Géométrie affine

Sommaire

I Translations, sous-espaces affines

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Les éléments de E, selon le rôle qu'on leur fait jouer, sont appelés *points* ou *vecteurs*.

Pour limiter les ambiguités, on utilisera quelques conventions de notation :

- Les *points* seront notés $A, B, \ldots, M, N, \ldots$.
  Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$, considéré comme un point de E, sera noté O.
- Les vecteurs seront notés $a, b, u, v, \ldots$, parfois $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \ldots, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \ldots$
- Les sous-espaces vectoriels de E seront notés $F, G, H, \ldots$
- On définira les *sous-espaces affines* de E, et on les notera $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$

I.1 Translations

Définition

Soit u un vecteur de E.
L'application $t_u : E \to E$ définie par $t_u(A) = A + u$ est appelée *translation* de vecteur u.

Propriétés

- Pour tous vecteurs u, v et tout point A, on a $(A + u) + v = A + (u + v) = (A + v) + u$.
  Autrement dit on a les égalités $t_v \circ t_u = t_u \circ t_v = t_{u+v}$.
- On a bien sûr $t_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}$. D'autre part toute translation t_u est bijective et $(t_u)^{-1} = t_{-u}$.
- Seule la translation $t_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}$ est linéaire. En effet, si $u \neq \overrightarrow{0}$, alors $t_u(O) = u \neq O$.
- Soient A, B deux points de E. Il existe un unique u de E tel que $B = t_u(A) = A + u$.
  Ce vecteur, égal à $B - A$, est noté $\overrightarrow{AB}$.
  Avec cette notation, et pour tous points A, B, C de E :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(relation de Chasles)}$$

- Soient A, B deux points de E. On note $[A, B] = \{M \in E, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\}$.
  On dit que $[A, B]$ est le *segment* d'origine A et d'extrémité B. On vérifie que $[A, B] = [B, A]$.
  En particulier, le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est appelé le *milieu* du segment $[A, B]$.
- Soient A, B, C, D quatre points de E. On a les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \exists\, u \in E, \begin{cases} t_u(A) = C \\ t_u(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow [A, D] \text{ et } [B, C] \text{ ont même milieu}$$

  On exprime ces conditions en disant que le quadruplet (A, B, D, C) est un *parallélogramme*.

  Il en est alors de même pour les quadruplets (B, D, C, A), ou (A, C, D, B).

I.2 Sous-espaces affines

Définition

Soient A un point de E, et F un sous-espace vectoriel de E. On note $A+F = \{A+u, u \in F\}$.
On dit que $\mathcal{F} = A + F$ est le *sous-espace affine* de E passant par A et de direction F.
Réciproquement, on dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E en est un sous-espace affine s'il existe un point A de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F} = A + F$.

Remarques et propriétés

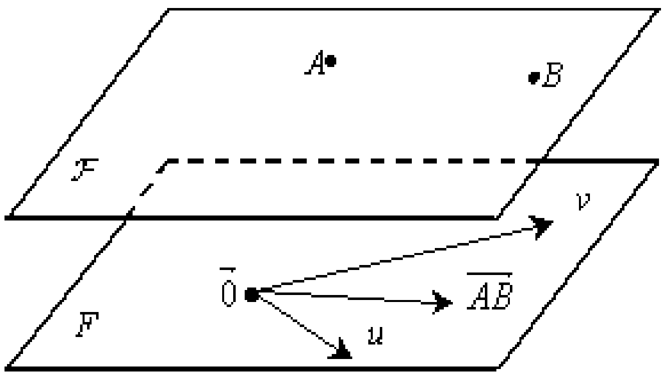
- Un sous-espace affine n'est jamais vide.
  E est un sous-espace affine de direction E. On dira que E est un *espace affine.*
- Les sous-espaces vectoriels F de E sont les sous-espaces affines de E qui passent par O.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, passant par A et de direction F. Alors $F = \{\overrightarrow{AB}, B \in \mathcal{F}\}$.
  Autrement dit, la direction d'un sous-espace affine de E est définie de manière unique.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, de direction F. Pour tout B de $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = B + F$.
  Un sous-espace affine est donc défini par sa direction et par l'un *quelconque* de ses points.
- Deux sous-espaces affines sont égaux$\Leftrightarrow$ ils ont la même direction et un point en commun.
- Soient A un point de E, et F un sous-espace vectoriel de E.
  On peut écrire $\mathcal{F} = A + F = \{A + u, u \in F\} = \{t_A(u),\ u \in F\} = t_A(F)$.
  Ainsi les sous-espaces affines de E sont les translatés des sous-espaces vectoriels de E.
- Si A est un point de E, alors le singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine de E.
  Plus précisément, c'est le sous-espace affine de E passant par A de direction $\{\overrightarrow{0}\}$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F.
On dit que $\mathcal{F}$ est de dimension finie si F est lui-même de dimension finie.
Dans ce cas on note $\dim \mathcal{F} = \dim F$.

- ◇ Les singletons de E sont les sous-espaces affines de dimension 0.
- ◇ On appelle *droites affines* les sous-espaces affines de dimension 1.
- ◇ On appelle *plans affines* les sous-espaces affines de dimension 2.
- ◇ Si F est un hyperplan de E, on dit que $\mathcal{F}$ est un *hyperplan affine* de E.

On a représenté ici un plan affine $\mathcal{F}$ passant par un point A et de direction un plan vectoriel F de base (u, v).
Dire que B est dans $\mathcal{F}$, c'est dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dans F, ou encore est combinaison linéaire de u et v.



Remarques

– Soit A un point de E, et F un sous-espace vectoriel de E, de base $u_1, u_2, \ldots, u_p$.
Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de E, passant par A et de direction F.
Soit B un point de E. Alors $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ B = A + \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$.

– Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ une partie de E.
Supposons qu'il existe un point A de E et p vecteurs indépendants $u_1, u_2, \ldots, u_p$ tels que :
$$B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ B = A + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$$
Alors $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E passant par A et de direction $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.
On dit souvent, par abus de langage, que $\mathcal{F}$ est dirigé par les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

– En particulier, pour toute partie $\mathcal{F}$ de E :
  ◇ $\mathcal{F}$ est une droite affine si et seulement si il existe un point A de E et un vecteur non nul u de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ B = A + \lambda u$.
  On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u)$ et on dit que u est un *vecteur directeur* de $\mathcal{F}$.
  ◇ $\mathcal{F}$ est un plan affine si et seulement si il existe un point A de E et deux vecteurs indépendants u, v de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ B = A + \lambda u + \mu v$.
  On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u, v)$.

– Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soit b un vecteur de F.
Supposons que $\mathcal{S} = \{u \in E, f(u) = b\}$ soit non vide, c'est-à-dire que b appartienne à $\mathrm{Im}\, f$.
Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E, de direction $\ker f$.
En effet, si u_0 est un élément particulier de $\mathcal{S}$, on a :
$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow f(u) = b \Leftrightarrow f(u) = f(u_0) \Leftrightarrow f(u - u_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u - u_0 \in \ker f \\ &\Leftrightarrow \exists\, h \in \ker f, u = u_0 + h \end{aligned}$$

– En particulier, la solution générale d'un système linéaire $AX = B$ (n équations, p inconnues) si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$.
Si la matrice A est de rang r, alors la dimension de ce sous-espace affine est $p - r$.
Considérons par exemple le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x &+& 3y &+& 5z &-& 2t &-& 7u &=& 3 \\ 3x &+& y &+& z &-& 2t &-& u &=& 1 \\ 2x &-& y &-& 3z &+& 7t &+& 5u &=& 2 \\ 3x &-& 2y &-& 5z &+& 7t &+& 8u &=& 1 \end{array}\right.$
Ici $n = 4$ et $p = 5$. On vérifie que la matrice du système est de rang 3.
On montre (voir chapitre 12, page 29) que la solution générale s'écrit :
$$\begin{aligned} (x, y, z, t, u) &= (-1 + 3t, 8 - 17t - u, -4 + 10t + 2u, t, u) \\ &= (-1, 8, -4, 0, 0) + t(3, -17, 10, 1, 0) + u(0, -1, 2, 0, 1) \end{aligned}$$
C'est le plan affine passant par $\Omega = (-1, 8, -4, 0, 0)$ et dirigé par $\left\{\begin{array}{l}(3, -17, 10, 1, 0) \\ (0, -1, 2, 0, 1)\end{array}\right.$

Définition

On dit que des points de E sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite affine.
On dit qu'ils sont *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan affine.

Remarques

- Deux points A, B sont toujours alignés.
  S'ils sont distincts, ils appartiennent à une seule droite $\mathcal{D}$: la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{AB})$.
- Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés.
- Si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, on dit qu'ils forment un *vrai triangle*.
- Trois points A, B, C sont toujours coplanaires.
  Supposons qu'ils ne soient pas alignés (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient libres.)
  Alors ils appartiennent à un seul plan $\mathcal{P}$: le plan $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
  Ce plan peut tout aussi bien être noté $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ou $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
- Quatre points A, B, C, D sont coplanaires$\Leftrightarrow$les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont liés.

I.3 Parallélisme et intersection de sous-espaces affines

Définition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.

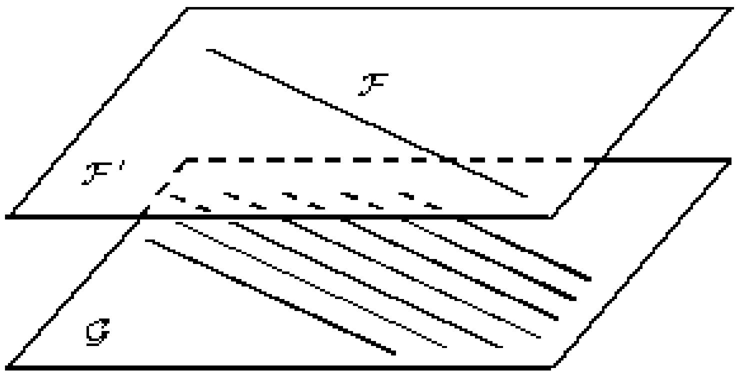
◇ On dit que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si on a l'inclusion $F \subset G$.

◇ On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si on a l'égalité $F = G$.

Remarques

- Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont même dimension, les deux notions précédentes sont équivalentes.
- Un singleton est parallèle à n'importe quel sous-espace affine.
  Une droite peut être parallèle à un plan, mais l'inverse est impossible.
  Si deux sous-espaces affines de dimension finie sont parallèles, ils ont même dimension.
- Deux droites affines sont parallèles$\Leftrightarrow$ elles ont un vecteur directeur commun.
- On pourra noter $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ pour exprimer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles.
  On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de E.
- $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles$\Leftrightarrow$il existe u dans E tel que $t_u(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.
  Plus précisément, si $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ on a $\mathcal{G} = t_u(\mathcal{F})$ pour tout $u = \overrightarrow{AB}$ où $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, et A un point de E.
  Par le point A, il passe un unique sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$.
- Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est parallèle à sa propre direction F.
  Celle-ci est d'ailleurs l'unique sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ et passant par O.
- Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E. On suppose que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$.
  Alors il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}'$ contenant $\mathcal{F}$ et tel que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}$ soient parallèles.

Sur cette figure, on voit une droite $\mathcal{F}$ parallèle au plan $\mathcal{G}$.
Il existe un plan unique $\mathcal{F}'$ contenant $\mathcal{F}$ et parallèle à $\mathcal{G}$.
En revanche, $\mathcal{G}$ contient une infinité de droites parallèles à $\mathcal{F}$.



Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E.
- ◇ Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors ou bien $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$ ou bien $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$.
- ◇ Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors ils sont ou bien disjoints ou bien confondus.

Proposition

Soient $\mathcal{F},\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.
- ◇ L'intersection $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de direction $F\cap G$.
  Si $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$ on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *concourants* ou *sécants*.
- ◇ Si $E=F+G$, alors l'intersection $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ n'est pas vide.
- ◇ Si $E=F\oplus G$, alors l'intersection $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ se réduit à un singleton.
  On exprime cette situation en disant que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires.

Exemples et remarques

- Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, et soit $\mathcal{D}$ une droite affine non parallèle à $\mathcal{H}$.
  Alors la droite $\mathcal{D}$ "coupe" l'hyperplan $\mathcal{H}$ en un point et un seul.
- En particulier, si $\dim E=2$, deux droites non parallèles ont un unique point en commun.
  Si $\dim E=3$, une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à un plan $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$ en un point unique.
- Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines de E, avec $\dim E=3$.
  Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite.
- Supposons $\dim E\geq 3$, et soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines de E.
  - ◇ On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires si elles sont incluses dans un même plan affine $\mathcal{P}$.
    Cela équivaut à dire que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ou concourantes.
    Si $\mathcal{D}_1=(A,u)$ et $\mathcal{D}_2=(B,v)$, cela équivaut à dire que $\text{rg}\,(\overrightarrow{AB},u,v)\leq 2$.
    Dans ce cas, et si $D_1\neq\mathcal{D}_2$, le plan $\mathcal{P}$ est défini de manière unique par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
  - ◇ Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, leur intersection est vide.
- Si $\dim E\geq 4$, il est possible que deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient disjoints.

II Repères cartésiens

Dans cette section, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \geq 1$.

II.1 Repères cartésiens d'un sous-espace affine

Définition

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, de direction F, de dimension $p \geq 1$.

Soient A un point de $\mathcal{F}$ et $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ une base de F.

Le couple $\mathcal{R} = (A, (\varepsilon))$ est appelé un *repère cartésien* de $\mathcal{F}$, d'origine A.

Tout point M de $\mathcal{F}$ s'écrit de façon unique $M = A + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j$.

On dit alors que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

L'application φ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathcal{F}$ définie par $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = A + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j$ est donc bijective.

Cette bijection est appelée *représentation paramétrique* de $\mathcal{F}$ (associée au repère $\mathcal{R}$).

Repère cartésien de E

C'est la donnée $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$ d'un point Ω de E et d'une base (e) de E.

Exemple : le repère canonique de $\mathbb{R}^n$, formé par le point O et la base canonique (e).

Si $\dim E = n \geq 1$, la donnée d'un repère cartésien de E permet d'identifier les points de E avec ceux de $\mathbb{R}^n$ muni de son repère canonique.

Représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$

– C'est la donnée d'un point A de $\mathcal{D}$ et d'un vecteur u non nul de sa direction D.
La représentation paramétrique associée est alors : $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto M = A + \lambda u$.
On dit que λ est l'*abscisse* de M sur l'axe (A, u).
Si $M = A + \lambda u$ et $N = A + \mu u$, alors la quantité $\overline{MN} = \mu - \lambda$ est appelée *mesure algébrique* de (M, N) sur l'axe (A, u) (elle ne dépend pas du choix du point A de $\mathcal{D}$.)

– Supposons que E soit un plan, rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e_1, e_2))$.
Notons (x, y) les coordonnées de M, (a, b) celles de A et (α, β) celles de u.
Alors la représentation paramétrique de $\mathcal{D} = (A, u)$ s'écrit : $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, le système précédent définit la droite passant par le point $A(a, b)$ et dirigée par le vecteur $u(\alpha, \beta)$.

– Supposons que E soit de dimension 3 et rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e_1, e_2, e_3))$.
Notons (x, y, z) les coordonnées de M, (a, b, c) celles de A et (α, β, γ) celles de u.
Alors la représentation paramétrique de $\mathcal{D} = (A, u)$ s'écrit : $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \\ z = c + \lambda\gamma \end{cases}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, le système précédent définit la droite passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigée par le vecteur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

Représentation paramétrique d'un plan

- Un repère cartésien d'un plan affine $\mathcal{P}$ est la donnée d'un point A de $\mathcal{P}$ et d'un couple (u, v) de vecteurs non proportionnels de sa direction P.
  La représentation paramétrique associée est alors : $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M = A + \lambda u + \mu v$.
- Supposons que E, de dimension 3, soit rapporté au repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2, e_3)$.
  Notons (x, y, z) les coordonnées de M, (a, b, c) celles de A.
  Notons (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ les composantes de u et v dans (e).
  La représentation paramétrique de $\mathcal{P} = (A, u, v)$ s'écrit $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Réciproquement, si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont libres, le système précédent définit le plan passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigé par les vecteurs $u(\alpha, \beta, \gamma)$ et $v(\alpha', \beta', \gamma')$.

Représentation paramétrique dans le cas général

- Soit $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2 \ldots, e_n)$ un repère cartésien de E, avec $\dim E = n \geq 1$.
  Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, de direction F et de dimension $p \geq 1$.
  Soit $\mathcal{R}' = (\Omega', (\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ un *repère cartésien* de $\mathcal{F}$.
  Soient $(\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n)$ les coordonnées du point Ω' dans le repère $\mathcal{R}$.
  Pour tout j de $\{1, \ldots, p\}$, on pose $\varepsilon_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.
  La matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est donc la matrice de la famille (ε) dans la base (e).
  Cette matrice est de rang p car ses p colonnes sont indépendantes.
  Soit M un point quelconque de $\mathcal{F}$, de coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
  Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ de E.
  Alors la représentation paramétrique de $\mathcal{F}$ s'écrit :
  $$M = \Omega' + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \omega'_1 + a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1p}\lambda_p \\ x_2 = \omega'_2 + a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2p}\lambda_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \omega'_n + a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{np}\lambda_p \end{cases}$$
  Cette équivalence peut aussi s'écrire :
  $$M = \Omega' + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varepsilon_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \vdots \\ \omega'_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$
  Notons $[M]_{\mathcal{R}}$ et $[\Omega']_{\mathcal{R}}$ les colonnes des coordonnées de M et Ω' dans le repère $\mathcal{R}$.
  Notons $[M]_{\mathcal{R}'}$ la colonne des coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{F}$.
  Le résultat précédent s'écrit : $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + A[M]_{\mathcal{R}'}$.

Changement de repère dans un espace affine

- Soient $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', (\varepsilon))$ deux repères cartésiens de E, avec $\dim E \geq 1$.
  Soit M un point quelconque de E, de coordonnées $\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_n & \text{dans } \mathcal{R} \\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_n & \text{dans } \mathcal{R}' \end{cases}$

Soient $\omega'_1,\ldots,\omega'_n$ les coordonnées de Ω' dans $\mathcal{R}$.

Soit P la matrice de passage de la base (e) à la base (ε). Alors on a l'égalité :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \vdots \\ \omega'_n \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \text{ou encore :} \quad [M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$$

On voit que la matrice de passage P (de l'ancienne base (e) vers la nouvelle base (ε)) permet d'exprimer les "anciennes" coordonnées de M en fonction des "nouvelles".

L'égalité $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$ s'écrit d'ailleurs $[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(e)} = P[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(\varepsilon)}$.

Si on veut les nouvelles coordonnées de M en fonction des anciennes, il faut donc inverser la matrice P et écrire : $[M]_{\mathcal{R}'} = P^{-1}([M]_{\mathcal{R}} - [\Omega']_{\mathcal{R}})$ ou encore $[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(\varepsilon)} = P^{-1}[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(e)}$.

– Un cas très simple est celui on effectue une translation du repère.
  Avec les notations précédentes, $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$, $\mathcal{R} = (\Omega', (e))$ et $P = I_n$.
  Le changement de repère se réduit à $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + [M]_{\mathcal{R}'}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} x_1 = \omega'_1 + x'_1 \\ \ldots\ldots \\ x_n = \omega'_n + x'_n \end{cases}$

Demi-droites, demi-plans

– Soit A un point de E et u un vecteur non nul.
  On dit que $\{M = A + \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ est la *demi-droite* d'origine A et de vecteur directeur u.

– Soit A un point de E et u, v deux vecteurs indépendants.
  Considérons l'ensemble $\mathcal{P}^+$ défini par $\mathcal{P}^+ = \{M = A + \lambda u + \mu v,\ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^+\}$.
  On dit que $\mathcal{P}^+$ est le *demi-plan* défini par la droite (A, u) et le vecteur v.

II.2 Équations cartésiennes d'un hyperplan

Proposition

Soit $\mathcal{H}$ une partie de l'espace affine E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

◇ $\mathcal{H}$ est un hyperplan de E.

◇ Il existe une forme linéaire f non nulle et un scalaire α tels que : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow f(M) = \alpha$.
  Une telle caractérisation est appelée une *équation* de l'hyperplan $\mathcal{H}$.

Avec ces notations :

◇ Les équations $f(M) = \beta$ sont celles des hyperplans parallèles à $\mathcal{H}$.
  Par exemple $f(M) = f(M_0)$ est l'équation de l'hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$ et passant par M_0.
  L'équation $f(M) = 0$ est celle de la direction H de $\mathcal{H}$.

◇ L'équation $f(M) = \alpha$ de $\mathcal{H}$ est unique à un facteur multiplicatif non nul près.
  Sous cette réserve, on parle de **L**'équation de $\mathcal{H}$.

équation cartésienne dans un repère

On suppose que E, de dimension $n \geq 1$, est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$.
Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point M quelconque de E.

- $\diamond$ Une partie $\mathcal{H}$ de E est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ non tous nuls et un scalaire α tels que $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \alpha$.
  On parle alors de l'*équation cartésienne* de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
- $\diamond$ Les équations $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta$ sont celles des hyperplans parallèles à $\mathcal{H}$.
- $\diamond$ L'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est celle de la direction H de $\mathcal{H}$.
- $\diamond$ Soit Ω un point de E, de coordonnées $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$.
  L'hyperplan de direction H et passant par Ω a pour équation : $\sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - \omega_k) = 0$.
- $\diamond$ Considérons les équations $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = \beta \end{cases}$ de deux hyperplans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.
  On a $\mathcal{H}_1 \parallel \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$. On a $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.
  (Par convention, si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant l'est également.)

De l'équation cartésienne à une représentation paramétrique

On passe facilement de l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ à une représentation paramétrique.
En effet, soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \alpha$ l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Pour fixer les idées, supposons par exemple $a_1 \neq 0$.
Dans ces conditions, le point Ω de coordonnées $(\frac{\alpha}{a_1}, 0, \ldots, 0)$ est un point particulier de $\mathcal{H}$.

Les vecteurs $\begin{cases} \varepsilon_2 = (a_2, -a_1, 0, \ldots, 0, 0) \\ \varepsilon_3 = (a_3, 0, -a_1, 0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = (a_n, 0, \ldots, 0, -a_1) \end{cases}$ forment une base de la direction H de $\mathcal{H}$.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{H}$ est donc : $M = \Omega + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$,

c'est-à-dire : $\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha}{a_1} + \lambda_2a_2 + \lambda_3a_3 + \cdots + \lambda_na_n \\ x_2 = -\lambda_2a_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\lambda_na_1 \end{cases}$ avec $(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Supposons par exemple que E soit de dimension 3 et muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan (donc l'hyperplan) d'équation $2x + 3y - 5z = 8$.
Une base de la direction P de $\mathcal{P}$ (d'équation $2x + 3y - 5z = 0$) est $\begin{cases} u = (3, -2, 0) \\ v = (5, 0, 2) \end{cases}$
Le point $\Omega(4, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + 5\mu \\ y = -2\lambda,\ z = 2\mu \end{cases}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'une représentation paramétrique à l'équation cartésienne

On suppose que E est de dimension $n \geq 1$.
On suppose qu'il est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$.
Soit A un point de E, et soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ une famille de $n-1$ vecteurs libres.
Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan passant par A et de direction $H = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$.
$\mathcal{H}$ a donc pour représentation paramétrique $(\lambda_1 \ldots, \lambda_{n-1}) \mapsto M = A + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\varepsilon_k$.
Pour trouver une équation cartésienne de $\mathcal{H}$, on écrit $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$.

Cela équivaut à écrire $\Delta = \det_{(e)}(\overrightarrow{AM}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) = 0$.
On obtient alors l'équation en développant Δ par rapport à sa première colonne.

◇ Supposons par exemple $n = 3$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan (l'hyperplan) passant par $A = (1,2,3)$ et dirigé par $\begin{cases} u = (3,1,2) \\ v = (4,0,5) \end{cases}$
L'équation de $\mathcal{P}$ s'obtient en écrivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 4 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow 5(x-1) - 7(y-2) - 4(z-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21$$

On pouvait obtenir cette équation plus rapidement encore en notant qu'elle s'écrit :

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) = 0, \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

◇ On reprend l'exemple précédent.
On va trouver l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ à partir d'une représentation paramétrique.

Celle-ci s'écrit : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$

On résout ce système par rapport aux inconnues (λ, μ)
L'équation cartésienne cherchée est la condition sur les paramètres x, y, z pour que ce système admette une solution (λ, μ).
On trouve successivement :

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ x = 1 + 3(y-2) + 4\mu \\ z = 3 + 2(y-2) + 5\mu \end{cases}$$

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ 4\mu = x - 3y + 5 \\ 5\mu = 1 - 2y + z \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow 5(x - 3y + 5) = 4(1 - 2y + z) \\ &\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21 \end{aligned}$$

Droites en dimension 2

– Soit E un plan affine rapporté au repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2)$. Soit $\mathcal{D}$ une partie de E.
$\mathcal{D}$ est une droite$\Leftrightarrow$elle admet une équation du type $ax + by = c$, avec $(a, b) \neq (0,0)$.
Avec ces notations, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $u(b, -a)$.

◇ Les droites parallèles à l'axe (Ω, e_2) ont une équation du type $x = \alpha$.

◇ Les droites parallèles à l'axe (Ω, e_1) ont une équation du type $y = \beta$.

◇ L'équation d'une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à (Ω, e_2) peut s'écrire $y = \alpha x + \beta$.
On dit que α est le *coefficient directeur* de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

– Les droites $\begin{cases} (\mathcal{D}) : \ ax + by = c \\ (\mathcal{D}') : \ a'x + b'y = c' \end{cases}$ sont parallèles$\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.
  Si elles ne sont pas parallèles à (Ω, e_2), cela signifie qu'elles ont le même coefficient directeur.
  Les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont confondues$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b, c) = \lambda(a', b', c')$.

– Supposons que $\begin{cases} (\mathcal{D}) : \ a\,x + b\,y = c \\ (\mathcal{D}') : \ a'x + b'y = c' \end{cases}$ soient sécantes.
  Alors leur point d'intersection a pour coordonnées $x_0 = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ et $y_0 = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.

– La droite définie par $\begin{cases} A(x_0, y_0) \\ u(\alpha, \beta) \end{cases}$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha \\ y & y_0 & \beta \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

  L'équation de $\mathcal{D}$ définie par $\begin{cases} A(x_0, y_0) \\ B(x_1, y_1) \end{cases}$ est : $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

  Il en découle que trois points $\begin{cases} A(x_0, y_0) \\ B(x_1, y_1) \\ C(x_2, y_2) \end{cases}$ sont alignés$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

– La droite passant par $\begin{cases} A(a, 0) \\ B(0, b) \end{cases}$ avec $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

– Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan, distinctes, d'équations respectives (E) et (E').
  On forme une famille d'équations de droites en écrivant $\lambda(E) + \mu(E')$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.
  ◇ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, on obtient ainsi toutes les droites qui leur sont parallèles.
  ◇ Sinon, on obtient toutes les droites passant par le point d'intersection I de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
  Dans tous les cas, on dit que l'ensemble obtenu est le *faisceau de droites* engendré par $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$.
  Avec $\mu \in \mathbb{R}$, les équations $(E) + \mu(E')$ donnent toutes les droites du faisceau sauf $\mathcal{D}'$.

– Trois droites $ax + by = c$, $a'x + by = c'$ et $a''x + b''y = c''$ sont parallèles ou concourantes $\Leftrightarrow$elles appartiennent à un même faisceaux, c'est-à-dire$\Leftrightarrow$leurs équations sont "liées".
  Cela équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 2.

Plans en dimension 3

– On suppose $\dim E = 3$, et que E est muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$. Soit $\mathcal{P} \subset E$.
  $\mathcal{P}$ est un plan$\Leftrightarrow$il admet une équation du type $ax + by + cz = d$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
  Avec ces notations, et si $a \neq 0$, $\begin{cases} u = (b, -a, 0) \\ v = (c, 0, -a) \end{cases}$ forment une base de la direction de $\mathcal{P}$.
  ◇ Les plans parallèles au plan (Ω, e_2, e_3) ont une équation du type $x = \alpha$.
  ◇ Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_3) ont une équation du type $y = \beta$.
  ◇ Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_2) ont une équation du type $z = \gamma$.
  ◇ La droite (Ω, e_1) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $by + cz = d$.

◇ La droite (Ω, e_2) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $ax + cz = d$.

◇ La droite (Ω, e_3) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $ax + by = d$.

◇ L'équation d'un plan $\mathcal{P}$ non parallèle à (Ω, e_1, e_2) peut s'écrire $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

– Les plans $\begin{cases} (\mathcal{P}) : \ \ a\,x + b\,y + c\,z = d \\ (\mathcal{P}') : \ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ sont parallèles$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b, c) = \lambda(a', b', c')$.

Si ces plans ne sont pas parallèles à (O, e_1, e_2) et si on note $\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + \gamma \\ z = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$ leurs équations, alors ces plans sont parallèles$\Leftrightarrow \alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

Les plans $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sont confondus$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b, c, d) = \lambda(a', b', c', d')$.

– Supposons que $\begin{cases} (\mathcal{P}) : \ \ a\,x + b\,y + c\,z = d \\ (\mathcal{P}') : \ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ ne soient pas parallèles.

Alors leur intersection est une droite donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

– L'équation de $\mathcal{P}$ défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ u(\alpha, \beta, \gamma) \\ v(\alpha', \beta', \gamma') \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha & \alpha' \\ y & y_0 & \beta & \beta' \\ z & z_0 & \gamma & \gamma' \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Le plan défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Conséquence : quatre points $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \\ D(x_3, y_3, z_3) \end{cases}$ sont coplanaires$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

– On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Le plan passant par A, B, C a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

– Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans distincts, d'équations respectives (E) et (E').

On forme une famille d'équations de plans en écrivant $\lambda(E) + \mu(E')$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

◇ Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, on obtient ainsi tous les plans qui leur sont parallèles.

◇ Sinon, on obtient tous les plans contenant la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Dans tous les cas, on dit que l'ensemble obtenu est le *faisceau de plans* engendré par $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.
Avec $\mu \in \mathbb{R}$, les équations $(E) + \mu(E')$ donnent tous les plans du faisceau sauf $\mathcal{P}'$.

– On considère trois plans, d'équations $ax+by+cz = d$, $a'x+b'y+c'z = d'$ et $a''x+b''y+c''z = d''$.
Ces trois plans sont parallèles ou passent par une même droite
$\Leftrightarrow$ ils appartiennent à un même faisceaux, c'est-à-dire$\Leftrightarrow$ leurs équations sont "liées".

Cela équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 2.

II.3 Équations cartésiennes d'un sous-espace affine

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n \geq 1$. Soit p un entier compris entre 1 et n.
Une partie $\mathcal{F}$ de E est un sous-espace affine de dimension $n-p$ si seulement si il existe :

◇ p formes linéaires indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$

◇ p scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$

tels que, pour tout point M de E, on ait l'équivalence : $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} f_1(M) = \lambda_1 \\ f_2(M) = \lambda_2 \\ \cdots\cdots \\ f_p(M) = \lambda_p \end{cases}$

On dit que (S) est un *système d'équations* du sous-espace affine $\mathcal{F}$.

Remarques

– Avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ dans (S) on obtient un système d'équations de la direction F de $\mathcal{F}$.
Si on fait varier $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$, on obtient les sous-espaces parallèles à $\mathcal{F}$.

– La proposition précédente nous permet d'interpréter tout sous-espace affine de dimension $n-p$ de E (avec $\dim E = n$) comme l'intersection de p hyperplans “indépendants”.

– On suppose que E est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}(\Omega, (e))$.
On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M quelconque de E.
Chacune des formes linéaires f_i est définie par : $\begin{cases} f_i(M) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ \text{avec } (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \neq (0, 0, \ldots, 0) \end{cases}$
(S) se présente donc comme un système de p équations à n inconnues :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = \lambda_i \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pj}x_j + \cdots + a_{pn}x_n = \lambda_p \end{cases}$$

– Dire que les formes linéaires $f_1, \ldots, f_p$ sont indépendantes, c'est dire que les lignes de la matrice A du système sont libres. Cette matrice est donc de rang p.
Ainsi cette matrice représente un morphisme surjectif de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$.
Pour tout choix des seconds membres λ_i, ce système possède des solutions.
Ces solutions forment un espace affine de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$.

– On ne modifie pas l'ensemble des solutions du système précédent (donc l'ensemble $\mathcal{F}$ des points dont les coordonnées satisfont à ce système) en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes :

◇ échanger deux équations.

◇ Multiplier une équation par un scalaire non nul.

◇ Ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.

On voit ainsi qu'à partir de deux équations, on ne peut plus parler de **l**'équation du sous-espace affine $\mathcal{F}$ mais seulement **d'un** système d'équations de $\mathcal{F}$.

– **D'un système d'équations à une représentation paramétrique**
On résout le système d'équations de $\mathcal{F}$. La solution générale X est la somme $X = X_0 + W$:

◇ D'une solution particulière X_0 du système.
Cette solution est formée des coordonnées d'un point particulier du sous-espace affine $\mathcal{F}$.

◇ De la solution générale W du système homogène associé.
Celle-ci représente la direction F de $\mathcal{F}$, dimension $n-p$.
En général on trouve p inconnues "principales" en fonction de $n-p$ inconnues "auxiliaires".
Cette écriture fournit facilement une base de F.

◇ Prenons un exemple inspiré de celui utilisé en page 4.
On suppose donc que E (avec $\dim E = 5$) est muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, \ldots, e_5)$.
On note (x, y, z, t, u) les coordonnées d'un point M quelconque de E.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & - & 7u & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & - & 2t & - & u & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 3z & + & 7t & + & 5u & = & 2 \end{array}\right.$
On vérifie que la matrice du système est de rang $p = 3$.
On a donc affaire à un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de dimension $n - p = 2$: c'est un plan.
La solution du système est : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3t \\ 8-17t-u \\ -4+10t+2u \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -17 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Ainsi $\mathcal{F}$ est le plan de E :

- $*$ Passant par le point M_0 de coordonnées $(-1, 8, -4, 0, 0)$
- $*$ Dirigé par les vecteurs $w_1 = (3, -17, 10, 1, 0)$ et $w_2 = (0, -1, 2, 0, 1)$

– **D'une représentation paramétrique à un système d'équations**

On se contentera ici d'un exemple.

On suppose que E (avec $\dim E = 5$) est muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, \ldots, e_5)$.

On note (x, y, z, t, u) les coordonnées d'un point M de E.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace passant par $A(1, 0, 1, 2, -1)$ et dirigé par $\left\{\begin{array}{l} w_1 = (1, -1, 2, 1, 1) \\ w_2 = (1, 1, 3, 0, 1) \\ w_3 = (1, 2, 0, 1, 1) \end{array}\right.$

On a $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\,(w_1, w_2, w_3)$.

On doit donc exprimer que la matrice des vecteurs $w_1, w_2, w_3, \overrightarrow{AM}$ est de rang 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & 2 & y \\ 2 & 3 & 0 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 & t-2 \\ 1 & 1 & 1 & u+1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & 3 & x+y-1 \\ 0 & 1 & -2 & -2x+z+1 \\ 0 & -1 & 0 & -x+t-1 \\ 0 & 0 & 0 & -x+u+2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow 2\mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & 3 & x+y-1 \\ 0 & 0 & -7 & -5x-y+2z+3 \\ 0 & 0 & 3 & -x+y+2t-3 \\ 0 & 0 & 0 & u-x+2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow 7\mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & 3 & x+y-1 \\ 0 & 0 & -7 & -5x-y+2z-1 \\ 0 & 0 & 0 & -22x+4y+6z+14t-12 \\ 0 & 0 & 0 & u-x+2 \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne à $\mathcal{F}$ (donc un système d'équations de $\mathcal{F}$) s'obtient en écrivant que la matrice finale est de rang 3.

Cela équivaut à écrire le système $\left\{\begin{array}{l} 11x - 2y - 3z - 7t = -6 \\ x - u = 2 \end{array}\right.$

On peut aussi résoudre le problème à partir d'une représentation paramétrique de $\mathcal{F}$.

Une telle représentation s'écrit en effet :

$$M = A + \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 \Leftrightarrow (S)\begin{cases} x = 1+\alpha+\beta+\gamma \\ y = -\alpha+\beta+2\gamma \\ z = 1+2\alpha+3\beta \\ t = 2+\alpha+\gamma \\ u = -1+\alpha+\beta+\gamma \end{cases}$$

On résout (S) par rapport à (α, β, γ).

On trouve successivement :

$$\begin{cases} x = 1+\alpha+\beta+\gamma \\ y = -\alpha+\beta+2\gamma \\ z = 1+2\alpha+3\beta \\ t = 2+\alpha+\gamma \\ u = -1+\alpha+\beta+\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = x-1 \\ \alpha-\beta-2\gamma = -y \\ 2\alpha+3\beta = z-1 \\ \alpha+\gamma = t-2 \\ \alpha+\beta+\gamma = u+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = x-1 \\ 2\beta+3\gamma = x-y-1 \\ 2\alpha+3\beta = z-1 \\ \beta = x-t+1 \\ x-u = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = x-1 \\ 3\gamma = -x-y+2t-3 \\ 2\alpha = -3x+z+3t-4 \\ \beta = x-t+1 \\ x-u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -3x+z+3t-4 \\ \beta = x-t+1 \\ 3\gamma = -x-y+2t-3 \\ 11x-2y-3z-7t = -6 \\ x-u = 2 \end{cases}$$

Ce système admet une solution (α, β, γ) si et seulement si $\begin{cases} 11x-2y-3z-7t = -6 \\ x-u = 2 \end{cases}$

Droites dans un espace de dimension 3

– Soit E un espace de dimension 3, rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2, e_3)$.
  Notons (x, y, z) les coordonnées d'un point M quelconque de E. Soit $\mathcal{D}$ une partie de E.
  $\mathcal{D}$ est une droite si et seulement si il existe deux quadruplets $\begin{cases} (a\,,b\,,c\,d) \\ (a', b', c', d') \end{cases}$ tels que :
  $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$, les triplets $\begin{cases} (a\,,b\,,c\,) \\ (a', b', c') \end{cases}$ étant non proportionnels.
  Le système $\begin{cases} ax+by+cz = 0 \\ a'x+b'y+c'z = 0 \end{cases}$ caractérise la direction D de $\mathcal{D}$.
  Les droites parallèles à $\mathcal{D}$ ont pour système d'équations : $\begin{cases} ax+by+cz = \lambda \\ a'x+b'y+c'z = \mu \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

– Définie comme précédemment, la droite $\mathcal{D}$ est l'intersection de deux plans affines :
  ◇ Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz = d$.
  ◇ Le plan $\mathcal{P}'$ d'équation $a'x+b'y+c'z = d'$.
  Les équations $\lambda(ax+by+cz-d)+\mu(a'x+b'y+c'z-d') = 0$ (avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$) sont alors celles des plans contenant la droite $\mathcal{D}$ (c'est le *faisceau* de plans dirigé par $\mathcal{D}$).

– Un vecteur directeur de la doite $\mathcal{D}\begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$ est $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

– Soit $\mathcal{D}$ une droite de E muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2, e_3)$.
  $\mathcal{D}$ est parallèle à la doite (Ω, e_3) $\Leftrightarrow$elle a un système d'équations du type $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$

De même, la droite $\mathcal{D}\begin{cases} x=\alpha \\ z=\gamma \end{cases}$ est parallèle à la droite (Ω, e_2).

Enfin $\mathcal{D}$ est parallèle à (Ω, e_1) $\Leftrightarrow$elle a un système d'équations du type $\begin{cases} y=\beta \\ z=\gamma \end{cases}$

– Soit $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ un système d'équations d'une droite affine $\mathcal{D}$.
  Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'équation $a''x+b''y+c''z=d''$.
  La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si on a l'égalité $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$.
  $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow \mathcal{P}$ est dans le faisceau défini par $\mathcal{D}$.
  La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan (Ω, e_1, e_2) (c'est-à-dire le plan $z=0$)$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$.
  Si tel n'est pas le cas, elle a un système d'équations de la forme $\begin{cases} x=\alpha z+\beta \\ y=\beta z+\delta \end{cases}$ (elle peut donc être paramétrée par z, ce qui est normal car tout plan $z=\lambda$ coupe $\mathcal{D}$ en un point unique.)

Recherche d'intersection de sous-espaces affines

– On se propose de déterminer l'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de E.
  Le plus commode est de disposer d'une représentation paramétrique de l'un des deux sous-espaces et d'un système d'équations de l'autre.
  Supposons par exemple qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{F}$ soit : $M=A+\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j\varepsilon_j$ et qu'un système d'équations de $\mathcal{F}'$ soit $f_1(M)=d_1, f_2(M)=d_2, \ldots, f_q(M)=d_q$.
  On trouve $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}'$ en résolvant le système des équations $f_i\Big(A+\sum\limits_{j=1}^{p}\lambda_j\varepsilon_j\Big)=d_i$ $(1\le i\le q)$.
  Ce système linéaire (S) est en effet formé de q équations aux p inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$.

– Prenons un exemple très simple, dans E muni d'un repère $\mathcal{R}=(\Omega,(e)=e_1,e_2,e_3)$.
  Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(1,0,4)$ et dirigée par le vecteur $u=(1,-1,-1)$.
  Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+3y-2z=5$.
  Le vecteur u n'est pas dans la direction P de $\mathcal{P}$ (qui a pour équation $2x+y-2z=0$.)
  La droite $\mathcal{D}$ rencontre donc $\mathcal{P}$ en un point $M_\lambda=A+\lambda u$ unique.
  On reporte les coordonnées $x_\lambda=1+\lambda, y_\lambda=-\lambda, z_\lambda=4-\lambda$ de M_λ dans $2x+3y-2z=5$.
  On trouve $2(1+\lambda)-3\lambda-2(4-\lambda)=5$ c'est-à-dire : $\lambda=11$.
  Ainsi le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ est $M(12,-11,-7)$.

III Barycentres et convexité

III.1 Barycentres

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition *(Points pondérés)*

On appelle *point pondéré* le couple (A, λ) formé d'un point A de E et d'un réel λ.
Le nombre réel λ est appelé *poids* du point pondéré (A, λ).
Soit $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_p, \lambda_p)$ une famille de p points pondérés.
La quantité $m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k$ est appelée *poids total* de ce système de points.

Proposition *(Fonction vectorielle de Leibniz)*

Soit $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_p, \lambda_p)$ une famille de p points pondérés.
On définit l'application φ de E dans E par $\varphi(M) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$.
φ est appelée *fonction vectorielle de Leibniz* associée au système de points pondérés.
Soit m le poids total de la famille $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_p, \lambda_p)$:

- ◇ Si $m = 0$, la fonction φ est constante.
- ◇ Si $m \neq 0$, la fonction φ est bijective.

Définition *(Barycentre d'une famille de points pondérés)*

Soit $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_p, \lambda_p)$ une famille de points pondérés, de poids total $m \neq 0$.
On appelle *barycentre* de cette famille l'unique point G de E tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.
G est donc le point où s'annule la fonction vectorielle de Leibniz associée aux (A_k, λ_k).

Remarques et propriétés

- On dit aussi que G est le barycentre de $A_1, \ldots, A_p$ affectés des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
- Le barycentre G ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont donnés les couples (A_k, λ_k).
- Parler du barycentre d'une famille de points de poids total nul n'a aucun sens.
  Il en est ainsi d'une famille $(A, 1), (B, -1)$, ou d'une famille $(A, 1), (B, 1), (C, -2)$.
- Soit G le barycentre de la famille $(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \ldots, (A_p, \lambda_p)$.
  Pour tout point Ω de E, G est caractérisé par : $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{\Omega A_k}$, avec $m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k$.
  Si on utilise les notations $\begin{cases} G = \Omega + \overrightarrow{\Omega G} \\ A_k = \Omega_k + \overrightarrow{\Omega A_k} \end{cases}$, on trouve : $G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k A_k$.
- Supposons que E soit rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, \ldots, e_n)$.
  Pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, notons $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$ les coordonnées du point A_k.
  Notons $x_1, \ldots, x_n$ celles du barycentre G des points pondérés (A_k, λ_k).
  Alors l'égalité $G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k A_k$ donne : $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_{ik}$.
  Autrement dit chaque coordonnée x_i de G est le barycentre des coordonnées x_{ik} correspondantes des points A_k, avec les mêmes poids respectifs.

– On ne modifie pas G en multipliant les poids λ_k par un même coefficient non nul μ.
  En particulier, quitte à choisir $\mu = \dfrac{1}{m}$, on peut toujours se ramener à $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$.
  Le barycentre G est alors défini par $G = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k A_k$.

– On appelle *isobarycentre* (ou *équibarycentre*) de la famille $A_1, A_2, \ldots, A_p$ le barycentre G des points (A_k, λ), pour tout $\lambda \neq 0$ (les poids sont constants.)
  On peut bien sûr choisir $\lambda = \dfrac{1}{p}$. Le point G est alors défini par l'égalité $G = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{p} A_k$.
  - ⋄ L'isobarycentre de A, B est le milieu $G = \frac{1}{2}(A + B)$ du segment $[A, B]$.
  - ⋄ L'isobarycentre de A, B, C est le centre de gravité $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$ du triangle ABC.
  - ⋄ Quatre points A, B, C, D (dans cet ordre) forment un parallélogramme$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
    Cette égalité équivaut à $B - A = C - D$, donc à $\frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$.
    Cela signifie que les diagonales (les segments $[A, C]$ et $[B, D]$) ont même milieu.
    Ce milieu commun I vérifie donc $I = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$.
    Autrement dit, I est l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.

Proposition *(Associativité du barycentre)*

Soit I un ensemble fini non vide. On se donne une famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de points pondérés.
On suppose que $m = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \neq 0$. Soit G le barycentre des $(A_i, \lambda_i), i \in I$.
On se donne une partititon $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p$ de l'ensemble I.
Pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$, on suppose que la somme $m_k = \sum\limits_{i \in I_k} \lambda_i$ est non nulle.
On note alors G_k le barycentre des $(A_i, \lambda_i), i \in I_k$.
Avec ces notations, G est le barycentre des points pondérés $(G_k, m_k), k \in \{1, \ldots, p\}$.

Remarques

– La propriété précédente signifie en particulier que lorsqu'on cherche un barycentre G, on peut remplacer une sous-famille de points (de poids total m_k non nul) par le barycentre G_k de cette sous-famille affecté lui-même du coefficient m_k.

– L'isobarycentre G des points A, B, C est aussi le barycentre de $(A, 1), (I, 2)$, où $I = \frac{1}{2}(B+C)$.
  Autrement dit $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Les médianes d'un triangle sont donc concourantes en son centre de gravité G, qui est au deux-tiers de chaque médiane en partant du sommet.

– De même, on se donne quatre points A, B, C, D non coplanaires : ils forment un vrai *tétraèdre*.
  Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et I celui de B, C, D.
  Par associativité, G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(I, 3)$.
  Autrement dit $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$. Ainsi, dans un tétraèdre, les segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourants en le centre de gravité du tétraèdre. Celui-ci est aux $\frac{3}{4}$ de chacun de ces segments (en partant du sommet du tétraèdre.)

III.2 Barycentres et sous-espaces affines

Proposition

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. Soient $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_p, \lambda_p)$ des points pondérés de $\mathcal{F}$.
On suppose que $m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \neq 0$. Soit G le barycentre des (A_k, λ_k).
Alors le point G appartient au sous-espace affine $\mathcal{F}$.
On exprime cette propriété en disant qu'un sous-espace affine est *stable par barycentration.*

Remarques

– Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de E.
On suppose que $\mathcal{F}$ est *stable par barycentration.*
Alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E.

– On peut améliorer le résultat précédent de la manière suivante :
On suppose que le barycentre de deux points quelconques de $\mathcal{F}$ est encore un élément de $\mathcal{F}$.
Alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E.

On sait que tout barycentre de points d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ est encore un point de $\mathcal{F}$.

On peut se demander réciproquement si tout point de $\mathcal{F}$ peut être considéré comme le barycentre d'une famille *fixée* de points de $\mathcal{F}$.

La réponse fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition *(Repères affines, coordonnées barycentriques)*

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension $p \geq 1$ de E.
On dit qu'une famille $A_0, A_1, \ldots, A_p$ de $p+1$ points de $\mathcal{F}$ est un *repère affine* de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{R} = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ est un repère cartésien de $\mathcal{F}$.
Tout point M de $\mathcal{F}$ est alors barycentre des A_k, avec certains coefficients λ_k $(0 \leq k \leq n.)$
Si on impose la condition $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k = 1$, alors les λ_k sont définis de manière unique : on les appelle les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(A_0, \ldots, A_p)$.

Remarques et exemple

– Dans le fait que $A_0, A_1, \ldots, A_p$ forment un repère affine de $\mathcal{F}$, l'ordre dans lequel sont donnés les points n'a aucun importance (mais bien sûr cet ordre influe sur les coordonnées.)

– Dire que le point M a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ dans le repère affine $(A_0, \ldots, A_p)$, c'est dire que $M = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k A_k$ avec $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k = 1$.
On voit bien avec cette notation que l'ordre des points A_k est sans importance.
C'est d'ailleurs le mérite de cette notion : on se passe de la notion d'origine pour caractériser la position d'un point du sous-espace affine $\mathcal{F}$.

– Les coordonnées barycentriques de l'isobarycentre de $A_0, \ldots, A_p$ sont toutes égales à $\frac{1}{p+1}$.

– Soient A, B deux points distincts de E.
La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de ces deux points.

– Soient A, B, C trois points non alignés de E.
Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de ces trois points.

– Un repère affine d'une droite $\mathcal{D}$ est la donnée de deux points distincts A, B de $\mathcal{D}$.
La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des barycentres de ces deux points.
Plus précisément :
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ M - A = \lambda(B - A) \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ M = (1 - \lambda)A + \lambda B \end{aligned}$$
Autrement dit : M a pour abscisse λ dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB})$ si et seulement si il a pour coordonnées barycentriques $(1 - \lambda, \lambda)$ dans le repère affine A, B.
Par exemple :
- ◇ A a pour abscisse 0, et pour coordonnées barycentriques $1, 0$.
- ◇ B a pour abscisse 1, et pour coordonnées barycentriques $0, 1$.
- ◇ Le milieu I de $[A, B]$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$, et pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

– Un repère affine d'un plan $\mathcal{P}$ est la donnée de trois points non alignés A, B, C de $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ est alors l'ensemble des barycentres de ces trois points :
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ M - A = \lambda(B - A) + \mu(C - A) \\ &\Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ M = (1 - \lambda - \mu)A + \lambda B + \mu C \end{aligned}$$
Autrement dit :
M a pour coordonnées (λ, μ) dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$\Leftrightarrow$il a pour coordonnées barycentriques $(1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ dans le repère affine A, B, C.
Par exemple :
- ◇ A a pour coordonnées $(0, 0)$, et pour coordonnées barycentriques $1, 0, 0$.
- ◇ B a pour coordonnées $(1, 0)$, et pour coordonnées barycentriques $0, 1, 0$.
- ◇ C a pour coordonnées $(0, 1)$, et pour coordonnées barycentriques $0, 0, 1$.
- ◇ Le centre de gravité G de ABC a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
  Il a pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ dans le repère affine A, B, C.

Proposition *(sous-espace affine engendré par une famille de points)*

On se donne une famille $A_0, \ldots, A_p$ de points de E.
Il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E contenant les A_k.
$\mathcal{F}$ est égal à l'ensemble des barycentres des points A_k.
On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine *engendré* par la famille de points $A_0, A_1, \ldots, A_p$.

Remarques

– Les points $A_0, \ldots, A_p$ engendrent donc un sous-espace affine $\mathcal{F}$.
La direction de $\mathcal{F}$ est $\text{Vect}\,(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$. En particulier $\dim \mathcal{F} \leq p$.
Les points A_k ne forment un repère affine de $\mathcal{F}$ que si $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sont libres.

– Le sous-espace engendré par deux points distincts est l'unique droite qui les contient.
Le sous-espace engendré par trois points non alignés est l'unique plan qui les contient.

– Supposons que quatre points A, B, C, D de E soient coplanaires et non alignés.
Ils engendrent l'unique plan $\mathcal{P}$ qui les contient.
Tout point de $\mathcal{P}$ est barycentre de A, B, C, D mais il n'y a plus unicité des poids (même à un facteur multiplicatif près.)
Par exemple, si A, B, C, D forment un vrai parallélogramme, alors le point A :
  - ◇ Est barycentre de A, B, C, D avec les coefficients $1, 0, 0, 0$.
  - ◇ Est barycentre de A, B, C, D avec les coefficients $0, 1, -1, 1$.
    En effet $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A - B = D - C \Leftrightarrow A = B - C + D$.
  - ◇ Est barycentre de A, B, C, D avec les coefficients $1 - \lambda, \lambda, -\lambda, \lambda$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.)

III.3 Parties convexes

Définition

Soient A, B deux points de E. On appelle *segment* d'extrémités A et B, et on note $[A, B]$ (ou $[B, A]$) l'ensemble des barycentres de $(A, 1 - \lambda)$ et (B, λ), avec $\lambda \in [0, 1]$.

Remarques

– C'est donc l'ensemble des points M de E tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, avec $\lambda \in [0, 1]$.

– C'est aussi l'ensemble des barycentres de A, B affectés de coefficients positifs.

– Un paramétrage du segment $[A, B]$ est $t \in [0, 1] \mapsto M = (1 - t)A + tB$.

Définition *(Parties convexes)*

Soit $\mathcal{C}$ une partie de l'espace E.
On dit que $\mathcal{C}$ est *convexe* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2,\ [A, B] \subset \mathcal{C}$.
Autrement dit, une partie $\mathcal{C}$ de E est dite convexe si dès qu'elle contient deux points, alors elle contient le segment qui les joint.

Exemples et propriétés

– L'ensemble vide est convexe. Tout sous-espace affine de E est convexe.
Un segment, un singleton, une demi-droite, un demi plan, sont des ensembles convexes.
Les intervalles sont les seules parties convexes de $\mathbb{R}$.

– Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe$\Leftrightarrow$son épigraphe (c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) tels que $y \geq f(x)$) est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

– Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une *norme* $u \mapsto \|u\|$ (par exemple la norme euclidienne) alors les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.

– Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de l'espace E.
Soit G le barycentre d'une famille $A_1, \ldots, A_p$ de points de $\mathcal{C}$, affectés de coefficients ≥ 0.
Alors G est encore un élément de $\mathcal{C}$.

Enveloppe convexe

– Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

– Il en découle que toute partie $\mathcal{A}$ de E est incluse dans une plus petite partie convexe.
Celle-ci est l'intersection de tous les convexes de E qui contiennent $\mathcal{A}$.
On l'appelle l'*enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$.

– On montre que si $\mathcal{A}$ est une partie finie $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ de E, alors son enveloppe convexe est l'ensemble de tous les barycentres des points A_k affectés de coefficients positifs ou nuls.

– Par exemple, l'enveloppe convexe de trois points A, B, C est la "plaque triangulaire" délimitée par ces trois points.
De même, l'enveloppe convexe de p points $A_1, \ldots, A_p$ coplanaires est la "plaque" délimitée par le plus petit polygône convexe contenant ces p points.
L'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires A, B, C, D est le tétraèdre (bords et intérieur compris) défini par ces quatre points.

Convexes délimités par des hyperplans

– Soit f une forme linéaire non nulle sur E. Soient λ un réel et $\mathcal{H}$ l'hyperplan $f(M) = \lambda$.
Notons par exemple $\mathcal{H}_1 = \{M \in E, f(M) \geq \lambda\}$, $\mathcal{H}_2 = \{M \in E, f(M) \leq \lambda\}$.
$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont donc les deux "demi-espaces" fermés délimités par l'hyperplan $\mathcal{H}$.
On peut de même définir $\mathcal{H}_1^* = \{M \in E, f(M) > \lambda\}$, $\mathcal{H}_2^* = \{M \in E, f(M) < \lambda\}$.
$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont donc les deux demi-espaces ouverts délimités par l'hyperplan $\mathcal{H}$.
Avec ces notations, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*$ sont des sous-ensembles convexes de E.

– Plus généralement soient $\begin{cases} f_1, f_2, \ldots, f_p & \text{des formes linéaires non nulles} \\ \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_p & \text{des réels} \end{cases}$
Alors l'ensemble $\mathcal{A} = \{M \in E, f_1(M) \leq \lambda_1, \ldots, f_p(M) \leq \lambda_p\}$ est convexe.
(On peut bien sûr modifier le sens et/ou la nature des inégalités)

IV Applications affines

IV.1 Applications affines

Dans ce paragraphe, E, E', F, G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit f une application de E dans E'. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

◇ Il existe un point Ω de E et $\varphi : E \to E'$ linéaire tels que : $\forall\, M \in E,\ \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

◇ Il existe $\varphi : E \to E'$ linéaire telle que : $\forall\,(M,N) \in E^2,\ \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que f est une *application affine*.

L'application φ est alors définie de manière unique.

On l'appelle *application linéaire associée* à f, et on note (par exemple) $\varphi = \widetilde{f}$.

Remarques et exemples

– La condition $\forall\, M \in E,\ \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$ s'écrit : $\forall\, M \in E,\ f(M) = f(\Omega) + \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

  Une application affine est donc entièrement déterminée par $\begin{cases}\text{l'image d'un point}\\ \text{l'application linéaire associée}\end{cases}$

  Si on se donne les points A dans E et B dans E', et une application linéaire φ de E dans E', alors il existe une unique application affine f de E dans E' telle que $f(A) = B$ et $\widetilde{f} = \varphi$.

– Une application $f : E \to E'$ est affine$\Leftrightarrow$ elle est la somme d'une application constante λ et d'une application linéaire φ : on a alors $\varphi = \widetilde{f}$ et $\lambda = f(0)$.

  En particulier les applications constantes $f : E \to E'$ sont les applications affines dont l'application linéaire associée $\widetilde{f}$ est nulle

– Les applications linéaires sont les applications affines telles $f(O) = O$ (c'est-à-dire qui envoient le vecteur nul de E sur le vecteur nul de E'.)

– Si f est affine, f est linéaire si et seulement si $\widetilde{f} = f$.

Proposition *(Caractérisation des translations)*

L'application $f : E \to E$ est une translation si et seulement si f est affine et $\widetilde{f} = \mathrm{Id}$.

Proposition *(Composition des applications affines)*

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications affines.

Alors $g \circ f$ est une application affine de E dans G. Plus précisément $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$.

Proposition *(Condition pour qu'on ait $\widetilde{f} = \widetilde{g}$)*

Soient $f, g : E \to F$ deux applications affines. On a $\widetilde{g} = \widetilde{f} \Leftrightarrow \exists\, u \in F$ tel que $g = t_u \circ f$.

Expression analytique d'une application affine

– On suppose que E est muni du repère $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, \ldots, e_p)$ (donc $\dim E = p \geq 1$.)

  On note $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées d'un point M quelconque de E dans ce repère.

  On suppose que E' est muni du repère $\mathcal{R}' = (\Omega', (e') = e'_1, \ldots, e'_n)$ (donc $\dim E' = n \geq 1$.)

On note $(x'_1, \ldots, x'_n)$ les coordonnées d'un point M' quelconque de E' dans ce repère.
On note X et X' les matrices-colonnes des coordonnées de M et M'.
Soit $f : E \to E'$ une application affine, d'application linéaire associée $\widetilde{f}$.
Soit B la matrice-colonne des coordonnées $(b_1, \ldots, b_n)$ de $f(\Omega)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $\widetilde{f}$ dans les bases (e) et (e') (avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.)
Pour tous points M de E et M' de E', on a :

$$M' = f(M) \Leftrightarrow M' = f(\Omega) + \widetilde{f}(\overrightarrow{\Omega M}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega' M'} = \widetilde{f}(\overrightarrow{\Omega M}) + \overrightarrow{\Omega' f(\Omega)}$$

En utilisant les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on obtient :

$$M' = f(M) \Leftrightarrow X' = AX + B \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p + b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{ip}x_p + b_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p + b_n \end{cases}$$

– Réciproquement un tel système, qui s'écrit $X' = AX + B$, définit une application affine f :
  - ◇ Telle que $\widetilde{f}$ a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans les bases (e) et (e').
  - ◇ Qui envoie l'origine Ω de E sur le point de coordonnées B dans le repère $\mathcal{R}'$.

– Supposons par exemple que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ soient rapportés à leurs repères canoniques.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x', y')$ où $\begin{cases} x' = 2x - y + z + 1 \\ y' = x + 3y - 2z + 5 \end{cases}$
f est l'application affine définie par $f(0, 0, 0) = (1, 5)$ et par $\widetilde{f}$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

– Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont données par $f : x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

– **Exemple de changement de repère pour une application affine**
Il est bien sûr possible de changer de repère. Contentons-nous d'un exemple.
On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère affine canonique $\mathcal{R}$.
Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par le système : (S) $\begin{cases} x' = -2y - 2z - 1 \\ y' = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$
Ainsi $X' = AX + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On définit un nouveau repère $\mathcal{R}'$ de $\mathbb{R}^3$:
  - ◇ $\Omega = (-1, 0, 0)$ est l'origine de $\mathcal{R}'$. Soit X_0 la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.
  - ◇ La nouvelle base (e') est définie par la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons (u, v, w) et (u', v', w') les coordonnées de M, M' dans $\mathcal{R}'$.
On note U et U' les matrices-colonnes de ces coordonnées.
Les changements de coordonnées s'écrivent : $X = PU + X_0$ et $X' = PU' + X_0$.
Dans ces conditions, on a les équivalences :

$$X' = AX + B \Leftrightarrow PU' + X_0 = A(PU + X_0) + B \Leftrightarrow U' = P^{-1}APU + P^{-1}(AX_0 + B - X_0)$$

On a ainsi l'expression de f dans le nouveau repère :

- ⋄ On reconnait l'expression de la matrice $A' = P^{-1}AP$ de $\widetilde{f}$ dans la nouvelle base.

- ⋄ La colonne $B' = P^{-1}(AX_0 + B - X_0)$ représente la colonne des coordonnées (dans le nouveau repère) de $f(\Omega)$, image par f de la nouvelle origine Ω.

  Cette expression est logique car $AX_0 + B$ est la colonne des coordonnées de $f(\Omega)$ dans $\mathcal{R}$.

  $AX_0 + B - X_0$ est donc la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$ dans l'ancienne base.

  Dans ces conditions l'égalité $AX_0 + B - X_0 = PB'$ reflète les changements de composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$ entre la base (e) et la base (e').

- ⋄ Le calcul donne $\begin{cases} u' = u \\ v' = v \\ w' = 0 \end{cases}$ Cela signifie que f est la projection affine (voir plus loin) sur le plan (Ω, e'_1, e'_2), parallèlement à la direction de e'_3.

– Dans l'exemple précédent il n'était pas nécessaire d'effectuer beaucoup de calculs.
En effet, en utilisant le système (S) (expression de f dans $\mathcal{R}$), on trouve $f(\Omega) = \Omega$.
Autrement dit, la nouvelle origine Ω est un point invariant par f.
D'autre part, on voit que $\widetilde{f}(e'_1) = e'_1$, $\widetilde{f}(e'_2) = e'_2$ et $\widetilde{f}(e'_3) = \overrightarrow{0}$.
Par exemple l'égalité $\widetilde{f}(e'_1) = e'_1$ résulte de $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

IV.2 Isomorphismes affines

Proposition *(Isomorphismes affines)*

On dit qu'une application $f : E \to F$ est un *isomorphisme affine* si f est affine et bijective.
Une application affine $f : E \to F$ est bijective$\Leftrightarrow$ $\widetilde{f}$ est bijective.
L'application f^{-1} est alors un isomorphisme affine, et on a l'égalité $\widetilde{f^{-1}} = \widetilde{f}^{-1}$.

Remarques

– Supposons que les espaces E et F soient de dimension finie.
Alors il ne peut y avoir d'isomorphisme affine entre E et F que si $\dim E = \dim F$.

– Plus précisément on a (f injective$\Leftrightarrow$ $\widetilde{f}$ injective) et (f surjective$\Leftrightarrow$ $\widetilde{f}$ surjective).
En particulier, si $\dim E = \dim F$, f est un isomorphisme affine$\Leftrightarrow$ $\ker \widetilde{f} = \{\overrightarrow{0}\}$.

– Supposons $\dim E = \dim F = n$, et soit $f : E \to F$ une application affine.
On suppose qu'après le choix de repères, f est caractérisée par un système $X' = AX + B$.
Alors f est un isomorphisme affine$\Leftrightarrow$la matrice A (carrée d'ordre n) est inversible.

– Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes affines, $g \circ f$ est un isomorphisme affine.

Proposition *(Le groupe affine)*

Un isomorphisme affine de E dans E est appelé une *transformation affine* (ou un automorphisme affine) de E. L'ensemble des transformations affines de E est un sous-groupe du groupe des bijections de E, appelé *groupe affine* de E et noté $\mathcal{GA}(E)$.

Définition *(Homothéties)*

On dit qu'une application $f : E \to E$ est une *homothétie* s'il existe un point Ω et un réel **non nul** λ tels que : $\forall M \in E, h(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$. On note $f = h(\Omega, \lambda)$.
Le réel λ (appelé *rapport* de l'homothétie) est défini de manière unique.

- ⋄ Si $\lambda = 1$, on trouve $f = \text{Id}$, et le point Ω peut être choisi quelconque.
- ⋄ Si $\lambda \neq 1$, le point Ω est défini de manière unique : c'est l'unique point invariant de f.
  On dit que Ω est le *centre* de l'homothétie.

Remarques

- Toute homothétie est une transformation affine.
  On a bien sûr les égalités $h(\Omega, \lambda) \circ h(\Omega, \mu) = h(\Omega, \lambda\mu)$ et $h(\Omega, \lambda)^{-1} = h(\Omega, \frac{1}{\lambda})$.
  Les homothéties de centre Ω donné forment un sous-groupe commutatif de $\mathcal{GA}(E)$.
- Si f est une homothétie de rapport λ, alors $\widetilde{f} = \lambda\text{Id}$.
  Réciproquement, supposons $\widetilde{f} = \lambda\text{Id}$ (avec $\lambda \neq 0$ sinon f est constante.)
  - ⋄ Si $\lambda = 1$, f est une translation.
  - ⋄ Si $\lambda \neq 1$, f admet un point fixe unique Ω.
    L'application f est alors l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.
- L'homothétie $h(\Omega, -1)$ est appelée *symétrie centrale* par rapport au point Ω.

Proposition *(Groupe des homothéties-translations)*

La réunion de l'ensemble des translations de E et de l'ensemble des homothéties de E est un sous-groupe de $\mathcal{GA}(E)$, appelé *groupe des homothéties-translations.*

Remarques sur l'application $f \mapsto \widetilde{f}$

- C'est un morphisme surjectif du groupe $\mathcal{GA}(E)$ sur le groupe linéaire $GL(E)$.
- Le noyau de ce morphisme est le groupe des translations de E.
- Le groupe des homothéties-translations est l'image réciproque par ce morphisme du sous-groupe de $GL(E)$ formé par les homothéties vectorielles (applications $h_\lambda = \lambda\text{Id}$, $\lambda \neq 0$.)

IV.3 Applications affines et sous-espaces affines

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Proposition *(Image d'un sous-espace affine)*

Soit $f : E \to F$ une application affine.
Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de E, de direction E'.
Alors $f(\mathcal{E}')$ est un sous-espace affine de F, de direction $\widetilde{f}(E')$.

Remarques

– Avec les notations précédentes, si $\dim \mathcal{E}' = r$ alors $\dim f(\mathcal{E}') \leq r$.
Ainsi l'image d'une droite est une droite ou un point.
Donc si les points A, B, C sont alignés, il en est de même de $f(A), f(B), f(C)$.
On exprime cette propriété en disant qu'une application affine *conserve l'alignement.*
De même, l'image d'un plan est un plan, une droite, ou un point.
Si les points A, B, C, D sont coplanaires, il en est donc de même de $f(A), f(B), f(C), f(D)$.

– Pour être plus précis, on a $\dim f(\mathcal{E}') = \dim \mathcal{E}'$ si $E' \cap \ker \widetilde{f} = \{\overrightarrow{0}\}$.
Alors si $(\Omega, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est un repère de $\mathcal{E}'$, un repère de $f(\mathcal{E}')$ est $(f(\Omega), \widetilde{f}(\varepsilon_1), \ldots, \widetilde{f}(\varepsilon_r))$.
Par exemple, si $\widetilde{f}(u) \neq \overrightarrow{0}$, l'image de la droite (Ω, u) est la droite $(f(\Omega), \widetilde{f}(u))$.

– Dans le cas général, soit $(\Omega, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ un repère de $\mathcal{E}'$.
Alors $f(\mathcal{E}')$ est le sous-espace affine passant par $f(\Omega)$ et de direction $\operatorname{Vect}\{\widetilde{f}(\varepsilon_1), \ldots, \widetilde{f}(\varepsilon_r)\}$.
Cela explique qu'il est plus facile de calculer l'image d'un sous-espace affine $\mathcal{E}'$ donné par une représentation paramétrique (plutôt que par un système d'équations.)

– Soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives E' et E''.
 ◇ Si $\mathcal{E}'$ est parallèle à $\mathcal{E}''$ (c'est-à-dire si $E' \subset E''$) alors $f(\mathcal{E}')$ est parallèle à $f(\mathcal{E}'')$.
 ◇ Si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont parallèles (c'est-à-dire si $E' = E''$) alors $f(\mathcal{E}')$ et $f(\mathcal{E}'')$ sont parallèles.
On exprime ces propriétés en disant qu'une application affine *conserve le parallélisme.*

– Supposons que $f : E \to E$ soit une homothétie ou une translation.
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. Alors les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ sont parallèles.

– **Exemple :**
On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère affine canonique $\mathcal{R}$.
Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par le système : $(S)\begin{cases} x' = -2y - 2z - 1 \\ y' = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y - 3z = 1$.
$\mathcal{P}$ est le plan passant par $\Omega = (1, 0, 0)$ et dirigé par $\begin{cases} \varepsilon_1 = (2, 1, 0) \\ \varepsilon_2 = (3, 0, 1) \end{cases}$
On trouve $f(\Omega) = (-1, 2, -2)$.
D'autre part : $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.
On constate que $\widetilde{f}(\varepsilon_1)$ et $\widetilde{f}(\varepsilon_2)$ sont liés (et même égaux, mais c'est dû au choix de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$).
On en déduit que $f(\mathcal{P})$ est la droite passant par $(-1, 2, -2)$ et engendrée par $(-2, 5, -4)$.

Proposition *(Image réciproque d'un sous-espace affine)*

Soit $f : E \to F$ une application affine.
Soit $\mathcal{F}'$ un sous-espace affine de F, de direction F'.
Alors soit $\overset{-1}{f}(\mathcal{F}')$ est vide, soit c'est un sous-espace affine de E, de direction $\overset{-1}{\widetilde{f}}(F')$.

Remarques

- Supposons que $f : E \to E$ soit constante ($\forall M \in E,\ f(M) = A$). Alors l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E est vide si $A \notin \mathcal{F}$, et est égale à E tout entier si $A \in \mathcal{F}$.
- Avec les notations de la proposition précédente, et si E, F sont de dimension finie :
  Soit $Y = AX + B$ la représentation matricielle de f dans des repères de E et F.
  Un système d'équations de $\mathcal{F}'$ peut toujours s'écrire $CY = D$ dans le repère de F.
  On obtiendra alors $\overset{-1}{f}(\mathcal{F}')$ en résolvant $C(AX + B) = D$.
  Cela explique qu'il est plus facile de calculer l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}'$ donné par un système d'équations (plutôt que par une représentation paramétrique.)
- **Exemple :**
  On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère affine canonique $\mathcal{R}$.
  Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par le système : $(S)\begin{cases} x' = -2y - 2z - 1 \\ y' = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$
  Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $\Omega(a, 0, 0)$, dirigé par $u = (0, 1, -1)$.
  Un système d'équations de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = a \\ y + z = 0 \end{cases}$ (ici a est un paramètre réel.)
  Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^3$, et $M'(x', y', z')$ son image par f.
  On a $f(M) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a \\ y' + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z - 1 = a \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$
  Ainsi l'image réciproque de la droite $\mathcal{D}$ est :
  - ⋄ L'ensemble vide si $a \neq -1$.
  - ⋄ Le plan d'équation $y + z = 0$ si $a = -1$.

Proposition *(Points invariants par une application affine)*

> Soit $f : E \to E$ une application affine.
> Notons $\text{Inv}\,(f) = \{M \in E,\ f(M) = M\}$ l'ensemble des *points invariants* par f.
> Alors soit $\text{Inv}\,(f)$ est vide, soit c'est un sous-espace affine de E de direction $\text{Inv}\,(\widetilde{f})$.

Exemple

- Reprenons un exemple déjà utilisé.
  Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par le système : $(S)\begin{cases} x' = -2y - 2z - 1 \\ y' = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$
  Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.
  On a $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2z - 1 \\ y = x + 3y + 2z + 1 \\ z = -x - 2y - z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + 2z = -1.$
  Ainsi l'ensemble des points invariants par f est le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 2z = -1$.
  Ce résultat est normal quand on sait que f est une projection affine sur le plan $\mathcal{P}$.

IV.4 Projections, symétries, affinités

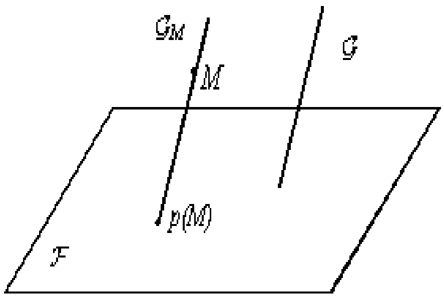
Rappel

> Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions F et G.
> Si $E = F \oplus G$, alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ se réduit à un point.

Proposition *(Projections affines)*

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions F, G telles que $E = F \oplus G$.
Pour tout point M de E, notons $\mathcal{G}_M$ le sous-espace affine de direction G et passant par M.
Soit $p(M)$ l'unique point d'intersection de $\mathcal{G}_M$ et de $\mathcal{F}$.
L'application $M \mapsto p(M)$ est appelée *projection affine* de E sur $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{G}$.
C'est effectivement une application affine, et son application linéaire associée est la projection vectorielle de E sur F, parallèlement à G.
L'application p vérifie $p \circ p = p$, et on a $\mathcal{F} = \text{Inv}\,(p) = \text{Im}\,(p)$.

On a illustré ici la définition précédente.
Pour une projection parallèlement à $\mathcal{G}$, seule compte la direction G.
C'est pourquoi il est préférable de parler de projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.



Proposition *(Caractérisation des projections affines)*

Soit $f : E \to E$ une application affine.
f est une projection affine si et seulement si $f \circ f = f$.
Dans ce cas, f est la projection sur $\text{Inv}\,(f)$, parallèlement à $\ker \widetilde{f}$.

Exemples

– Reprenons un exemple déjà utilisé plusieurs fois.
Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par le système : $(S) \begin{cases} x' = -2y - 2z - 1 \\ y' = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$
On veut montrer que f est un projection affine, et la caractériser.
Soit $M(x, y, z)$, son image $M'(x', y', z')$ et $M'' = f(M') = (x'', y'', z'')$.

$$\begin{cases} x'' = -2y' - 2z' - 1 \\ y'' = x' + 3y' + 2z' + 1 \\ z'' = -x' - 2y' - z' - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -2(x + 3y + 2z + 1) - 2(-x - 2y - z - 1) - 1 \\ y'' = (-2y - 2z - 1) + 3(x + 3y + 2z + 1) + 2(-x - 2y - z - 1) + 1 \\ z'' = -(-2y - 2z - 1) - 2(x + 3y + 2z + 1) - (-x - 2y - z - 1) - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -2y - 2z - 1 = x' \\ y'' = x + 3y + 2z + 1 = y' \\ z'' = -x - 2y - z - 1 = z' \end{cases}$$

Ainsi $M'' = M'$. Donc $f \circ f = f$: l'application f est une projection affine.
On a vu (page 30) que $\text{Inv}\,(f)$ est le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 2z = -1$.
Enfin, l'application $\widetilde{f}$ est définie (dans la base canonique) par le système $\begin{cases} x' = -2y - 2z \\ y' = x + 3y + 2z \\ z' = -x - 2y - z \end{cases}$

Ainsi $u(x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

On peut donc conclure. L'application f est la projection affine :

◇ Sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y+2z=-1$.

◇ Parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,-1,1)$.

– Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ et P le plan d'équation $x+2y+2z=0$.
On cherche la projection p sur $\mathcal{D}$ parallèlement à P.
Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^3$. On note $p(M)=M'=(x',y',z')$.
$\mathcal{D}$ passe par $\Omega=(2,0,1)$ et est dirigée par $u=(4,-1,3)$.
Puisque M' appartient à $\mathcal{D}$, il existe λ tel que $M=\Omega+\lambda u$, donc $\begin{cases} x'=2+4\lambda \\ y'=-\lambda \\ z'=1+3\lambda \end{cases}$
On exprime que $\overrightarrow{MM'}=(x'-x,y'-y,z'-z)$ est dans le plan vectoriel P.

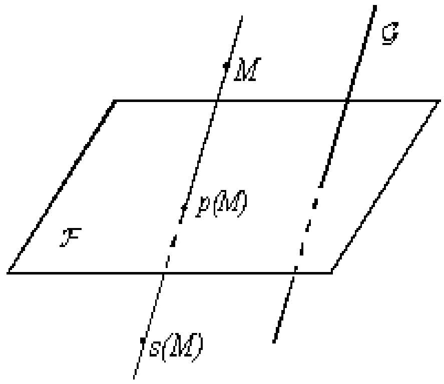
$$(x'-x)+2(y'-y)+2(z'-z)=0 \Leftrightarrow 4+8\lambda=x+2y+2z \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{8}(x+2y+2z-4)$$

On en déduit l'expression analytique de la projection p : $\begin{cases} x'=2+4\lambda \\ y'=-\lambda \\ z'=1+3\lambda \\ \lambda=\frac{1}{8}(x+2y+2z-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{8}(4x+8y+8z) \\ y'=\frac{1}{8}(-x-2y-2z+4) \\ z'=\frac{1}{8}(3x+6y+6z-4) \end{cases}$

Proposition *(Symétries affines)*

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions F,G telles que $E=F\oplus G$.
Soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{G}$.
Pour tout point M de E, soit $s(M)$ le point défini par $s(M)=M+2\overrightarrow{Mp(M)}$.
L'application $M\mapsto s(M)$ est appelée *symétrie affine* par rapport $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{G}$.
C'est effectivement une application affine, et son application linéaire associée est la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G.
L'application s vérifie $s\circ s=\mathrm{Id}$, et on a $\mathcal{F}=\mathrm{Inv}\,(s)$.

On a illustré ici la définition précédente.
On voit comment, pour tout point M,
le point $p(M)$ est le milieu du segment $[M,s(M)]$.
On a les relations $s=2p-\mathrm{Id}$ et $p=\frac{1}{2}(s+\mathrm{Id})$.



Proposition *(Caractérisation des symétries affines)*

Soit $f:E\to E$ une application affine.
f est une symétrie affine si et seulement si $f\circ f=\mathrm{Id}$.
Notons $\mathrm{Opp}\,(\widetilde{f})=\{u\in E,\ \widetilde{f}(u)=-u\}$ (vecteurs changés en leur opposé par $\widetilde{f}$.)
Alors l'application f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Inv}\,(f)$, parallèlement à $\mathrm{Opp}\,(\widetilde{f})$.

Remarques et exemples

– Les symétries affines sont donc les applications affines *involutives*.

– Les symétries affines sont des éléments particuliers du groupe affine.
En revanche, seule la projection affine $p = \text{Id}$ est bijective.

– La symétrie affine par rapport à un point Ω (donc parallèlement à l'espace E tout entier, mais il est inutile de le préciser) est en fait l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.
De même, la projection affine sur Ω est l'application constante $f : M \mapsto \Omega$.

– Dans $\mathbb{R}^3$, cherchons la symétrie affine s par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 2z = -1$, et parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u(1, -1, 1)$.
Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque, et $M' = s(M) = (x', y', z')$ son image.
Il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda u$, donc $x' = x + \lambda$, $y' = y - \lambda$, $z' = z + \lambda$.
On écrit ensuite que le point $\frac{1}{2}(M + M')$ appartient à $\mathcal{P}$.

$$\frac{1}{2}(x + x') + (y + y') + (z + z') = -1 \Rightarrow \lambda = -2(x + 2y + 2z + 1)$$

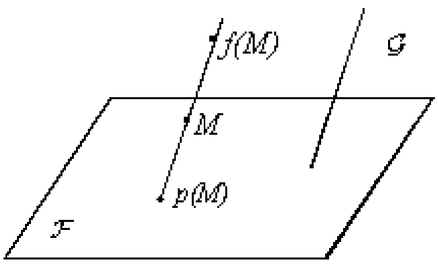
On en déduit l'expression analytique de s :

$$\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x - 4y - 4z - 2 \\ y' = 2x + 5y + 4z + 2 \\ z' = -2x - 4y - 3z - 2 \end{cases}$$

Proposition *(Affinités)*

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions F, G telles que $E = F \oplus G$.
Soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$, parallèlement à $\mathcal{G}$. Soit α un réel.
Pour tout point M de E, soit $f(M)$ le point défini par $f(M) = p(M) + \alpha\overrightarrow{p(M)M}$.
L'application $M \mapsto f(M)$ est une application affine.
On l'appelle *affinité* de base $\mathcal{F}$, de direction $\mathcal{G}$ (ou G) et de rapport α.

On illustre ici la définition précédente.
On a choisi par exemple $\alpha = 2$.
Pour $\alpha = 1$, on trouverait $f = \text{Id}$.
Pour $\alpha = 0$, f serait la projection p.
Pour $\alpha = -1$, f serait la symétrie $s = 2p - \text{Id}$.



Remarques

– Soit f l'affinité de base $\mathcal{F}$, de direction $\mathcal{G}$ (ou G) et de rapport α.
Si p est la projection affine sur $\mathcal{F}$ et parallèlement à G, on a $f = \alpha\text{Id} + (1 - \alpha)p$.

– L'application f^2 est l'affinité de base $\mathcal{F}$, de direction $\mathcal{G}$ (ou G) et de rapport α^2.

– Si $\alpha \neq 0$, l'application f est une transformation affine (elle est bijective.)
Son inverse est l'affinité de base $\mathcal{F}$, de direction $\mathcal{G}$ (ou G) et de rapport $\frac{1}{\alpha}$.

– On a $f = \alpha\text{Id} + (1 - \alpha)p$ et $f^2 = \alpha^2\text{Id} + (1 - \alpha^2)p$.
On en déduit $f^2 - \text{Id} = (1 - \alpha^2)(p - \text{Id}) = (1 + \alpha)(f - \text{Id})$.
Ainsi $f^2 = (1 + \alpha)f - \alpha\text{Id}$, ce qui généralise les relations $p^2 = p$ et $s^2 = \text{Id}$.

Un exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à $M(x,y,z)$ associe $M'(x',y',z')$ défini par $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2z + 1 \\ y' = -x - y - 2z - 1 \\ z' = x + 2y + 3z + 1 \end{cases}$

On va montrer que f est une affinité.

Il faut écrire $f = \alpha \mathrm{Id} + (1-\alpha)p$, où p est une projection (donc $f^2 - \mathrm{Id} = (1+\alpha)(f - \mathrm{Id})$.)

Si $M'' = f(M')$, $\begin{cases} x'' = 2x' + 2y' + 2z' + 1 = 4x + 6y + 6z + 3 \\ y'' = -x' - y' - 2z' - 1 = -3x - 5y - 6z - 3 \\ z'' = x' + 2y' + 3z' + 1 = 3x + 6y + 7z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' - x = 3(x' - x) \\ y'' - y = 3(y' - y) \\ z'' - z = 3(z' - z) \end{cases}$

Ainsi $f^2 - \mathrm{Id} = (1+\alpha)(f - \mathrm{Id})$, avec $\alpha = 2$.

On trouve ensuite p en écrivant $f = \alpha \mathrm{Id} + (1-\alpha)p = 2\mathrm{Id} - p$, donc $p = 2\mathrm{Id} - f$.

p est définie par $\begin{cases} x' = 2x - (2x + 2y + 2z + 1) = -2y - 2z - 1 \\ y' = 2y - (-x - y - 2z - 1) = x + 3y + 2z + 1 \\ z' = 2z - (x + 2y + 3z + 1) = -x - 2y - z - 1 \end{cases}$

On reconnait la projection affine étudiée page 31. On peut donc conclure : f est l'affinité de rapport 2, de base le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 2z = -1$, de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,-1,1)$.

IV.5 Barycentres et applications affines

Proposition *(Conservation du barycentre)*

Soit $f : E \to F$ une application affine.

Soit $(A_1,\lambda_1),(A_2,\lambda_2),\ldots,(A_p,\lambda_p)$ une famille de points pondérés, de poids total $m \neq 0$.

Soit G le barycentre des (A_k,λ_k).

Alors $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_k),\lambda_k)$.

On exprime cette propriété en disant qu'une application affine *conserve le barycentre*.

Remarques

- On retiendra que si $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$, alors $f(\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k A_k) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k f(A_k)$.

  En particulier, on a les égalités $f(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$.
- L'image par f du milieu du segment $[A,B]$ est le milieu du segment $[f(A),f(B)]$.

  Plus généralement, l'image de l'isobarycentre des A_k est l'isobarycentre des $f(A_k)$.
- Supposons que : $\forall (A,B) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$.

  Alors on montre que f est une application affine.

  Ainsi la réciproque de la proposition ci-dessus est vraie.

  Autrement dit, si f conserve les barycentres, alors c'est une application affine.
- Si $\dim E = p \geq 1$, une application affine $f : E \to F$ est déterminée de manière unique par les images des $p+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_p$ d'un repère affine de E (ces images pouvant être choisies de façon quelconque dans F.) Par exemple :

  Si $\dim E = 2$, f est déterminée de manière unique par les images de 3 points non alignés.

  Si $\dim E = 3$, f est déterminée de manière unique par les images de 4 points non coplanaires.

Proposition *(Applications affines et parties convexes)*

> Soit $f : E \to F$ une application affine.
> L'image par f d'une partie convexe de E est une partie convexe de F.
> L'image réciproque par f d'une partie convexe de F est une partie convexe de E.

Remarques

- On rappelle la définition (hors-programme) de l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ de E : c'est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$, ou encore l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$.
  On rappelle que si $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, alors l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres des points A_k affectés de coefficients ≥ 0.
- L'image par f (affine) de l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'enveloppe convexe de $f(\mathcal{A})$.
  En particulier, l'image d'un segment $[A, B]$ est le segment $[f(A), f(B)]$.
  De même l'image du triangle "plein" ABC est le triangle "plein" $f(A)f(B)f(C)$.