nous conviendrons de dire que dans le premier cas envisagé tout à l'heure la classe est *zéro*. Il n'y a donc pas de système de classe 1.

VI.

La notion de *classe* est fondamentale dans la théorie de l'équivalence des systèmes (S) dont nous nous occupons. Nous allons en effet démontrer que *si la classe $k - 1$ d'un système* (Σ) *est supérieure à la classe $h - 1$ d'un système* (S)*, la solution générale de* (Σ) *ne dépend pas d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (S). Cet énoncé est d'ailleurs valable pour $h = 1$.

Nous pouvons, en effet, sans nuire à la généralité, supposer le système (Σ) normal. L'hypothèse que la solution générale de (Σ) dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de (S), signifie que, grâce aux formules (4) (§ III) qui expriment cette dépendance, les premiers membres

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{k+1}$$

des équations de (Σ) sont des combinaisons linéaires des premiers membres des équations du système (S), *prolongé un nombre suffisant de fois*. Autrement dit on aura des relations de la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_2 + \ldots + \alpha_{1p}\omega_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{k+1} = \alpha_{k+1,1}\omega_1 + \alpha_{k+1,2}\omega_2 + \ldots + \alpha_{k+1,p}\omega_p, \end{cases}$$

où $p \geqq k+1$ et où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont les premiers membres des équations du système (S) (prolongé au besoin). On peut naturellement supposer les coefficients $\alpha_{1p}, \ldots, \alpha_{k+1,p}$ non tous nuls.

Désignons par ω_{p+1}, ω_{p+2} deux combinaisons linéaires, indépendantes entre elles et indépendantes de $\omega_1, \ldots, \omega_p$, des différentielles des $p+2$ variables de (S). Le système (S) n'étant pas complètement intégrable, on pourra toujours supposer qu'on a

$$(11)\qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad \omega'_{p-1} \equiv 0, \\ \qquad \omega'_p \equiv [\omega_{p+1}\omega_{p+2}], \end{cases} \qquad (\text{mod}\, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p).$$

On peut aussi supposer que les coefficients $\alpha_{1p}, \ldots, \alpha_{kp}$ sont nuls, le coefficient $\alpha_{k+1,p} = \alpha$ n'étant pas nul. D'après cela les formules (10) donnent

$$(12)\qquad \begin{cases} \Omega'_1 \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega'_k \equiv 0, \\ \qquad \Omega'_{k+1} \equiv \alpha[\omega_{p+1}\omega_{p+2}], \end{cases} \qquad (\text{mod}\, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p).$$

Les expressions $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}$ étant indépendantes de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{k+1}$, on voit que le système (Σ') dérivé de (Σ) est fourni par les équations

$$(13)\qquad \Omega_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_k = 0.$$

Le système (S′) dérivé de (S) est de son côté fourni par les équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{p-1} = 0;$$

mais tandis que le système (Σ'') dérivé de (Σ') ne contient que $k-2$ équations linéairement indépendantes, puisque (Σ) est normal, le système (S″) en contient $p-2$, puisque $p \geqq k+1 > h+1$.

De là résulte, si l'on suppose (Σ'') formé par les $k-2$ premières équations de (Σ), des formules de la forme

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega'_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \Omega'_{k-2} \equiv 0, \\ &\Omega'_{k-1} \equiv \lambda\,[\Omega_{k+1}\,\omega_{p+1}] + \mu\,[\Omega_{k+1}\,\omega_{p+2}], \\ &\Omega'_k \equiv \lambda'[\Omega_{k+1}\,\omega_{p+1}] + \mu'[\Omega_{k+1}\,\omega_{p+2}], \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{mod}\,\Omega_1, \ldots, \Omega_k)$$

avec

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0.$$

Les congruences (14) auront lieu *a fortiori* si on les prend par rapport aux modules $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}$. Or l'on a directement, si l'on suppose (S'') formé par les $p - 2$ premières équations de (S),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega'_1 \equiv \alpha_{1,p-1}\,\omega'_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\Omega'_k \equiv \alpha_{k,p-1}\,\omega'_{p-1}, \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}),$$

et, d'après (14),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega'_1 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \Omega'_{k-2} \equiv 0, \\ &\Omega'_{k-1} \equiv \lambda\,\alpha[\omega_p\,\omega_{p+1}] + \mu\,\alpha[\omega_p\,\omega_{p+2}], \\ &\Omega'_k \equiv \lambda'\,\alpha[\omega_p\,\omega_{p+1}] + \mu'\,\alpha[\omega_p\,\omega_{p+2}], \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p-1}).$$

Les formules (15) et (16) sont manifestement incompatibles, les seconds membres des formules (16) n'étant pas des multiples de l'un d'entre eux, comme cela résulterait des formules (15).

Par suite, l'hypothèse d'après laquelle la solution générale de (Σ) dépendrait d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de (S) est absurde, ce qu'il fallait démontrer.

VII.

La démonstration précédente montre davantage. Elle prouve en effet que si $k = h$, et si la solution générale du système (Σ) dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de (S), le nombre p qui figure dans les formules (10) est nécessairement égal à $h + 1$, et par suite, par les formules (10), $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{h+1}$ sont des combinaisons linéaires de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{h+1}$.

Autrement dit, *étant donnés deux systèmes normaux* (S) *et* (Σ) *de même classe h, si la solution générale de* (Σ) *dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (S), *réciproquement la solution générale de* (S) *dépend d'une manière déterminée d'une solution arbitraire de* (Σ) *et chacun* *des systèmes* (S) *et* (Σ) *est réductible à l'autre par un changement de variables;* autrement dit *les systèmes* (S) *et* (Σ) *sont équivalents vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles à* $h + 3$ *variables.*

Nous sommes donc arrivés à ramener à un problème classique la résolution du problème général de l'équivalence de deux systèmes différentiels dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument. Des différentiations permettent d'abord de ramener chacun de ces systèmes à un système normal. Si ces deux systèmes normaux contiennent des équations linéairement indépendantes en nombre différent, ils ne sont pas équivalents; s'ils contiennent tous deux le même nombre $h + 1$ d'équations linéairement indépendantes, l'étude de leur équivalence est ramenée à celle de l'équivalence de deux systèmes de $h + 1$ équations de Pfaff à $h + 3$ variables vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles à $h + 3$ variables.

Cette étude a déjà été faite dans le cas le plus simple $h = 2$, elle a montré que la réduction l'un à l'autre de deux systèmes normaux de classe **2** exige au plus l'intégration de systèmes différentiels de Lie (quadratures, équations de Riccati, etc.) associés à des groupes finis à **14** paramètres au plus. Parmi ces systèmes de classe **2** se trouve celui qui donne les courbes gauches de torsion constante : il admet un groupe de transformations à cinq variables à six paramètres, naturellement isomorphe au groupe des déplacements euclidiens.

Cette étude serait donc à poursuivre pour les systèmes de classe 3 et comporterait ainsi l'étude de l'équivalence d'un système de quatre équations de Pfaff à six variables. A cette classe appartient le système différentiel qui donne les courbes gauches de courbure constante.

VIII.

Nous allons, dans la seconde Partie de cet article, déterminer certains systèmes différentiels de classe zéro, c'est-à-dire dont la solution générale dépend d'une manière déterminée d'un paramètre variable, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées successives, et en outre de constantes arbitraires (pouvant d'ailleurs manquer). La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que chaque système dérivé contienne au plus une équation de moins que le système dérivé précédent.

Les systèmes que nous allons étudier sont ceux qui définissent une famille *naturelle* de courbes, c'est-à-dire qui établissent une relation donnée entre la courbure d'une courbe gauche, la torsion et les dérivées jusqu'à un certain ordre de la courbure et de la torsion par rapport à l'arc. Nous nous bornerons au cas où la relation contient la dérivée première de la courbure.

Au lieu de prendre comme seules variables les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe, nous prendrons ces coordonnées et les trois paramètres qui fixent l'orientation d'un trièdre trirectangle ayant ce point pour sommet. Enfin, au lieu d'introduire les différentielles de ces six variables, nous introduirons les six combinaisons linéaires qui représentent les composantes par rapport à ce trièdre de son déplacement infiniment petit; nous désignerons par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

les composantes suivant les axes du déplacement de son sommet et par

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \varpi_3,$$

les angles infiniment petits dont il tourne autour de chacun des trois axes. En désignant pour un instant par $x_1, x_2, \ldots, x_6$ les six variables choisies, les six expressions de Pfaff introduites sont de la forme

$$\begin{gathered}\omega_1 = \xi_1\, dx_1 + \xi_2\, dx_2 + \ldots + \xi_6\, dx_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi_1 = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_6\, dx_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

L'avantage de cette substitution est qu'on a immédiatement les covariants bilinéaires des ω_i et des ϖ_i; cela résulte de la théorie générale de la structure des groupes, mais cela résulte aussi dans l'espèce des formules classiques qui régissent les mouvements à plusieurs paramètres. On peut les retrouver aisément en remarquant que si (X, Y, Z) sont les coordonnées relatives d'un point fixe, on a

$$(17)\quad \begin{cases} dX + \omega_1 + Z\varpi_2 - Y\varpi_3 = 0, \\ dY + \omega_2 + X\varpi_3 - Z\varpi_1 = 0, \\ dZ + \omega_3 + Y\varpi_1 - X\varpi_2 = 0; \end{cases}$$

en exprimant que les covariants bilinéaires

$$\begin{aligned} &\omega_1' + Z\varpi_2' - Y\varpi_3' + [dZ\,\varpi_2] - [dY\varpi_3], \\ &\omega_2' + X\varpi_3' - Z\varpi_1' + [dX\varpi_3] - [dZ\varpi_1], \\ &\omega_3' + Y\varpi_1' - X\varpi_2' + [dY\varpi_1] - [dX\varpi_2], \end{aligned}$$

des premiers membres sont identiquement nuls en tenant compte des équations (17), on trouve les formules fondamentales

$$(18)\quad \begin{cases} \omega_1' = -[\omega_2\varpi_3] + [\omega_3\varpi_2], \\ \omega_2' = -[\omega_3\varpi_1] + [\omega_1\varpi_3], \\ \omega_3' = -[\omega_1\varpi_2] + [\omega_2\varpi_1], \\ \varpi_1' = -[\varpi_2\varpi_3], \\ \varpi_2' = -[\varpi_3\varpi_1], \\ \varpi_3' = -[\varpi_1\varpi_2]. \end{cases}$$

D'après cela, si l'on veut obtenir le système différentiel des courbes pour lesquelles il existe une relation donnée entre la courbure et la torsion, on exprimera d'abord que le trièdre considéré est le trièdre attaché à la courbe, ce qui donne

$$\omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \varpi_2 = 0;$$

la courbure u et la torsion v sont alors données par les relations

$$\varpi_3 - u\omega_1 = 0, \qquad \varpi_1 - v\omega_1 = 0;$$

on remplacera enfin dans l'une de ces deux équations l'une des quantités u, v en fonction de l'autre ; ou encore on les exprimera en fonction d'une même troisième quantité indépendante des six variables primitivement introduites.

Finalement le système (S) que nous allons d'abord étudier est le système

$$(S)\quad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \varpi_3 - u\omega_1 = 0, \qquad \varpi_1 - v\omega_1 = 0,$$

où u et v sont des fonctions données d'une même variable t indépendante des six variables qui entrent dans les ω_i et les ϖ_i.

IX.

Si l'on forme les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (S), en tenant compte des équations (S) et en utilisant les formules (18), on trouve respectivement

$$o, \quad o, \quad o, \qquad -u'[dt\,\omega_1], \quad -v'[dt\,\omega_1];$$

le système dérivé est donc

$$(S') \quad \omega_2 = o, \qquad \omega_3 = o, \qquad \varpi_2 = o, \qquad v'\varpi_3 - u'\varpi_1 + (vu' - uv')\omega_1 = o.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres sont, en tenant compte des équations (S'),

$$[\omega_1\varpi_3], \quad o, \quad [\varpi_1\varpi_3], \quad v''[dt\varpi_3] - u''[dt\varpi_1] + (vu'' - uv'')[dt\,\omega_1].$$

Il faut supposer $u \neq o$, sans quoi on aurait le système différentiel des lignes droites. Pour que le système (S'') dérivé de (S') contienne trois équations, il est nécessaire qu'on ait

$$\frac{v''}{v'} = \frac{u''}{u'} = \frac{vu'' - uv''}{vu' - uv'},$$

c'est-à-dire qu'*il existe entre la courbure et la torsion une relation linéaire à coefficients constants*

$$(19) \qquad au + bv + c = o;$$

s'il n'en n'est pas ainsi le système (S) est de classe 4.

S'il existe une relation de la forme (19) on peut prendre

$$u' = b, \qquad v' = -a,$$

et l'on voit facilement que le système (S'') est formé des équations

$$(S'') \qquad \omega_3 = o, \qquad c\,\omega_2 + b\,\varpi_2 = o, \qquad a\varpi_3 + b\varpi_1 + c\,\omega_1 = o.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres de (S'') sont, en tenant compte de (S''),

$$-[\omega_1\varpi_2] + [\omega_2\varpi_1], \quad o, \quad -a[\varpi_1\varpi_2].$$

Si c n'est pas nul, on voit facilement, en tirant ω_1 et ω_2 de (S''), que a doit être nul pour que (S''') contienne deux équations linéairement indépendantes. Donc *si l'on part de la relation* (19) *où a et c sont tous les deux différents de zéro, le système* (S) *est de classe* 3.

Si c est nul, b ne l'est pas; le système (S''') contient alors deux équations linéairement indépendantes, à moins que a ne soit nul, auquel cas le système (S) définirait les courbes à torsion nulle, cas que nous écarterons. En dehors de ces cas, le système (S) n'est de classe inférieure à 3 que s'il définit les courbes à torsion constante ou les courbes dont la torsion est avec la courbure dans un rapport constant.

Si le système définit les courbes à torsion constante, on peut supposer

$$a = 0, \qquad b = -1;$$

le système (S''') est alors

$$(S''') \qquad \varpi_2 - c\omega_2 = 0, \qquad \varpi_1 - c\omega_1 = 0;$$

les covariants bilinéaires des premiers membres se réduisent, en tenant compte des équations (S''), à

$$-c^2[\omega_1\omega_3], \quad c^2[\omega_2\omega_3];$$

le système dérivé n'existe plus. Le système (S) est donc de classe 2.

Si enfin la relation (19) est de la forme

$$v - au = 0,$$

le système dérivé (S''') est

$$(S''') \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \varpi_1 - a\varpi_3 = 0;$$

on vérifie facilement qu'il est complètement intégrable. La solution générale du système (S) dépend donc d'une manière déterminée de deux constantes arbitraires, d'une fonction arbitraire d'un argument et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Ce résultat est classique, le système (S) définissant les hélices pour lesquelles l'angle de la tangente avec la génératrice du cylindre qui les contient a une valeur donnée.

En résumé *le système* (S) *qui définit les courbes pour* *lesquelles il existe une relation entre la courbure et la torsion est :*

De classe 4, *si cette relation n'est pas linéaire;*

De classe 3, *si elle est linéaire;*

De classe 2, *si elle définit les courbes à torsion constante non nulle;*

De classe 0 *si elle définit les courbes pour lesquelles la torsion est avec la courbure dans un rapport constant.*

X.

Passons au cas où la dérivée de la courbure par rapport à l'arc est une fonction donnée de la courbure et de la torsion

$$\frac{du}{ds} = f(u, v). \tag{20}$$

Le système (S) correspondant peut être défini par les six équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \varpi_3 - u\omega_1 = 0, \\ \varpi_1 - v\omega_1, \quad du - f(u, v)\omega_1 = 0. \end{cases}$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres, sont, en tenant compte des équations (S),

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -[dv\,\omega_1], \quad -f'_v[dv\,\omega_1],$$

de sorte que le système dérivé (S′) est formé des équations

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \varpi_3 - u\omega_1 = 0, \\ du - f'_v\varpi_1 - (f - vf'_v)\omega_1 = 0. \end{cases}$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres sont, en tenant compte de (S′),

$$0, \quad 0, \quad -u[\omega_1\varpi_1], \quad f'_v[\omega_1\varpi_1],$$
$$(f'_u f'_v - f f''_{uv})[\omega_1\varpi_1] - f''_{v^2}[dv\,\varpi_1] + vf''_{v^2}[dv\,\omega_1].$$

Si donc f''_{v^2} est différent de zéro, c'est-à-dire si $\frac{du}{ds}$ n'est pas une fonction linéaire de v, le système (S) est normal et de classe 5.

Supposons

$$\frac{du}{ds} = \mathrm{U}v + \mathrm{U}_1; \tag{21}$$

le système (S'') est formé des équations

$$(\mathrm{S}'') \qquad \begin{cases} \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \varpi_3 - u\omega_1 + \dfrac{\mathrm{U}}{u}\varpi_2 = 0, \\ du - \mathrm{U}\varpi_1 - \mathrm{U}_1\omega_1 + \dfrac{\mathrm{U}\mathrm{U}'_1 - \mathrm{U}_1\mathrm{U}'}{u}\varpi_2 = 0. \end{cases}$$

Le covariant bilinéaire de ω_3 est, en tenant compte des équations (S''), égal à $-[\omega_1\,\varpi_2]$. En exprimant que les covariants bilinéaires des premiers membres des deux dernières équations de (S'') ne contiennent pas de terme en $[\varpi_1\,\varpi_2]$, on obtient les deux relations

$$u\mathrm{U}\mathrm{U}' - u^2 - 2\mathrm{U}^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'_1 - \mathrm{U}_1\mathrm{U}'}{u}\right)' - \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'_1 - \mathrm{U}_1\mathrm{U}'}{u}\,\frac{\mathrm{U} + u\mathrm{U}'}{u\mathrm{U}} = 0.$$

Si l'une de ces deux relations n'est pas vérifiée, le système (S) est de classe 4. Pour qu'elles soient vérifiées toutes deux, il faut qu'on ait

$$\mathrm{U}^2 = u^2(a^2u^2 - 1),$$

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}\int\frac{bu^2}{\mathrm{U}}\,du.$$

1° Supposons d'abord $a = 0$, ce qui revient à supposer

$$\mathrm{U} = iu,$$

au besoin par un choix convenable du sens des arcs croissants, et

$$\mathrm{U}_1 = \frac{1}{2}bu^3 + cu.$$

Le système (S'') s'écrit alors

$$(\mathrm{S}'') \qquad \begin{cases} \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \varpi_3 + i\varpi_2 - u\omega_1 = 0, \\ du - iu\varpi_1 - \left(\dfrac{1}{2}bu^3 + cu\right)\omega_1 + ibu^2\varpi_2 = 0. \end{cases}$$

Le calcul du système dérivé (S''') se fait sans difficulté et conduit aux équations

$$
(S''') \left\{ \begin{array}{l} \omega_3 + i\omega_2 = 0, \qquad \varpi_3 + i\varpi_2 - u\omega_1 - bu^2\omega_2 = 0, \\ du - iu\varpi_1 - \left(\frac{1}{2}bu^3 + cu\right)\omega_1 + ibu^2\varpi_2 + \left[(bc-1)u^2 - \frac{1}{2}bu^4\right]\omega_2 = 0. \end{array} \right.
$$

Le calcul des deux premiers covariants montre que si b n'est pas nul, le système (S) est de classe 3. Si au contraire b est nul on trouve que le système (S''') est complètement intégrable si c est nul, et si c n'est pas nul, que son système dérivé est

$$
(S^{\text{IV}}) \qquad \omega_3 + i\omega_2 = 0, \qquad \varpi_3 + i\varpi_2 - u\omega_1 = 0.
$$

Le cas où c est nul donne les courbes tracées sur une sphère de rayon nul. Écartons ce cas. Le système dérivé de (S^{IV}) est alors formé de l'équation

$$
(S^{\text{V}}) \qquad \omega_3 + i\omega_2 = 0,
$$

et par suite le système (S) est de classe zéro.

Nous obtenons donc dans ce premier cas les systèmes de classe zéro définis par la relation

$$
(22) \qquad \frac{du}{ds} = iu(v + c).
$$

2° Supposons maintenant $a \neq 0$. On peut poser

$$
(23) \qquad u = \frac{1}{a \sin t},
$$

et la relation (21) prend alors la forme

$$
(24) \qquad \frac{dt}{ds} + v + \frac{b\cos t + c\sin t}{a\sin t} = 0.
$$

Avec ces notations le système (S'') s'écrit

$$
(S'') \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \omega_1 - a(\varpi_2\cos t + \varpi_3\sin t) = 0, \\ dt + \varpi_1 + b(-\varpi_2\sin t + \varpi_3\cos t) + c(\varpi_2\cos t + \varpi_3\sin t) = 0. \end{array} \right.
$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres se réduisent alors à

$$
a\cos t[\varpi_2\varpi_3], \qquad a\sin t[\varpi_2\varpi_3], \qquad ac[\varpi_2\varpi_3], \qquad -(1 + b^2 + c^2)[\varpi_2\varpi_3].
$$

Le système dérivé (S''') peut alors s'écrire

$$(S''')\left\{\begin{aligned} &-\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t = 0,\\ &\omega_1 - c(\omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t) - a(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0,\\ &dt + \frac{(1+b^2+c^2)}{a}(\omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t)\\ &\quad + \varpi_1 + b(-\varpi_2 \sin t + \varpi_3 \cos t) + c(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres sont, en tenant compte des équations (S'''),

$$\begin{aligned} &-2c[\omega\varpi] - b[\omega\chi],\\ &b^2[\omega\chi],\\ &\frac{b(1+b^2+c^2)}{a}[\omega\varpi], \end{aligned}$$

où l'on a, pour abréger, posé

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t,\\ \varpi &= \varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t,\\ \chi &= -\varpi_2 \sin t + \varpi_3 \cos t. \end{aligned}$$

Pour que le système (S) soit de classe zéro, il faut donc qu'on ait

$$bc = 0, \qquad b(1+b^2+c^2) = 0,$$

ce qui donne soit

$$b = 0,$$

soit

$$c = 0, \qquad b = i.$$

a. Supposons d'abord $b = 0$. Si $c = 0$ le système (S''') est son propre dérivé ; on a alors les courbes situées sur une sphère de rayon a. Supposons donc $c \neq 0$. Le système dérivé (S^{IV}) est dans ce cas

$$(S^{IV})\left\{\begin{aligned} &\omega_1 - c(\omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t) - a(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0,\\ &dt + \frac{1+c^2}{a}(\omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t) + \varpi_1 + c(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres sont, en tenant compte des éqnations (S^{IV}),

$$\begin{aligned} &c\,\frac{1+c^2}{a}[\omega_2\omega_3] + (1-c^2)[(-\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t)(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t)],\\ &-\frac{(1+c^2)^2}{a^2}[\omega_2\omega_3] + c\,\frac{1+c^2}{a}[(-\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t)(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t)]. \end{aligned}$$

Le système (S) n'est par suite de classe zéro que si l'on a

$$1 + c^2 = 0, \qquad \text{soit} \qquad c = \iota.$$

Dans ce cas le système dérivé (S^{v}) est

$$(S^{v}) \qquad dt + \varpi_1 + i(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0,$$

et la relation entre la courbure, la torsion et la dérivée de la courbure par rapport à l'arc est

$$(25) \qquad \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\, ds} + \frac{1}{T} + \frac{i}{a} = 0.$$

Remarquons d'ailleurs que l'équation (S^{v}) est complètement intégrable.

b. Supposons maintenant

$$c = 0, \qquad b = \iota.$$

Le système (S^{iv}) dérivé de (S''') est alors

$$(S^{iv}) \quad \begin{cases} \omega_1 + i(-\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t) - a(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0, \\ dt + \varpi_1 + i(-\varpi_2 \sin t + \varpi_3 \cos t) = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il est complètement intégrable. Le système est alors le prolongement du système (S''') et il est de classe zéro. Il correspond à la relation

$$(26) \qquad \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\, ds} + \frac{1}{T} + i\,\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{aR} = 0.$$

XI.

En résumé, les seules familles naturelles de courbes définies par une relation entre la courbure, la torsion et la dérivée de la courbure par rapport à l'arc, pour lesquelles les coordonnées d'un point arbitraire sont des fonctions déterminées d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées, ainsi que de constantes arbitraires, sont les suivantes :

$$(\alpha)\qquad \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\,ds} + \frac{1}{T} = 0,$$

$$(\beta)\qquad \frac{dR}{iR\,ds} = \frac{1}{T} + c,$$

$$(\gamma)\qquad \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\,ds} + \frac{1}{T} + \frac{i}{a} = 0,$$

$$(\delta)\qquad \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2}\,ds} + \frac{1}{T} + i\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{aR} = 0.$$

L'équation (α) définit les courbes tracées sur une sphère de rayon a. Il est inutile de les considérer davantage ; les formules qui donnent la solution générale du système contiennent trois constantes arbitraires, les coordonnées du centre de la sphère.

Les formules qui donnent la solution générale du système (β) ne contiennent aucune constante arbitraire, aucun des systèmes dérivés n'étant complètement intégrable. Le système (S) résulte du prolongement de l'équation

$$(S^{V})\qquad \omega_3 + i\omega_2 = 0.$$

Les formules qui donnent la solution générale du système (γ) contiennent une constante arbitraire, le système dérivé (S^{V}) étant complètement intégrable. Le système (S) résulte du prolongement du système (S^{IV}) :

$$(S^{IV})\qquad \begin{cases} dt + \varpi_1 + i(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0, \\ \omega_1 - i(\omega_2 \cos t + \omega_3 \sin t) - a(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0. \end{cases}$$

Les formules qui donnent la solution générale du système (δ) contiennent deux constantes arbitraires, le système dérivé (S^{IV}) étant complètement intégrable. Le système (S) résulte du prolongement du système (S''') :

$$(S''')\qquad \begin{cases} \omega_1 + i(-\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t) - a(\varpi_2 \cos t + \varpi_3 \sin t) = 0, \\ dt + \varpi_1 + i(-\varpi_2 \sin t + \varpi_3 \cos t) = 0, \\ -\omega_2 \sin t + \omega_3 \cos t = 0. \end{cases}$$

Pour intégrer ces divers systèmes, désignons par

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \end{array}$$

les cosinus directeurs des axes fixes par rapport aux axes du trièdre mobile et par x, y, z les coordonnées fixes de l'origine de ce trièdre. On a

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \alpha\, dx + \alpha'\, dy + \alpha''\, dz,\\
\omega_2 &= \beta\, dx + \beta'\, dy + \beta''\, dz,\\
\omega_3 &= \gamma\, dx + \gamma'\, dy + \gamma''\, dz,\\
\varpi_1 &= \gamma\, d\beta + \gamma'\, d\beta' + \gamma''\, d\beta'' = -\beta\, d\gamma - \beta'\, d\gamma' - \beta''\, d\gamma'',\\
\varpi_2 &= \alpha\, d\gamma + \alpha'\, d\gamma' + \alpha''\, d\gamma'' = -\gamma\, d\alpha - \gamma'\, d\alpha' - \gamma''\, d\alpha'',\\
\varpi_3 &= \beta\, d\alpha + \beta'\, d\alpha' + \beta''\, d\alpha'' = -\alpha\, d\beta - \alpha'\, d\beta' - \alpha''\, d\beta''.
\end{aligned}$$

C'est de ces formules que nous allons partir.

XII.

Cherchons d'abord les courbes (β). On les obtient en intégrant d'abord l'équation

$$(27) \qquad \omega_3 + i\omega_2 = 0.$$

puis, par différentiations successives, les équations

$$(28) \qquad \varpi_3 + i\varpi_2 - \frac{1}{R}\omega_1 = 0,$$

$$(29) \qquad dR + i\varpi_1 + c\,\omega_1 + \frac{1}{R}\omega_2 = 0.$$

La première conduit à poser

$$\gamma + i\beta = \lambda\frac{1-t^2}{2}, \qquad \gamma' + i\beta' = i\lambda\frac{1+t^2}{2}, \qquad \gamma'' + i\beta'' = \lambda t$$

et donne

$$d(x+iy) + 2t\,dz - t^2\,d(x-iy) = 0$$

ou

$$d[x+iy+2tz - t^2(x-iy)] - 2[z - t(x-iy)]\,dt = 0.$$

Posons donc

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} x+iy+2tz - t^2(x-iy) &= 2f(t),\\ z - t(x-iy) &= f'(t).\end{aligned}\right.$$

Pour intégrer l'équation (28) remarquons qu'on doit avoir

$$\alpha + i\alpha' + 2\alpha'' t - (\alpha - i\alpha')t^2 = 0,$$
$$(\alpha - i\alpha')t - \alpha'' = 1,$$

égalités qui expriment que les axes mobiles sont rectangulaires et que les α sont des cosinus directeurs. En tenant compte de ces relations et des équations (30), on trouve sans difficulté

$$x - iy = -f''(t) + i\lambda R. \tag{31}$$

Pour intégrer l'équation (29) on posera

$$\gamma - i\beta = \mu\frac{1 - t'^2}{2}, \qquad \gamma' - i\beta' = i\mu\frac{1 + t'^2}{2}, \qquad \gamma'' - i\beta'' = \mu t',$$

avec la condition

$$\lambda\,\mu(t - t')^2 = -4;$$

on obtient alors

$$\lambda^2 R^2 = -\frac{1}{c}f'''(t). \tag{32}$$

Finalement les coordonnées d'un point d'une courbe (β) sont exprimées par les formules suivantes, où c a été remplacé par $\frac{1}{a}$,

$$\left\{\begin{aligned} x - iy &= -f''(t) + \sqrt{af'''(t)},\\ z &= f'(t) - tf''(t) + t\sqrt{af'''(t)},\\ x + iy &= 2f(t) - 2tf'(t) + t^2f''(t) - t^2\sqrt{af'''(t)}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Ces courbes sont susceptibles d'une génération géométrique simple. On obtient en effet un point M de la courbe (33) en portant sur la tangente en un point P de la courbe minima (Γ), enveloppe de la droite (30), un certain vecteur (PM).

Pour définir ce vecteur rappelons la notion de *pseudo-arc* σ d'une courbe minima défini par

$$\frac{d\sigma^4}{dt^4} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)^2 \qquad \left[d\sigma = \sqrt{f'''(t)}\,dt\right],$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point de la courbe. Le point M est alors donné par la formule

$$M = P - \sqrt{a}\frac{dP}{d\sigma}.$$

La courbe (β) jouit d'une propriété remarquable : c'est que *son arc est, à un facteur constant près, égal au pseudo-arc de la courbe* (Γ) ; on a en effet

$$\frac{dM}{d\sigma}\left|\frac{dM}{d\sigma}\right. = a, \qquad \frac{d^2P}{d\sigma^2}\left|\frac{d^2P}{d\sigma^2}\right. = a,$$

d'où

$$s = \sqrt{a}\,\sigma.$$

La courbe (Γ) est d'ailleurs une des deux développées minima de la courbe (β) et l'on peut définir les courbes de la famille considérée par la condition que le pseudo-arc de l'une des deux développées minima soit égal, à un facteur constant près, à l'arc de la courbe elle-même : on retrouverait facilement ainsi la condition (β).

XIII.

L'intégration du système (γ) se ferait d'une manière analogue ; je me contente d'indiquer les résultats. La constante arbitraire qui entre dans les formules définit une direction de plans isotropes. Chaque courbe de la famille (γ) se déduit d'une courbe minima arbitraire (Γ) en portant la longueur $PQ = -\frac{a}{2}$ sur le vecteur $\frac{d^2P}{d\sigma^2}$ et en menant par le point Q la parallèle à la tangente en P à la courbe (Γ) jusqu'à sa rencontre avec le plan mené par P parallèlement à un plan isotrope fixe Π. *On a ici encore, pour l'arc de la courbe*,

$$s = \sqrt{a}\,\sigma.$$

Les formules qui donnent les coordonnées d'un point de la courbe sont :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} x - iy &= -f''(t), \\ z &= f'(t) - tf''(t) + \frac{a}{2}, \\ x + iy &= 2f(t) - 2tf'(t) + t^2 f''(t) - at; \end{aligned}\right.$$

le plan isotrope fixe a été particularisé : on a pris le plan

$$x - iy = 0.$$

XIV.

L'intégration du système (δ) introduit deux constantes arbitraires qui sont les paramètres d'un plan isotrope fixe Π. Chaque courbe de la famille (δ) se déduit d'une courbe minima arbitraire (Γ) en menant par un point quelconque P de (Γ) un vecteur (PM) parallèle à la direction isotrope du plan Π et tel que le produit géométrique du vecteur (PM) et du vecteur (PO), où O est un point, d'ailleurs quelconque, de Π, soit égal à $-\frac{1}{2}a^2$. Si l'on choisit les axes de manière que le plan Π ait pour équation

$$x - iy = 0,$$

l'arc s de la courbe est donné par

$$s = ia \log(x - iy).$$

La courbe peut encore être obtenue comme l'enveloppe du cylindre du second ordre

$$x + iy + 2tz - t^2(x - iy) - \frac{a^2}{x - iy} = 2f(t),$$

dont l'un des plans asymptotes est le plan Π, l'autre étant un plan isotrope variable, le plan osculateur de la courbe minima (Γ). On a

$$(35)\qquad \begin{cases} x - iy = -f''(t), \\ z = f'(t) - tf''(t), \\ x + iy = 2f(t) - 2tf'(t) + t^2 f''(t) - \dfrac{a^2}{f''(t)}. \end{cases}$$

Remarquons que les courbes de la famille (δ) sont rectifiables, tandis qu'il n'en est pas même des courbes des familles (β) et (γ) : je veux dire par là que le système différentiel qui définit les courbes d'une de ces familles *et l'arc de ces courbes* n'est pas de classe zéro, il est de classe 3 ; il est en effet équivalent au système de quatre équations de Pfaff à six variables :

$$\begin{aligned} df \;-\; f_1\,dt &= 0, \\ df_1 - f_2\,dt &= 0, \\ df_2 - f_3\,dt &= 0, \\ ds \;-\sqrt{f_3}\,dt &= 0, \end{aligned}$$

qu'on montre facilement être de classe 3.

XV.

Les problèmes que nous venons de résoudre dans l'espace euclidien peuvent être résolus de la même façon dans l'espace non euclidien. Si nous adoptons l'interprétation cayleyenne de la Géométrie elliptique par exemple, nous considérerons une quadrique imaginaire comme quadrique fondamentale. Nous prendrons, au lieu d'un trièdre trirectangle, un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique. Les coordonnées relatives X_i d'un point fixe satisferont alors à des équations de la forme

$$(36)\qquad \begin{cases} dX_1 + X_2\omega_{12} + X_3\omega_{13} + X_4\omega_{14} = 0, \\ dX_2 + X_1\omega_{21} + X_3\omega_{23} + X_4\omega_{24} = 0, \\ dX_3 + X_1\omega_{31} + X_2\omega_{32} + X_4\omega_{34} = 0, \\ dX_4 + X_1\omega_{41} + X_2\omega_{42} + X_3\omega_{43} = 0, \end{cases}$$

où l'on suppose

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Les six expressions de Pfaff ω_{ij} satisfont aux conditions

$$(37)\qquad \omega'_{ij} = [\omega_{ik}\omega_{jk}] + [\omega_{il}\omega_{jl}] \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

où k, l sont les deux indices 1, 2, 3, 4 différents de i et de j.

A un point variable d'une courbe quelconque de l'espace elliptique nous ferons correspondre un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ conjugué par rapport à la quadrique fondamentale, ayant pour sommet A_1 le point de la courbe, le côté A_1A_2 étant tangent à la courbe et le plan $A_1A_2A_3$ étant osculateur à la courbe. On a, dans ces conditions,

$$\omega_{13} = \omega_{14} = \omega_{24} = 0,$$
$$\omega_{23} = u\omega_{12}, \qquad \omega_{34} = v\omega_{12},$$

u et v désignant la courbure et la torsion, ω_{12} l'élément d'arc.

Bornons-nous à étudier les systèmes (S) qui établissent une relation entre la courbure et la torsion :

$$(\mathrm{S})\quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = 0, \quad \omega_{23} - u\omega_{12} = 0, \quad \omega_{34} - v\omega_{12} = 0,$$

u et v étant regardés comme des fonctions données d'une même variable t.

Le système dérivé (S') est

$$(\mathrm{S}')\quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = 0, \quad v'\omega_{23} - u'\omega_{34} + (vu' - uv')\omega_{12} = 0.$$

On montre facilement, comme on l'a fait dans le cas de l'espace euclidien, que la relation entre u et v doit être linéaire pour que le système (S'') contienne trois équations, soit

$$(38) \qquad au + bv + c = 0.$$

On peut supposer alors

$$u' = b, \qquad v' = -a,$$

et le système (S'') est

$$(S'') \qquad \omega_{14} = 0, \qquad c\,\omega_{13} - b\,\omega_{24} = 0, \qquad a\,\omega_{23} + b\,\omega_{34} + c\,\omega_{12} = 0.$$

Le système (S''') ne contient deux équations que si l'on a soit

$$c = 0, \qquad a = 0,$$

soit

$$a(b^2 - c^2) = 0 \qquad (c \neq 0).$$

Dans le premier cas on a les courbes à torsion nulle : ce sont les courbes planes.

Le second cas se subdivise en deux autres.

Si $a = 0$, $b^2 - c^2 \neq 0$, on a les courbes à torsion constante (non nulle) ; le système (S''') est ici, en supposant $b = -1$,

$$(S''') \qquad \omega_{24} + c\,\omega_{13} = 0, \qquad \omega_{34} - c\,\omega_{12} = 0;$$

mais le système dérivé n'existe plus ; le système (S) est de classe 2.

Si $b^2 - c^2 = 0$, par exemple $b = -c$, la relation (38) prend la forme

$$(39) \qquad v - 1 = au;$$

le système (S''') est alors

$$(S''') \qquad \omega_{13} + \omega_{24} = 0, \qquad \omega_{34} - \omega_{12} + a(\omega_{14} - \omega_{23}) = 0,$$

et il est complètement intégrable.

En résumé les seuls systèmes de classe zéro sont ceux qui donnent les courbes planes et ceux qui donnent les courbes satisfaisant à la relation (39), c'est-à-dire tels que

$$(40) \qquad \frac{1}{T} \pm 1 = a\frac{1}{R};$$

ces courbes généralisent les hélices de l'espace euclidien ; elles comprennent comme cas particulier les courbes à torsion constante égale à la racine carrée de la courbure de l'espace. Le système (S''')

étant complètement intégrable, les formules qui donneront la solution générale de l'équation (40) contiendront deux constantes arbitraires.

Il est facile de voir que si l'on considère une des courbes précédentes et qu'on mène par un quelconque A_1 de ses points, dans le plan formé par la tangente et la binormale, la droite qui fait avec la tangente l'angle constant cayleyen dont la cotangente est a, cette droite rencontre deux génératrices imaginaires conjuguées fixes de la quadrique fondamentale. En effet les points P, P' à l'infini sur cette droite ont pour coordonnées relatives

$$X_1 = 1, \qquad X_2 = \pm \frac{ia}{\sqrt{a^2+1}}, \qquad X_3 = 0, \qquad X_4 = \pm \frac{i}{\sqrt{a^2+1}};$$

on obtient un point sur la tangente à la trajectoire de l'un ou l'autre des points P, P' en considérant les coordonnées

$$\frac{dX_1}{ds} + X_2, \quad \frac{dX_2}{ds} - X_1 + \frac{1}{R} X_3, \quad \frac{dX_3}{ds} - \frac{1}{R} X_2 + \frac{1}{T} X_4, \quad \frac{dX_4}{ds} - \frac{1}{T} X_3,$$

ce qui donne ici

$$\pm \frac{ia}{\sqrt{a^2+1}}, \quad -1, \quad \pm \frac{i}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{1}{T} - \frac{a}{R}\right), \quad 0;$$

or ce point est aussi à l'infini (c'est-à-dire sur la quadrique fondamentale) ; chacun des points P, P' décrit donc une génératrice de la quadrique fondamentale, et ces deux génératrices sont évidemment imaginaires conjuguées, si la courbe est réelle.

XVI.

Pour déterminer ces courbes fixons les deux génératrices imaginaires conjuguées précédentes ; la position du tétraèdre mobile ne dépend plus que de quatre variables et l'on a *identiquement*

$$\omega_{24} + \omega_{13} = 0, \qquad \omega_{34} - \omega_{12} = a(\omega_{23} - \omega_{14}).$$

Tout déplacement du tétraèdre se traduit par une substitution linéaire sur les coordonnées mobiles d'un point de l'espace, et cette substitution laisse invariante la quadrique fondamentale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

En introduisant les génératrices rectilignes de cette quadrique, on peut écrire

$$\frac{x_1 + i x_3}{\lambda\mu} = \frac{x_1 - i x_3}{1} = \frac{x_2 - i x_4}{\lambda} = \frac{-x_2 - i x_4}{\mu}.$$

Si Λ, M désignent les paramètres mobiles d'un point fixe de la quadrique fondamentale on tire sans difficulté des formules (36)

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} & d\Lambda - \frac{\omega_{12} + \omega_{34} - i\omega_{14} - i\omega_{23}}{2} + i(\omega_{24} - \omega_{13})\Lambda - \frac{\omega_{12} + \omega_{34} + i\omega_{14} + i\omega_{23}}{2}\Lambda^2 = 0, \\ & dM + \frac{\omega_{12} - \omega_{34} - i\omega_{23} + i\omega_{14}}{2} - i(\omega_{24} + \omega_{13})M + \frac{\omega_{12} - \omega_{34} - i\omega_{14} + i\omega_{23}}{2}M^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Or le mouvement étant limité comme il a été dit, la dernière formule se réduit à

$$dM - \frac{(a+i) + (a-i)M^2}{2}(\omega_{23} - \omega_{14}) = 0.$$

On retrouve facilement ainsi qu'il y a deux génératrices fixes de la seconde famille et un calcul aisé montre que la formule qui permet de passer du paramètre fixe au paramètre mobile est de la forme

$$(42)\qquad \mu = \frac{\cos\theta M - e^{i\varphi}\sin\theta}{e^{-i\varphi}\sin\theta M + \cos\theta} \qquad (\alpha = \cot\varphi),$$

avec

$$\omega_{23} - \omega_{14} = 2\sin\varphi\, d\theta.$$

Soit, d'autre part,

$$(43)\qquad \lambda = \frac{u\Lambda + v}{w\Lambda + s} \qquad (us - vw = 1);$$

on en déduit immédiatement, d'après (41),

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{24} - \omega_{13} &= i(u\,ds - s\,du + v\,dw - w\,dv), \\ \omega_{34} + \omega_{12} &= u\,dw - w\,du + v\,ds - s\,dv, \\ \omega_{14} + \omega_{23} &= i(w\,du - u\,dw + v\,ds - s\,dv); \end{aligned}\right.$$

il faut joindre à ces formules les trois suivantes :

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{24} + \omega_{13} &= 0, \\ \omega_{23} - \omega_{12} &= 2\cos\varphi\, d\theta, \\ \omega_{23} - \omega_{14} &= 2\sin\varphi\, d\theta. \end{aligned}\right.$$

Enfin si l'on appelle x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées fixes du sommet A_1 du tétraèdre mobile, point qui décrit la courbe cherchée, on trouve sans difficulté, grâce aux formules (42) et (43),

$$(45)\qquad \begin{cases} x_1 + ix_3 = u\cos\theta - ve^{i\varphi}\sin\theta, \\ x_1 - ix_3 = s\cos\theta + we^{-i\varphi}\sin\theta, \\ x_2 - ix_4 = v\cos\theta + ue^{-i\varphi}\sin\theta, \\ x_2 + ix_4 = -w\cos\theta + se^{i\varphi}\sin\theta. \end{cases}$$

Cela posé, le système (S″) se réduit à l'équation $\omega_{14} = 0$, c'est-à-dire

$$(\mathrm{S}'')\qquad i(w\,du - u\,dw + v\,ds - s\,dv) - 2\sin\varphi\,d\theta = 0;$$

cette équation une fois intégrée donnera, par différentiation, l'intégrale de (S′) qu'on obtient en adjoignant à (S″) la nouvelle équation $\omega_{13} = 0$, c'est-à-dire

$$u\,ds - s\,du + v\,dw - w\,dv = 0.$$

On peut introduire des variables réelles en posant

$$u = x + iy,\qquad s = x - iy,\qquad v = z + it,\qquad w = -z + it,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

On a alors, d'après (45),

$$(46)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - (z\cos\varphi - t\sin\varphi)\sin\theta, \\ x_2 = z\cos\theta + (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\theta, \\ x_3 = y\cos\theta - (t\cos\varphi + z\sin\varphi)\sin\theta, \\ x_4 = -t\cos\theta - (y\cos\varphi - x\sin\varphi)\sin\theta. \end{cases}$$

Les équations à intégrer deviennent

$$\sin\varphi\,d\theta - x\,dt + t\,dx + y\,dz - z\,dy = 0,$$
$$x\,dy - y\,dx - z\,dt + t\,dz = 0.$$

Elles s'intègrent facilement en posant

$$(47)\qquad x = \cos\alpha\cos\beta,\qquad y = \sin\alpha\cos\gamma,\qquad z = \sin\alpha\sin\gamma,\qquad t = \cos\alpha\sin\beta,$$

et donnent successivement

$$(48) \quad \begin{cases} \sin\varphi\,\theta - \beta\cos^2\alpha + \gamma\sin^2\alpha = f(\alpha), \\ \gamma + \beta = \dfrac{f'(\alpha)}{\sin 2\alpha}, \\ \cot(\gamma - \beta) = \dfrac{1}{2} f''(\alpha) - \cot 2\alpha f'(\alpha). \end{cases}$$

Les équations (46), (47), (48) résolvent le problème; il reste finalement pour x_1, x_2, x_3, x_4 des expressions contenant un paramètre α, une fonction arbitraire de α et ses deux premières dérivées.

Remarquons que ω_{23} étant égal à $2\sin\varphi\,d\theta$, l'angle de contingence de la courbe est égal à $2\theta\sin\varphi$, et est ainsi connu sans intégration. Mais il est impossible de calculer l'arc de la courbe sans nouvelle intégration comme cela a lieu pour les hélices dans l'espace euclidien.

Le cas particulier $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ donne les courbes de torsion constante égale à la racine carrée de la courbure de l'espace : ce sont d'ailleurs les courbes d'un certain complexe linéaire, celui qui est défini par les équations

$$x_1\,dx_4 - x_4\,dx_1 - x_2\,dx_3 + x_3\,dx_2 = 0.$$

Dans ce cas, les formules (46), (47), (48) donnent

$$(49) \quad \begin{cases} x_1 = \cos\alpha\cos\beta', \\ x_2 = \sin\alpha\sin\gamma', \\ x_3 = \sin\alpha\cos\gamma', \\ x_4 = -\cos\alpha\sin\beta', \end{cases}$$

avec

$$(50) \quad \begin{cases} \beta' = f'(\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} - f(\alpha), \\ \gamma' = f'(\alpha)\dfrac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} + f(\alpha). \end{cases}$$

On a des expressions plus pratiques en posant

$$\frac{x_3}{x_1} = Q, \qquad \frac{x_4}{x_1} - \frac{x_2 x_3}{x_1^2} = -2P,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x_1}{Q'} = \frac{x_2}{P'} = \frac{x_3}{QQ'} = \frac{x_4}{QP' - 2PQ'};$$

on regarde P et Q comme des fonctions arbitraires d'un même paramètre, P' et Q' étant leurs dérivées. On obtient les courbes unicursales en prenant pour P et Q deux fonctions rationnelles quelconques.

On peut modifier d'une manière analogue les formules obtenues dans le cas d'un angle φ quelconque.