ÉLIE CARTAN

Sur un problème de géométrie différentielle projective

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 62 (1945), p. 205-231.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__205_0>

SUR UN PROBLÈME

DE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

PAR M. ÉLIE CARTAN.

I. — Introduction. Position du problème.

1. On sait qu'étant donné dans l'espace projectif à trois dimensions, un complexe linéaire non dégénéré K, toute courbe C du complexe, c'est-à-dire toute courbe C qui, en chacun de ses points M, est tangente au plan focal P du complexe en M, admet en ce point un contact du second ordre avec le plan P. On peut encore dire que toutes les courbes du complexe en sont des lignes asymptotiques, ou encore que *les lignes asymptotiques d'un complexe linéaire sont indéterminées*.

Ce théorème admet une démonstration analytique immédiate. Toute courbe du complexe, lieu d'un point (x_1, x_2, x_3, x_4) dépendant d'un paramètre t, est définie par une relation de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, dx_j = 0, \tag{1}$$

où les coefficients constants $a_{ij} = -a_{ji}$ sont les coordonnées du complexe. On en déduit par différentiation la relation

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \, d^2 x_j = 0, \tag{2}$$

qui exprime précisément le contact du second ordre de la courbe en chacun de ses points (x_i) avec le plan d'équation

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \mathrm{X}_j = 0, \tag{3}$$

qui est le plan focal du point (x_i).

2. Ce théorème admet-il une réciproque et quelle est cette réciproque? Il ne semble pas que cette question ait été étudiée, bien que la réponse soit fort simple. Nous allons d'abord poser le problème dans toute sa généralité.

PROBLÈME. — *Étant donné un espace projectif réel à r dimensions* ($r \geqq 3$), *on attache suivant une loi déterminée à chaque point* M *de l'espace un hyperplan* P (*variété linéaire à* $r-1$ *dimensions*). *On définit ainsi dans l'espace un champ d'éléments de contact* (M, P). *Appelons courbe du champ une courbe tangente en chacun de ses points* M *à l'hyperplan* P *associé à ce point. Déterminer les champs jouissant de la propriété que toute courbe du champ admette en chacun de ses points* M *un contact du second ordre avec l'hyperplan* P *associé à ce point;* ou encore, *déterminer les champs dont les lignes asymptotiques sont indéterminées.*

3. Ce problème peut se généraliser en se donnant en chaque point M de l'espace projectif à r dimensions une variété linéaire P à $p < r-1$ dimensions passant par ce point. On définit ainsi dans l'espace un *champ d'éléments plans* à p dimensions. Il s'agira alors de déterminer tous ceux de ces champs dont les courbes ont en chacun de leurs points M un contact du second ordre avec la variété P associée à ce point. Nous appellerons *champ* (**C**) tout champ jouissant de cette propriété.

4. Tous les champs (**C**) jouissent de la propriété énoncée dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un champ* (**C**) *d'éléments plans à p dimensions dans l'espace à r dimensions, toutes les droites issues d'un point quelconque* M *et situées dans la variété plane* P *associée à ce point sont des lignes du champ.*

Il nous suffira de faire la démonstration dans le cas le plus simple $r=3$, $p=2$. Soient M_0 un point quelconque de l'espace, P_0 le plan associé, M_0T une droite quelconque du plan P_0 partant de M_0. Menons par la droite M_0T un plan quelconque Q distinct de P_0. Il existe une infinité de lignes du champ situées dans le plan Q et toutes ces lignes sont données par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre (1); parmi toutes ces lignes, une et une seule

(1) Si l'équation du plan P associé au point M de coordonnées (x, y, z) est

$$Z - z = p(x, y, z)(X - x) + q(x, y, z)(Y - y)$$

et si l'on prend pour plan Q le plan

$$Y - y_0 = m(X - x_0),$$

l'équation différentielle à intégrer est

$$\frac{dz}{dx} = p(x, y, z) + mq(x, y, z),$$

où l'on remplace y par $mx + y_0 - mx_0$. On suppose naturellement les fonctions $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$ continues et continûment différentiables.

passe par le point M_0 et admet la tangente M_0T en ce point. Or, en chacun de ses points M, cette ligne a un contact du second ordre à la fois avec le plan fixe Q et le plan P associé à M. Ces deux plans étant distincts, le point M est un point d'inflexion de la ligne, qui est donc une droite. C. Q. F. D.

Ajoutons la remarque évidente que les droites issues d'un point M quelconque et appartenant au plan P associé à M sont les seules droites du champ. De là résulte le

Corollaire. — *Si le point* N *est dans le plan associé au point* M, *réciproquement le point* M *est dans le plan associé au point* N.

II. — Deux classes de champs (C) de l'espace projectif à trois dimensions.

5. Dans l'espace projectif réel à trois dimensions on trouve immédiatement une classe de champs (C) en se donnant une famille à un paramètre de plans (plans tangents à une surface développable), telle que par un point quelconque M d'un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace, il passe un plan P de la famille et un seul. Il est alors évident que le champ déterminé dans $\mathcal{D}$ en associant à chaque point M de $\mathcal{D}$ le plan P de la famille qui passe par M est un champ (C). Une telle solution du problème ne peut en général être prolongée dans tout l'espace de manière que le plan associé à tout point M soit univoquement déterminé. Les solutions de la classe que nous venons d'indiquer sont des solutions *locales* du problème, non prolongeables dans tout l'espace.

6. Nous allons maintenant nous placer dans le cas où le champ est régulier dans tout l'espace projectif. Nous admettrons le corollaire du n° 4, *mais en faisant abstraction des conditions de continuité et de différentiabilité nécessaires à sa démonstration.* Nous allons démontrer géométriquement le théorème suivant.

Théorème. — *Considérons dans l'espace projectif réel un champ d'éléments de contact satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *à tout point de l'espace projectif* M *est associé un plan déterminé* P ;

2° *à deux points distincts sont associés deux plans distincts;*

3° *si le point* N *est dans le plan* P *associé au point* M, *réciproquement le point* M *est dans le plan* Q *associé au point* M ;

Dans ces conditions le plan associé au point M *est le plan focal de* M *dans un complexe linéaire fixe non dégénéré* K.

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'*à trois points alignés* M_1, M_2, M_3 *sont associés trois plans* P_1, P_2, P_3 *appartenant à un même faisceau linéaire.* En effet les plans distincts P_1, P_2 se coupent suivant une droite Δ. Soit N un point de Δ; N étant dans les plans associés à M_1 et M_2, réciproquement M_1 et M_2 sont dans le plan Q associé à N; par suite il en est de même de M_3; donc N est dans le plan associé à M_3; le plan P_3 associé à M_3 contient donc tous les points de Δ, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement les plans P_1, P_2, P_3 associés à *trois points* M_1, M_2, M_3 *non alignés ne peuvent appartenir à un même faisceau linéaire*. Sinon, en effet, soit Δ l'intersection commune des plans P_1, P_2, P_3, et soit N un point quelconque de Δ; les points M_1, M_2, M_3 appartiennent au plan Q associé à N; le plan Q est donc confondu avec le plan $M_1\,M_2\,M_3$; à deux points distincts de Δ est donc associé le même plan, contrairement à l'hypothèse 2°.

Cela posé appliquons une corrélation $\mathcal{C}$ déterminée aux plans P, transformant le plan P associé au point M en un point M'. Il en résulte une correspondance point par point transformant M en M'. Cette correspondance transforme deux points distincts en deux points distincts, trois points alignés en trois points alignés, trois points non alignés en trois points non alignés. Par suite cette correspondance est une homographie $\mathcal{H}$ (¹). Le passage du point M au plan associé P résulte alors de l'homographie $\mathcal{H}$ transformant M en M', et de la corrélation $\mathcal{C}^{-1}$ inverse de $\mathcal{C}$, transformant M' en P. *C'est donc une corrélation.* Autrement dit en utilisant les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, l'équation du plan P associé au point (x_i) est de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i X_j = 0, \tag{4}$$

où les X_i désignent les coordonnées courantes.

Rappelons-nous enfin que le point M est situé dans le plan P associé; autrement dit on a l'identité

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a_{ij} = -a_{ji}.$$

Par suite si (y_i) désigne un point quelconque du plan P associé au point (x_i), on a

$$\begin{aligned} &a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &\qquad + a_{14}(x_1y_4 - x_4y_1) + a_{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + a_{34}(x_3y_4 - y_4x_3) = 0. \end{aligned}$$

Cela signifie que *le plan* P *est le plan focal du point* M *dans un complexe linéaire fixe, celui dont les coordonnées sont* a_{23}, a_{31}, a_{12}, a_{14}, a_{24}, a_{34}. Il est clair que ce complexe linéaire ne peut être dégénéré, car les plans focaux du complexe passeraient par une droite fixe et chacun d'eux serait associé à chacun des points qu'il contient. On doit donc avoir

$$a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} \neq 0.$$

(¹) *Voir*, au sujet de ce théorème, E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Gauthier-Villars, 1931, Chap. I, p. 1-11).

7. Les deux classes de champs (C) que nous venons de déterminer correspondent la première à un problème *local*, la seconde à un problème *global*, dans lequel intervient l'espace projectif tout entier. Le problème général posé n'est pas complètement résolu. Il reste à déterminer les solutions du problème définies *localement* dans un domaine donné $\mathcal{D}$ de l'espace, et ensuite à rechercher si ces solutions sont, ou non, susceptibles d'être prolongées dans l'espace tout entier. Nous avons déjà observé (n° 5) que les solutions locales, pour lesquelles les plans associés aux points d'un domaine $\mathcal{D}$ sont tangents à une surface développable, *ne sont pas prolongeables dans tout l'espace*. Nous allons montrer qu'au contraire les solutions *locales* pour lesquelles les plans associés aux différents points du domaine $\mathcal{D}$ envisagé ne satisfont pas à la condition d'être tangents à une même surface développable *sont prolongeables dans tout l'espace*, les plans associés aux points M de $\mathcal{D}$ étant les plans focaux de M par rapport à un complexe linéaire non dégénéré K.

Rappelons à ce propos un problème classique, celui des transformations conformes. Si l'on se place dans l'espace à deux dimensions constitué par le plan d'une variable complexe z (y compris le point représentant la valeur ∞ de z), une solution locale du problème n'est prolongeable dans tout l'espace que si la transformation conduisant du point z au point z' est homographique (ou encore si z' est une fonction homographique de la variable $\bar{z}$ complexe conjuguée de z). Au contraire dans l'espace à trois dimensions (en réalité l'espace anallagmatique réel), toute solution locale du problème est prolongeable dans tout l'espace (y compris le point à l'infini); néanmoins il convient de remarquer que ce théorème n'est démontré qu'en supposant que les fonctions qui donnent les coordonnées du point transformé au moyen des coordonnées du point initial sont deux fois continûment différentiables, ce qui dépasse les conditions strictement suffisantes auxquelles doivent satisfaire ces fonctions pour que le problème ait un sens.

Nous allons démontrer que toute solution locale du problème qui nous occupe dans le cas où l'équation de Pfaff

$$dz = p(x, y, z)\,dx + q(x, y, z)\,dy,$$

qui est considérée dans la Note du n° 4, n'est pas complètement intégrable, est prolongeable dans tout l'espace de manière que le plan P associé à un point M soit le plan focal de M dans un complexe linéaire non dégénéré fixe K. Il suffira pour la démonstration de supposer les fonctions p et q dérivables jusqu'à un certain ordre fini. Il restera la question ouverte de savoir quel est le minimum de cet ordre.

Nous allons, pour arriver à la solution de ce problème local, appliquer la méthode du repère mobile.

III. — La méthode du repère mobile appliquée au problème des champs (C) [1].

8. Attachons à chaque point de l'espace projectif un repère formé de quatre points *analytiques* indépendants A_0, A_1, A_2, A_3 (*points de base* du repère), en désignant par point analytique l'ensemble de quatre coordonnées non toutes nulles rapportées à un système de référence fixe; ces quatre points analytiques déterminent quatre points géométriques non coplanaires. Tout point analytique M est déterminé d'une manière et d'une seule par la formule

$$M = x^0 A_0 + x^1 A_1 + x^2 A_2 + x^3 A_3; \tag{5}$$

les x^i sont les *coordonnées relatives* du point M; si on les multiplie par un même facteur λ non nul, le point analytique M deviendra le point analytique λM; mais il correspond au même point géométrique : autrement dit, considéré comme système de référence, le repère (A_0, A_1, A_2, A_3) ne diffère pas du repère $(\lambda A_0, \lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$.

Si l'on considère une famille à r paramètres de repères projectifs, la variation infinitésimale de ces repères est définie par des relations

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{6}$$

où les ω_i^k sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des paramètres, les coefficients étant des fonctions de ces paramètres. Si l'on remplace A_i par λA_i, les expressions ω_i^k se reproduisent, à l'exception de ω_0^0, ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3, qui s'augmentent de $\frac{d\lambda}{\lambda}$, de sorte que la variation infinitésimale *géométrique* du repère mobile ne dépend que des formes $\omega_i^j (i \neq j)$ et $\omega_i^i - \omega_0^0$.

9. Les formes ω_i^j ne sont pas arbitraires; elles satisfont à certaines relations qu'on obtient en exprimant que les équations (6) sont complètement intégrables. Ces relations, qui sont les *équations de structure* du groupe projectif, sont [2]

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \tag{7}$$

où $d\omega_i^j$ désigne la *différentielle extérieure* [3] de la forme ω_i^j et $[\omega_i^k \omega_k^j]$ la somme

---

[1] On peut consulter sur la méthode du repère mobile, E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* (Gauthier-Villars, 1937, 1re partie), et *La théorie des groupes finis et continus* (Gauthier-Villars, 1937).

[2] Dans cette formule comme dans la formule (6), nous adoptons l'usage qui consiste à ne pas indiquer le symbole de sommation devant une expression où figure deux fois le même indice k, qui est donc à regarder automatiquement comme un indice de sommation.

[3] La différentielle extérieure $d\omega$ d'une forme $\omega = A_i\, dx^i$ est la forme différentielle quadratique *extérieure* $[dA_i\, dx^i]$; le crochet signifie que la multiplication de dA_i par dx^i change de signe par le changement de l'ordre des facteurs. Voir E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (*Actual scient.*, 394, Hermann, 1945). La notation $d\omega$, due à E. Kähler, est différente de la notation ω', employée par l'auteur dans ses ouvrages précédents.

par rapport à k des *produits extérieurs* des deux formes ω_i^k et ω_k^j. On vérifie facilement que si $i \neq j$, les seconds membres ne font intervenir, avec les $\omega_\alpha^\beta (\alpha \neq \beta)$, que les différences $\omega_i^i - \omega_0^0$. Il en est de même de l'expression développée de la différentielle extérieure de $\omega_i^i - \omega_0^0$.

Cela posé imaginons dans l'espace, d'une manière plus précise dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace, qu'on ait attaché à chaque point A_0 un plan de manière à définir un champ d'éléments de contact. Nous choisirons le repère attaché à A_0 de manière que les points A_1 et A_2 soient dans ce plan. En se déplaçant constamment dans une direction tangente au plan $A_0 A_1 A_2$, on aura l'équation (¹)

$$\omega^3 = 0; \tag{8}$$

cette équation de Pfaff est celle qui définit les courbes du champ.

On aura un champ d'éléments (**C**) si $d^2 A_0$ est une combinaison linéaire de A_0, A_1, A_2. Or de

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2,$$

on déduit par différentiation ordinaire, en ne conservant dans le second membre que les termes en A_3,

$$d^2 A_0 = (\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3) A_3 + \ldots .$$

La condition pour que le champ soit (**C**) *est donc*

$$\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^3). \tag{9}$$

Comme les trois formes ω^1, ω^2, ω^3 sont des combinaisons linéairement indépendantes des coordonnées non homogènes d'un point de l'espace, on devra avoir, d'après (9),

$$\omega_1^3 \equiv c\,\omega^2, \qquad \omega_2^3 \equiv -c\,\omega_1 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^3),$$

ou, d'une manière plus précise,

$$\omega_1^3 = c\,\omega^2 + a\,\omega^3, \qquad \omega_2^3 = -c\,\omega^1 + b\,\omega^3. \tag{10}$$

Si c était nul l'équation (8) serait complètement intégrable. Nous laissons de côté ce cas, qui a été traité au nº 5. Nous pouvons alors choisir les repères de manière à avoir $c = 1$, $a = b = 0$. En effet par un changement de repère laissant fixe le point A_0 et le plan $A_0 A_1 A_2$, c se reproduit multiplié par un facteur arbitraire, ce qui permet de ramener c à la valeur 1 ; les coefficients a et b deviennent nuls en prenant $A_1 - aA_0$ et $A_2 - bA_0$ comme nouveaux points de base à la place de A_1 et A_2.

(¹) Nous écrirons dorénavant ω^1, ω^2, ω^3 au lieu de ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3.

Finalement *la recherche des champs* (**C**) *revient à l'intégration du système différentiel*

$$\omega_1^3 = \omega^2, \qquad \omega_2^3 = -\omega^1. \tag{11}$$

10. Pour intégrer le système (11), nous allons le *différentier extérieurement* (¹) en tenant compte des équations de structure (7). Le calcul donne les équations quadratiques extérieures

$$\left\{\begin{array}{l} [\omega^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3)] + [\omega^3(\omega_3^2 + \omega_1^0)] = 0, \\ [\omega^1(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3)] + [\omega^3(\omega_3^1 - \omega_2^0)] = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

La première de ces équations montre que la forme $\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3$ est une combinaison linéaire de ω^2 et de ω^3; la deuxième montre, d'autre part, qu'elle est une combinaison linéaire de ω^1 et de ω^3. On en déduit

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = A\omega^3, \tag{13}$$

d'où l'on déduit ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_3^2 + \omega_1^0 = A\omega^2 + B\omega^3, \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 = A\omega^1 + C\omega^3, \end{array}\right. \tag{14}$$

les quantités A, B, C étant des fonctions inconnues.

La différentiation extérieure de la relation (13), en tenant compte des équations de structure (7), donne

$$2[\omega^1(\omega_3^2 + \omega_1^0)] - 2[\omega^2(\omega_3^1 - \omega_2^0)] + 2A[\omega^1\omega^2] + A[\omega^3(\omega_3^3 - \omega_0^0)] + [dA\,\omega^3] = 0, \tag{15}$$

d'où, en tenant compte de (14), et ne conservant que les termes qui ne contiennent pas ω^3 en facteur, il reste le seul terme $6A[\omega^1\omega^2]$. On en déduit

$$A = 0. \tag{16}$$

La différentiation extérieure des équations (14) donne ensuite, en tenant compte de ces équations elles-mêmes et en laissant de côté les termes qui contiennent ω^3 en facteur,

$$B[\omega^1\omega^2] = 0, \qquad C[\omega^1\omega^2] = 0,$$

d'où

$$B = C = 0. \tag{17}$$

Finalement *le système* (11) *à intégrer entraîne les équations*

$$\left\{\begin{array}{r} \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = 0, \\ \omega_3^2 + \omega_1^0 = 0, \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 = 0, \end{array}\right. \tag{18}$$

(¹) Nous appliquons ici les méthodes développées dans l'ouvrage cité dans la Note (³) du nº 9.

qui, avec les équations (11), *forment un système complètement intégrable,* la différentiation extérieure des équations (11) et (18) ne donnant aucune relation nouvelle.

La solution générale du problème dépend donc de cinq constantes arbitraires, et, en outre, on peut toujours passer par une transformation projective d'une solution particulière à une autre solution quelconque ([1]). Comme le groupe projectif dépend de 15 paramètres arbitraires, il en résulte que *chaque solution est invariante par un groupe projectif à* $15-5=10$ *paramètres.*

11. Il est facile maintenant de montrer que la solution générale dont nous venons de démontrer l'existence est fournie par les champs d'éléments associés à un complexe linéaire arbitraire. Il suffit pour cela de remarquer que ces champs dépendent de 5 constantes arbitraires, à savoir les rapports mutuels des six coordonnées a_{ij} d'un complexe linéaire; ils épuisent donc toutes les solutions du problème. Mais on peut aussi le vérifier de plusieurs manières.

a. Remarquons d'abord que, les 15 formes $\omega_i^j (i \neq j)$ et $\omega_i^i - \omega_0^0$ étant liées par les 5 équations (11) et (18), les 10 formes

$$\omega^1, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \omega_1^1-\omega_0^0, \quad \omega_2^2-\omega_0^0, \quad \omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^0, \quad \omega_2^0, \quad \omega_3^0$$

restent arbitraires. Autrement dit les repères qu'on peut attacher aux différents points du domaine $\mathcal{D}$ dépendent de 10 paramètres. Or on peut restreindre le choix de ces repères en supposant nulles les 7 formes

$$\omega_1^1-\omega_0^0, \quad \omega_2^2-\omega_0^0, \quad \omega_1^2, \quad \omega_2^1, \quad \omega_1^0, \quad \omega_2^0, \quad \omega_3^0. \tag{19}$$

En effet les 7 équations qu'on obtient en les annulant forment un système complètement intégrable, comme le montrent les équations

$$\begin{aligned}
d(\omega_1^1-\omega_0^0) &= -2[\omega^1\omega_1^0] - [\omega^3\omega_3^0] + [\omega_1^2\omega_2^1],\\
d(\omega_2^2-\omega_0^0) &= -2[\omega^2\omega_2^0] - [\omega^3\omega_3^0] - [\omega_1^2\omega_2^1],\\
d\omega_1^2 &= -2[\omega^2\omega_1^0] + [\omega_1^2(\omega_2^2-\omega_1^1)],\\
d\omega_2^1 &= -2[\omega^1\omega_2^0] + [\omega_2^1(\omega_1^1-\omega_2^2)],\\
d\omega_1^0 &= [\omega_1^0(\omega_0^0-\omega_1^1)] + [\omega_1^2\omega_2^0] + [\omega^2\omega_3^0],\\
d\omega_2^0 &= [\omega_2^0(\omega_0^0-\omega_2^2)] + [\omega_2^1\omega_1^0] - [\omega^1\omega_3^0],\\
d\omega_3^0 &= -2[\omega_1^0\omega_2^0] + [\omega_3^0(2\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2)]
\end{aligned}$$

déduites des équations de structure et des relations (11) et (18). Les seconds membres s'annulant avec les 7 formes (19), il en résulte que les équations

([1]) Cela résulte du théorème d'après lequel deux familles de repères projectifs satisfaisant à un même système de relations linéaires à coefficients constants entre les formes ω^j sont projectivement égales, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation projective. Voir E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* (Gauthier-Villars, 1937).

obtenues en annulant ces 7 formes constituent un système complètement intégrable. En donnant aux intégrales premières de ce système des valeurs numériques constantes, on restreint à 3 le nombre des paramètres arbitraires dont dépendent les repères attachés aux différents points du domaine. Les seules formes ω_i^j restantes sont alors ω^1, ω^2, ω^3. D'autre part les équations de structure donnent

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^3 = 2\,\omega^1\omega^2.$$

On peut alors poser

$$\omega^1 = du^1, \qquad \omega^2 = du^2, \qquad \omega^3 = du^3 + u^1 du^2 - u^2 du^1. \tag{20}$$

Les équations (6) deviennent simplement

$$\begin{aligned} dA_0 &= du^1 A_1 + du^2 A_2 + (du^3 + u^1 du^2 - u^2 du^1) A_3, \\ dA_1 &= du^2\ A_3, \\ dA_2 &= - du^1\ A_3, \\ dA_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où, en désignant par C_0, C_1, C_2, C_3 des points analytiques *fixes*,

$$\left\{ \begin{aligned} A_3 &= && && C_3, \\ A_1 &= && C_1 && + u^2 C_3, \\ A_2 &= && && C_2 - u^1 C_3, \\ A_0 &= C_0 + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^3 C_3. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Les paramètres u^1, u^2, u^3 sont donc tout simplement les coordonnées non homogènes, par rapport au repère fixe (C_0, C_1, C_2, C_3), du point A_0, et le plan $A_0\,A_1\,A_2$, étant donnée l'expression de la forme ω^3, a pour équation

$$U^3 - u^3 + u^1(U^2 - u^2) - u^2(U^1 - u^1) = 0,$$

ou plus simplement

$$U^3 - u^3 + u^1 U^2 - u^2 U^1 = 0. \tag{22}$$

b. On peut procéder autrement. Désignons par x^0, x^1, x^2, x^3 les coordonnées homogènes relatives d'un point M, conformément à la formule (6), et par y^0, y^1, y^2, y^3 celles d'un autre point N. Considérons le complexe linéaire attaché au repère d'origine A_0 et dont l'équation est

$$x^0 y^3 - x^3 y^0 + x^1 y^2 - x^2 y^1 = 0. \tag{23}$$

Nous allons montrer, en tenant compte des équations (11) et (18), que ce complexe linéaire est *stable*, autrement dit reste géométriquement le même quand on passe d'un point quelconque de l'espace à tout point infiniment voisin.

Pour cela partons des équations qui expriment que les points M et N des coordonnées relatives x^i, y^i sont fixes. On les obtient en différentiant extérieurement l'équation (5), ce qui donne

$$(24)\qquad \begin{cases} dx^i + x^k \omega_k^i = 0 \\ dy^i + y^k \omega_k^i = 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

ou, en tenant compte de (11) et (18),

$$(25)\qquad \begin{cases} dx^0 + x^0\omega_0^0 + x^1\omega_1^0 + x^2\omega_2^0 + x^3\omega_3^0 = 0, \\ dx^1 + x^0\omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_2^0 = 0, \\ dx^2 + x^0\omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 - x^3\omega_1^0 = 0, \\ dx^3 + x^0\omega^3 + x^1\omega^2 - x^2\omega^1 + x^3(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0) = 0, \end{cases}$$

ainsi que des formules analogues pour les coordonnées y^i. On en déduit

$$\begin{aligned} d(x^0y^3 - x^3y^0) + (x^0y^3 - x^3y^0)(\omega_1^1 + \omega_2^2) + (x^0y^1 - x^1y^0)\omega^2 - (x^0y^2 - x^2y^0)\omega^1 \\ + (x^1y^3 - x^3y^1)\omega_1^0 + (x^2y^3 + x^3y^1)\omega_2^0 = 0, \\ d(x^1y^2 - x^2y^1) + (x^1y^2 - x^2y^1)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - (x^0y^1 - x^1y^0)\omega^2 + (x^0y^2 - x^2y^0)\omega^1 \\ - (x^1y^3 - x^3y^1)\omega_1^0 - (x^2y^3 - x^3y^2)\omega_2^0 = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$d(x^0y^3 - x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1) = -(x^0y^3 - x^3y^0 + x^1y^2 - x^2y^1)(\omega_1^1 + \omega_2^2) \quad ^{(1)}.$$

L'équation (23) se conserve donc dans tout le domaine, de sorte que c'est l'équation qui exprime que la droite MN appartient à un complexe linéaire fixe. Or le plan focal de A_0 a pour équation $X^3 = 0$: c'est donc le plan associé au point A_0. *Le champ d'éléments obtenu est donc le champ attaché à un complexe linéaire fixe non dégénéré.*

12. Le problème posé au n° 7 est complètement résolu. *Abstraction faite du cas où l'équation différentielle qui définit les courbes d'un champ dans un domaine $\mathcal{D}$ est complètement intégrable, nous avons montré que tout champ* (**C**) *défini dans ce domaine est prolongeable dans tout l'espace et n'est autre que le champ des éléments formés par un point et le plan focal de ce point par rapport à un complexe linéaire non dégénéré.*

La démonstration suppose que les données satisfont à des conditions de dérivabilité telles que les différentiations extérieures opérées au n° 10 soient possibles, ce que n'exige naturellement pas l'analyticité. *Du reste il n'est pas certain que ces conditions de dérivabilité soient nécessaires pour la validité du théorème.*

---

(1) On aurait beaucoup simplifié le calcul en remplaçant l'équation (23) par l'équation quadratique *extérieure* $[x^0 x^3] + [x^1 x^2] = 0$. Les équations (24) seraient alors à remplacer par les équations

$$d[x^i x^j] + [x^i x^k]\omega_k^j + (x^k x^j)\omega_k^i = 0.$$

IV. — Les champs (**C**) dans l'espace projectif à r dimensions.

13. Examinons maintenant le problème des champs (**C**) d'éléments de contact dans l'espace projectif à r dimensions. Les courbes du champ sont définies par une équation de Pfaff. Deux cas sont possibles.

Si cette équation est complètement intégrable, elle définit une famille $\mathcal{F}$ à un paramètre d'hypersurfaces. Si le champ est (**C**), ces hypersurfaces sont des hyperplans. Plaçons-nous dans un domaine $\mathcal{D}$ tel que par tout point M de ce domaine passe un hyperplan de la famille et un seul. On aura un champ (**C**) en associant à chaque point M l'hyperplan qui passe par ce point.

Laissons ce cas de côté. Nous allons appliquer la méthode de repère mobile. Nous affectons à chaque point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ un repère formé de $r+1$ points analytiques $A_0, A_1, \ldots, A_r$, permettant de donner à tout point analytique M des coordonnées relatives $x^0, x^1, \ldots, x^r$ définies par la relation

$$M = x^0 A_0 + x^1 A_1 + \ldots + x^r A_r. \tag{26}$$

Si l'on considère une famille de repères dépendant de plusieurs paramètres, nous aurons par variation de ces paramètres, des relations

$$dA_i = \omega_i^k A_k \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{27}$$

avec les conditions de compatibilité (équations de structure)

$$d\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{28}$$

A tout point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ on associe un hyperplan que nous pourrons toujours supposer être l'hyperplan $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$, de sorte que l'équation de Pfaff qui définit les courbes du champ sera

$$\omega^r = 0. \tag{29}$$

Le champ sera (**C**) si en se déplaçant sur toute courbe du champ le point $d^2 A_0$ est situé dans l'hyperplan associé au point A_0. Or on a, le long d'une telle courbe

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \ldots + \omega^{r-1} A_{r-1},$$

d'où, en différentiant et ne conservant dans le second membre que les termes en A_r,

$$d^2 A_0 = \ldots + (\omega^1 \omega_1^r + \ldots + \omega^{r-1} \omega_{r-1}^r) A_r.$$

La condition cherchée est donc que la forme différentielle quadratique $\omega^1 \omega_1^r + \ldots + \omega_{r-1} \omega_{r-1}^r$, s'annule avec ω^r, autrement dit qu'on ait des relations de la forme

$$\omega_i^r = c_{ik} \omega^k + a_i \omega^r \qquad (c_{ik} = -c_{ki}).$$

On peut choisir le repère d'origine A_0 de manière à donner aux coefficients $c_{ij} = -c_{ji}$ et a_i des valeurs numériques fixes. Partons d'abord de l'expression de la différentielle extérieure de ω^r, à savoir

$$d\omega^r = \frac{1}{2} c_{ij}[\omega^i \omega^j] + [\omega^r(\omega_r^r - \omega_0^0 - a_i \omega^i)];$$

en changeant les points de base de l'hyperplan $A_0\, A_1\, A_2 \ldots A_{r-1}$, ce qui revient à effectuer une substitution linéaire sur les $r-1$ formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1}$, on peut s'arranger pour avoir

$$c_{12} = -c_{21} = c_{34} = -c_{43} = \ldots = c_{2p-1,2p} = -c_{2p,2p-1} = 1,$$

tous les autres coefficients c_{ij} étant nuls. Une fois ce résultat atteint, en prenant $A_i - a_i A_0$ comme nouveaux points A_i, on aura $a_i = 0$. Les équations différentielles du problème s'écrivent alors

$$(30)\quad \omega_1^r = \omega^2, \quad \omega_2^r = -\omega^1, \quad \omega_3^r = \omega^4, \quad \omega_4^r = -\omega^3, \quad \ldots, \quad \omega_{2p-1}^r = \omega^{2p}, \quad \omega_{2p}^r = -\omega^{2p-1},$$
$$\omega_{2p+1}^r = \omega_{2p+2}^r = \ldots = \omega_{r-1}^r = 0.$$

Nous désignerons dans la suite les $2p$ premiers indices $1, 2, \ldots, 2p$ par les notations $2i-1$, $2i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, les indices $2p+1, \ldots, r-1$ par α, β, ..., de sorte que les équations (30) prennent la forme

$$(30')\quad \omega_{2i-1}^r = \omega^{2i}, \quad \omega_{2i}^r = -\omega^{2i-1}; \quad \omega_\alpha^r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 2p+1, \ldots, r-1).$$

Nous allons distinguer deux cas suivant que p est égal à 1 ou supérieur à 1.

14. *Premier cas; l'entier p est égal à* 1. — Le système différentiel (30′) s'écrit ici

$$(31)\qquad \omega_1^r = \omega^2, \quad \omega_2^r = -\omega^1, \quad \omega_\alpha^r = 0 \qquad (\alpha = 3, \ldots, r-1).$$

La différentiation extérieure donne

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &[\omega^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^2] + [\omega^r(\omega_r^2 + \omega_1^0)] = 0, \\ &[\omega^1(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^1] + [\omega^r(\omega_r^1 - \omega_2^0)] = 0, \\ &[\omega^1 \omega_\alpha^2] - [\omega^2 \omega_\alpha^1] - [\omega^r \omega_\alpha^0] = 0. \end{aligned}\right.$$

La dernière équation (32) montre que les formes ω_α^1, ω_α^2, ω_α^0 ne dépendent que de ω^1, ω^2, ω^r. Posons

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_\alpha^1 &= a_{\alpha 1}^1 \omega^1 + a_{\alpha 2}^1 \omega^2 + a_{\alpha r}^1 \omega^r, \\ \omega_\alpha^2 &= a_{\alpha 1}^2 \omega^1 + a_{\alpha 2}^2 \omega^2 + a_{\alpha r}^2 \omega^r, \\ \omega_\alpha^0 &= a_{\alpha 1}^0 \omega^1 + a_{\alpha 2}^0 \omega^2 + a_{\alpha r}^0 \omega^r, \end{aligned}\right.$$

avec les relations suivantes, conséquences des dernières équations (32),

$$(34)\qquad a_{\alpha 1}^1 + a_{\alpha 2}^2 = 0, \qquad a_{\alpha r}^2 + a_{\alpha 1}^0 = 0, \qquad a_{\alpha r}^1 - a_{\alpha 2}^0 = 0.$$

En portant dans les deux premières équations (32), on obtient

(35) $$a^1_{\alpha 2} = a^2_{\alpha 1} = 0, \qquad a^1_{\alpha 1} - a^2_{\alpha 2} = 0;$$

(36) $$\left\{\begin{aligned} \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^r_r &= a^1_{\alpha 1}\omega^\alpha + A\omega^r, \\ \omega^2_r + \omega^0_1 &= a^2_{\alpha r}\omega^\alpha + A\omega^2 + H\omega^r, \\ \omega^1_r - \omega^0_2 &= a^1_{\alpha r}\omega^\alpha + A\omega^1 + K\omega^r, \end{aligned}\right.$$

d'où

(37) $$a^1_{\alpha 1} = a^1_{\alpha 2} = a^2_{\alpha 1} = a^2_{\alpha 2} = 0.$$

La différentiation extérieure de la première équation (36), où les formes ω^α ne figurent plus, montre, en se bornant aux termes qui ne contiennent pas ω^r en facteur, que le coefficient A est nul; en achevant le calcul, on obtient les relations

$$a^0_{\alpha 1} - 2a^2_{\alpha r} = a^0_{\alpha 2} + 2a^1_{\alpha r} = 0,$$

d'où, d'après (34),

$$a^1_{\alpha r} = a^2_{\alpha r} = a^0_{\alpha 1} = a^0_{\alpha 2} = 0,$$

et enfin $H = K = 0$. Finalement les équations (33) se réduisent à

(38) $$\omega^1_\alpha = \omega^2_\alpha = 0, \qquad \omega^0_\alpha = a^0_{\alpha r}\omega^r.$$

Enfin la différentiation extérieure des deux premières équations (38) donne

$$[\omega^0_\alpha \omega^1] = [\omega^0_\alpha \omega^2] = 0, \qquad \text{d'où} \quad \omega^0_\alpha = 0.$$

On arrive donc, pour définir les solutions du problème, *au système complètement intégrable* (¹)

(39) $$\left\{\begin{array}{l} \omega^r_1 = \omega^2, \qquad \omega^r_2 = -\omega^1, \qquad \omega^0_\alpha = \omega^1_\alpha = \omega^2_\alpha = \omega^r_\alpha = 0, \\ \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^r_r = 0, \qquad \omega^2_r + \omega^0_1 = 0, \qquad \omega^1_r - \omega^0_2 = 0. \end{array}\right.$$

15. Le système (39) comprend $4(r-3)+5 = 4r-7$ équations indépendantes. Sa solution générale dépend donc de $4r-7$ constantes arbitraires. Chaque solution admet par suite un groupe projectif de

$$r(r+2) - (4r-7) = r^2 - 2r + 7 \text{ paramètres.}$$

Les équations de structure de ce groupe se déduisent des équations de structure (28) en tenant compte des relations (39).

Toutes les solutions du système (39) sont projectivement égales. Pour les déterminer on peut restreindre la famille des repères attachés aux différents points de l'espace en remarquant que les équations

$$\omega^1_1 - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^2_2 - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^\alpha_\alpha - \omega^0_0 = 0, \qquad \omega^\alpha_r = 0,$$
$$\omega^0_1 = 0, \quad \omega^0_2 = 0, \quad \omega^2_1 = 0, \quad \omega^1_2 = 0, \quad \omega^\alpha_1 = 0, \quad \omega^\alpha_2 = 0, \quad \omega^\alpha_\beta = 0, \quad \omega^0_r = 0,$$

(¹) La différentiation extérieure du système (39) ne conduit à aucune relation nouvelle.

forment un système complètement intégrable et en égalant à des valeurs numériques fixes les intégrales premières de ce système; il restera ainsi attaché à chaque point un seul repère. On aura alors

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^\alpha = 0, \qquad d\omega^r = 2[\omega^1\omega^2],$$

d'où

$$\omega^1 = du^1, \qquad \omega^2 = du^2, \qquad \omega^\alpha = du^\alpha, \qquad \omega^r = du^r + u^1 du^2 - u^2 du^1.$$

Des équations

$$dA_i = \omega_i^k A_k$$

on tire alors, en désignant par $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_r$ $r+1$ points analytiques fixes,

$$A_0 = C_0 + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^\alpha C_\alpha + u^r C_r;$$

les variables $u^1, u^2, \ldots, u^r$ sont donc les coordonnées projectives de A_0 rapportées à un repère fixe. L'équation

$$\omega^r \equiv du^r + u^1 du^2 - u^2 du^1 = 0$$

définit le champ cherché. L'hyperplan associé au point (u^i) a pour équation

$$U^r - u^r + u^1 U^2 - u^2 U^1 = 0,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$x^0 X^r - x^r X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 = 0;$$

c'est l'hyperplan focal de A_0 par rapport au complexe linéaire $p^{0r} + p^{12} = 0$.

On peut retrouver ce résultat en démontrant que l'équation quadratique extérieure

$$[x^0 x^r] + [x^1 x^2] = 0,$$

où les x^i sont les coordonnées *relatives* d'un point fixe, est *stable*.

On voit que *toute solution locale du problème se prolonge dans tout l'espace, l'hyperplan associé à un point arbitraire* M *étant l'hyperplan focal de* M *par rapport à un complexe linéaire fixe dont l'équation est réductible à la forme* $p^{0r} + p^{12} = 0$.

16. *Cas général; l'entier p est supérieur à* 1. — Revenons aux équations générales du système différentiel du problème, à savoir

$$(30') \quad \omega_{2i-1}^r = \omega^{2i}, \quad \omega_{2i}^r = -\omega^{2i-1}, \quad \omega_\alpha^r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = 2p+1, \ldots, r-1).$$

La différentiation extérieure des équations (30′) donne

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\omega^{2i}(\omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^{2j-1}(\omega_{2j-1}^{2i} - \omega_{2i-1}^{2j})] \\ &\quad + [\omega^{2j}(\omega_{2i-1}^{2j-1} + \omega_{2j}^{2i})] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^{2i}] + [\omega^r(\omega_r^{2i} + \omega_{2i-1}^0)] = 0, \\ &[\omega^{2i-1}(\omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r)] + [\omega^{2j-1}(\omega_{2j-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2j})] \\ &\quad + [\omega^{2j}(\omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{2i}^{2j-1})] + [\omega^\alpha \omega_\alpha^{2i-1}] + [\omega^r(\omega_r^{2i-1} - \omega_{2i}^0)] = 0, \\ &\qquad [\omega^{2i-1}\omega_\alpha^{2i}] - [\omega^{2i}\omega_\alpha^{2i-1}] - [\omega^r \omega_\alpha^0] = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux premières équations (40) l'indice i est fixe, l'indice de sommation j s'étend à toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$ *autres que* i, et l'indice de sommation α à toutes les valeurs $2p+1, \ldots, r-1$. Dans la troisième équation (40), l'indice de sommation i s'étend à toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$.

La troisième équation (40) montre que les formes ω_α^{2i-1}, ω_α^{2i}, ω_α^0 sont des combinaisons linéaires de $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2p}, \omega^r$. Nous poserons

$$(41) \qquad \left\{\begin{aligned} \omega_\alpha^{2i-1} &= a_{\alpha,2j-1}^{2i-1}\,\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{2i-1}\,\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{2i-1}\,\omega^r, \\ \omega_\alpha^{2i} &= a_{\alpha,2j-1}^{2i}\,\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{2i}\,\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{2i}\,\omega^r, \\ \omega_\alpha^{0} &= a_{\alpha,2j-1}^{0}\,\omega^{2j-1} + a_{\alpha,2j}^{0}\,\omega^{2j} + a_{\alpha,r}^{0}\,\omega^r, \end{aligned}\right.$$

l'indice de sommation j prenant toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$. La dernière équation (40) donne entre les coefficients les relations

$$(42) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} + a_{\alpha,2i}^{2j} = 0, \quad a_{\alpha,2j}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2j-1} = 0, \quad a_{\alpha,2j-1}^{2i} - a_{\alpha,2i-1}^{2j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \qquad\qquad a_{\alpha,r}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{0} = 0, \quad a_{\alpha,r}^{2i} + a_{\alpha,2i-1}^{0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{array}\right.$$

En portant les valeurs (41) de ω_α^{2i-1}, ω_α^{2i}, ω_α^0 dans les deux premières équations (40), on obtient d'abord les deux relations

$$(43) \qquad a_{\alpha,2i-1}^{2i} = 0, \qquad a_{\alpha,2i}^{2i-1} = 0,$$

puis les équations suivantes, dans les seconds membres desquelles on a supprimé les termes en $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2p}, \omega^r$,

$$(44) \qquad \left\{\begin{aligned} \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r &= a_{\alpha,2i}^{2i}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2i-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2i} - \omega_0^0 - \omega_r^r &= a_{\alpha,2i-1}^{2i-1}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2j-1}^{2i} - \omega_{2i-1}^{2j} &= a_{\alpha,2j-1}^{2i}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2i-1}^{2j-1} + \omega_{2j}^{2i} &= a_{\alpha,2j}^{2i}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2j-1}^{2i-1} + \omega_{2i}^{2j} &= a_{\alpha,2j-1}^{2i-1}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_{2j}^{2i-1} - \omega_{2i}^{2j-1} &= a_{\alpha,2j}^{2i-1}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_r^{2i} + \omega_{2i-1}^{0} &= a_{\alpha,r}^{2i}\,\omega^\alpha + \ldots, \\ \omega_r^{2i-1} - \omega_{2i}^{0} &= a_{\alpha,r}^{2i-1}\,\omega^\alpha + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On en déduit les nouvelles relations

$$(45) \qquad a_{\alpha,2i-1}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2i} = 0, \qquad a_{\alpha,2j-1}^{2i} + a_{\alpha,2i-1}^{2j} = 0, \qquad a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} - a_{\alpha,2i}^{2j} = 0, \quad a_{\alpha,2j}^{2i-1} + a_{\alpha,2i}^{2j-1} = 0,$$

qui, confrontées avec (42) et (43), donnent

$$(46) \qquad a_{\alpha,2j-1}^{2i-1} = a_{\alpha,2j}^{2i-1} = a_{\alpha,2j-1}^{2i} = a_{\alpha,2j}^{2i} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Les formes ω_α^k ($k = 1, 2, \ldots, 2p$) ne dépendent donc que de ω^r :

$$\omega_\alpha^k = a_{\alpha r}^k \omega^r,$$

d'où, par différentiation extérieure, en laissant de côté les termes qui contiennent ω^r en facteur,

$$[\omega_\alpha^0 \omega^k] = 2 a_{\alpha r}^k [\omega^1 \omega^2 + \ldots + \omega^{2p-1} \omega^{2p}] + \ldots;$$

cela n'est possible que si $a^k_{\alpha r} = 0$, d'où

(47) $$\omega^k_\alpha = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p);$$

ces équations conduisent elles-mêmes par différentiation extérieure à la nouvelle équation

(48) $$\omega^0_\alpha = 0.$$

17. Reprenons maintenant les équations (40) et particulièrement les quatre équations de rang 1, 2, 3, 4 en ne conservant que les termes qui contiennent ω^1, ω^2, ω^3, ω^4. Posons

(49) $$\left\{\begin{aligned} &\omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^r_r = A\omega^3 + A'\omega^4,\\ &\omega^3_3 + \omega^4_4 - \omega^0_0 - \omega^r_r = B\omega^1 + B'\omega^2.\end{aligned}\right.$$

On aura

(50) $$\left\{\begin{aligned} &A[\omega^2\omega^3] + A'[\omega^2\omega^4] + [\omega^3(\omega^2_3 - \omega^4_1)] + [\omega^4(\omega^3_1 + \omega^2_4)] = 0,\\ &A[\omega^1\omega^3] + A'[\omega^1\omega^4] + [\omega^3(\omega^1_3 + \omega^4_2)] + [\omega^4(\omega^1_4 - \omega^3_2)] = 0,\\ -&B[\omega^1\omega^4] - B'[\omega^2\omega^4] + [\omega^1(\omega^4_1 - \omega^2_3)] + [\omega^2(\omega^1_3 + \omega^4_2)] = 0,\\ -&B[\omega^1\omega^3] - B'[\omega^2\omega^3] + [\omega^1(\omega^3_1 + \omega^2_4)] + [\omega^2(\omega^3_2 - \omega^1_4)] = 0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire $A = B = A' = B' = 0$, puis

(51) $$\left\{\begin{aligned} &\omega^2_3 - \omega^4_1 = 0,\\ &\omega^3_1 + \omega^2_4 = 0,\\ &\omega^1_3 + \omega^4_2 = 0,\\ &\omega^1_4 - \omega^3_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

En conséquence, les formes analogues à celles qui figurent dans les premiers membres des équations (49) et (51) sont toutes des multiples de ω^r :

(52) $$\left\{\begin{aligned} &\omega^{2i-1}_{2i-1} + \omega^{2i}_{2i} - \omega^0_0 - \omega^r_r = c_i\omega^r,\\ &\omega^{2j}_{2i-1} - \omega^{2i}_{2j-1} = a_{ij}\omega^r \qquad (a_{ij} = -a_{ji}),\\ &\omega^{2j-1}_{2i-1} + \omega^{2i}_{2j} = b_{ij}\omega^r,\\ &\omega^{2j-1}_{2i} - \omega^{2i-1}_{2j} = c_{ij}\omega^r \qquad (c_{ij} = -c_{ji});\end{aligned}\right.$$

il faudra leur ajouter

(53) $$\left\{\begin{aligned} &\omega^{2i}_r + \omega^0_{2i-1} = c_i\omega^{2i} + a_{ji}\omega^{2j-1} + b_{ij}\omega^{2j} + h_i\omega^r,\\ &\omega^{2i-1}_r - \omega^0_{2i} = c_i\omega^{2i-1} + b_{ji}\omega^{2j-1} + c_{ji}\omega^{2j} + k_i\omega^r.\end{aligned}\right.$$

La différentiation extérieure des équations (52) donne, en ne portant son attention que sur les termes en $[\omega^1\omega^2]$, $[\omega^3\omega^4]$, ..., $[\omega^{2p-1}\omega^{2p}]$,

$$c_i = a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0,$$

puis l'opération analogue sur les équations (53) donne $h_i = k_i = 0$.

Finalement *on est conduit au système suivant, qu'on vérifie facilement être complètement intégrable,*

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{ll} \omega_{2i-1}^{r} = \omega^{2i}, \qquad \omega_{2i}^{r} = -\,\omega^{2i-1} & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_0^0 + \omega_r^r = \omega_1^1 + \omega_2^2 = \ldots = \omega_{2p-1}^{2p-1} + \omega_{2p}^{2p}, & \\ \omega_{2i-1}^{2j} = \omega_{2j-1}^{2i}, \quad \omega_{2i-1}^{2j-1} = -\,\omega_{2j}^{2i}, \quad \omega_{2i}^{2j-1} = \omega_{2j}^{2i-1} & (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_r^{2i} = -\,\omega_{2i-1}^{0}, \quad \omega_r^{2i-1} = \omega_{2i}^{0} & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_\alpha^0 = \omega_\alpha^1 = \omega_\alpha^2 = \ldots = \omega_\alpha^{2p} = \omega_\alpha^r = 0 & (\alpha = 2p+1, \ldots, r-1). \end{array}\right.$$

18. La solution générale du problème dépend de $2(p+1)r - (2p^2 + 3p + 2)$ constantes arbitraires. Toutes les solutions se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation projective et chaque solution admet un groupe projectif dont l'ordre est la différence entre $r(r+2)$ et le nombre de constantes arbitraires de la solution générale, c'est-à-dire

$$r^2 - 2pr + 2p^2 + 3p + 2.$$

On vérifie facilement que l'équation quadratique extérieure

$$[x^0 x^r] + [x^1 x^2] + \ldots + [x^{2p-1} x^{2p}] = 0,$$

où les x^i sont les coordonnées *relatives* d'un point fixe de l'espace, est stable. Par suite il existe un complexe linéaire *stable* pour lequel l'hyperplan focal d'un point (x) a pour équation

$$x^0 X^r - x^r X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 + \ldots + x^{2p-1} X^{2p} - x^{2p} X^{2p-1} = 0.$$

Au point A_0, origine du repère défini par les points de base $A_0, \ldots, A_r$, l'équation de l'hyperplan focal est, en coordonnées relatives, $X^r = 0$: *c'est l'hyperplan associé au point* A_0.

19. *Conclusion générale.* — Si l'équation de Pfaff, qui définit dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace le champ d'éléments de contact cherché, est complètement intégrable, le champ s'obtient en considérant une famille à un paramètre d'hyperplans telle qu'il en passe un et un seul par tout point du domaine; l'hyperplan associé à un point M est alors l'hyperplan de la famille passant par ce point. *Les solutions de cette nature ne sont pas en général susceptibles de s'étendre à tout l'espace.*

Si l'équation de Pfaff n'est pas intégrable, l'hyperplan à associer à un point M du domaine est l'hyperplan focal du point M par rapport à un complexe linéaire fixe; *les solutions de cette nature se prolongent dans tout l'espace.*

V. — Les champs (C) d'éléments plans dans l'espace projectif à quatre dimensions.

20. Considérons un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace projectif à quatre dimensions et attachons à chaque point M de $\mathcal{D}$ un plan P (à deux dimensions). Nous voulons chercher à quelles conditions doit satisfaire le champ ainsi déterminé pour que

les courbes du champ en soient des lignes asymptotiques, c'est-à-dire pour que toute courbe du champ ait en chacun de ses points M un contact du second ordre avec le plan P associé au point M.

Les courbes du champ sont celles qui satisfont à deux équations de Pfaff indépendantes, à savoir celles qui déterminent l'élément plan tangent à P au point M.

Il y a deux catégories de solutions qui sont évidentes.

1° *Le système différentiel obtenu en annulant les deux équations de Pfaff est complètement intégrable*, autrement dit détermine une famille à deux paramètres $\mathcal{F}$ de surfaces (à deux dimensions) S. Il est nécessaire et suffisant alors que ces surfaces soient des plans. Si par chaque point M de $\mathcal{D}$ il passe une surface S et une seule, on associera à ce point le plan S lui-même. En général *cette solution locale du problème ne pourra pas être prolongée dans tout l'espace*.

2° *Le système considéré n'est pas complètement intégrable, mais une des combinaisons linéaires des deux équations de Pfaff est complètement intégrable*. Elle définit alors une famille à un paramètre $\mathcal{F}$ d'hypersurfaces. Toutes les courbes du champ devront en chacun de leurs points M être tangentes à l'hypersurface qui passe par M et en même temps avoir un contact du second ordre avec elle; les hypersurfaces de la famille sont donc des hyperplans. Le champ de plans considéré devra donc, dans chaque hyperplan, être un champ (**C**). Par suite le plan P associé à un point M devra dans chaque hyperplan de la famille $\mathcal{F}$ être le plan focal d'un complexe linéaire de l'hyperplan.

Finalement on aura une solution du problème de la seconde catégorie en se donnant une famille à un paramètre d'hyperplans et dans chacun de ces hyperplans un complexe linéaire non dégénéré. *Là encore une solution locale de cette espèce ne pourra pas en général être prolongée dans tout l'espace*.

3° *Aucune combinaison linéaire des deux équations de Pfaff n'est complètement intégrable;* c'est maintenant de ce cas-là que nous allons nous occuper.

21. Nous allons encore employer la méthode du repère mobile. A chaque point A_0 du domaine $\mathcal{D}$ attachons un repère projectif d'origine A_0 et arrangeons-nous, ce qui est toujours possible, pour que le plan P associé à ce point contienne les sommets A_1, A_2 du repère. En conservant les notations précédemment utilisées, les deux équations de Pfaff qui définissent le champ sont

$$\omega^3 = 0, \qquad \omega^4 = 0;$$

les conditions à réaliser pour que ce champ soit (**C**) sont

$$\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 \equiv 0, \qquad \omega^1\omega_1^4 + \omega^2\omega_2^4 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega^3, \omega^4), \tag{55}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1^3 &= c\,\omega^2 + a\,\omega^3 + b\,\omega^4, & \omega_2^3 &= -c\,\omega^1 + \alpha\,\omega^3 + \beta\,\omega^4, \\ \omega_1^4 &= c'\omega^2 + a'\omega^3 + b'\omega^4, & \omega_2^4 &= -c'\omega^1 + \alpha'\omega^3 + \beta'\omega^4. \end{aligned}\right. \tag{56}$$

On a du reste

$$d\omega^3 \equiv 2c[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^4 \equiv 2c'[\omega^1\omega^2] \qquad (\text{mod}\ \omega^3,\ \omega^4).$$

Par hypothèse les coefficients c et c' ne peuvent être nuls tous deux; mais, si $c \neq 0$, on peut supposer $c' = 0$ en prenant $\omega^4 - \frac{c'}{c}\omega^3$ comme nouvelle forme ω^4, car cela revient à remplacer A_3 par $A_3 + \frac{c'}{c}A_4$, le sommet A_4 étant conservé. On pourra enfin s'arranger pour avoir $c = 1$.

22. Nous allons maintenant chercher à simplifier le plus possible les valeurs numériques des coefficients a, b, α, β, a', b', α', β' par un choix convenable des points de base A_1, A_2, A_3, A_4 du repère attaché à un point quelconque A_0 de l'espace. Nous prendrons, pour les nouveaux points de base, et sans changer A_0,

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{A}_1 &= \lambda A_1 + \mu A_2 + u A_0, \\ \overline{A}_2 &= \rho A_1 + \sigma A_2 + v A_0, \\ \overline{A}_3 &= \ \ A_3 + x A_1 + y A_2 + \xi A_0, \\ \overline{A}_4 &= \ \ A_4 + z A_1 + t A_2 + \eta A_0. \end{aligned}\right.$$

La relation

$$\omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3 + \omega^4 A_4 = \overline{\omega}_0^0 \overline{A}_0 + \overline{\omega}^1 \overline{A}_1 + \overline{\omega}^2 \overline{A}_2 + \overline{\omega}^3 \overline{A}_3 + \overline{\omega}^4 \overline{A}_4$$

nous permet de calculer les nouvelles formes $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$, $\overline{\omega}^3$, $\overline{\omega}^4$, $\overline{\omega}_1^3$, $\overline{\omega}_2^3$, $\overline{\omega}_1^4$, $\overline{\omega}_2^4$ au moyen des anciennes. On trouve, en supposant $\lambda\sigma - \mu\rho = 1$,

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{\omega}^1 &= \ \ \sigma\omega^1 - \rho\omega^2 + (\rho y - \sigma x)\omega^3 + (\rho t - \sigma z)\omega^4, \\ \overline{\omega}^2 &= -\mu\omega^1 + \lambda\omega^2 + (\mu x - \lambda y)\omega^3 + (\mu z - \lambda t)\omega^4, \\ \overline{\omega}^3 &= \ \ \omega^3, \\ \overline{\omega}^4 &= \ \ \omega^4; \\ \overline{\omega}_1^3 &= \ \ \lambda\omega_1^3 + \mu\omega_2^3 + u\,\omega^3, \\ \overline{\omega}_2^3 &= \ \ \rho\omega_1^3 + \sigma\omega_2^3 + v\,\omega^3, \\ \overline{\omega}_1^4 &= \ \ \lambda\omega_1^4 + \mu\omega_2^4 + u\,\omega^4, \\ \overline{\omega}_2^4 &= \ \ \rho\omega_1^4 + \sigma\omega_2^4 + v\,\omega^4. \end{aligned}\right.$$

On en déduit facilement qu'on peut obtenir les nouvelles relations

$$\overline{\omega}_1^3 = \overline{\omega}^2, \qquad \overline{\omega}_2^3 = -\overline{\omega}^1,$$
$$\overline{\omega}_1^4 = A\overline{\omega}^3, \qquad \overline{\omega}_2^4 = B\overline{\omega}^3,$$

en choisissant pour u, v, x, y, z les valeurs

$$x = \alpha - \beta', \qquad y = b' - a, \qquad z = \beta, \qquad t = -b,$$
$$u = -\lambda b' - \mu\beta', \qquad v = -\rho b' - \sigma\beta',$$

λ, μ, ρ, σ étant assujetties à satisfaire aux conditions

$$(59)\qquad \begin{cases} \lambda a' + \mu \alpha' = A, \\ \rho a' + \sigma \alpha' = B. \end{cases}$$

Cela posé, deux cas sont possibles suivant que $a' = \alpha' = 0$ ou que les coefficients a', α' ne sont pas tous les deux nuls. Or le premier cas est impossible, car de la nullité des formes ω_1^4 et ω_2^4 on déduirait par différentiation extérieure

$$(60)\qquad \begin{cases} [\omega_1^0 \omega^4] + [\omega^2 \omega_3^4] = 0, \\ [\omega_2^0 \omega^4] - [\omega^1 \omega_3^4] = 0; \end{cases}$$

de ces relations résulterait que la forme ω_3^4 est proportionnelle à ω^4 et par suite on aurait

$$d\omega^4 = [\omega^3 \omega_3^4] + [\omega^4(\omega_4^4 - \omega_0^0)],$$

autrement dit l'équation $\omega^4 = 0$ serait complètement intégrable, contrairement à une hypothèse antérieure. Or les coefficients A et B résultant d'une substitution linéaire et homogène unimodulaire arbitraire effectuée sur a' et α', on peut toujours s'arranger pour que A et B aient des valeurs arbitrairement choisies non toutes nulles. Nous prendrons $A = 1$, $B = 0$, d'où les relations

$$\omega_1^4 = \omega^3, \qquad \omega_2^4 = 0.$$

On peut donc finalement mettre les équations différentielles du problème sous la forme réduite

$$(61)\qquad \omega_1^3 = \omega^2, \qquad \omega_2^3 = -\omega^1, \qquad \omega_1^4 = \omega^3, \qquad \omega_2^4 = 0.$$

23. Nous allons différentier extérieurement les équations (61). On obtient les équations quadratiques extérieures

$$(62)\qquad \begin{cases} [\omega^2(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2)] + [\omega^3(\omega_4^3 - \omega_3^2 - \omega_1^0)] - [\omega^4 \omega_4^2] = 0, \\ [\omega^1(\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2)] + [\omega^3(\omega_2^0 - \omega_3^1)] - [\omega^4 \omega_4^1] = 0, \\ [\omega^2(\omega_3^4 + 2\omega^1)] + [\omega^3(\omega_0^0 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3)] - [\omega^4(\omega_4^3 + \omega_1^0)] = 0, \\ [\omega^1(\omega_3^4 + 2\omega^1)] + [\omega^3 \omega_2^1] + [\omega^4 \omega_2^0] = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations montrent que la forme $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ ne dépend que de ω^3 et ω^4; il en est de même pour la forme $\omega_3^4 + 2\omega^1$, d'après les deux dernières équations (62). Mais on peut, par un changement de base n'altérant pas les équations (61), s'arranger pour que ces deux formes $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ et $\omega_3^4 + 2\omega^1$ ne dépendent plus de ω^4. En prenant en effet $A_3 + \lambda A_0$ et $A_4 + \mu A_0$ pour nouveaux sommets A_3 et A_4, la forme ω_3^4 est augmentée de $\lambda\omega^4$ et la forme $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$ est diminuée de $\lambda\omega^3 + \mu\omega^4$, de sorte qu'on peut d'abord disposer de λ de manière que ω_3^4 ne dépende plus de ω^4, et ensuite disposer de μ de manière que la seconde forme ne dépende également plus de ω^4.

Cela posé les relations (62) donneront

$$
(63)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 &= A\omega^3,\\
\omega_3^4 + 2\omega^1 &= B\omega^3,\\
\omega_2^1 &= B\omega^1 + E\omega^3 + C\omega^4,\\
\omega_2^0 &= C\omega^3 + D\omega^4,\\
\omega_3^1 &= -A\omega^1 + F\omega^3 + G\omega^4,\\
\omega_4^1 &= (G - D)\omega^3 + L\omega^4,\\
\omega_4^2 &= M\omega^3 + N\omega^4,\\
\omega_4^3 + \omega_1^0 &= P\omega^3 + Q\omega^4,\\
\omega_3^2 + 2\omega_1^0 &= -A\omega^2 + C\omega^3 + (M+Q)\omega^4,\\
\omega^0 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3 &= B\omega^2 + R\omega^3 - P\omega^4.
\end{aligned}
\right.
$$

La différentiation extérieure de $\omega_3^4 + 2\omega^1$, en ne conservant dans le résultat que les termes en $[\omega^1\omega^2]$, donne $B = 0$; en négligeant ensuite les termes qui contiennent ω^4 en facteur, on obtient $A = 2R$, $E = 0$. Enfin on arrive à la relation

$$[\omega^4(\omega_3^0 + 2P\omega^1 + 2C\omega^2 + \overline{2D - G}\,\omega^3)] = 0,$$

qui permet de poser

$$(64)\qquad \omega_3^0 = -2P\omega^1 - 2C\omega^2 + (G - 2D)\omega^3 + S\omega^4,$$

avec

$$(65)\qquad A = 2R, \qquad B = 0, \qquad E = 0.$$

Différentions maintenant $\omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2$; l'ensemble des termes en $[\omega^1\omega^2]$ donne $A = 0$. En négligeant les termes qui contiennent ω^4 en facteur, on trouve $C = F = P$, puis la relation

$$[\omega^4(2M\omega^1 + 2\,\overline{D - G}\,\omega^2 - L\omega^3 - \omega_4^0)] = 0,$$

qui permet de poser

$$(66)\qquad \omega_4^0 = +2M\omega^1 + 2\,\overline{D - G}\,\omega^2 - L\omega^3 + T\omega^4,$$

avec

$$(67)\qquad A = B = R = E = 0, \qquad C = F = P.$$

La différentiation de $\omega_2^1 = C\omega^4$ donne, en laissant de côté les termes qui contiennent ω^4 en facteur, $C = 0$, puis $D + G = 0$. La différentiation extérieure de $\omega_3^1 = G\omega^4$ donne, en négligeant les termes qui contiennent ω^4 en facteur, $4D - 7G = 0$, d'où $D = G = 0$, et par suite

$$(68)\qquad A = B = C = D = E = F = G = P = R = 0,$$

avec

$$(69)\qquad \omega_3^0 = S\omega^4, \qquad \omega_4^0 = 2M\omega^1 - L\omega^3 + T\omega^4.$$

La différentiation extérieure de $\omega_4^1 = L\omega^4$ donne, par des procédés analogues,

$$L = T = 0;$$

celle de ω_2^0 donne

$$S = 0;$$

celle de $\omega_4^3 + \omega_1^0$ donne

$$M - 3Q = 0$$

et celle de $\omega_3^2 + 2\omega_1^0$ donne

$$M + 2Q = 0, \qquad \text{d'où } M = Q = 0.$$

Enfin la différentiation extérieure de $\omega_4^2 = N\omega^4$ donne $N = 0$.

Finalement on est arrivé à montrer que *tous les coefficients qui figurent dans les équations* (63) *sont nuls*. On montre ensuite facilement que *les équations* (63) *ainsi réduites, y compris les équations* (61), (64) *et* (66), *forment un système complètement intégrable*.

24. Théorème. — *Le système différentiel qui donne les champs* (**C**) *cherchés, dans le cas où aucune combinaison linéaire des équations* $\omega^3 = 0$, $\omega^4 = 0$ *n'est complètement intégrable, est le système complètement intégrable*

$$(70)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \omega_1^3 = \omega^2, & \omega_2^3 = -\omega^1, & \omega_1^4 = \omega^3, & \omega_2^4 = 0; & \\ \omega_2^0 = 0, & \omega_2^1 = 0; & & & \\ \omega_3^0 = 0, & \omega_3^1 = 0, & \omega_3^2 = -2\omega_1^0, & \omega_3^3 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0, & \omega_3^4 = -2\omega^1; \\ \omega_4^0 = 0, & \omega_4^1 = 0, & \omega_4^2 = 0, & \omega_4^3 = -\omega_1^0, & \omega_4^4 = 2\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0. \end{array}\right.$$

La solution générale de ce système dépend de 16 *constantes arbitraires. Elle résulte d'une solution particulière par une transformation projective. Toute solution admet un groupe projectif à* 8 *paramètres.*

Les équations de structure de ce groupe sont données par les formules qui fournissent les différentielles des huit formes

$$\omega^1, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \omega^4, \quad \omega_1^1 - \omega_0^0, \quad \omega_2^2 - \omega_0^0, \quad \omega_1^0, \quad \omega_1^2,$$

à savoir :

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} d\omega^1 &= [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)], \\ d\omega^2 &= [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] - 2[\omega^3\omega_1^0], \\ d\omega^3 &= 2[\omega^1\omega^2] + [\omega^3(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0)] - [\omega^4\omega_1^0], \\ d\omega^4 &= 3[\omega^1\omega^3] + [\omega^4(2\omega_1^1 + \omega_2^2 - 3\omega_0^0)], \\ d(\omega_1^1 - \omega_0^0) &= -2[\omega^1\omega_1^0], \\ d(\omega_2^2 - \omega_0^0) &= [\omega^1\omega_1^0], \\ d\omega_1^0 &= [\omega_1^0(\omega_0^0 - \omega_1^1)], \\ d\omega_1^2 &= -3[\omega^2\omega_1^0] + [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)]. \end{aligned}\right.$$

Pour définir géométriquement les solutions, remarquons que, d'après (71), les équations

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \omega_2^2 - \omega_0^0 = \omega_1^0 = \omega_1^2 = 0,$$

forment un système complètement intégrable. En égalant à des constantes numériques fixes les intégrales premières de ce système, on restreindra la famille des repères attachés aux points de l'espace : ils ne dépendront plus que des coordonnées absolues de ces points. Avec cette restriction on aura, d'après (71),

$$d\omega^1 = 0, \qquad d\omega^2 = 0, \qquad d\omega^3 = 2[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^4 = 3[\omega^1\omega^3],$$

d'où, par un choix convenable des variables u^1, u^2, u^3, u^4,

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= du^1,\\
\omega^2 &= du^2,\\
\omega^3 &= du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1,\\
\omega^4 &= du^4 + 3u^1\,du^3 + \frac{3}{2}(u^1)^2\,du^2.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
dA_0 &= du^1 A_1 + du^2 A_2 + (du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1)\,A_3 + \left[du^4 + 3u^1\,du^3 + \frac{3}{2}(u^1)^2\,du^2\right]A_4,\\
dA_1 &= du^2 A_3 + (du^3 + u^1\,du^2 - u^2\,du^1)\,A_4,\\
dA_2 &= -du^1 A_3,\\
dA_3 &= -2\,du^1 A_4,\\
dA_4 &= 0.
\end{aligned}$$

On en tire, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 étant quatre points analytiques fixes,

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned}
A_4 &= C_4,\\
A_3 &= C_3 - 2u^1 C_4,\\
A_2 &= C_2 - u^1 C_3 + (u^1)^2 C_4,\\
A_1 &= C_1 + u^2 C_3 + (u^3 - u^1u^2)\,C_4,\\
A_0 &= C_0 + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^3 C_3 + \left[u^4 + u^1u^3 + \frac{1}{2}(u^1)^2u^2\right]C_4.
\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées projectives non homogènes du point A_0 par rapport au repère dont les points de base sont les C_i, sont

$$x^1 = u^1, \qquad x^2 = u^2, \qquad x^3 = u^3, \qquad x^4 = u^4 + u^1u^3 + \frac{1}{2}(u^1)^2u^2,$$

d'où

$$u^1 = x^1, \qquad u^2 = x^2, \qquad u^3 = x^3, \qquad u^4 = x^4 - x^1x^3 - \frac{1}{2}(x^1)^2x^2.$$

Par suite les formes ω^3 et ω^4 deviennent, en coordonnées projectives fixes,

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega^3 &= dx^3 + x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1,\\
\omega^4 &= dx^4 + x^1\,dx^3 - x^3\,dx^1 + x^1[dx^3 + x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1].
\end{aligned}\right.$$

Il en résulte que le plan associé au point (x) est l'intersection des deux hyperplans

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned}
X^3 - x^3 + x^1X^2 - x^2X^1 &= 0,\\
X^4 - x^4 + x^1X^3 - x^3X^1 &= 0;
\end{aligned}\right.$$

ce sont les hyperplans focaux du point (x) *par rapport à deux complexes linéaires fixes*. Au point (o, o, o, o) ces hyperplans sont $X^3 = 0$, $X^4 = 0$, dont l'intersection est le plan $A_0 A_1 A_2$.

En coordonnées homogènes fixes, les équations du plan associé au point (x) sont

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^0 X^3 - x^3 X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 = 0, \\ x^0 X^4 - x^4 X^0 + x^1 X^3 - x^3 X^1 = 0. \end{array}\right.$$

On remarquera que ces plans forment une famille telle qu'à un plan de la famille corresponde en général un point et un seul de l'espace.

25. On peut démontrer d'une autre manière que le plan associé à un point de l'espace est l'intersection des hyperplans focaux de M par rapport à deux complexes linéaires fixes. Il suffit pour cela de montrer l'existence d'une infinité à un paramètre de champs ($\mathbf{C}$) d'éléments de contact, l'hyperplan associé à M étant déterminé par les quatre points A_0, A_1, A_2, $A_3 + mA_4$, et l'équation de Pfaff qui définit le champ étant alors $\omega^4 - m\omega^3 = 0$. Le point A_0 d'une courbe du champ satisfait à

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 (A_3 + mA_4);$$

il faut que le point $d^2 A_0$ soit dans l'hyperplan formé par A_0, A_1, A_2, $A_3 + mA_4$ et par suite que le coefficient de A_4 dans $d^2 A_0$ soit égal au produit par m du coefficient de A_3. Or, en négligeant les termes en A_0, A_1, A_2,

$$\begin{aligned} d^2 A_0 &= [\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 + \omega^3(\omega_3^3 + m\omega_4^3)] A_3 + [\omega^1 \omega_1^4 + \omega^2 \omega_2^4 + \omega^3(\omega_3^4 + m\omega_4^4 + dm)] A_4 \\ &= \omega^3(\omega_3^3 + m\omega_4^3) A_3 + \omega^3(\omega^1 + \omega_3^4 + m\omega_4^4 + dm) A_4. \end{aligned}$$

La condition pour que le champ soit ($\mathbf{C}$) est donc

$$\omega^1 + \omega_3^4 + m(\omega_4^4 - \omega_3^3) - m^2 \omega_4^3 + dm = 0,$$

ce qui, en tenant compte des formules (70), donne

$$(76)\qquad dm - \omega^1 + m(\omega_1^1 - \omega_0^0) + m^2 \omega_1^0 = 0.$$

Cette équation est complètement intégrable, comme il est facile de le vérifier.

Pour avoir du reste la famille des complexes linéaires considérés, nous n'avons qu'à restreindre, comme nous l'avons déjà fait, les repères attachés aux différents points de l'espace de manière à annuler les formes $\omega_1^1 - \omega_0^0$ et ω_1^0; la forme ω^1 sera alors égale à dx^1, et l'équation (76) donnera $dm = dx^1$, ou $m = x^1 + C$. On aura donc les deux complexes linéaires définis respectivement par $\omega^4 - x^1 \omega^3 = 0$ et $\omega^3 = 0$, ce qui, d'après les équations (73), donne

$$dx^4 + x^1\, dx^3 - x^3\, dx^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad dx^3 + x^1\, dx^2 - x^2\, dx^1 = 0.$$

26. Le champ d'éléments plans déterminé dans cette Section jouit de propriétés géométriques intéressantes. Les équations (75) qui donnent les

équations du plan associé au point (x) de l'espace déterminent ce plan sans ambiguïté, sauf dans le cas où les deux équations ne sont pas indépendantes, ce qui exigerait

$$\frac{-x^3}{-x^4}=\frac{-x^2}{-x^3}=\frac{x_1}{0}=\frac{x^0}{x^1}=\frac{0}{x^0},$$

c'est-à-dire

$$x^0=0, \qquad x^1=0, \qquad (x^3)^2-x^2x^4=0.$$

Ces dernières équations définissent une conique Γ située dans le plan Π d'équation $x^0=x^1=0$. Si le point M appartient à cette conique, les équations (75) donnent un *hyperplan* contenant le plan Π et il y a une relation homographique entre l'hyperplan associé à un point M de la conique, et ce point lui-même. Quant au plan associé à un point M du plan Π, c'est le plan Π lui-même. Le groupe des homographies qui laissent invariant le champ considéré est donné par les équations

$$(77)\quad \begin{cases} (x^0)'= \alpha x^0+\beta x^1, \\ (x^1)'= \gamma x^0+\delta x^1, \\ (x^2)'= \alpha^2x^2-2\alpha\beta x^3+\beta^2x^4+A_2x^0+B_2x^1, \\ (x^3)'=-\alpha\gamma x^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)x^3-\beta\delta x^4+A_3x^0+B_3x^1, \\ (x^4)'= \gamma^2x^2-2\gamma\delta x^3+\delta^2x^4+A_4x^0+B_4x^1, \end{cases}$$

avec les relations

$$(78)\quad \begin{cases} \alpha B_3-\beta A_3+\gamma B_2-\delta A_2=0, \\ \alpha B_4-\beta A_4+\gamma B_3-\delta A_3=0, \end{cases}$$

où interviennent 8 paramètres arbitraires α, β, γ, δ, A_2, B_2, A_4, B_4.

Ajoutons enfin que le domaine $\mathcal{D}$, devant être choisi de manière qu'à tout point de $\mathcal{D}$ soit associé un plan bien déterminé, ne doit pas contenir à son intérieur la conique Γ. Mais quel qu'il soit, *les solutions qui existent à l'intérieur de ce domaine se prolongent dans tout l'espace privé de la conique* Γ.

27. Les droites issues des différents points M de l'espace dans le plan associé à M forment une famille $\mathcal{F}$ à quatre paramètres. Le lieu des droites de cette famille est un plan (exception faite pour les points de Γ, auxquels correspond un hyperplan).

On peut aussi se demander quelle est la figure formée par les droites de la famille qui sont situées dans un hyperplan donné. Il convient ici de distinguer plusieurs cas, les hyperplans de l'espace ne jouant pas tous le même rôle. Sont à ranger dans le même cas les hyperplans qui peuvent se déduire les uns des autres par les transformations du groupe (78). On trouve ainsi quatre cas distincts.

Premier cas. — *L'hyperplan coupe la conique* Γ *en deux points réels.* — On peut prendre l'hyperplan $x^3=0$ comme représentatif de ce premier cas. Les droites de $\mathcal{F}$ qui sont situées dans cet hyperplan sont celles qui satisfont aux relations

$$x^1 X^2 - x^2 X^1 = 0, \qquad x^0 X^4 - x^4 X^0 = 0;$$

elles constituent dans l'hyperplan $X^3 = 0$ *une congruence linéaire hyperbolique* dont les directrices sont les droites $x^1 = x^2 = 0$ et $x^0 = x^4 = 0$.

Deuxième cas. — *L'hyperplan coupe la conique* Γ *en deux points imaginaires conjugués.* — On peut prendre comme représentatif de ce cas l'hyperplan $x^2 + x^4 = 0$. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les relations

$$\begin{aligned} x^0 X^3 - x^3 X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 &= 0, \\ -x^0 X^2 + x^2 X^0 + x^1 X^3 - x^3 X^1 &= 0, \end{aligned}$$

elles constituent une congruence linéaire elliptique dont les directrices sont les droites

$$x^0 + i x^1 = x^2 + i x^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^0 - i x^1 = x^2 - i x^3 = 0.$$

Troisième cas. — *L'hyperplan est tangent à la conique* Γ. — On peut prendre $x^4 = 0$ comme hyperplan représentatif. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les équations

$$\begin{aligned} x^0 X^3 - x^3 X^0 + x^1 X^2 - x^2 X^1 &= 0, \\ x^1 X^3 - x^3 X^1 &= 0. \end{aligned}$$

Elles constituent une congruence linéaire à directrice double $x^2 = x^3 = 0$.

Quatrième cas. — *L'hyperplan contient le plan* Π. — On peut prendre l'hyper plan $x^0 = 0$ comme hyperplan représentatif. Les droites de $\mathcal{F}$ situées dans cet hyperplan sont données par les équations

$$\begin{aligned} x^1 X^2 - x^2 X^1 &= 0, \\ x^1 X^3 - x^3 X^1 &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont les droites situées dans le plan $x^1 = 0$ *et les droites issues du point* $x^1 = x^2 = x^3 = 0$.

28. Le problème posé et résolu dans cette Section peut naturellement se généraliser (n° 3); il est bien facile d'apercevoir des solutions à ce problème général dont les plus intéressantes sont celles qui consistent à associer à tout point M de l'espace projectif à r dimensions l'intersection des hyperplans focaux de M par rapport à h complexes linéaires fixes. Mais il serait bien hasardeux d'affirmer que c'est la solution la plus générale, dans le cas du moins où l'on ne pourrait extraire du système de Pfaff qui définit le champ aucun système partiel complètement intégrable. Il est à souhaiter qu'un jeune mathématicien trouve une méthode simple pour trancher la question.