ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES GASQUI
HUBERT GOLDSCHMIDT

Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques. II : la conjecture infinitésimale de Blaschke pour les espaces projectifs complexes

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 191-226.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_191_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 191-226.

DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES DES ESPACES RIEMANNIENS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES. II. LA CONJECTURE INFINITÉSIMALE DE BLASCHKE POUR LES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

par J. GASQUI et H. GOLDSCHMIDT

Considérons un espace projectif X, différent d'une sphère, muni de sa métrique canonique g; toutes ses géodésiques sont fermées et de longueur π. La conjecture de Blaschke prétend que toute autre métrique sur X, vérifiant cette condition, est isométrique à g. Elle a été résolue pour les structures riemanniennes de Blaschke sur les projectifs réels par L. Green et M. Berger (cf. [2]). Si g_t est une déformation de $g_0 = g$ sur X, dont chaque membre a toutes ses géodésiques périodiques de longueur π, alors la 2-forme symétrique $h = \left.\frac{dg_t}{dt}\right|_{t=0}$ est d'intégrale nulle sur les géodésiques de g, c'est-à-dire,

$$\int_0^\pi h(\dot{\gamma}(s),\ \dot{\gamma}(s))\, ds = 0,$$

pour toute géodésique γ de g, paramétrée par sa longueur, où $\dot{\gamma}(s)$ est son vecteur-vitesse en $\gamma(s)$. Ceci amène à formuler la version infinitésimale de la conjecture de Blaschke : une 2-forme symétrique h sur X, qui est d'intégrale nulle sur les géodésiques de g, est une dérivée de Lie de g.

R. Michel [7] a démontré qu'une 2-forme symétrique sur X, dont les restrictions aux droites projectives de X sont des dérivées de Lie, est globalement une dérivée de Lie de g. L'hypothèse de ce dernier résultat est plus forte que celle de la conjecture, sauf dans le cas des projectifs réels où elle lui est équivalente. C. Tsukamoto [9] a récemment démontré la conjecture pour les espaces projectifs restants. Plus précisément, il prouve celle-ci pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et l'obtient ensuite pour les autres espaces projectifs, grâce au théorème de Michel cité ci-dessus.

Nous nous proposons de donner ici une autre démonstration de la conjecture infinitésimale de Blaschke pour tous les espaces projectifs $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, avec $m \geqslant 2$, directement à partir du théorème de Michel pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ qui, dans ce cas, a une preuve élémentaire.

Cet article est la suite de notre papier [4]; toutefois, il peut être lu indépendamment de celui-ci.

Soit h une 2-forme symétrique sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, muni de sa métrique canonique g, où $m \geqslant 2$. Nous introduisons un opérateur différentiel linéaire D_g d'ordre 2, provenant de la linéarisation de l'opérateur non-linéaire de courbure de Riemann, et nous montrons que l'hypothèse de la conjecture infinitésimale de Blaschke pour h est équivalente au fait que la restriction de $D_g h$ à tout plan projectif réel de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ est nulle. Nous exprimons cette dernière condition par la nullité de $D'_g h$, où D'_g est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2, défini à partir de D_g. La conjecture infinitésimale de Blaschke pour $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ est maintenant équivalente à l'exactitude au niveau des sections globales d'un complexe d'opérateurs différentiels, où apparaît D'_g. Signalons au passage que l'hypothèse du théorème de Michel revient à supposer que $D_g h$ s'annule sur toutes les sous-variétés totalement géodésiques à courbure constante de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$.

Au § 1, nous décrivons l'opérateur D_g et ses propriétés. Au § 2, on considère sur un espace homogène compact G/K un complexe

$$C^\infty(F_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(F_2) \xrightarrow{P_2} C^\infty(F_3) \tag{1}$$

d'opérateurs différentiels linéaires, homogènes, où P_1 est à symbole injectif et $C^\infty(F_j)$ l'espace des sections globales d'un fibré vectoriel complexe F_j sur G/K. Avec la réciprocité de Frobenius (cf. [10]), on associe, à chaque élément du dual de G, un sous-complexe de (1), d'espaces vectoriels de dimension finie, et on vérifie que l'exactitude de (1) est équivalente à celle de tous ces sous-complexes. Le § 3 est consacré à des résultats classiques sur les représentations du groupe unitaire.

La conjecture infinitésimale se traduit plus précisément, au § 4, en termes d'exactitude d'un complexe du type (1) sur

$$G/K = U(m+1)/U(1) \times U(m):$$

les fibrés F_1 et F_2 sont le complexifié du fibré tangent et le fibré des 2-formes symétriques, à valeurs complexes, sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, tandis que P_1 est l'opérateur de Killing et $P_2 = D'_g$. C'est ici qu'intervient le théorème de Michel pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Nous décrivons ensuite explicitement une décomposition en $U(m+1)$-modules irréductibles de $C^\infty(F_2)$, à l'aide des sous-espaces propres du laplacien de la métrique g. Avec le critère décrit plus haut, on est ramené à étudier l'action de D'_g sur certains facteurs irréductibles de cette décomposition, et, en fait, à celle de D_g sur des sections explicites de F_2. Ces derniers calculs sont menés à bien, au § 5, par des méthodes de géométrie kählérienne locale dans l'espace projectif complexe.

1. Propriétés de l'opérateur D_g.

Tous les objets considérés dans ce papier sont supposés différentiables de classe C^∞. Soit X une variété différentiable de dimension finie, dont on note T le fibré tangent et T^* le fibré cotangent. On désigne par S^kT^* et $\wedge^\ell T^*$ la puissance symétrique k-ième et la puissance extérieure ℓ-ième de T^*, respectivement. Si E est un fibré vectoriel sur X, on note $\mathscr{E}$ le faisceau des sections de E sur X et $C^\infty(E)$ l'espace des sections globales de E sur X.

Soit g une métrique riemannienne sur X. On note

$$g^b : T \to T^*, \qquad g^\# : T^* \to T$$

les isomorphismes canoniques déterminés par g. Si ∇ est la connexion de Levi-Civita de g, la courbure $\tilde{R}$ de g de type (1, 3), section de $\wedge^2 T \otimes T^* \otimes T$, est définie par

$$\tilde{R}(\xi_1,\xi_2)\xi_3 = (\nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2} - \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1} - \nabla_{[\xi_1,\xi_2]})\xi_3,$$

pour tous $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathscr{T}$. Les courbures R et $\bar{R}$ de type (0, 4) et (2, 2) de g sont des sections de $\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T^*$ et de $\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T$, respectivement; elles sont données par

$$R(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = g(\xi_4,\tilde{R}(\xi_1,\xi_2)\xi_3),$$

pour $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in T$, et

$$\bar{R} = g^\# \circ R.$$

Si $h \in S^2T^*$, on note

$$h_g^{\natural}: \quad \Lambda^2 T \to \Lambda^2 T^*$$

l'application donnée par

$$h_g^{\natural}(\xi_1 \wedge \xi_2) = h^b(\xi_1) \wedge g^b(\xi_2) + g^b(\xi_1) \wedge h^b(\xi_2),$$

pour $\xi_1, \xi_2 \in T$.

Soit $\mathscr{R}$ l'opérateur différentiel non-linéaire qui envoie une métrique riemannienne h sur sa courbure $\mathscr{R}(h)$ de type $(0,4)$. Notons

$$\mathscr{R}'_g: \quad S^2\mathscr{T}^* \to \Lambda^2\mathscr{T}^* \otimes \Lambda^2\mathscr{T}^*$$

le linéarisé le long de g de l'opérateur non-linéaire $\mathscr{R}$. On considère l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 2

$$D_g: \quad S^2\mathscr{T}^* \to \Lambda^2\mathscr{T}^* \otimes \Lambda^2\mathscr{T}^*$$

défini au § 4 de [4] et donné par

$$D_g h = \mathscr{R}'_g(h) - h_g^{\natural} \circ \bar{R},$$

pour $h \in S^2\mathscr{T}^*$. Dans la suite, nous aurons besoin des formules suivantes qui se déduisent des formules (11.20) et (11.21) de [5]:

$$\begin{aligned}(1.1) \quad (D_g h)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &\\ = \frac{1}{2}\{(\nabla^2 h)(\xi_1,\xi_3,\xi_2,\xi_4) &+ (\nabla^2 h)(\xi_2,\xi_4,\xi_1,\xi_3) \\ - (\nabla^2 h)(\xi_2,\xi_3,\xi_1,\xi_4) &- (\nabla^2 h)(\xi_1,\xi_4,\xi_2,\xi_3) \\ - h(\tilde{R}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4) &+ h(\tilde{R}(\xi_1,\xi_2)\xi_4,\xi_3)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.2) \quad D_g(fg)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &\\ = \frac{1}{2}\{(\operatorname{Hess} f)(\xi_1,\xi_3)g(\xi_2,\xi_4) &+ (\operatorname{Hess} f)(\xi_2,\xi_4)g(\xi_1,\xi_3) \\ - (\operatorname{Hess} f)(\xi_1,\xi_4)g(\xi_2,\xi_3) &- (\operatorname{Hess} f)(\xi_2,\xi_3)g(\xi_1,\xi_4)\} \\ - fR(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4),&\end{aligned}$$

pour $h \in S^2\mathscr{T}^*$ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in T$, où f est une fonction sur X, à valeurs réelles.

Si (Y,g_Y) est une variété riemannienne, on note T_Y son fibré tangent, $\tilde{R}_Y$, R_Y, $\bar{R}_Y$ ses courbures de type $(1,3)$, $(0,4)$ et $(2,2)$. Soient (Y,g_Y) et (Z,g_Z) deux variétés riemanniennes et $f : Z \to Y$ une application différentiable; soient $z \in Z$ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_{Z,z}$. Alors il est clair que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(a) \qquad R_Y(f_*\xi_1, f_*\xi_2, f_*\xi_3, \eta) = 0,$$

pour tout $\eta \in T_{Y,f(z)}$, avec η orthogonal à $f_*(T_{Z,z})$;

$$(b) \qquad \tilde{R}_Y(f_*\xi_1, f_*\xi_2)f_*\xi_3 \in f_*(T_{Z,z}).$$

Si f est une immersion isométrique totalement géodésique, alors $f^*R_Y = R_Z$ et les conditions (a) et (b) sont équivalentes à :

$$(c) \qquad \tilde{R}_Y(f_*\xi_1, f_*\xi_2)f_*\xi_3 = f_*(\tilde{R}_Z(\xi_1, \xi_2)\xi_3).$$

PROPOSITION 1.1. — *Soient* (Z,g_Z) *et* (Y,g_Y) *deux variétés riemanniennes, et soient* $f : Z \to Y$ *une immersion isométrique totalement géodésique, et* $z \in Z$. *Si la courbure* R_Y *vérifie la condition* (a) *pour tous* $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_{Z,z}$, *alors pour* $h \in S^2T^*_{Y,f(z)}$, *on a*

$$(1.3) \qquad f^*(h^{\natural}_{g_Y} \circ \bar{R}_Y) = (f^*h)^{\natural}_{g_Z} \circ \bar{R}_Z,$$

et pour $h \in S^2\mathscr{T}^*_{Y,f(z)}$, *on a*

$$(1.4) \qquad (f^*D_{g_Y}(h))(z) = (D_{g_Z}(f^*h))(z).$$

Démonstration. — D'après la formule (11.13) de [5] et la condition (c), pour $h \in S^2T^*_{Y,f(z)}$ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in T_{Z,z}$, on voit que

$$\begin{aligned}
(f^*(h^{\natural}_{g_Y} \circ \bar{R}_Y))(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\
&= h(\tilde{R}_Y(f_*\xi_1, f_*\xi_2)f_*\xi_3, f_*\xi_4) - h(\tilde{R}_Y(f_*\xi_1, f_*\xi_2)f_*\xi_4, f_*\xi_3) \\
&= h(f_*(\tilde{R}_Z(\xi_1, \xi_2)\xi_3), f_*\xi_4) - h(f_*(\tilde{R}_Z(\xi_1, \xi_2)\xi_4), f_*\xi_3) \\
&= (f^*h)(\tilde{R}_Z(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4) - (f^*h)(\tilde{R}_Z(\xi_1, \xi_2)\xi_4, \xi_3) \\
&= ((f^*h)^{\natural}_{g_Z} \circ \bar{R}_Z)(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),
\end{aligned}$$

d'où (1.3). La formule (1.4) résulte de (1.3) et de la proposition 4.1 de [4].

Si (Y,g_Y) est à courbure constante et $f : Z \to Y$ est une immersion isométrique totalement géodésique, alors la condition (a) est vraie pour tous $z \in Z$ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_{Z,z}$. Si $Z = Y$ et $f : Y \to Y$ est une isométrie, ou si (Y, g_Y) est un espace symétrique et $f : Z \to Y$ est l'inclusion d'une sous-variété Z totalement géodésique de Y, alors d'après les théorèmes 7.2 et 4.2 de [6, Chap. IV], la condition (b) est vraie pour tous $z \in Z$ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_{Z,z}$. Donc, dans ces trois cas, on a

$$f^* D_{g_Y}(h) = D_{g_Z}(f^* h),$$

pour tout $h \in S^2 \mathscr{T}^*_{Y,f(z)}$, avec $z \in Z$. On a déduit cette dernière égalité, lorsque (Y, g_Y) est à courbure constante, dans [4, § 8], à partir du lemme 8.8 et de la proposition 4.1 de [4].

2. Complexes d'opérateurs différentiels homogènes.

Soit G un groupe de Lie compact et K un sous-groupe de Lie fermé de G. Supposons que G/K soit orientée; soit Ω une forme volume G-invariante qui correspond à l'orientation de G/K. Supposons aussi que G/K soit un espace homogène réductif. Soit τ une représentation unitaire de K dans un espace vectoriel complexe F_0 de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien; alors le fibré vectoriel $G \times_\tau F_0$, muni du produit scalaire hermitien obtenu à partir de celui de F_0, est homogène et unitaire. De plus, l'espace $C^\infty(F)$ des sections de F sur G/K, muni du produit scalaire hermitien obtenu à partir de celui de F et de Ω, est un G-module unitaire. Si $C^\infty(G; F_0)$ est l'espace des fonctions différentiables sur G, à valeurs dans F_0, on écrit

$$C^\infty(G;\tau) = \{f \in C^\infty(G;F_0) \mid f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g), \text{ pour } g \in G, k \in K\}$$

et

$$(\pi(g_0)f)(g) = f(g_0^{-1} g),$$

pour $g, g_0 \in G$, $f \in C^\infty(G;\tau)$. Alors π est une représentation de G sur $C^\infty(G;\tau)$ et l'application

$$A : C^\infty(F) \to C^\infty(G;\tau)$$

définie par

$$(As)(g) = g^{-1} s(gK),$$

pour $s \in C^\infty(F)$ et $g \in G$, est un isomorphisme de G-modules.

Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G. Pour tout $\gamma \in \hat{G}$, soit (π_γ, V_γ) un représentant de γ. Pour $\gamma \in \hat{G}$, l'application

$$\iota_\gamma : V_\gamma \otimes \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, F_0) \to C^\infty(G;\tau)$$

définie par

$$\iota_\gamma(v \otimes \varphi)(g) = \varphi(g^{-1}v),$$

pour tous $v \in V_\gamma$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, F_0)$ et $g \in G$, est injective. L'image $C_\gamma^\infty(F)$ de $A^{-1} \circ \iota_\gamma$ est un sous-G-module de $C^\infty(F)$ de dimension finie qui ne dépend que de γ et qui est isomorphe à la somme directe de $\dim \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, F_0)$-exemplaires de V_γ; de plus $C_\gamma^\infty(F)$ est égal à l'image de l'application

$$V_\gamma \otimes \mathrm{Hom}_G(V_\gamma, C^\infty(F)) \to C^\infty(F),$$

qui envoie $v \otimes \varphi$ sur $\varphi(v)$. Un sous-G-module W de $C_\gamma^\infty(F)$ est donc isomorphe à la somme directe de k exemplaires de V_γ, où k est un entier $\leqslant \dim \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, F_0)$, qu'on appelle la multiplicité de W et qu'on note $\mathrm{mult}\, W$. Si τ est une représentation irréductible de K, d'après le lemme de Schur, la multiplicité $\dim \mathrm{Hom}_K(V_\gamma, F_0)$ de $C_\gamma^\infty(F)$ est égale à la multiplicité de la représentation τ dans une décomposition de V_γ en K-modules irréductibles. Pour $\gamma, \gamma' \in \hat{G}$, avec $\gamma \neq \gamma'$, les sous-modules $C_\gamma^\infty(F)$ et $C_{\gamma'}^\infty(F)$ de $C^\infty(F)$ sont orthogonaux (cf. [10, § 5.3]). La proposition suivante est une conséquence directe du théorème 5.3.6 de [10] (cf. [9, Proposition 2.5]) :

PROPOSITION 2.1. — *La somme directe* $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} C_\gamma^\infty(F)$ *est un sous-module dense de* $C^\infty(F)$.

Si F est un fibré homogène unitaire sur G/K et τ est la représentation unitaire de K sur $F_0 = F_{eK}$, où e est l'élément neutre de G, nous identifions les fibrés homogènes unitaires F et $G \times_\tau F_0$.

Soient τ_1, τ_2, τ_3 des représentations unitaires de K dans des espaces vectoriels complexes F_1^0, F_2^0, F_3^0 de dimension finie, munis de produits scalaires hermitiens; soient F_1, F_2, F_3 les fibrés vectoriels homogènes unitaires sur G/K correspondants à τ_1, τ_2, τ_3 respectivement. Si $P: \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ est un opérateur différentiel linéaire (sur $\mathbf{C}$) homogène, alors $P(C_\gamma^\infty(F_1)) \subset C_\gamma^\infty(F_2)$ et on note $\mathrm{Ker}\, P$ le noyau de $P: C^\infty(F_1) \to C^\infty(F_2)$. On dit que P est à symbole injectif si pour tous

$x \in G/K$ et α non-nul dans l'espace cotangent en x à G/K, le symbole $\sigma_\alpha(P)$: $F_{1,x} \to F_{2,x}$ de P est injectif.

La proposition suivante est une conséquence des résultats du § 5.7 de [10] et notamment de son lemme 5.7.7.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* P : $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ *un opérateur différentiel linéaire homogène sur* G/K. *Alors :*

(i) $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (C^\infty_\gamma(F_1) \cap \operatorname{Ker} P)$ *est dense dans* $\operatorname{Ker} P$;

(ii) $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} P(C^\infty_\gamma(F_1))$ *est dense dans* $P(C^\infty(F_1))$.

PROPOSITION 2.3. — *Soient* P_1 : $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$, P_2 : $\mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3$ *des opérateurs différentiels linéaires homogènes sur* G/K. *Supposons que* P_1 *soit à symbole injectif et que* $P_2 . P_1 = 0$. *Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *le complexe*

$$C^\infty(F_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(F_2) \xrightarrow{P_2} C^\infty(F_3)$$

est exact ;

(ii) *pour tout* $\gamma \in \hat{G}$, *le complexe*

$$C^\infty_\gamma(F_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty_\gamma(F_2) \xrightarrow{P_2} C^\infty_\gamma(F_3)$$

est exact ;

(iii) *pour tout* $\gamma \in \hat{G}$, *on a*

$$\begin{aligned}\operatorname{mult} P_2(C^\infty_\gamma(F_2)) \geqslant \dim \operatorname{Hom}_K(V_\gamma, F_2^0) - \dim \operatorname{Hom}_K(V_\gamma, F_1^0) \\ + \operatorname{mult}(C^\infty_\gamma(F_1) \cap \operatorname{Ker} P_1).\end{aligned}$$

Démonstration. — Si P_1 est à symbole injectif, alors, d'après la théorie des opérateurs différentiels elliptiques, $P_1(C^\infty(F_1))$ est fermé dans $C^\infty(F_2)$. Ainsi, si (ii) est vrai, alors, d'après la proposition 2.2, $\operatorname{Ker} P_2$ est contenu dans l'adhérence de $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (C^\infty_\gamma(F_2) \cap \operatorname{Ker} P_2)$ et donc de $\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} P_1(C^\infty_\gamma(F_1))$, qui est égale à $\operatorname{Im} P$. L'équivalence de (ii) et (iii) provient du fait que $C^\infty_\gamma(F_j)$ est isomorphe à $\dim \operatorname{Hom}_K(V_\gamma, F_j^0)$-exemplaires de V_γ, en tant que G-modules, pour tout $\gamma \in \hat{G}$.

3. Représentations du groupe unitaire.

Soit m un entier $\geqslant 2$. Considérons le groupe unitaire $G = U(m+1)$ et son sous-groupe fermé $K = U(1) \times U(m)$ des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in U(1)$ et $A \in U(m)$, qui sont compacts et connexes. Le groupe T des matrices diagonales de $U(m+1)$ est un tore maximal de G et de K. Pour $0 \leqslant j \leqslant m$, soit λ_j la forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T qui envoie la matrice diagonale $\operatorname{diag}(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathfrak{t}$ sur a_j; on écrit $\alpha_i = \lambda_{i-1} - \lambda_i$, pour $i = 1, \ldots, m$. Alors

$$\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j \mid i \neq j, 0 \leqslant i,j \leqslant m\}$$

est le système de racines de G par rapport à T. Prenons $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ comme système de racines simples de G; le système de racines positives par rapport à S est

$$\Delta^+ = \{\lambda_i - \lambda_j \mid 0 \leqslant i < j \leqslant m\}.$$

Alors le complexifié $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{gl}(m+1,\mathbf{C})$, qui est le complexifié de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(m+1)$ de $U(m+1)$. Pour $0 \leqslant i,j \leqslant m$, soit E_{ij} la matrice $(b_{k\ell})$ de $\mathfrak{gl}(m+1,\mathbf{C})$ avec $b_{ij} = 1$ et $b_{k\ell} = 0$ lorsque $(k,\ell) \neq (i,j)$. Pour $\alpha \in \Delta$, on pose $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbf{C}.E_{ij}$, si $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$. Si

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

alors

$$\mathfrak{gl}(m+1,\mathbf{C}) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{n}^+$$

est la décomposition triangulaire de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{gl}(m+1,\mathbf{C})$ par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$. Soit w_0 l'élément unique du groupe de Weyl de G par rapport à T tel que $w_0(\Delta^+) = -\Delta^+$; on a

$$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{m+1-i}.$$

On prend $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ comme système de racines simples de K. Le poids dominant d'un G-module (resp. K-module) irréductible est une forme linéaire $\lambda : \mathfrak{t} \to \mathbf{C}$ qui s'écrit :

$$\lambda = \sum_{i=0}^{m} f_i\lambda_i ,$$

avec $f_0, \ldots, f_m \in \mathbf{Z}$ et $f_0 \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_m$ (resp. et $f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_m$), et un tel G-module (resp. K-module) est déterminé par ce poids. Ainsi, on identifie $\hat{\mathrm{G}}$ (resp. $\hat{\mathrm{K}}$) avec l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$

$$\left\{\lambda = \sum_{i=0}^{m} f_i\lambda_i \,|\, f_0,\ldots,f_m \in \mathbf{Z},\, f_0 \geqslant f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_m\right\}$$
$$\left(\text{resp. } \left\{\lambda = \sum_{i=0}^{m} f_i\lambda_i \,|\, f_0,\ldots,f_m \in \mathbf{Z},\, f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_m\right\}\right).$$

Nous rappelons le résultat classique suivant (cf. [3] ou [9, Proposition 3.1]) :

PROPOSITION 3.1. — *Un* G-*module irréductible de poids dominant* $\sum_{i=0}^{m} f_i\lambda_i$ *contient un sous*-K-*module irréductible de poids dominant* $\sum_{i=0}^{m} g_i\lambda_i$ *si et seulement si* $\sum_{i=0}^{m} f_i = \sum_{i=0}^{m} g_i$ *et* $f_{i-1} \geqslant g_i \geqslant f_i$, *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant m$; *un tel sous*-K-*module est unique, s'il existe.*

Le groupe $\mathrm{U}(m+1)$ agit sur la partie semi-simple $\mathfrak{su}(m+1)$ de $\mathfrak{u}(m+1)$ par l'action adjointe et donc sur le complexifié $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m+1,\mathbf{C})$ de $\mathfrak{su}(m+1)$. En fait, $\mathfrak{g}$ est un $\mathrm{U}(m+1)$-module irréductible de poids dominant $\lambda_0 - \lambda_m$ et E_{0m} est un élément de $\mathfrak{g}$ de poids $\lambda_0 - \lambda_m$. Ainsi $\Lambda^2\mathfrak{g}$ est un $\mathrm{U}(m+1)$-module; les éléments $v_1 = \mathrm{E}_{0m} \wedge \mathrm{E}_{0,m-1}$ et $v_2 = \mathrm{E}_{0m} \wedge \mathrm{E}_{1m}$ de $\Lambda^2\mathfrak{g}$ sont de poids $\Lambda_1 = 2\lambda_0 - \lambda_{m-1} - \lambda_m$ et $\Lambda_2 = \lambda_0 + \lambda_1 - 2\lambda_m$ respectivement. On vérifie facilement que

$$\mathrm{E}_{ij}.v_1 = \mathrm{E}_{ij}.v_2 = 0,$$

pour $0 \leqslant i < j \leqslant m$; ainsi

$$\mathfrak{n}^+.v_1 = \mathfrak{n}^+.v_2 = 0.$$

Puisque $\mathrm{U}(m+1)$ est connexe, les sous-$\mathrm{U}(m+1)$-modules V_1 et V_2 de $\Lambda^2\mathfrak{g}$ engendrés par v_1 et v_2 respectivement sont irréductibles, et V_j est de poids dominant Λ_j, pour $j = 1,2$.

Rappelons que si $W_1, \ldots, W_k$ sont des $U(m+1)$-modules irréductibles de poids dominants $\omega_1, \ldots, \omega_k$ respectivement, et si $w_i \in W_i$ est un élément de poids ω_i, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, alors l'élément $w_1 \otimes \ldots \otimes w_k$ du $U(m+1)$-module $W_1 \otimes \ldots \otimes W_k$ est de poids $\omega_1 + \cdots + \omega_k$ et, puisque $U(m+1)$ est connexe, engendre un sous-$U(m+1)$-module irréductible de poids dominant $\omega_1 + \cdots + \omega_k$.

4. La conjecture infinitésimale de Blaschke pour les espaces projectifs complexes.

Dans ce paragraphe, nous supposons que X est l'espace projectif $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, avec $m \geqslant 2$, muni de sa métrique riemannienne canonique g. Le groupe unitaire $G = U(m+1)$ agit sur $\mathbf{C}^{m+1}$ et transitivement sur (X,g) par des isométries. Le groupe d'isotropie de l'image canonique x_0 dans $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ du point $(1,0,\ldots,0)$ de $\mathbf{C}^{m+1}$ est égal au sous-groupe $K = U(1) \times U(m)$ de G. On identifie X avec G/K; rappelons que (X,g) est un espace symétrique hermitien et que G agit sur X par des transformations holomorphes. On peut identifier T_{x_0} avec $\mathbf{C}^m$ de telle sorte que la structure presque-complexe de T_{x_0} soit celle de $\mathbf{C}^m$, que l'action de K sur T_{x_0} soit donnée par

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot z = e^{-i\theta} A(z),$$

pour $\theta \in \mathbf{R}$, $A \in U(m)$ et $z \in \mathbf{C}^m$, et que la métrique kählérienne g en x_0 soit déterminée par le produit scalaire hermitien standard de $\mathbf{C}^m$ (cf. [2]).

On note $F_{\mathbf{C}}$ le complexifié d'un fibré vectoriel F sur X. Si T' (resp. T'') est le fibré des champs de vecteurs de type $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) sur X, on a la décomposition G-invariante

$$T_{\mathbf{C}} = T' \oplus T'' \tag{4.1}$$

de $T_{\mathbf{C}}$. Si $T^{(p,q)}$ désigne le fibré des formes de degré (p,q) sur X, la métrique g définit un opérateur de trace

$$\mathrm{Tr}_g : T^{(1,1)} \to \mathbf{C}$$

de noyau $T_0^{(1,1)}$. La décomposition (4.1) et la métrique g nous donnent une décomposition G-invariante du complexifié $S^2T^*_{\mathbf{C}}$ de S^2T^*

$$S^2T^*_{\mathbf{C}} = \{g\} \oplus T_0^{(1,1)} \oplus S^2T^{(1,0)} \oplus S^2T^{(0,1)}, \tag{4.2}$$

où $\{g\}$ est le sous-fibré de $T^{(1,1)}$ en droites complexes engendré par la section g de S^2T^*, et où on identifie $T_0^{(1,1)}$, $S^2T^{(1,0)}$, $S^2T^{(0,1)}$ à des sous-fibrés de $S^2T^*_{\mathbf{C}}$ grâce à la décomposition (4.1). Les fibrés vectoriels qui apparaissent dans (4.1) et (4.2), munis des produits scalaires hermitiens induits par la métrique g, sont tous homogènes et unitaires. De plus, on a :

$$\overline{T_0^{(1,1)}} = T_0^{(1,1)}, \qquad S^2T^{(0,1)} = \overline{S^2T^{(1,0)}}. \tag{4.3}$$

Les K-modules T'_{x_0}, T''_{x_0}, $\{g(x_0)\}$, $T_{0,x_0}^{(1,1)}$, $S^2T_{x_0}^{(1,0)}$, $S^2T_{x_0}^{(0,1)}$ sont irréductibles, et leurs poids dominants sont égaux à $-\lambda_0 + \lambda_1$, $\lambda_0 - \lambda_m$, 0, $\lambda_1 - \lambda_m$, $2\lambda_0 - 2\lambda_m$, $-2\lambda_0 + 2\lambda_1$ respectivement.

On écrit :

$$B_1 = \{g\}, \qquad B_2 = T_0^{(1,1)},$$
$$B_3 = S^2T^{(1,0)}, \qquad B_4 = S^2T^{(0,1)}.$$

A l'aide de la proposition 3.1 et du lemme de Schur, on obtient le résultat suivant de [9, Propositions 3.2 et 3.4] :

PROPOSITION 4.1. — *Pour* $\gamma \in \hat{G}$, *les multiplicités non-nulles de* $C^\infty_\gamma(F)$, *où* F *est l'un des fibrés homogènes qui apparaît dans les décompositions* (4.1) *et* (4.2), *sont données par le tableau :*

γ		$C^\infty_\gamma(T')$	$C^\infty_\gamma(T'')$	$C^\infty_\gamma(B_1)$	$C^\infty_\gamma(B_2)$	$C^\infty_\gamma(B_3)$	$C^\infty_\gamma(B_4)$
$q\lambda_0 - q\lambda_m$	$q = 0$	0	0	1	0	0	0
	$q = 1$	1	1	1	1	0	0
	$q \geqslant 2$	1	1	1	1	1	1
$(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m$	$q = 1$	0	1	0	1	0	0
	$q \geqslant 2$	0	1	0	1	1	0
$q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m$	$q = 1$	1	0	0	1	0	0
	$q \geqslant 2$	1	0	0	1	0	1
$(q+2)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - q\lambda_m$	$q \geqslant 2$	0	0	0	0	1	0
$q\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+2)\lambda_m$	$q \geqslant 2$	0	0	0	0	0	1

Avec cette proposition, on voit que, pour tous $1 \leqslant j \leqslant 4$ et $\gamma \in \hat{G}$, ou bien $C^\infty_\gamma(B_j)$ est nul, ou bien $C^\infty_\gamma(B_j)$ est l'unique sous-G-module irréductible de $C^\infty(B_j)$ de poids dominant γ.

On note $J : T \to T$ la structure presque-complexe canonique de $X = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ et, si $\xi \in T$, on convient que $C\xi = \mathbf{R}\xi \oplus \mathbf{R}J\xi$. La courbure $\tilde{R}$ de X est déterminée par le formulaire suivant qui est classique (cf. [1]) :

LEMME 4.1. — *Soient* $\xi, \eta \in T$ *tels que* $g(\xi,\xi) = g(\eta,\eta) = 1$ *et que* $C\xi \subset (C\eta)^\perp$. *Alors on a :*

$$\tilde{R}(\xi,\eta)\xi = -\eta, \qquad \tilde{R}(\xi,\eta)J\xi = -J\eta, \qquad \tilde{R}(J\xi,\eta)\xi = J\eta,$$
$$\tilde{R}(\xi,J\xi)\xi = -4J\xi, \qquad \tilde{R}(\xi,J\xi)\eta = -2J\eta.$$

Les sous-variétés totalement géodésiques, à courbure constante, de X sont décrites par le théorème 8.1 de [4]. Soit N le sous-fibré de $\Lambda^2T^* \otimes \Lambda^2T^*$, considéré au § 8 de [4], formé des éléments de $\Lambda^2T^* \otimes \Lambda^2T^*$ dont les restrictions aux sous-variétés totalement géodésiques à courbure constante de X sont nulles; ainsi un élément θ de $\Lambda^2T^* \otimes \Lambda^2T^*$ appartient à N si et seulement si :

(*a*) $\theta(\xi,J\xi,\xi,J\xi) = 0$, pour tout $\xi \in T$;

(*b*) $\theta(\xi,\eta,\xi,\eta) = 0$, pour tous $\xi, \eta \in T$ tels que $C\xi \subset (C\eta)^\perp$;

(*c*) $\theta(\xi,\eta,\xi,\zeta) = 0$, pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T$ tels que les sous-espaces $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ soient deux à deux orthogonaux;

(*d*) $\theta(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) = 0$, pour tous η_1, η_2, η_3, $\eta_4 \in T$ tels que $C\eta_i \subset (C\eta_j)^\perp$, si $i \neq j$.

On note N' le sous-fibré formé des éléments de $\Lambda^2T^* \otimes \Lambda^2T^*$, qui s'annulent en restriction à toute sous-variété totalement géodésique de X, isométrique à un espace projectif réel muni de sa métrique canonique à courbure constante 1 ; par conséquent, les éléments θ de N' sont ceux de $\Lambda^2T^* \otimes \Lambda^2T^*$ qui vérifient les conditions (*b*), (*c*) et (*d*). Puisque le groupe d'isométries de (X,g) est transitif et holomorphe, il est clair que N et N' sont des sous-fibrés de rang constant; de plus, on a $N \subset N'$.

LEMME 4.2. — *Soient* $\theta \in N'$ *et* $\xi, \eta \in T$ *tels que* $g(\xi,\xi) = g(\eta,\eta)$ *et que* $\xi \in (C\eta)^\perp$. *Alors on a :*

$$\theta(\xi,\eta,\xi,J\xi) + \theta(\eta,\xi,\eta,J\eta) + \theta(\xi,J\xi,\xi,\eta) + \theta(\eta,J\eta,\eta,\xi) = 0. \tag{4.4}$$

Démonstration. – Soient ξ_1 et $\xi_2 \in T$ tels que $\xi_1 \in (C\xi_2)^\perp$. On a

$$\begin{aligned}\theta(\xi_1,\xi_2+J\xi_2,\xi_1,\xi_2+J\xi_2) = \theta(\xi_1,\xi_2,\xi_1,\xi_2) &+ \theta(\xi_1,J\xi_2,\xi_1,J\xi_2)\\ + \theta(\xi_1,\xi_2,\xi_1,J\xi_2) &+ \theta(\xi_1,J\xi_2,\xi_1,\xi_2).\end{aligned}$$

Puisque $\theta \in N'$, on obtient donc

$$\theta(\xi_1,\xi_2,\xi_1,J\xi_2) + \theta(\xi_1,J\xi_2,\xi_1,\xi_2) = 0. \tag{4.5}$$

Avec notre hypothèse, $\xi - \eta \in C(\xi+\eta)^\perp$, ce qui fait que

$$u(\xi,\eta) = \theta(\xi+\eta,\xi-\eta,\xi+\eta,J\xi-J\eta) + \theta(\xi+\eta,J\xi-J\eta,\xi+\eta,\xi-\eta) = 0,$$

d'après (4.5). On a aussi $u(-\xi,\eta) = 0$ et on vérifie facilement que le membre de gauche de (4.4) est égal à $\frac{1}{4}(u(-\xi,\eta)-u(\xi,\eta))$.

Soit $D_0 : \mathscr{T} \to S^2\mathscr{T}^*$ l'opérateur de Killing de (X,g), qui envoie un champ de vecteurs ξ sur la dérivée de Lie $\mathscr{L}_\xi g$ de g le long de ξ. Puisque X est un espace symétrique, à l'aide de la proposition 1.1 et des remarques qui la suivent, les démonstrations des lemmes 8.9 et 8.11 de [4] nous donnent des versions plus précises de ces lemmes :

LEMME 4.3. – *Si ξ est un champ de vecteurs sur* X, *alors $D_g\mathscr{L}_\xi g$ est une section de* N.

LEMME 4.4. – *Soit h une section de* S^2T^* *sur* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *h est d'intégrale nulle sur toute géodésique fermée de* X;

(ii) *$D_g h$ est une section de* N'.

LEMME 4.5. – *Soit h une section de* S^2T^* *sur* X. *Si h est une dérivée de Lie en restriction à toute droite projective complexe, alors $D_g h$ est une section de* N.

En fait, si h est une section de S^2T^* sur X, d'après le lemme suivant et le théorème 8.3 de [4], la réciproque du lemme 4.5 est vraie et les conditions (i)-(iii) du théorème 8.3 de [4] sont équivalentes à :

(iv) *$D_g h$ est une section de* N.

Si D_1 est l'opérateur différentiel défini au § 5 de [4], alors on a le

LEMME 4.6. — *Soit* h *une section de* S^2T^* *sur* X. *Alors* $D_g h$ *est une section de* N *si et seulement si* $D_1 h = 0$.

Démonstration. — Soit $x \in X$; il existe un champ de vecteurs ξ sur X tel que $(\mathscr{L}_\xi g)(x) = h(x)$. Alors d'après le lemme 5.2 et le théorème 8.2 de [4], et le lemme 4.3, on voit que $(D_1 h)(x) = 0$ si et seulement si $D_g(h - \mathscr{L}_\xi g)(x)$ appartient à N, ou si $(D_g h)(x) \in N$.

Soit

$$D'_g : S^2\mathscr{T}^* \to (\wedge^2\mathscr{T}^* \otimes \wedge^2\mathscr{T}^*)/\mathscr{N}'$$

l'opérateur différentiel d'ordre 2 qui envoie une section h de S^2T^* sur la projection de $D_g h$ dans $(\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T^*)/N'$. D'après le lemme 4.3, on a $D'_g . D_0 = 0$, et le lemme 4.4 nous dit que :

PROPOSITION 4.2. — *La conjecture infinitésimale de Blaschke est vraie pour* $X = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ *si et seulement si le complexe*

$$C^\infty(T) \xrightarrow{D_0} C^\infty(S^2T^*) \xrightarrow{D'_g} C^\infty((\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T^*)/N')$$

est exact.

On écrit

$$F_1 = T_C, \qquad F_2 = S^2T^*_C, \qquad F_3 = ((\wedge^2T^* \otimes \wedge^2T^*)/N')_C,$$

et on note

$$D_0 : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2, \quad D_g : \mathscr{F}_2 \to (\wedge^2\mathscr{T}^* \otimes \wedge^2\mathscr{T}^*)_C, \quad D'_g : \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3$$

les opérateurs différentiels induits par D_0, D_g, D'_g respectivement. Les fibrés vectoriels F_1, F_2, F_3 sur G/K, munis de produits scalaires hermitiens provenant de la métrique g, sont homogènes et unitaires.

Soient $x \in X$ et $\xi, \eta \in T_x$ tels que $g(\xi,\xi) = g(\eta,\eta) = 1$ et que $C\xi \in (C\eta)^\perp$; alors, d'après le lemme 4.1, on a

$$R(\xi,\eta,\xi,\eta) = -1.$$

La formule (1.2) nous dit que, si f est une fonction à valeurs réelles sur X, on a :

$$(4.6) \quad D_g(fg)(\xi,\eta,\xi,\eta) = \frac{1}{2}\{(\text{Hess } f)(\xi,\xi) + (\text{Hess } f)(\eta,\eta)\} + f(x).$$

Rappelons que les valeurs propres du laplacien Δ de $(\mathbf{P}^m(\mathbf{C}),g)$ sont égales à $4q(q+m)$, avec q entier $\geqslant 0$ (cf. [1, Proposition C.III.1]).

LEMME 4.7. — *Toute fonction f sur X à valeurs complexes vérifiant $D'_g(fg) = 0$ est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soient $x \in X$ et $\xi_1, \ldots, \xi_m \in T_x$ tels que

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_m, J\xi_1, \ldots, J\xi_m\}$$

soit une base orthonormée de T_x. Si $D'_g(fg) = 0$, d'après (4.6) on a, pour $1 \leqslant i < j \leqslant m$,

$$0 = D_g(fg)(\xi_i,\xi_j,\xi_i,\xi_j) = \frac{1}{2}\{(\mathrm{Hess}\, f)(\xi_i,\xi_i) + (\mathrm{Hess}\, f)(\xi_j,\xi_j)\} + f(x).$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\{(\mathrm{Hess}\, f)(\xi_i,\xi_i) + (\mathrm{Hess}\, f)(\xi_j,\xi_j)\} + \frac{m(m-1)}{2} f(x) = 0$$

et

$$\frac{(m-1)}{2}\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{Hess}\, f)(\xi_i,\xi_i) + \frac{m(m-1)}{2} f(x) = 0.$$

Il résulte que

$$(\Delta f)(x) = -\sum_{i=1}^{m}\{(\mathrm{Hess}\, f)(\xi_i,\xi_i) + (\mathrm{Hess}\, f)(J\xi_i,J\xi_i)\} = 2mf(x),$$

et

$$\Delta f = 2mf.$$

Comme $2m$ n'est pas une valeur propre de Δ, on voit que $f = 0$.

Puisque le symbole $\sigma_\alpha(D_0) : T_x \to S^2T^*_x$ de D_0 en $\alpha \in T^*_x$, avec $x \in X$ et $\alpha \neq 0$, envoie ξ sur

$$\sigma(D_0)(\alpha \otimes \xi) = \alpha . g^b(\xi),$$

l'opérateur différentiel D_0 est à symbole injectif. D'après la démonstration du lemme 8.8 de [4] et les remarques qui suivent la proposition 1.1, les opérateurs différentiels D_0 et D'_g sont homogènes. Les proposition 4.2 et 2.3 nous donnent :

PROPOSITION 4.3. — *La conjecture infinitésimale de Blaschke est vraie pour* $X = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ *si et seulement si le complexe*

$$C^\infty_\gamma(F_1) \xrightarrow{D_0} C^\infty_\gamma(F_2) \xrightarrow{D'_g} C^\infty_\gamma(F_3)$$

est exact, pour tout $\gamma \in \hat{G}$, *où* $G = U(m+1)$.

Puisque l'espace des champs de Killing de (X,g) est isomorphe à $\mathfrak{su}(m+1)$, on voit que le $U(m+1)$-module $\operatorname{Ker} D_0$ est isomorphe à $\mathfrak{g}$ et donc irréductible de poids dominant $\lambda_0 - \lambda_m$. Ainsi

$$\operatorname{Ker} D_0 \subset C^\infty_{\lambda_0-\lambda_m}(F_1)$$

et

$$\operatorname{mult}\,(C^\infty_{\lambda_0-\lambda_m}(F_1) \cap \operatorname{Ker} D_0) = 1\,.$$

A partir de ceci et des propositions 2.3, 4.1 et 4.3, on vérifie facilement la

PROPOSITION 4.4. — *La conjecture infinitésimale de Blaschke est vraie pour* $X = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ *si et seulement si*

$$D'_g(C^\infty_\gamma(F_2)) \neq 0\,, \tag{4.7}$$

pour $\gamma = 0$, $\lambda_0 - \lambda_m$, $(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m$, $q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_0$, $(q+2)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - q\lambda_m$ *et* $q\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+2)\lambda_m$, *avec* $q \geqslant 2$, *et*

$$\operatorname{mult} D'_g(C^\infty_\gamma(F_2)) \geqslant 2 \tag{4.8}$$

pour $\gamma = q\lambda_0 - q\lambda_m$, *avec* $q \geqslant 2$.

Soit $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ le système de coordonnées de $\mathbf{C}^{m+1}$. L'espace $\mathcal{A}$ des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbf{C}^{m+1}$, dont les restrictions à S^{2m+1} sont invariantes par $U(1)$, est un $U(m+1)$-module; si $f \in \mathcal{A}$, on note $\tilde{f}$ la fonction sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ obtenue à partir de f par restriction à S^{2m+1}, puis passage au quotient. Désignons par $\mathcal{P}_q$ le sous-$U(m+1)$-module des polynômes complexes bihomogènes sur $\mathbf{C}^{m+1}$ de degré q en ζ et de degré q en $\bar{\zeta}$, et par $\mathcal{H}_q$ le sous-U-$(m+1)$-module de $\mathcal{P}_q$ de ceux qui sont harmoniques. Tous ces polynômes sont invariants par $U(1)$; l'espace $\tilde{\mathcal{H}}_q$ des fonctions sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ déduit de $\mathcal{H}_q$ est isomorphe à $\mathcal{H}_q$ en tant que $U(m+1)$-modules. Rappelons que $\tilde{\mathcal{H}}_q$ est l'espace propre du laplacien Δ de $(\mathbf{P}^m(\mathbf{C}),g)$ associé à la valeur propre $4q(q+m)$, pour $q \geqslant 0$, et que $\tilde{\mathscr{H}}_q$ est un $\mathrm{U}(m+1)$-module irréductible (cf. [1, Propositions C.III.1 et C.I.8]). Puisque $\mathscr{P}_q$ est un $\mathrm{U}(m+1)$-module de poids dominant $q\lambda_0 - q\lambda_m$ et que l'élément $(\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q$ de poids $q\lambda_0 - q\lambda_m$ appartient à $\mathscr{H}_q$, on voit que $\mathscr{H}_q$ est de poids dominant $q\lambda_0 - q\lambda_m$. D'autre part, $\mathscr{P}_q$ et $\mathscr{H}_q$ sont stables par la conjugaison de $\mathscr{A}$ qui envoie f sur $\bar{f}$.

L'isomorphisme

$$\varphi : \mathscr{P}_1 \to \mathfrak{gl}(m+1,\mathbf{C}),$$

qui envoie $\zeta_i\bar{\zeta}_j$ sur E_{ji}, pour $0 \leqslant i,j \leqslant m$, induit par restriction un isomorphisme de $\mathrm{U}(m+1)$-modules

$$\varphi : \mathscr{H}_1 \to \mathfrak{sl}(m+1,\mathbf{C}).$$

A l'aide de l'isomorphisme $\wedge^2\varphi$, on identifie $\wedge^2\mathscr{H}_1$ et $\wedge^2\mathfrak{g}$. Pour $q \geqslant 0$, les sous-$\mathrm{U}(m+1)$-modules W_q de $\mathscr{H}_q \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1$ et Z_q de $\mathscr{H}_q \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1 \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1$ engendrés par

$$(\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q \otimes \zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0$$

et

$$(\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0) \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0)$$

respectivement, sont irréductibles et de poids dominant $q\lambda_0 - q\lambda_m + \Lambda_1$ et $q\lambda_0 - q\lambda_m + 2\Lambda_1$ respectivement. Leurs images $\bar{\mathrm{W}}_q$ et $\bar{\mathrm{Z}}_q$ par les conjugaisons de $\mathscr{H}_q \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1$ et de $\mathscr{H}_q \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1 \otimes \wedge^2\mathscr{H}_1$ respectivement, sont des $\mathrm{U}(m+1)$-modules irréductibles. On voit que λ est un poids de W_q (resp. Z_q) si et seulement si $-\lambda$ est un poids de $\bar{\mathrm{W}}_q$ (resp. $\bar{\mathrm{Z}}_q$). Donc le poids dominant de $\bar{\mathrm{W}}_q$ (resp. $\bar{\mathrm{Z}}_q$) est

$$w_0(q\lambda_m - q\lambda_0 - \Lambda_1) = q\lambda_0 - q\lambda_m + \Lambda_2$$
$$(\text{resp. } w_0(q\lambda_m - q\lambda_0 - 2\Lambda_1) = q\lambda_0 - q\lambda_m + 2\Lambda_2).$$

On a $\mathrm{W}_0 = \mathrm{V}_1$, et on peut vérifier facilement que $\bar{\mathrm{V}}_1 = \mathrm{V}_2$.

Pour $q = 0$, la multiplicité de $\mathrm{C}^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(\mathrm{B}_1)$ est égale à 1 et ainsi on voit que

$$\mathrm{C}^\infty_\gamma(\mathrm{B}_1) = \tilde{\mathscr{H}}_0 \cdot g = \mathbf{C}g, \qquad \text{pour} \qquad \gamma = 0.$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, on note β_j la projection de $S^2T^*_{\mathbf{C}}$ sur son sous-fibré B_j, suivant la décomposition (4.2), et

$$\nu_j : \ \mathcal{A} \to C^\infty(B_j)$$

le morphisme de $U(m+1)$-modules qui envoie f sur $\beta_j \operatorname{Hess} \tilde{f}$. Puisque $\mathcal{H}_q$ est irréductible, ou bien $\nu_j(\mathcal{H}_q) = 0$, ou bien

$$\nu_j : \ \mathcal{H}_q \to C^\infty(B_j)$$

est injectif et $\nu_j(\mathcal{H}_q)$ est un sous-$U(m+1)$-module irréductible de $C^\infty(B_j)$ de poids dominant $q\lambda_0 - q\lambda_m$, et donc dans ce cas

$$C^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(B_j) = \nu_j(\mathcal{H}_q),$$

d'après la proposition 4.1. Si f est une fonction différentiable sur X à valeurs complexes, on vérifie facilement que

$$\beta_4 \operatorname{Hess} f = \overline{\beta_3 \operatorname{Hess} \bar{f}};$$

on déduit de cette formule que

$$\nu_4(\mathcal{H}_q) = \overline{\nu_3(\mathcal{H}_q)}. \tag{4.9}$$

Pour $f \in \mathcal{H}_1$, on a

$$\operatorname{Hess} \tilde{f} \in C^\infty(T^{(1,1)}), \tag{4.10}$$

de sorte que

$$\nu_3(\mathcal{H}_1) = \nu_4(\mathcal{H}_1) = 0.$$

Si f est une fonction sur X à valeurs complexes, on a

$$\beta_1 \operatorname{Hess} f = -\frac{\Delta f}{2m} g;$$

il en résulte que

$$\beta_1 \operatorname{Hess} \tilde{f} = -\frac{2q(q+m)}{m} \tilde{f} g,$$

pour $f \in \mathcal{H}_q$, et donc que

$$C^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(B_1) = \nu_1(\mathcal{H}_q) = \tilde{\mathcal{H}}_q \cdot g, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 1.$$

D'après le lemme 4.7, on a donc

$$D'_g C^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(B_1) \neq 0, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 0,$$

et

$$D'_g \nu_1(\mathscr{H}_q) \neq 0, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 1;$$

nous avons donc vérifié (4.7) pour $\gamma = q\lambda_0 - q\lambda_m$, avec $q \geqslant 0$.

Au § 5, nous démontrerons le lemme suivant :

LEMME 4.8.
(i) *On a* $\nu_2((\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q) \neq 0$, *pour tout* $q \geqslant 1$;

(ii) $D'_g(\nu_1((\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q))$ *et* $D'_g(\nu_3((\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q))$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{C}$, *pour tout* $q \geqslant 2$.

Du lemme 4.8 et de (4.9), nous déduisons que

$$\nu_2(\mathscr{H}_q) \neq 0, \qquad\qquad \text{pour} \quad q \geqslant 1,$$

et que

$$\nu_3(\mathscr{H}_q) \neq 0, \quad \nu_4(\mathscr{H}_q) \neq 0, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 2.$$

Avec le lemme 4.8, (ii), pour $q \geqslant 2$, on voit que $D'_g(\nu_1(\mathscr{H}_q))$ et $D'_g(\nu_3(\mathscr{H}_q))$ sont des $U(m+1)$-modules irréductibles de poids dominant $q\lambda_0 - q\lambda_m$; puisque $(\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q$ est un élément de $\mathscr{H}_q$ de poids $q\lambda_0 - q\lambda_m$, l'assertion (ii) du lemme 4.8 implique que

$$D'_g(\nu_1(\mathscr{H}_q)) \cap D'_g(\nu_3(\mathscr{H}_q)) = 0, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 2,$$

et donc que, lorsque $q \geqslant 2$,

$$D'_g(\nu_1(\mathscr{H}_q)) \oplus D'_g(\nu_3(\mathscr{H}_q))$$

est un sous-$U(m+1)$-module de $C^\infty_\gamma(F_3)$ de multiplicité 2, avec $\gamma = q\lambda_0 - q\lambda_m$. Ainsi (4.8) est vraie pour $\gamma = q\lambda_0 - q\lambda_m$, avec $q \geqslant 2$.

Les applications

$$\begin{aligned}
\alpha\ &: \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{A} \to C^\infty(S^2T^*_{\mathbf{C}}),\\
\psi'\ &: \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{A} \to C^\infty(B_3),\\
\psi''&: \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{A} \to C^\infty(B_4),
\end{aligned}$$

qui sont déterminées par

$$\begin{aligned}
\alpha(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2) &= \tilde{f}_0(\tilde{f}_1 \operatorname{Hess} \tilde{f}_2 - \tilde{f}_2 \operatorname{Hess} \tilde{f}_1), \\
\psi'(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2) &= \tilde{f}_1\, \partial \tilde{f}_2 . \partial \tilde{f}_0 - \tilde{f}_2\, \partial \tilde{f}_1 . \partial \tilde{f}_0, \\
\psi''(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2) &= \tilde{f}_1\, \bar{\partial} \tilde{f}_2 . \bar{\partial} \tilde{f}_0 - \tilde{f}_2\, \bar{\partial} \tilde{f}_1 . \bar{\partial} \tilde{f}_0,
\end{aligned}$$

avec $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{A}$, sont des morphismes de $U(m+1)$-modules. Pour $w \in \mathcal{A} \otimes \wedge^2 \mathcal{A}$, on a

$$\alpha(\bar{w}) = \overline{\alpha(w)}, \qquad \psi''(\bar{w}) = \overline{\psi'(w)}. \tag{4.11}$$

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{H}_1$, on a

$$\operatorname{Tr}_g \operatorname{Hess} \tilde{f}_j = -\Delta \tilde{f}_j = -4(m+1)\tilde{f}_j,$$

pour $j = 1,2$, et dans ce cas, d'après (4.10), on voit que $\alpha(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2)$ appartient à $C^\infty(B_2)$, pour tout $f_0 \in \mathcal{A}$. Donc par restriction α induit un morphisme de $U(m+1)$-modules

$$\alpha : \mathcal{H}_q \otimes \wedge^2 \mathcal{H}_1 \to C^\infty(B_2).$$

De (4.11), il résulte que

$$\alpha(\bar{W}_q) = \overline{\alpha(W_q)}, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 0, \tag{4.12}$$

et

$$\psi''(\bar{W}_q) = \overline{\psi'(W_q)}, \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 1. \tag{4.13}$$

Au § 5, nous vérifierons le

LEMME 4.9. — *On a :*

(i) $\alpha(\zeta_m \bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1} \bar{\zeta}_0) \neq 0$;

(ii) $D'_g(\psi'((\zeta_m \bar{\zeta}_0)^q \otimes \zeta_m \bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1} \bar{\zeta}_0)) \neq 0$, *pour tout* $q \geqslant 1$.

Puisque $(\zeta_m \bar{\zeta}_0)^q \otimes \zeta_m \bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1} \bar{\zeta}_0$ appartient à W_q, du lemme 4.9, (4.12) et (4.13), on déduit que $\alpha(W_q)$, $\alpha(\bar{W}_q)$ sont des sous-$U(m+1)$-modules irréductibles de $C^\infty(B_2)$, pour $q \geqslant 0$, et que $\psi'(W_q) \subset C^\infty(B_3)$ et $\psi''(\bar{W}_q) \subset C^\infty(B_4)$ sont des sous-$U(m+1)$-modules irréductibles, pour $q \geqslant 1$. Le poids dominant de $\alpha(W_q)$, pour $q \geqslant 0$, et de $\psi'(W_q)$, pour $q \geqslant 1$, est

$$q\lambda_0 - q\lambda_m + \Lambda_1 = (q+2)\lambda_0 + \lambda_{m-1} - (q+1)\lambda_m,$$

tandis que celui de $\alpha(\bar{W}_q)$, pour $q \geqslant 0$, et de $\psi''(\bar{W}_q)$, pour $q \geqslant 1$, est

$$q\lambda_0 - q\lambda_m + \Lambda_2 = (q+1)\lambda_0 + \lambda_1 - (q+2)\lambda_m .$$

Donc d'après la proposition 4.1, on a, pour $q \geqslant 1$,

$$C^\infty_{(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m}(B_2) = \alpha(W_{q-1}),$$
$$C^\infty_{q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m}(B_2) = \alpha(\bar{W}_{q-1}),$$

et, pour $q \geqslant 2$,

$$C^\infty_{(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m}(B_3) = \psi'(W_{q-1}),$$

$$C^\infty_{q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m}(B_4) = \psi''(\bar{W}_{q-1}).$$

Puisque D'_g est un opérateur différentiel réel, du lemme 4.9, (ii), il résulte que

$$D'_g(\psi'(W_q)) \neq 0, \qquad D'_g(\psi''(\bar{W}_q)) \neq 0,$$

pour $q \geqslant 1$, et que (4.7) est vraie pour $\gamma = (q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m$ et $q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m$, avec $q \geqslant 2$.

Pour $q \geqslant 0$, les applications

$$\mu' : \mathcal{H}_q \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1 \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1 \to C^\infty(B_3),$$
$$\mu'' : \mathcal{H}_q \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1 \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1 \to C^\infty(B_4),$$

qui sont déterminées par

$$\mu'(f_0 \otimes (f_1 \wedge f_2) \otimes (f_3 \wedge f_4))$$
$$= \tilde{f}_0(\tilde{f}_1\tilde{f}_3\, \partial\tilde{f}_2 . \partial\tilde{f}_4 + \tilde{f}_2\tilde{f}_4\, \partial\tilde{f}_1 . \partial\tilde{f}_3 - \tilde{f}_1\tilde{f}_4\, \partial\tilde{f}_2 . \partial\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2\tilde{f}_3\, \partial\tilde{f}_1 . \partial\tilde{f}_4),$$
$$\mu''(f_0 \otimes (f_1 \wedge f_2) \otimes (f_3 \wedge f_4))$$
$$= \tilde{f}_0(\tilde{f}_1\tilde{f}_3\, \bar{\partial}\tilde{f}_2 . \bar{\partial}\tilde{f}_4 + \tilde{f}_2\tilde{f}_4\, \bar{\partial}\tilde{f}_1 . \bar{\partial}\tilde{f}_3 - \tilde{f}_1\tilde{f}_4\, \bar{\partial}\tilde{f}_2 . \bar{\partial}\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2\tilde{f}_3\, \bar{\partial}\tilde{f}_1 . \bar{\partial}\tilde{f}_4),$$

sont des morphismes de $U(m+1)$-modules.
Pour $w \in \mathcal{H}_q \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1 \otimes \Lambda^2\mathcal{H}_1$, on a

$$\mu''(\bar{w}) = \overline{\mu'(w)}$$

et on voit donc que

$$\mu''(\bar{Z}_q) = \overline{\mu'(Z_q)}, \qquad \text{pour } q \geqslant 0. \tag{4.14}$$

Au § 5, nous démontrerons le

LEMME 4.10. — *Pour* $q \geqslant 0$, *on a*

$$D'_g(\mu'((\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0) \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0))) \neq 0 .$$

Pour $q \geqslant 0$, puisque

$$(\zeta_m\bar{\zeta}_0)^q \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0) \otimes (\zeta_m\bar{\zeta}_0 \wedge \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0)$$

appartient à Z_q, avec le lemme 4.10, on voit que $\mu'(Z_q)$ et $\mu''(\bar{Z}_q)$ sont des sous-$U(m+1)$-modules irréductibles de $C^\infty(B_3)$ et de $C^\infty(B_4)$ de poids dominant

$$q\lambda_0 - q\lambda_m + 2\Lambda_1 = (q+4)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - (q+2)\lambda_m$$

et

$$q\lambda_0 - q\lambda_m + 2\Lambda_2 = (q+2)\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+4)\lambda_m ,$$

respectivement; comme D'_g est un opérateur réel, on a aussi

$$D'_g(\mu'(Z_q)) \neq 0, \qquad D'_g(\mu''(\bar{Z}_q)) \neq 0 .$$

Donc d'après la proposition 4.1, pour $q \geqslant 2$, on obtient

$$\begin{aligned} C^\infty_{(q+2)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - q\lambda_m}(B_3) &= \mu'(Z_{q-2}) , \\ C^\infty_{q\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+2)\lambda_m}(B_4) &= \mu''(\bar{Z}_{q-2}) , \end{aligned}$$

et on a vérifié que (4.7) est vraie pour $\gamma = (q+2)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - q\lambda_m$ et $q\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+2)\lambda_m$, avec $q \geqslant 2$.

Ainsi, nous venons de vérifier toutes les conditions données par la proposition 4.4 pour que la conjecture infinitésimale de Blaschke soit vraie pour $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ et nous avons démontré le

THÉORÈME 4.1. — *La conjecture infinitésimale de Blaschke est vraie pour* $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, *avec* $m \geqslant 2$. *Si* h *est une section de* S^2T^* *sur* X, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) h *est d'intégrale nulle sur toute géodésique fermée de* X;

(ii) *il existe un champ de vecteurs* ξ *sur* X *tel que* $h = \mathscr{L}_\xi g$.

De plus, nous avons déterminé tous les sous-G-modules irréductibles de $C^\infty(B_j)$.

Proposition 4.5. — *Les sous-G-modules irréductibles de* $C^\infty(B_j)$, *avec* $1 \leqslant j \leqslant 4$, *sont donnés par le tableau :*

$\gamma \in \hat{G}$		$C^\infty_\gamma(B_1)$	$C^\infty_\gamma(B_2)$	$C^\infty_\gamma(B_3)$	$C^\infty_\gamma(B_4)$
$q\lambda_0 - q\lambda_m$	$q = 0$	$\mathbf{C}g$	0	0	0
	$q = 1$	$\tilde{\mathscr{H}}_1 \cdot g$	$\nu_2(\mathscr{H}_1)$	0	0
	$q \geqslant 2$	$\tilde{\mathscr{H}}_q \cdot g$	$\nu_2(\mathscr{H}_q)$	$\nu_3(\mathscr{H}_q)$	$\nu_4(\mathscr{H}_q)$
$(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m$	$q = 1$	0	$\alpha(V_1)$	0	0
	$q \geqslant 2$	0	$\alpha(W_{q-1})$	$\psi'(W_{q-1})$	0
$q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m$	$q = 1$	0	$\alpha(\bar{V}_1)$	0	0
	$q \geqslant 2$	0	$\alpha(\bar{W}_{q-1})$	0	$\psi''(\bar{W}_{q-1})$
$(q+2)\lambda_0 - 2\lambda_{m-1} - q\lambda_m$	$q \geqslant 2$	0	0	$\mu'(Z_{q-2})$	0
$q\lambda_0 + 2\lambda_1 - (q+2)\lambda_m$	$q \geqslant 2$	0	0	0	$\mu''(\bar{Z}_{q-2})$

Ils sont reliés par les relations (4.9), *pour* $q \geqslant 1$, (4.12), (4.13) *et* (4.14), *avec* $W_0 = V_1$.

On peut obtenir une description explicite de la décomposition de $C^\infty(T_{\mathbf{C}})$ en $U(m+1)$-modules irréductibles, donnée par la proposition 4.1, semblable à celle de la proposition 4.5 pour $C^\infty(S^2T^*_{\mathbf{C}})$. En effet, g^b induit des isomorphismes

$$g^b : T' \to T^{(0,1)}, \qquad g^b : T'' \to T^{(1,0)};$$

les applications

$$\xi' : \mathfrak{A} \to C^\infty(T'), \qquad \xi'' : \mathfrak{A} \to C^\infty(T''),$$

définies par

$$\xi'(f) = g^\#(\bar{\partial}\tilde{f}), \qquad \xi''(f) = g^\#(\partial\tilde{f}),$$

pour $f \in \mathfrak{A}$, sont des morphismes de $U(m+1)$-modules, et on a

$$\xi''(\bar{f}) = \overline{\xi'(f)},$$

pour $f \in \mathfrak{A}$. Alors

$$C^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(T') = \xi'(\mathscr{H}_q),$$

$$C^\infty_{q\lambda_0 - q\lambda_m}(T'') = \xi''(\mathscr{H}_q),$$

pour $q \geqslant 1$, avec

$$\xi''(\mathcal{H}_q) = \overline{\xi'(\mathcal{H}_q)}.$$

Les applications

$$\eta' : \mathcal{A} \otimes \wedge^2 \mathcal{A} \to C^\infty(T'),$$
$$\eta'' : \mathcal{A} \otimes \wedge^2 \mathcal{A} \to C^\infty(T''),$$

qui sont déterminées par

$$\eta'(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2) = \tilde{f}_0(\tilde{f}_1 \xi'(f_2) - \tilde{f}_2 \xi'(f_1)),$$
$$\eta''(f_0 \otimes f_1 \wedge f_2) = \tilde{f}_0(\tilde{f}_1 \xi''(f_2) - \tilde{f}_2 \xi''(f_1)),$$

avec $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{A}$, sont des morphismes de $U(m+1)$-modules. Pour $w \in \mathcal{A} \otimes \wedge^2 \mathcal{A}$, on a

$$\eta''(\bar{w}) = \overline{\eta'(w)}.$$

Alors

$$C^\infty_{(q+1)\lambda_0 - \lambda_{m-1} - q\lambda_m}(T'') = \eta''(W_{q-1}),$$

$$C^\infty_{q\lambda_0 + \lambda_1 - (q+1)\lambda_m}(T') = \eta'(\bar{W}_{q-1}),$$

pour $q \geqslant 1$, avec

$$\eta'(\bar{W}_{q-1}) = \overline{\eta''(W_{q-1})}.$$

5. Preuve des lemmes 4.8, 4.9 et 4.10.

1. Soit $p : \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ la projection naturelle et U l'ouvert de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ égal à

$$p(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^m) = p(\{(\zeta_0, \ldots, \zeta_m) \in \mathbf{C}^{m+1}; \zeta_0 \neq 0\}).$$

On note $z = (z_1, \ldots, z_m)$ la coordonnée holomorphe sur U, donnée par les coordonnées homogènes : on a donc

$$z_j = \widetilde{\zeta_j/\zeta_0},$$

pour $j = 1, \ldots, m$. On pose $z_j = x_j + \sqrt{-1}\,y_j$, avec x_j et y_j à valeurs réelles ; on écrit

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\bar\partial_j = \frac{\partial}{\partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

pour $j = 1, \ldots, m$, et

$$|z| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2)^{1/2}.$$

Nous utiliserons systématiquement dans la suite les conventions habituelles d'écriture de la géométrie kählérienne locale pour $(\mathbf{P}^m(\mathbf{C}), g)$, sur l'ouvert U avec sa coordonnée holomorphe $z = (z_1, \ldots, z_m)$, où g est la métrique kählérienne canonique de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ (cf. [8], par exemple). Dans la suite, si s est une fonction, ou une section d'un fibré sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, on notera encore s sa restriction à U.

Un potentiel kählérien de g sur U est $\frac{1}{2}\log(1+|z|^2)$, ce qui fait que

$$(5.1.1)\qquad g_{i\bar j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \log(1+|z|^2)}{\partial z_i \partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_{ij}}{1+|z|^2} - \frac{\bar z_i z_j}{(1+|z|^2)^2}\right).$$

On en déduit que les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita ∇ de g sont donnés par

$$(5.1.2)\qquad \Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma^{\bar k}_{\bar i \bar j}} = -\,\frac{\bar z_i\,\delta_{kj} + \bar z_j\,\delta_{ki}}{1+|z|^2}.$$

Rappelons encore que la courbure de g est de type (1,1) et qu'on a

$$(5.1.3)\qquad \tilde{\mathrm{R}}(\partial_i, \bar\partial_j)\,\partial_k = -\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial \Gamma^\ell_{ik}}{\partial \bar z_j}\,\partial_\ell.$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{B}_3)$. Nous poserons :

$$\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}(\partial_i, \partial_j), \qquad \mathrm{A}_{\ell;ij} = (\nabla \mathrm{A})(\partial_\ell, \partial_i, \partial_j), \qquad \mathrm{A}_{\bar\ell;ij} = (\nabla \mathrm{A})(\bar\partial_\ell, \partial_i, \partial_j),$$
$$\mathrm{A}_{k\ell;ij} = (\nabla^2 \mathrm{A})(\partial_k, \partial_\ell, \partial_i, \partial_j), \qquad \mathrm{A}_{\bar k\ell;ij} = (\nabla^2 \mathrm{A})(\bar\partial_k, \partial_\ell, \partial_i, \partial_j),$$
$$\mathrm{A}_{k\bar\ell;ij} = (\nabla^2 \mathrm{A})(\partial_k, \bar\partial_\ell, \partial_i, \partial_j), \qquad \mathrm{A}_{\bar k\bar\ell;ij} = (\nabla^2 \mathrm{A})(\bar\partial_k, \bar\partial_\ell, \partial_i, \partial_j).$$

Avec la formule (2.23) de [4], on obtient les relations de commutation suivantes :

$$\text{(5.1.4)} \qquad A_{k\ell;ij} = A_{\ell k;ij},$$

$$\text{(5.1.5)} \qquad A_{\bar{k}\bar{\ell};ij} = A_{\bar{\ell}\bar{k};ij},$$

$$\text{(5.1.6)} \qquad A_{\ell\bar{k};ij} - A_{\bar{k}\ell;ij} = \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial \Gamma^r_{\ell j}}{\partial \bar{z}_k} A_{ri} + \frac{\partial \Gamma^r_{\ell i}}{\partial \bar{z}_k} A_{rj} \right).$$

Les relations (5.1.4) et (5.1.5) proviennent du fait que la courbure est de type (1,1), tandis que (5.1.6) découle immédiatement de (5.1.3). Par ailleurs, nous avons

$$\text{(5.1.7)} \qquad A_{\ell;ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial z_\ell} - \sum_{r=1}^{m} (A_{rj}\Gamma^r_{\ell i} + A_{ri}\Gamma^r_{\ell j}),$$

$$\text{(5.1.8)} \qquad A_{\bar{\ell};ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \bar{z}_\ell},$$

$$\text{(5.1.9)} \qquad A_{k\ell;ij} = \frac{\partial A_{\ell;ij}}{\partial z_k} - \sum_{r=1}^{m} (A_{r;ij}\Gamma^r_{k\ell} + A_{\ell;rj}\Gamma^r_{ki} + A_{\ell;ir}\Gamma^r_{kj}),$$

$$\text{(5.1.10)} \qquad A_{\bar{k}\ell;ij} = \frac{\partial A_{\ell;ij}}{\partial \bar{z}_k},$$

$$\text{(5.1.11)} \qquad A_{\bar{k}\bar{\ell};ij} = \frac{\partial A_{\bar{\ell};ij}}{\partial \bar{z}_k} - \overline{\Gamma^r_{k\ell}} A_{\bar{r};ij}.$$

Introduisons la courbe complexe Z de U, d'équations

$$z_1 = \cdots = z_{m-1} = 0.$$

Notons $\mathscr{I}(Z)^r$ l'espace des fonctions $u : U \to \mathbf{C}$ qui s'annulent à l'ordre $r-1$ sur Z (i.e. telles que $j_{r-1}(u)|_Z = 0$); on écrit $\mathscr{I}(Z) = \mathscr{I}(Z)^1$. Par ailleurs, si u et v sont deux fonctions de U dans $\mathbf{C}$, l'égalité

$$u = v + \mathscr{I}(Z)^r$$

signifiera que $u - v \in \mathscr{I}(Z)^r$. A titre d'exemple, les seuls symboles de Christoffel Γ^i_{jk} à ne pas être dans $\mathscr{I}(Z)$ sont les Γ^i_{im}, d'après (5.1.2). Remarquons encore que, le long de Z, on a

$$\text{(5.1.12)} \qquad \mathbf{C}\frac{\partial}{\partial x_i} \subset \left(\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\perp}, \qquad \text{si } i \neq j.$$

Soit $A \in C^\infty(B_3)$. On vérifie facilement, à l'aide du lemme 4.1, de (5.1.12), (5.1.4), (5.1.5) et de la formule (1.1), que

$$
\begin{aligned}
(5.1.13)\quad D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)
&= \frac{1}{2}\Big\{A_{m-1,m-1;mm} + A_{m-1,\overline{m-1};mm} + A_{\overline{m-1},m-1;mm} \\
&+ A_{\overline{m-1},\overline{m-1};mm} + A_{mm;m-1,m-1} + A_{m\bar{m};m-1,m-1} \\
&+ A_{\bar{m}m;m-1,m-1} + A_{\bar{m}\bar{m};m-1,m-1} - 2A_{mm-1;m-1,m} \\
&- 2A_{\overline{m-1},\bar{m};m-1,m} - A_{m-1,\bar{m};m-1,m} - A_{\bar{m},m-1;m-1,m} \\
&- A_{\overline{m-1},m;m-1,m} - A_{m\overline{m-1};m-1,m} \\
&+ \frac{A_{m-1,m-1} + A_{mm}(1+|z|^2)}{(1+|z|^2)^2}\Big\} + \mathscr{I}(Z).
\end{aligned}
$$

Nous poserons encore

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}(A) = \frac{1}{i}\Big\{&D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{m-1}}\right) \\
&+ D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)\Big\} \\
+ \frac{1+|z|^2}{i}\Big\{&D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_m}\right) \\
&+ D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_m}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Un calcul tout à fait similaire à celui aboutissant à (5.1.13) nous donne

$$
\begin{aligned}
(5.1.14)\quad \mathscr{C}(A) &= A_{\overline{m-1},m-1;mm-1} + A_{m-1,\overline{m-1};mm-1} + 2A_{\overline{m-1},\overline{m-1};mm-1} \\
&- A_{m\overline{m-1};m-1,m-1} - A_{\overline{m-1},m;m-1,m-1} - 2A_{\bar{m}\overline{m-1};m-1,m-1} \\
&+ (1+|z|^2)\{A_{\bar{m}m;mm-1} + A_{m\bar{m};mm-1} + 2A_{\bar{m}\bar{m};mm-1} \\
&- A_{m-1,\bar{m};mm} - A_{\bar{m}m-1;mm} - 2A_{\bar{m}\overline{m-1};mm}\} \\
&+ 2\frac{A_{m-1,m}}{1+|z|^2} + \mathscr{I}(Z).
\end{aligned}
$$

LEMME 5.1.1. — *Soit* $A \in C^\infty(B_3)$ *tel que* $D_g A \in C^\infty(N')$. *Dans ces conditions, les membres de gauche respectifs de* (5.1.13) *et* (5.1.14) *s'annulent sur* Z.

Démonstration. – Avec (5.1.12), $D_g A\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ est dans $\mathscr{I}(Z)$, par définition. Posons

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \Big/ \left\| \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \right\|, \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial x_m} \Big/ \left\| \frac{\partial}{\partial x_m} \right\|.$$

On vérifie alors que $\mathscr{C}(A)|_Z$ est égal au membre de gauche de (4.4), avec $\theta = D_g A$, divisé par $i(1+|z|^2)^{5/2}$; sa nullité résulte du lemme 4.2.

2. Nous posons dans la suite $f = \zeta_m \bar{\zeta}_0$ et $f' = \zeta_{m-1}\bar{\zeta}_0$; on a respectivement

$$\bar{f}^q = \left(\frac{z_m}{1+|z|^2}\right)^q, \qquad \bar{f}'^q = \left(\frac{z_{m-1}}{1+|z|^2}\right)^q$$

sur U, pour tout entier $q \geqslant 0$. D'après (5.1.1), on a

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{z_k}{1+|z|^2}\right) = 2 g_{j\bar{k}}, \tag{5.2.1}$$

et ainsi

$$\frac{\partial \bar{f}^q}{\partial z_j} = 2q \bar{f}^{q-1} g_{j\bar{m}}. \tag{5.2.2}$$

LEMME 5.2.1. – *On a* $\nu_2(f^q) \neq 0$, *pour tout* $q \geqslant 1$.

Démonstration. – D'après (5.2.2), on a

$$(\text{Hess}\, \bar{f}^q)(\partial_{m-1}, \bar{\partial}_{m-1}) = -q \frac{\bar{f}^q}{1+|z|^2} + \mathscr{I}(Z). \tag{5.2.3}$$

Comme $\bar{f}^q$ est une fonction propre de Δ, associée à la valeur propre $4q(q+m)$, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_2(\bar{f}^q)(\partial_{m-1}, \bar{\partial}_{m-1}) &= (\text{Hess}\, \bar{f}^q)(\partial_{m-1}, \bar{\partial}_{m-1}) + \frac{1}{2m}(\Delta \bar{f}^q) g_{m-1,\overline{m-1}} \\ &= \frac{q^2}{m} \frac{\bar{f}^q}{1+|z|^2} + \mathscr{I}(Z). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que

$$(5.2.4)\quad \mathrm{Hess}\,(\tilde{f}^q)(\partial_m, \bar{\partial}_m) = -q(q+1)\tilde{f}^q \frac{(1+|z_1|^2+\cdots+|z_{m-1}|^2)}{(1+|z|^2)^2}$$

et que

$$\mathrm{Hess}\,(\tilde{f}')(\partial_m, \bar{\partial}_m) = \tilde{f}'\left(2|\tilde{f}|^2 - \frac{1}{1+|z|^2}\right);$$

on en déduit que

$$(\tilde{f}\,\mathrm{Hess}\,\tilde{f}' - \tilde{f}'\,\mathrm{Hess}\,\tilde{f})(\partial_m, \bar{\partial}_m) = \frac{\tilde{f}\tilde{f}'}{1+|z|^2}$$

et nous obtenons ainsi le

LEMME 5.2.2. — *On a* $\alpha(f \wedge f') \neq 0$.

3. Posons $A = \nu_3 f^q$, avec $q \geqslant 2$. Avec (5.2.2), on a

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}^q}{\partial z_j\, \partial z_k} = 4q(q-1)\tilde{f}^{q-2} g_{j\bar{m}} g_{k\bar{m}} - \frac{q\tilde{f}^{q-1}}{(1+|z|^2)^2}\{\delta_{jm}\bar{z}_k + \delta_{km}\bar{z}_j - 2\tilde{f}\bar{z}_j\bar{z}_k\};$$

par ailleurs, on a, d'après (5.1.2),

$$\sum_{r=1}^{m} \Gamma^r_{jk} \frac{\partial \tilde{f}^q}{\partial z_r} = -2q\frac{\tilde{f}^{q-1}}{1+|z|^2}(\bar{z}_k g_{j\bar{m}} + \bar{z}_j g_{k\bar{m}}),$$

ce qui fait que

$$(5.3.1)\qquad A_{jk} = 4q(q-1)\tilde{f}^{q-2} g_{j\bar{m}} g_{k\bar{m}}.$$

Posons $a = q(q-1)z_m^{q-2}(1+|z|^2)^{-q-3}$. On déduit alors facilement de (5.3.1), (5.1.1), (5.1.2), (5.1.7) et (5.1.8) le

LEMME 5.3.1. — *Les quantités*

$$A_{\bar{m};m-1,m-1}, \qquad A_{m;m-1,m-1}, \qquad A_{m-1;m-1,m},$$
$$A_{m;m-1,m} + (q-2)\bar{z}_{m-1}a, \qquad A_{m-1;mm} + (q-2)\bar{z}_{m-1}a,$$
$$A_{\bar{m};m-1,m} - (q+2)z_m^2\bar{z}_{m-1}a, \qquad A_{\overline{m-1};mm} + (q+2-2(1+|z|^2))z_{m-1}a,$$
$$A_{\overline{m-1};m-1,m} + z_m(1+|z|^2)a$$

sont dans $\mathscr{I}(Z)^2$.

A partir du lemme 5.3.1, de (5.3.1), (5.1.2), (5.1.6), (5.1.9), (5.1.10), (5.1.11), on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{m-1,m-1;mm} &= \mathrm{A}_{\overline{m-1},\overline{m-1};mm} = \mathrm{A}_{mm;m-1,m-1} \\
&= \mathrm{A}_{\bar{m}m;m-1,m-1} = \mathrm{A}_{m\bar{m};m-1,m-1} \\
&= \mathrm{A}_{m-1,m;m-1,m} = \mathrm{A}_{\bar{m}m-1;m-1,m} \\
&= \mathrm{A}_{m-1,\bar{m};m-1,m} = \mathrm{A}_{\bar{m}\bar{m};m-1,m-1} = 0\,, \\
\mathrm{A}_{\overline{m-1},m-1;mm} &= -\,(q-2)a\,, \\
\mathrm{A}_{m-1,\overline{m-1};mm} &= -\,qa\,, \\
\mathrm{A}_{\overline{m-1},\bar{m};m-1,m} &= (q+1)z_m^2 a\,, \\
\mathrm{A}_{\overline{m-1},m;m-1,m} &= -\,(q-2)a\,, \\
\mathrm{A}_{m\overline{m-1};m-1,m} &= -\,(q-1)a\,,
\end{aligned}$$

sur Z. Avec les formules ci-dessus, (5.3.1) et (5.1.13), on obtient

$$(5.3.2) \quad (\mathrm{D}_g\mathrm{A})\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) = -\,(q+1)z_m^2 a + \mathscr{I}(\mathrm{Z})\,.$$

4. Si u est une fonction sur $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, à valeurs complexes, posons

$$\mathscr{L}(u) = \mathrm{D}_g(ug)\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right).$$

En utilisant (1.2), (5.1.1), (5.1.12) et le lemme 4.1, on obtient alors

$$(5.4.1) \quad \mathscr{L}(u) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\text{Hess}\, u)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{m-1}}\right)}{(1+|z_m|^2)^2} + \frac{(\text{Hess}\, u)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}, \dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)}{1+|z_m|^2}\right\} + \frac{u}{(1+|z_m|^2)^3} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})\,.$$

LEMME 5.4.1. — *Lorsque* $q \geqslant 2$, *nous avons*

$$\mathscr{L}(\bar{f}^q) = \frac{\mathrm{Q}(z_m)}{(1+|z_m|^2)^{q+3}} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})\,,$$

où Q *est un polynôme de degré* $q+2$.

Démonstration. — D'après (5.3.1), $(\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\partial_{m-1}, \partial_{m-1})$ est dans $\mathscr{I}(\mathrm{Z})$. On vérifie facilement aussi que $(\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\bar{\partial}_{m-1}, \bar{\partial}_{m-1})$ est dans $\mathscr{I}(\mathrm{Z})$. Il résulte maintenant de (5.4.1) que

(5.4.2)
$$\mathscr{L}(\tilde{f}^q) = \frac{(\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\partial_m, \partial_m) + 2(\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\partial_m, \bar{\partial}_m) + (\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\bar{\partial}_m, \bar{\partial}_m)}{2(1+|z|^2)}$$
$$+ \frac{(\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\partial_{m-1}, \bar{\partial}_{m-1})}{(1+|z|^2)^2} + \frac{z_m^q}{(1+|z|^2)^{q+3}} + \mathscr{I}(\mathrm{Z}).$$

De (5.3.1), on déduit que

$$(5.4.3) \quad (\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\partial_m, \partial_m) = \mathrm{A}_{mm} = \frac{q(q-1)\tilde{f}^{q-2}}{(1+|z|^2)^4} + \mathscr{I}(\mathrm{Z}).$$

Par ailleurs, on a

$$(5.4.4) \qquad (\mathrm{Hess}\, \tilde{f}^q)(\bar{\partial}_m, \bar{\partial}_m) = q(q-1)\tilde{f}^{q+2}.$$

Avec (5.2.3), (5.2.4) et les formules (5.4.2) à (5.4.4), on obtient

$$\mathscr{L}(\tilde{f}^q) = \frac{q(q-1)z_m^{q-2} - 2(q^2+2q-1)z_m^q + q(q-1)z_m^{q+2}}{2(1+|z|^2)^{q+3}} + \mathscr{I}(\mathrm{Z}),$$

d'où le lemme.

On retrouve avec le lemme 5.4.1 le fait que $\mathrm{D}'_g(\tilde{f}^q g) \neq 0$, ce que nous avions déjà démontré avec le lemme 4.7.

PROPOSITION 5.4.1. — *Lorsque* $q \geqslant 2$, $\mathrm{D}'_g(\mathrm{v}_1(f^q))$ *et* $\mathrm{D}'_g(\mathrm{v}_3(f^q))$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{C}$.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{D}'_g(\mathrm{v}_3(f^q)) = c\mathrm{D}'_g(\mathrm{v}_1(f^q))$, où $c \in \mathbf{C}$. On aurait alors

$$(5.4.5) \quad (\mathrm{D}_g \mathrm{A})\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)\Big|_{\mathrm{Z}} = c\mathscr{L}(\tilde{f}^q)|_{\mathrm{Z}}.$$

Cette dernière égalité est manifestement impossible. En effet, on sait, d'après (5.3.2), que le membre de gauche de (5.4.5) est de la forme

$$\frac{\mathrm{R}(z_m)}{(1+|z_m|^2)^{q+3}},$$

où R est un polynôme de degré q; mais le lemme 5.4.1 exige que ce polynôme soit aussi de degré $q+2$, d'où la contradiction.

5. Posons :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{1}{2}\mu'\{f^q\otimes(f\wedge f')\otimes(f\wedge f')\} \\ &= \bar{f}^q\{\bar{f}^2\,\partial\bar{f}'\otimes\partial\bar{f}'+\bar{f}'^2\,\partial\bar{f}\otimes\partial\bar{f}-\bar{f}\bar{f}'(\partial\bar{f}\otimes\partial\bar{f}'+\partial\bar{f}'\otimes\partial\bar{f})\}, \end{aligned}$$

avec q entier $\geqslant 0$. D'après (5.2.1), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{jk} = 4\bar{f}^q\{\bar{f}^2 g_{j\overline{m-1}}g_{k\overline{m-1}} + \bar{f}'^2 g_{j\bar{m}}g_{k\bar{m}} \\ -\bar{f}\bar{f}'(g_{j\bar{m}}g_{k\overline{m-1}} + g_{j\overline{m-1}}g_{k\bar{m}})\}. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Nous déduisons de (5.5.1) et (5.1.1) que

$$\mathrm{B}_{m-1,m-1} = \frac{\bar{f}^{q+2}}{(1+|z|^2)^2} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3, \tag{5.5.2}$$

$$\mathrm{B}_{m-1,m} = -\frac{\bar{f}^{q+1}\bar{f}'}{(1+|z|^2)^2} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3, \tag{5.5.3}$$

et que

$$\mathrm{B}_{mm} = \frac{\bar{f}^q\bar{f}'^2}{(1+|z|^2)^2} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3. \tag{5.5.4}$$

Avec (5.5.2), (5.5.3), (5.5.4), (5.1.2), (5.1.7) et (5.1.8), nous obtenons le

LEMME 5.5.1. — *Les quantités*

$$\mathrm{B}_{\overline{m-1};m-1,m}, \qquad \mathrm{B}_{\overline{m-1};mm}, \qquad \mathrm{B}_{m-1;m-1,m} + \frac{\bar{f}^{q+1}}{(1+|z|^2)^4},$$

$$\mathrm{B}_{m;m-1,m} + \frac{(q+1)\bar{f}^q\bar{f}'}{(1+|z|^2)^4}, \quad \mathrm{B}_{m-1;mm} - \frac{2\bar{f}^q\bar{f}'}{(1+|z|^2)^4}, \quad \mathrm{B}_{m;m-1,m-1} - \frac{(q+2)\bar{f}^{q+1}}{(1+|z|^2)^4},$$

$$\mathrm{B}_{\bar{m};m-1,m-1} + \frac{(q+4)\bar{f}^{q+3}}{(1+|z|^2)^2}, \qquad \mathrm{B}_{\bar{m};m-1,m} - \frac{(q+4)\bar{f}^{q+2}\bar{f}'}{(1+|z|^2)^2}$$

sont dans $\mathscr{I}(\mathrm{Z})^2$.

Posons maintenant

$$b = \frac{\bar{f}^q}{(1+|z|^2)^6}.$$

Il résulte du lemme 5.5.1, de (5.1.2), (5.1.9), (5.1.10) et (5.1.11) que

$$\mathrm{B}_{\overline{m-1},m-1;mm} = \mathrm{B}_{\overline{m-1},\overline{m-1};mm} = \mathrm{B}_{\overline{m-1}\,\bar{m};m-1,m} = \mathrm{B}_{\overline{m-1},m;m-1,m} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_{\bar{m}m-1;m-1,m} = b(q+5)z_m^2, \quad \mathrm{B}_{m-1,m;m-1,m} = -b(q+1), \\ &\mathrm{B}_{m-1,m-1;mm} = 2b, \\ &\mathrm{B}_{mm;m-1,m-1} = b(q+2)(q+1), \\ &\mathrm{B}_{\bar{m}m;m-1,m-1} = -b(q+2)(q+5)z_m^2, \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{B}_{\bar{m}\bar{m};m-1,m-1} = b(q+3)(q+4)z_m^4,$$

sur Z. Avec (5.1.2) et la relation de commutation (5.1.6), ces dernières formules nous donnent

$$\mathrm{B}_{m-1,\overline{m-1};mm} = \mathrm{B}_{m\overline{m-1};m-1,m} = 0,$$
$$\mathrm{B}_{m-1,\bar{m};m-1,m} = b(q+4)z_m^2,$$

et

$$\mathrm{B}_{m\bar{m};m-1,m-1} = -\,b(q+3)(q+4)z_m^2,$$

sur Z. Il résulte des formules ci-dessus, de (5.5.2), (5.5.4) et de (5.1.13) que

$$\text{(5.5.5)}\quad \mathrm{D}_g\mathrm{B}\left(\frac{\partial}{\partial x_{m-1}},\frac{\partial}{\partial x_m},\frac{\partial}{\partial x_{m-1}},\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$$
$$= \frac{b}{2}\,\{(q+2)(q+3) - 2(q+3)(q+5)z_m^2 + (q+3)(q+4)z_m^4\} + \mathscr{I}(\mathrm{Z}).$$

Du fait que le membre de droite de (5.5.5) n'est pas dans $\mathscr{I}(\mathrm{Z})$, il découle du lemme 5.1.1 que

$$\text{(5.5.6)}\qquad \mathrm{D}'_g\mu'(f^q\otimes(f\wedge f')\otimes(f\wedge f')) \neq 0,$$

pour tout entier $q \geqslant 0$.

6. Considérons, pour $q \geqslant 1$,

$$\mathrm{C} = \psi'(f^q\otimes f\wedge f') = q(\tilde{f}^q\,\partial\tilde{f}.\partial\tilde{f}' - \tilde{f}^{q-1}\tilde{f}'(\partial\tilde{f})^2).$$

Avec (5.2.1), on trouve que

$$\text{(5.6.1)}\quad \mathrm{C}_{jk} = 4q\{\tilde{f}^q(g_{j\overline{m-1}}g_{k\bar{m}} + g_{k\overline{m-1}}g_{j\bar{m}}) - 2\tilde{f}'\tilde{f}^{q-1}g_{j\bar{m}}g_{k\bar{m}}\}.$$

En particulier, il découle de (5.6.1) et (5.1.1) que

$$\text{(5.6.2)}\qquad \mathrm{C}_{m-1,m-1} = -\,\frac{2q\tilde{f}^{q+1}\bar{\tilde{f}}'}{1+|z|^2} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3,$$

$$\text{(5.6.3)}\quad \mathrm{C}_{m-1,m} = \frac{q\tilde{f}^q(1+|z_1|^2 + \cdots + |z_{m-2}|^2 + 2|z_{m-1}|^2)}{(1+|z|^2)^3} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3$$

et que

$$\text{(5.6.4)}\qquad \mathrm{C}_{mm} = -\,2q\,\frac{\tilde{f}'\tilde{f}^{q-1}}{(1+|z|^2)^3} + \mathscr{I}(\mathrm{Z})^3.$$

A l'aide de (5.1.2), (5.1.7), (5.1.8), (5.6.2), (5.6.3) et (5.6.4), on a le

LEMME 5.6.1. — *Les expressions*

$$
\begin{array}{ll}
C_{m-1;m-1,m} & + \dfrac{q(q-2)\tilde{f}^{q}\bar{\tilde{f}}'}{(1+|z|^2)^3}, \\
C_{m-1;mm} & + \dfrac{2q\tilde{f}^{q-1}}{(1+|z|^2)^5}, \\
C_{m;m-1,m} & - \dfrac{q^2\tilde{f}^{q-1}}{(1+|z|^2)^5}, \\
C_{m;m-1,m-1} & + \dfrac{2q^2\tilde{f}^{q}\bar{\tilde{f}}'}{(1+|z|^2)^3}, \\
C_{\overline{m-1};m-1,m} & - \dfrac{q\tilde{f}^{q}\tilde{f}'(2|z|^2-q-1)}{(1+|z|^2)^3}, \\
C_{\overline{m-1};m-1,m-1} & + \dfrac{2q\tilde{f}^{q+1}}{(1+|z|^2)^2}, \\
C_{\bar{m};mm-1} & + \dfrac{q(q+3)\tilde{f}^{q+1}}{(1+|z|^2)^3}
\end{array}
$$

et $C_{\overline{m-1};mm}$ *sont dans* $\mathscr{I}(Z)^2$.

Soient $c = \dfrac{q\tilde{f}^q}{(1+|z|^2)^4}$ et $c' = \dfrac{c}{1+|z|^2}\cdot$ Avec le lemme 5.6.1, (5.1.2), (5.1.6), (5.1.10) et (5.1.11), nous obtenons

$$
\begin{array}{ll}
C_{\overline{m-1},m-1;mm-1} & = -\,(q-2)c, \\
C_{m-1,\overline{m-1};mm-1} & = -\,(q+1)c, \\
C_{\overline{m-1},m;m-1,m-1} & = -\,2qc, \\
C_{m\overline{m-1};m-1,m-1} & = -\,2(q+1)c, \\
C_{\bar{m}\overline{m-1};m-1,m-1} & = 2(q+2)z_m^2 c, \\
C_{\overline{m-1},\overline{m-1};mm-1} & = 0, \\
C_{\bar{m}m;mm-1} & = -\,q(q+4)c', \\
C_{m\bar{m};mm-1} & = -\,(q+1)(q+3)c', \\
C_{\bar{m}m-1;mm} & = 2(q+4)c', \\
C_{m-1,\bar{m};mm} & = 2(q+3)c', \\
C_{\bar{m}\overline{m-1};mm} & = 0, \\
C_{\bar{m}\bar{m};mm-1} & = (q+3)(q+2)z_m^2 c',
\end{array}
$$

sur Z. Maintenant, en utilisant (5.1.14), (5.6.3) et les formules ci-dessus, on voit que

$$(5.6.4) \quad \mathscr{C}(\mathrm{C}) = (-2(q+1)(q-6)+2(q+1)(q+2)z_m^2)c + \mathscr{I}(\mathrm{Z}).$$

Comme le membre de droite de (5.6.4) n'est pas dans $\mathscr{I}(\mathrm{Z})$, lorsque $q > 0$, le lemme 5.1.1 entraîne la

Proposition 5.6.1. — *On a* $\mathrm{D}'_g\psi'(f^q \otimes f \wedge f') \neq 0$, *pour tout entier* $q \geqslant 1$.

Finalement, le lemme 4.8 est donné par le lemme 5.2.1 et la proposition 5.4.1. Le lemme 4.9 résulte du lemme 5.2.2 et de la proposition 5.6.1, tandis que (5.5.6) est l'assertion du lemme 4.10.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[2] A. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 93, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[3] H. Boerner, *Representations of groups*, North-Holland, Amsterdam, 1963.

[4] J. Gasqui et H. Goldschmidt, Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques. I, *Advances in Math.*, 48 (1983), 205-285.

[5] J. Gasqui et H. Goldschmidt, Déformations infinitésimales des structures conformes plates, *Progress in Math.*, Birkäuser (à paraître).

[6] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, London, 1962.

[7] R. Michel, Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke, *Bull. Soc. Math. France*, 101 (1973), 17-69.

[8] J. Morrow et K. Kodaira, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

[9] C. Tsukamoto, Infinitesimal Blaschke conjectures on projective spaces, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, (4) 14 (1981), 339-356.

[10] N. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1983
révisé le 13 juin 1983.

J. Gasqui,
Université Scientifique
et Médicale de Grenoble
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS
Institut Fourier
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.

H. Goldschmidt,
Department of Mathematics
Columbia University
New York, N.Y. 10027 (U.S.A.).