

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VICTOR GUILLEMIN

SHLOMO STERNBERG

## **Sur les systèmes de formes différentielles**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 13, n° 2 (1963), p. 61-74.

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1963\\_\\_13\\_2\\_61\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_61_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES SYSTÈMES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES

par Victor GUILLEMIN (Columbia University)  
et Shlomo STERNBERG (Harvard University)

---

### INTRODUCTION

Étant donné une G-structure, on peut en principe, déterminer tous ses invariants structuraux en appliquant deux procédés fonctoriels un nombre fini de fois (voir E. CARTAN [2]) :

1) Réduire le groupe structural en astreignant le tenseur de structure à prendre certaines valeurs.

2) Induire une G-structure sur le fibré tangent à la G-structure donnée par *prolongation*.

Si l'on entend par G-structure une structure fibrée au sens moderne, le procédé 1) fait sortir de cette catégorie, même localement, mais on peut tout de même obtenir quelques résultats intéressants. Notre théorème 1, 1 est de ce genre et nous en indiquerons d'autres dans un article à paraître.

Dans son mémoire [3], CARTAN applique les méthodes esquissées dans [2] aux systèmes de Pfaff de cinq variables et en obtient une classification complète.

Nous appliquons ces méthodes aux systèmes de Pfaff plus généraux en nous bornant à établir quelques résultats sur leurs groupes d'automorphismes. De plus, nous nous restreignons aux cas les plus simples du point de vue algébrique.

D'abord, considérons un champ de  $n$ -plans,  $\Omega_n$ , sur une variété connexe  $V_m$  de dimension  $m = \frac{n(n+1)}{2}$ .

On suppose que la distribution obtenue de  $\Omega_n$  en formant les crochets de tous les couples de champs de vecteurs contenus dans  $\Omega_n$  est partout de dimension maximale (*i. e.* l'espace tangent tout entier).

Nous démontrons que le groupe des difféomorphismes de  $V_m$  qui conserve  $\Omega_n$  est un groupe de Lie de dimension finie <sup>(1)</sup>.

Si, pour  $m > \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\Omega_n$  satisfait à la condition ci-dessus, et, en plus, n'admet pas une distribution dérivée complètement intégrable, la même conclusion subsiste, mais, il nous sera plus commode de remettre la démonstration à un article ultérieur.

En même temps, nous discuterons le cas :

$2 < m < \frac{n(n+1)}{2}$  qui présente quelques difficultés algébriques qu'il n'est pas utile d'aborder ici.

### 1. — Généralités sur les G-structures.

Les méthodes que nous utilisons ici ont leurs origines dans les travaux de Cartan sur les groupes de Lie infinis et sur le problème d'équivalence. Voir [2], [4] et, pour un exposé moderne, [5], [6] et [7].

Pour tout ce qui concerne les définitions fondamentales de G-structures, voir [1] ou [7]. On peut trouver l'essentiel du théorème 1, 1 dans [5].

Soit  $V_n$  une variété différentiable de dimension  $n$ ,  $M$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $G$  un sous-groupe de  $GL(M)$ . Un G-structure sur  $V_n$  est la donnée, en tout point  $p$ , de  $V_n$ , d'un sous-ensemble,  $S_p$  de  $\text{Hom}[M, T_p(V_n)]$  tel que les axiomes suivants soient satisfaits.

- 1) Les éléments de  $S_p$  sont inversibles,
  - 2) Si  $A \in G$  et  $\alpha \in S_p$ , alors  $\alpha \circ A \in S_p$ ,
  - 3) Si  $\alpha \in S_p$ ,  $\beta \in S_p$ , alors il existe un  $A \in G$  tel que  $\alpha \circ A = \beta$ .
- Aux axiomes 1), 2) et 3) il faut, bien entendu, ajouter quelques conditions de régularité dont nous nous passerons ici. Moyennant ces conditions l'ensemble :

$$\bigcup_{p \in V_n} S_p$$

<sup>(1)</sup> Nous supposons partout  $n > 2$ . Pour  $n = 2$  nous avons une structure de contact, qui admet comme groupe des automorphismes un groupe de Lie infini simple.

devient un fibré principal de groupe structural  $G$ , que nous noterons  $E(V_n, G)$ .

Soit  $g$  l'algèbre de Lie de  $G$ . En regardant  $g$  comme sous-espace de  $M \otimes M^*$  on a la suite :

$$g \otimes M^* \xrightarrow{i} M \otimes M^* \otimes M^* \xrightarrow{\wedge} M \otimes M^* \wedge M^*$$

où l'application «  $i$  » est l'inclusion et l'application «  $\wedge$  » l'antisymétrisation. Nous désignerons par «  $\delta$  » l'application composée.

Soit  $p$  un point de  $V_n$  et  $\alpha$  un élément de  $S_p$ . «  $\alpha^{-1}$  » applique l'espace tangent en  $p$  sur l'espace  $M$  et, par relèvement, définit une application de l'espace tangent en  $(p, \alpha)$  sur l'espace  $M$ . La loi, qui associe à tout couple  $(p, \alpha)$  l'application que nous venons de définir, définit une 1-forme canonique sur  $E(V_n, G)$  à valeur dans  $M$ , ce que nous appelons sa *forme de structure*. Désignons-la par  $\mu$ .

Soit  $z$  un élément de  $E(V_n, G)$ . Choisissons arbitrairement une application linéaire,  $\Phi$ , de  $M$  dans  $T_z$  tel que  $\mu \circ \Phi$  soit l'identité sur  $M$ .

$d\mu \circ \Phi$  est un élément de  $\text{Hom}(M \wedge M, M)$  donc moyennant une identification canonique, c'est un élément de  $M \otimes M^* \wedge M^*$ .

On peut démontrer (c.f. [1]) que son image dans l'espace quotient  $M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(g \otimes M^*)$  ne dépend pas du choix de  $\Phi$ .

La loi qui associe à tout point de  $E(V_n, G)$  l'élément de  $M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(g \otimes M^*)$  ainsi défini s'appelle le *tenseur de structure* de  $E(V_n, G)$ .

$G$  opère canoniquement à droite dans les deux variétés  $E(V_n, G)$  et  $M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(g \otimes M^*)$ . On démontre sans peine que le tenseur de structure est une application différentiable de la première variété dans la seconde, qui commute avec ces deux actions.

## 2. — G-structures de type fini.

Soient  $M$  et  $N$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $g$  un sous-espace de  $\text{Hom}(M, N)$ . Nous désignerons par  $g^{(1)}$  le sous-espace de  $\text{Hom}(M, g)$  formé des applications :

$$A : M \rightarrow g$$

tel que

$$A_\nu \circ \varpi = A_\omega \circ \nu \quad \text{pour tous } \nu, \varpi \in M.$$

Par récurrence, nous définissons  $g^{(k)}$ , sous-espace de  $\text{Hom} [M, g^{(k-1)}]$ , par l'identité  $g^{(k)} = g^{(k-1)(1)}$ .

$g^{(k-1)}$  est, par récurrence, un sous-espace de  $\text{Hom} [M, g^{(k-2)}]$ , donc cette définition a un sens.

Nous dirons que  $g$  est de type fini si  $g^{(k)} = 0$ ,  $k$  suffisamment grand, et du type  $k$  si  $g^{(k)} = 0$  et  $g^{(k-1)} \neq 0$ .

Dans le cas qui nous intéresse,  $M = N$ ,  $g$  est une sous-algèbre de  $\text{Hom} (M, M)$  et  $G \subset \text{GL}(M)$  un sous-groupe de Lie associé.

Nous dirons que  $G$  est de type fini (soit de type  $k$ ) si  $g$  est de type fini (soit du type  $k$ ).

Ce concept joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes de transformation des  $G$ -structures comme indique le théorème suivant :

**THÉORÈME 1, 1.** — Soit  $E(V_n, G) \xrightarrow{\pi} V_n$  une  $G$ -structure donnée et soit :

$$f: E(V_n, G) \rightarrow M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(g \otimes M^*)$$

son tenseur de structure. Désignons par  $g_z$  la sous-algèbre de  $g$  laissant fixe  $f(z)$  quand  $g$  agit canoniquement sur

$$M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(g \otimes M^*).$$

Supposons  $g_z$  de type  $\leq k$  pour tout  $z$  et soient  $n_0, \dots, n_k$ , des bornes supérieures pour les dimensions des algèbres dérivées de  $g_z$  quand  $z$  parcourt  $E(V_n, G)$ .

*Conclusion.* — Le groupe des difféomorphismes global de  $V_n$  qui conserve la  $G$ -structure donnée est un groupe de Lie de dimension au plus  $n + n_0 + \dots + n_k$ .

Le théorème est encore valable si on remplace « global » par « infinitésimal » et « groupe » par « algèbre ».

Comme corollaire on a :

**COROLLAIRE.** — Supposons  $G$  de type fini et  $E(V_n, G)$  une  $G$ -structure quelconque donnée sur  $V_n$ . Alors le groupe des difféomorphismes de  $V_n$  conservant la  $G$ -structure est un groupe de Lie de dimension finie.

**3. — La G-structure associée à un champ de  $n$ -plans sur une variété de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .**

Soit  $V_m$  une variété de dimension  $m$ ,  $\Omega_n$  un champ de  $n$ -plans sur  $V_m$ ,  $M$  un espace vectoriel de dimension  $m$  et  $K$  un sous-espace de dimension  $n$ . A tout point  $p$  de  $V_m$  nous associons l'ensemble des applications linéaires inversibles de  $M$  sur  $T_p$  qui applique  $K$  sur le  $n$ -plans appartenant à  $\Omega_n$  en  $p$ . Cela définit une G-structure sur  $V_m$  à groupe structural  $G(K, M)$ , sous-groupe de  $GL(M)$  qui applique  $K$  sur lui-même. Inversement, se donner une  $G(K, M)$  structure sur  $V_m$  équivaut à se donner un champ de  $n$ -plans, comme on le voit aisément.

Désignons la  $G(K, M)$  structure associée à  $\Omega_n$  par  $E(V_m; K, M)$ . Nous en calculerons le tenseur de structure. L'algèbre de Lie de  $G(K, M)$  se compose de toutes les applications linéaires de  $M$  dans  $M$  qui appliquent  $K$  dans  $K$ . Cette algèbre s'identifie à  $M \otimes K' + K \otimes M^*$  en  $M \otimes M^*$ , [ $(K')$  désignant l'orthogonal de  $K$  dans  $M^*$ ]. L'espace quotient,

$$M \otimes M^* \wedge M^* / M \otimes K' \wedge M^* + K \otimes M^* \wedge M^*$$

s'identifie à l'espace  $M/K \otimes K^* \wedge K^*$ . c'est-à-dire, à  $\text{Hom}(K \wedge K, M/K)$ .

Donc le tenseur de structure de  $E(V_m; K, M)$  prend ses valeurs dans l'espace vectoriel des applications linéaires de  $K \wedge K$  dans  $M/K$ .

Soit  $\nu_1, \nu_2$  dans  $K$ ,  $p$  un point de  $V_m$  et  $\alpha$  une application linéaire de  $M$  sur  $T_p$  qui applique  $K$  sur le  $n$ -plan  $\Omega_n(p)$ .

Soient deux  $X_1, X_2$  champs de vecteurs qui appartiennent à  $\Omega_n$  et prennent les valeurs  $\alpha(\nu_1), \alpha(\nu_2)$  en  $p$ .

Posons :

$$(3, 1) \quad \nu_3 = \alpha^{-1} \circ [X_1, X_2]_p.$$

Si  $X'_1$  et  $X'_2$  sont autres champs de vecteurs qui appartiennent à  $\Omega_n$  et prennent en  $p$  les valeurs  $\alpha(\nu_1)$  et  $\alpha(\nu_2)$  alors, posant

$$\nu'_3 = \alpha^{-1}[X'_1, X'_2]_p$$

on voit aisément que  $\nu_3 - \nu'_3$  est contenu dans  $K$ . Donc l'image de  $\nu_3$  dans  $M/K$  dépend seulement de  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Ainsi, l'équation

(3, 1) définit une application de  $K \wedge K$  dans  $M/K$ . Celle-ci s'identifie aisément au tenseur de structure de  $E(V_m; K, M)$  en  $(p, \alpha)$ .

Cela étant, considérons le cas :

$$m = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 3.$$

Soit  $X_1, \dots, X_n$  champs de vecteurs qui définissent  $\Omega_n$  localement dans un voisinage d'un point  $p$ ; si

$$(3, 2) \quad X_i[X_j, X_k], i, j, k = 1, \dots, n \quad j < k$$

sont linéairement indépendants en  $p$ , alors, par ce que nous venons de voir, le tenseur de structure définit un isomorphisme entre  $K \wedge K$  et  $M/K$  en tout point de la fibre au-dessus de  $p$ . Prenons un isomorphisme quelconque

$$c \quad K \wedge K \rightarrow M/K$$

fixé une fois pour toute. Soit  $c'$  un autre isomorphisme de  $K \wedge K$  sur  $M/K$ . D'après un théorème élémentaire d'algèbre linéaire, il existe une application linéaire,  $A$  de  $M/K$  sur  $M/K$  telle que  $c' = A \circ c$ . Si en tout point de  $V_m$  il existe un système de champs de vecteurs pour lequel les vecteurs (3, 2) sont linéairement indépendants, alors le tenseur de structure prend la valeur  $c$  au moins une fois sur toute fibre de  $E(V_m; K, L)$ . Pour voir cela, supposons qu'il prend la valeur  $c'$  en un point donné,  $(p, \alpha)$ , et que  $c' = A \circ c$ ,  $A$  étant dans  $GL(M/K)$ .

Alors si  $B$  est un élément de  $GL(K, M)$  qui induit zéro sur  $K$  et  $A$  sur  $M/K$ , le tenseur de structure prend la valeur  $c$  au point  $(p, \alpha \circ B)$ .

Désignons par  $E'$  le sous-ensemble de  $E(V_m; K, M)$  où le tenseur de structure prend la valeur  $c$ . Nous montrerons qu'il est, lui-aussi, une  $G$ -structure sur  $V_m$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $G(K, M)$  qui laisse fixe  $c$  dans  $M/K \otimes K^* \wedge K^*$ . Si  $(p, \alpha)$  appartient à  $E'$ , alors  $(p, \alpha \circ A)$  appartient à  $E'$  puisque l'action de  $GL(K, M)$  sur  $E(V_m; K, M)$  commute avec son action sur  $M/K \otimes K^* \wedge K^*$ . Par le même raisonnement si  $(p, \alpha)$  et  $(p, \beta)$  appartiennent à  $E'$ ,  $\alpha = \beta \circ A$  où  $A$  est contenu dans  $H$ . Donc, par définition,  $E'$  est une  $G$ -structure sur  $V_m$  à groupe structural  $H$ . Il est évident que tout difféomorphisme de  $V_m$  qui conserve  $\Omega_n$  conserve  $E'$ .

## 4. — Réduction du groupe structural.

Le but des deux sections suivantes sera de démontrer que  $E'$  satisfait aux hypothèses du théorème 1, 1. Dans cette section nous caractérisons les sous-groupes de  $H$  qui entrent dans les hypothèses du théorème 1, 1.

D'abord nous étudierons l'algèbre de Lie de  $H$ , soit  $h$ . Prenons un complémentaire  $L$  de  $K$  dans  $M$ . L'application,  $c$ , de  $K \wedge K$  sur  $M/K$  définit une application  $\tilde{c}$  de  $K \wedge K$  sur  $L$ .

Si  $A$  est une application linéaire de  $K$  sur  $K$  il induit une application de  $K \wedge K$  sur lui-même et, par l'isomorphisme  $\tilde{c}$  une application,  $B$  de  $L$  sur lui-même.

Soit  $\psi(A)$  l'application de  $M$  sur  $M$  qui est identique à  $A$  sur  $K$  et à  $B$  sur  $L$ . Soit :

$$(4, 1) \quad h' = \{\psi(A), A \in GL(K)\}.$$

Tout élément de  $h$  applique  $K$  dans  $K$  et induit donc une application de  $M/K$  dans  $M/K$ .

Ainsi  $h$  s'applique homomorphiquement dans

$$gL(K) + gL(M/K).$$

Nous désignerons par  $h''$  le noyau de cet homomorphisme. C'est l'idéal abélien de  $h$  composé de toutes les applications de  $M$  dans  $M$  qui appliquent  $M$  dans  $K$  et  $K$  en zéro.

$h$  s'écrit comme somme directe des espaces vectoriels  $h'$  et  $h''$ .

$h''$  contient un sous-espace invariant, isomorphe à  $K^*$ , que voici :

A tout élément  $\mu \in K^*$  correspond une application  $\Phi\mu$  de  $K \wedge K$  dans  $K$  qui applique  $\nu_1 \wedge \nu_2$  sur

$$(4, 2) \quad \langle \nu_1, \mu \rangle \nu_2 - \langle \nu_2, \mu \rangle \nu_1.$$

La composée de  $c^{-1}$  et  $\Phi\mu$  est une application de  $M/K$  dans  $K$ . Par relèvement, il donne une application de  $M$  dans  $K$ , prenant la valeur nulle sur  $K$ , appelons  $\tilde{\mu}$ .

$\tilde{\mu}$  est par définition un élément de  $h''$  et on voit facilement que l'application qui envoie  $\mu$  sur  $\tilde{\mu}$  est linéaire et injective, donc elle identifie  $K^*$  avec un sous-espace de  $h''$ , que nous appellerons  $k$ .



Notre premier résultat sera :

**PROPOSITION 4, 1.** — Supposons que le tenseur de structure de  $E'$  prenne la valeur

$$b \in \frac{M \otimes M^* \wedge M^*}{\delta(h \otimes M^*)} \text{ en un point donné de } E'.$$

Soit  $h_b$  le sous-algèbre de  $h$  qui laisse fixe  $b$  quand  $h$  agit canoniquement sur  $M \otimes M^* \wedge M^* / \delta(h \otimes M^*)$ . Alors

$$h_b \cap h'' \quad \text{est contenu dans } k.$$

*Démonstration.* — Choisissons pour  $K$  une base

$$e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

et mettons

$$e_{ij} = \tilde{c}(e_i \wedge e_j).$$

Alors  $e_i, e_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad j < k$

forment une base pour  $M$ . Soit

$$\omega^i, \omega^{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad j < k$$

la base duale. Les éléments :

$$(4, 3) \quad e_i \otimes \omega^j + \sum_{\beta=1}^n e_{i\beta} \otimes \omega^{i\beta}, \quad j = 1, \dots, n$$

forment une base pour  $h'$ , et les éléments

$$(4, 4) \quad e_i \otimes \omega^{jk} \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad j < k$$

forment une base pour  $h''$ . De là on conclut que  $\delta(h \otimes M^*)$  est engendré par :

$$(4, 5) \quad e_i \otimes \omega^{jk} \wedge \omega^l$$

$$(4, 6) \quad e_i \otimes \omega^{jk} \wedge \omega^{lm}$$

$$(4, 7) \quad \sum_{\beta=1}^n e_{i\beta} \otimes \omega^{j\beta} \wedge \omega^{kl}$$

$$(4, 8) \quad e_i \otimes \omega^j \wedge \omega^k + \sum_{\beta=1}^n e_{i\beta} \otimes \omega^{j\beta} \wedge \omega^k$$

où  $i, j, k, l, m$  parcourent  $1, \dots, n$ .

Posons  $Z = L \otimes L' \wedge K'$  où  $L', K'$  sont les orthogonaux de  $L, K$  dans  $M^*$ .

On déduit de (4, 8) que  $Z \cap \delta(h \otimes M^*)$  est engendré par les éléments :

$$(4, 9) \quad \sum_{\beta=1}^n e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta j} \wedge \omega^k + e_{i\beta} \omega^{\beta k} \wedge \omega^j$$

où  $i, j, k$  parcourent  $1, \dots, n$ .

Soit  $X$  un élément de  $h''$ . Par (4, 4) il a la forme

$$\sum_{i,j,k=1}^n \Lambda_{jk}^i e_i \otimes \omega^{jk}, \quad \Lambda_{jk}^i = -\Lambda_{kj}^i.$$

Appliqué à  $\bar{c}$ ,  $X$  donne

$$(4, 10) \quad (\Lambda_{\mu\rho}^\alpha \delta_{\eta\rho}^\beta - \Lambda_{\eta\rho}^\alpha \delta_{\mu}^\beta + \Lambda_{\eta\rho}^\beta \delta_{\mu}^\alpha - \Lambda_{\mu\rho}^\beta \delta_{\eta}^\alpha + 2\Lambda_{\mu\eta}^\alpha \delta_{\rho}^\beta - 2\Lambda_{\mu\eta}^\beta \delta_{\rho}^\alpha) e_{\alpha\beta} \otimes \omega^{\mu\eta} \wedge \omega^\rho \pmod{\delta(h \otimes M^*)}.$$

Si  $X\bar{c} \equiv 0 \pmod{\delta(h \circ M^*)}$  alors, par (4, 9), (4,10) est égale à une expression de la forme :

$$(4, 11) \quad \sum_{i,j,k=1}^n A_{jk}^i \left( \sum_{\beta} e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta j} \wedge \omega^k + \sum_{\beta} e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta k} \wedge \omega^j \right).$$

Mettant

$$B_{jk}^i = 4(A_{jk}^i + A_{jk}^i)$$

nous obtenons de (4, 10) et (4, 11).

$$(4, 12) \quad B_{\eta\rho}^\alpha \delta_{\mu}^\beta - B_{\eta\rho}^\beta \delta_{\mu}^\alpha - B_{\mu\rho}^\alpha \delta_{\eta}^\beta + B_{\mu\rho}^\beta \delta_{\eta}^\alpha = \Lambda_{\mu\rho}^\alpha \delta_{\eta}^\beta - \Lambda_{\eta\rho}^\alpha \delta_{\mu}^\beta + \Lambda_{\eta\rho}^\beta \delta_{\mu}^\alpha - \Lambda_{\mu\rho}^\beta \delta_{\eta}^\alpha + 2\Lambda_{\mu\eta}^\alpha \delta_{\rho}^\beta - 2\Lambda_{\mu\eta}^\beta \delta_{\rho}^\alpha.$$

Enfin, de (4, 12) nous obtenons par contraction :

$$(2, n) \quad B_{\eta\rho}^\beta - \sum_{\alpha=1}^n B_{\alpha\rho}^\alpha \delta_{\eta}^\beta = n\Lambda_{\eta\rho}^\beta + \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha\rho}^\alpha \delta_{\eta}^\beta + 2 \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha\eta}^\alpha \delta_{\rho}^\beta.$$

Nous en tirons par antisymétrisation :

$$(4, 13) \quad \Lambda_{\eta\rho}^\alpha = \lambda_\eta \delta_\rho^\alpha - \lambda_\rho \delta_\eta^\alpha$$

pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  convenable, et, par symétrisation :

$$(4, 14) \quad B_{\eta\rho}^\alpha = \mu_\eta \delta_\rho^\alpha + \mu_\rho \delta_\eta^\alpha$$

pour  $\mu_1, \dots, \mu_n$  convenable.

On voit facilement que (4, 12) équivaut à

$$\mu_i = \lambda_i \quad i = 1, \dots, n$$

(4, 13) exprime que  $X \in k$ ; donc si,  $X$  est dans  $h''$ , pour que  $X\tilde{c} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}(h \otimes M^*)}$  il faut et il suffit que  $X$  soit dans  $k$ .

Si le tenseur de structure prend la valeur  $b$  en un point donné de  $E'$ , alors modulo  $\mathfrak{d}(h \otimes M^*)$ ,  $b$  peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{c} + \Delta_1 + \Delta_2$$

où  $\Delta_1$  appartient à  $K \otimes L' \wedge K'$  et  $\Delta_2$  appartient à  $L \otimes K' \wedge K'$ . Soit  $X$  dans  $h''$ . Par (4, 5) — (4, 8),  $X\Delta_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}(h \otimes M^*)}$ ;  $X\Delta_1 \in L \otimes K' \wedge K'$ ; et  $X\tilde{c} \in L \otimes L' \wedge K' \pmod{\mathfrak{d}(h \otimes M^*)}$ .

D'ailleurs, on voit de (4, 5) — (4, 8) que  $L \otimes K' \wedge K'$  et  $L \otimes L' \wedge K'$  ne contient aucun élément commun modulo  $\mathfrak{d}(h \otimes M^*)$ .

Donc si  $Xb = 0$ ,  $X\tilde{c} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}(h \otimes M^*)}$  et, d'après ce que nous venons de démontrer,  $X \in k$ . c.q.f.d.

### 5. Prolongation des groupes réduits.

Soit  $b$  la valeur prise par le tenseur de structure à un point donné de  $E'$  et soit  $h_b$  la sous-algèbre de  $h$  qui laisse fixe  $b$  quand  $h$  agit canoniquement sur  $M \otimes M^* \wedge M^* / \mathfrak{d}(h \otimes M^*)$ .

Nous démontrerons que  $h_b$  est de type  $\leq 2$  et que  $h_b^{(1)}$  s'identifie canoniquement à un sous-espace de  $K^* \wedge K^*$ .

Pour simplifier, nous identifierons  $L$  avec  $K \wedge K$  par l'application  $\tilde{c}$ . Si  $\nu$  et  $\varpi$  sont des éléments de  $K$  nous écrirons  $\widetilde{\nu \wedge \varpi}$  pour  $\tilde{c}(\nu \wedge \varpi)$ .

Soit  $S \in h_b^{(1)}$ . Si  $u \in K$  et  $\nu \in L$ ,  $S_u \nu = S_\nu u \in K$ ; donc  $S_u$  induit le nul endomorphisme sur  $M/K$  ce qui montre que  $S_u$  est contenu dans le noyau,  $h''$ , de l'application

$$h \rightarrow \text{GL}(M/K) \otimes \text{GL}(K).$$

De la proposition 4, 1 nous déduisons le

LEMME 5, 1. — Si  $S \in h_b^{(1)}$  et  $u \in K$ , alors  $S_u$  est contenu dans  $k$ ; donc, par (4, 2), il existe un élément  $\varpi_u$  de  $K^*$ , tel que, pour  $\widetilde{x \wedge y} \in L$

$$S_u \circ \widetilde{x \wedge y} = \langle x, \varpi_u \rangle y - \langle y, \varpi_u \rangle x_0.$$

L'application qui envoie  $\langle S, u \rangle$  sur  $\varpi_u$  est bilinéaire, ainsi

elle définit une application linéaire de  $h_b^{(1)}$  dans  $\text{Hom} (K, K^*)$ .  
 Montrons qu'elle est injective.

Soit  $S$  un élément du noyau. Alors  $S_u = 0$  pour tout  $u \in K$ .

Si  $u \in K$  et  $\nu \in L$

$$S_\nu u = S_u \nu = 0$$

donc  $S_\nu \in h''$  et par la proposition 4, 1  $S_\nu \in k$ . Prenons deux éléments de  $L$ ,  $\widetilde{x \wedge y}$  et  $\widetilde{\nu \wedge z}$ . Par (4, 2) et ce que nous venons de montrer.

$$S_{\widetilde{x \wedge y}} \circ \widetilde{\nu \wedge z} = \langle \nu, \omega_{x \wedge y} \rangle z - \langle z, \omega_{x \wedge y} \rangle \nu$$

où  $\omega_{x \wedge y}$  est l'élément de  $K^*$  associé à  $S_{\widetilde{x \wedge y}} \in k$ .

Par définition  $S_{\widetilde{x \wedge y}} \circ \widetilde{\nu \wedge z} = S_{\widetilde{\nu \wedge z}} \circ \widetilde{x \wedge y}$ ;

donc

$$(5, 1) \quad \langle \nu, \omega_{x \wedge y} \rangle z - \langle z, \omega_{x \wedge y} \rangle \nu = \langle x, \omega_{\nu \wedge z} \rangle y - \langle y, \omega_{\nu \wedge z} \rangle x.$$

Si la dimension de  $K$  est  $\geq 4$ , (5, 1) implique directement que  $\omega_{x \wedge y} \equiv 0$ ; donc que  $S = 0$ . Si la dimension  $K = 3$ , prenons  $x, y, r$  linéairement indépendant et  $z = x$  (5, 1) implique que

$$(5, 2) \quad \langle r, \omega_{x \wedge y} \rangle = \langle y, \omega_{x \wedge r} \rangle$$

et

$$(5, 3) \quad \langle x, \omega_{x \wedge y} \rangle = 0$$

(5, 3) montre que (5, 2) est valable pour tout  $x, y, \nu \in K$ ;  
 donc

$$\begin{aligned} \langle r, \omega_{x \wedge y} \rangle &= \langle y, \omega_{x \wedge r} \rangle = - \langle y, \omega_{r \wedge x} \rangle \\ &= - \langle x, \omega_{r \wedge y} \rangle = \langle x, \omega_{y \wedge r} \rangle = \langle r, \omega_{y \wedge x} \rangle \\ &= - \langle r, \omega_{x \wedge y} \rangle \end{aligned}$$

pour tout  $x, y, r \in K$ . Ainsi,  $\omega_{x \wedge y} \equiv 0$  donc  $S = 0$ .

c.q.f.d.

Enfin, nous montrerons que l'image de  $h_b^{(1)}$  dans  $K^* \otimes K^*$  est contenue dans le sous-espace des éléments antisymétriques.

Prenons  $S \in h_b^{(1)}$ . On a :

$$(5, 4) \quad S_{\widetilde{r \wedge z}} \circ (\widetilde{x \wedge y}) \equiv \overline{(S_{r \wedge z} \circ x) \wedge y} + \overline{x \wedge (S_{r \wedge z} \circ y)}$$

modulo  $K$ .

Appliquant le lemme 5, 1, (5, 4) s'écrit :

$$(5, 5) \quad S_{r\wedge z} \circ (x \wedge y) \equiv \langle r, \omega_x \rangle \widetilde{z \wedge y} - \langle z, \omega_x \rangle \widetilde{r \wedge y} \\ + \langle r, \omega_y \rangle \widetilde{x \wedge z} - \langle z, \omega_y \rangle \widetilde{x \wedge r} \\ \text{modulo K.}$$

Rappelant que  $S_{\nu\wedge z} \circ x \wedge y = S_{x\wedge y} \circ \nu \wedge z$ ,

(5, 5) implique que  $\langle \nu, \omega_x \rangle = -\langle x, \omega_\nu \rangle$  pour tout  $x, \nu \in K$ , donc la forme bilinéaire sur  $K$  qui envoie  $x, \nu$  sur  $\langle \nu, \omega_x \rangle$  est antisymétrique. c.q.f.d.

Résumons nos résultats.

**PROPOSITION 5, 1.** — *Par l'application définie dans le lemme 5, 1  $h_b^{(1)}$  se plonge canoniquement dans  $K^* \wedge K^*$ . Si  $S \in h_b^{(1)}$  et  $u \in K$ , alors  $S_u \in k$ , et moyennant les identifications canoniques, l'application de  $h_b^{(1)} \otimes K$  dans  $k$  qui envoie  $(S, u)$  sur  $S_u$  correspond à l'application canonique de contraction qui envoie  $K^* \wedge K^* \otimes K$  dans  $K^*$ .*

**PROPOSITION 5, 2.** —  $h_b^{(2)} = 0$ .

*Démonstration.* — Soit  $R$  dans  $h_b^{(2)}$ . C'est une application de  $M$  dans  $h_b^{(1)}$ . Soit  $R'$  sa restriction à  $K$ .

D'après la proposition (5, 1)  $R'$  peut être regardé comme un élément de  $K^* \wedge K^* \otimes K^*$ . Par la définition de  $h_b^{(2)}$  et la dernière partie de la proposition 5, 1,  $R'$  est symétrique dans ces derniers deux indices, donc il est nécessairement nul.

Soit

$$\omega \in L, \quad u \in K. \\ R_w u = R_u \omega = 0,$$

donc  $R_w$  est un élément de  $h_b^{(1)}$  qui prend la valeur nulle sur  $K$ , ce qui implique que  $R_w = 0$  du fait que l'application de  $h_b^{(1)}$  dans  $K^* \wedge K^*$  définie par le lemme 5, 1 est injective. Cela entraîne que  $R = 0$ . c.q.f.d.

Nous obtenons d'après les propositions 5, 1 et 5, 2 et le théorème 1, 1 le :

**THÉORÈME 5, 1.** — *Soit  $\Omega_n$  un champ de  $n$ -plans sur une variété connexe  $V_m$  de dimension  $m = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \geq 3$ .*

Supposons que  $\Omega_n$  satisfait aux conditions suivantes :  
Autour de tout point  $p$  de  $V_m$  il existe un système de champs de vecteurs  $X^1, \dots, X^n$  qui appartient à  $\Omega_n$ , tel que les vecteurs

$$X_p^i, \dots, [X^j, X^k]_p \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad j < k$$

soient linéairement indépendants. Alors, le groupe de difféomorphismes de  $V_m$  qui conserve  $\Omega_n$  est un *groupe de Lie* de dimension  $n(2n + 1)$  au plus.

Nous obtenons cette borne sur le nombre des dimensions parce que la variété  $V_m$  est de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $h_b$  est de dimension  $n^2 + n$  au plus,  $h_b^{(1)}$  est contenu dans  $K^* \wedge K^*$  (donc de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$  au plus) et  $h_b^{(i)} = 0, i \geq 2$ .

Prenons un ensemble de  $n$  indéterminées  $X_1, \dots, X_n$ .

Soit  $a$  l'algèbre de Lie libre qu'il engendre sur le corps des réels, et soit  $b$  l'idéal de  $a$  engendré par :

$$[[X_i, X_j], X_k], \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Posons  $g = a/b$ .  $g$  est une algèbre de Lie et le groupe de Lie simplement connexe associé à  $g$  est homéomorphique à l'espace Euclidien de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Les éléments  $X_1, \dots, X_n$  de  $g$  définissent un champ de  $n$ -plans sur ce groupe.

On peut montrer que l'algèbre des automorphismes infinitésimaux de cette structure est une algèbre de Lie de dimension  $n(2n + 1)$ .

On peut se demander si cela est une propriété caractéristique de cette structure.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BERNARD, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 10, 1960, 153-273.
- [2] E. CARTAN, Les problèmes d'équivalence, *Séminaire de Math.*, Exposé D, 11 janvier 1937; *Sélecta*, pp. 113-136.
- [3] E. CARTAN, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, *Ann. Ec. Normale*, 27, 1910, 109-192.

- [4] E. CARTAN, Sur la structure des groupes infinis de transformations, *Ann. Ec. Normale*, 21, 1904, 153-206 et 22, 1905, 219-308.
  - [5] V. GUILLEMIN, *Thesis*, Harvard University, 1962.
  - [6] I. SINGER et S. STERNBERG, Infinite Lie Groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
  - [7] S. STERNBERG, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1963.
-