Дифференциальная геометрия, лекции для студентов III курса, осенний семестр 2000–2001 уч.г.

С.М.Гусейн–Заде

Лекции будут сопровождаться некоторыми задачами. Помимо этого в течение семестра будет сформирован и предложен (по частям) некоторый список задач, решение которых включается в экзамен (наряду с теоретическими вопросами). Многие задачи из списка будут помечены звездочками внизу или вверху. Задачи, помеченные звездочкой вверху, предназначены (и обязательны) для тех, кто хочет получить "отлично". Задачи, помеченные звездочкой внизу, абсолютно обязательны для всех и неумение решать хотя бы одну из них может служить поводом для неудовлетворительной оценки. Неумение решать задачу с двумя звездочками внизу автоматически влечет неудовлетворительную оценку. То же самое относится к некоторым утверждениям, включаемым в лекции без доказательств.

Лекция 1.

В прошлом году в курсе классической дифференциальной геометрии вы в основном изучали кривые и поверхности на плоскости и в (трехмерном) пространстве. Обобщением этих понятий является понятие (гладкого) многообразия, которое вместе с различными структурами на нем будет основным объектом изучения в курсе. Как известно из анализа, порядок гладкости (скажем, функции) может быть различным. Функция может быть класса гладкости C^1, C^k с $k < \infty$, C^∞, … В дифференциальной геометрии обычно принято считать, что все рассматриваемые объекты (многообразия, функции, отображения, тензорные поля, …) имеют столь высокий порядок гладкости, сколь необходимо. Поэтому в дальнейшем мы, не оговариваясь каждый раз, будем предполагать, что все рассматриваемые объекты достаточно гладкие, например, класса C^∞. Чтобы не ограничивать себя в выборе терминов, мы иногда будем использовать разные названия для одних и тех же объектов. Например, термины "область", "открытая область"и "открытое множество"будут синонимами.

Понятие многообразия является обобщением (в действительности — не слишком далеким) понятия (гладкого) подмногообразия аффинного пространства. Поэтому опишем это понятие (или напомним его в подходящем для нас виде).

Есть два возможных описания подмногообразия аффинного пространства. Так, кривая в (обычном трехмерном) пространстве может быть задана либо двумя уравнениями, либо с помощью параметризации (частный случай параметризации — задание кривой в пространстве как графика отображения прямой в плоскость). В действительности (при определенных дополнительных условиях) такие описания эквивалентны. Возьмем за исходное описание подмногообразия как множества, задаваемого уравнениями. Известно, что не всякая система $f = 0$, $g = 0$ из двух уравнений от трех неизвестных x, y и z задает гладкую кривую в пространстве $\mathbb{R}^3$. Для того, чтобы множество решений такой системы уравнений было гладкой кривой, следует потребовать, чтобы матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$ имела ранг, равный 2 (в точках, принадлежащих множеству решений системы). Потребуем выполнения аналогичного требования в общем случае.

Определение: Подмногообразием (размерности k) области U аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ (с координатами x^1, x^2, ..., x^n) называется подмножество $M \subset U$, которое в окрестности любой точки a области U является множеством решений системы из $(n-k)$ уравнений $f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0$, ..., $f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0$, для которой ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$ $(i = 1, \ldots, n-k,\ j = 1, \ldots, n)$ равен $n - k$.

Системы уравнений, обладающие описанным свойством, мы будем называть невырожденными (в точке a). Заметим, что в соответствии с определением подмногообразие области U является замкнутым подмножеством в U. Поэтому, например, на плоскости прямолинейный интервал с концами в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ является подмногообразием открытого единичного круга с центром в начале координат, но подмногообразием плоскости не является.

Задача*. Верно ли, что любое k–мерное подмногообразие M пространства $\mathbb{R}^n$ является множеством решений системы из $(n-k)$ уравнений $f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0$, для которой ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$ $(i = 1, \ldots, n-k,\ j = 1, \ldots, n)$ равен $n - k$ в любой точке $a \in M$?

Как говорилось выше, другой возможный подход к определению подмногообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что (k–мерным) подмногообразием называется образ отображения Ψ пространства $\mathbb{R}^k$ или области в нем в пространство $\mathbb{R}^n$. Такое отображение играет роль параметризации. Если не требовать от отображения Ψ ничего, кроме гладкости, его образ может быть устроен таким образом, что его вряд ли можно будет назвать подмногообразием (например, поверхностью в пространстве). В частности, он не будет подмногообразием в смысле приведенного выше определения. Пусть Ψ — отображение области U пространства $\mathbb{R}^k$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Такое отображение задается набором из n функций (компонент отображения) ψ_1, ..., ψ_n на U: $\Psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$ $(x \in U)$. (Гладкость отображения Ψ эквивалентна гладкости функций ψ_i, $i = 1, \ldots, n$.)

Определение: Отображение $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ $(U \subset \mathbb{R}^k,\ \Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n))$ невырождено в точке $x \in U$, если матрица $\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^j}(x)\right)$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$ имеет максимально возможный ранг (равный $min(k, n)$). Отображение Ψ невырождено, если оно невырождено во всех точках $x \in U$.

Синонимом термина "невырожденное"(у нас) будет термин "регулярное".

Замечание. Система уравнений $f_1 = 0$, ..., $f_{n-k} = 0$ на области $U \subset \mathbb{R}^n$ может быть задана отображением $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$: $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-k}(x))$. (Множество решений системы — это прообраз нуля при отображении F.) Условие невырожденности системы уравнений $f_1 = 0$, ..., $f_{n-k} = 0$ в точке $x \in U$ совпадает с условием невырожденности отображения F в этой точке. Невырожденные отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ "устроены по разному"при $k > n$ и при $k < n$. Случай $k = n$ тоже можно считать отличающимся от этих двух (см. теорему об обратном отображении). Случай $k > n$ (когда матрица частных производных имеет ранг n) играет основную роль при задании подмногообразий уравнениями, а случай $k < n$ (матрица производных имеет ранг k) — при задании подмногообразий при помощи параметризаций.

Условие невырожденности отображения является локальным условием. Если отображение невырождено в каждой точке, то его образ может не быть подмногообразием в смысле нашего определения, поскольку, например, он может иметь самопересечения. Так, образ невырожденного отображения $t \mapsto (t^2, t^3 - t)$ прямой $\mathbb{R}^1$ в плоскость $\mathbb{R}^2$ подмногообразием плоскости не является. Однако, локально образ такого отображения подмногообразием является; см. теорему об образе ниже. Наоборот, подмногообразие (некоторой области в $\mathbb{R}^n$), вообще говоря, не является образом невырожденного отображения. Однако, локально это тоже имеет место, что вытекает из **теоремы о неявных функциях** (или о неявной функции), известной из анализа.

Теорема о неявных функциях. Пусть функции $f_1, \ldots, f_{n-k}$ определены в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ $(a = (a^1, \ldots, a^n))$ и определитель матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, $j = k+1, \ldots, n$, отличен от нуля. Тогда в некоторой окрестности точки a система уравнений

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-k} = 0 \qquad (*)$$

однозначно определяет координаты $x^{k+1}, \ldots, x^n$ как функции от координат $x^1, \ldots, x^k$, т.е. в некоторой окрестности точки $\hat{a} = (a^1, \ldots, a^k) \in \mathbb{R}^k$ существуют такие (бесконечно дифференцируемые) функции $\varphi_i(x^1, \ldots, x^k)$, $i = k+1, \ldots, n$, что в некоторой окрестности точки a система уравнений $(*)$ эквивалентна равенствам $x^{k+1} = \varphi_{k+1}(x^1, \ldots, x^k)$, $\ldots$, $x^n = \varphi_n(x^1, \ldots, x^k)$.

Задача. Для $n = 3$, $k = 1$ выразить производные функций φ_2 и φ_3 в точке a через производные функций f_1 и f_2.

Задача*. Сделать то же самое для произвольных n и k.

Если в точке a ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n$, равен $n - k$, то какой-то из определителей $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^{j_s}}(a)\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, $s = 1, \ldots, n-k$, отличен от нуля. Поэтому (локально) переменные $x^{j_1}, \ldots, x^{j_{n-k}}$ (однозначно и гладко) выражаются через остальные k переменных. Таким образом, имеет место следующий факт.

Следствие. Если M^k — k–мерное подмногообразие области U аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, то для любой точки из M^k существует ее окрестность U в пространстве $\mathbb{R}^n$, k из координат $x^1, \ldots, x^n$ и $n-k$ (бесконечно дифференцируемых) функций, выражающих остальные $(n-k)$ координат через k выбранных, т.е. такие, что пересечение M^k с окрестностью U является графиком отображения $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$, определяемого указанными функциями. В частности, в рассматриваемой окрестности подмногообразие M^k является образом невырожденного отображения области в $\mathbb{R}^k$ в пространство $\mathbb{R}^n$.

Следующая теорема утверждает, что локально образ невырожденного отображения является подмногообразием.

Теорема об образе. Пусть $\Psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, заданное в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^k$, $\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$, $\Psi(a) = b$, и пусть

$$\operatorname{rk} d\Psi = \operatorname{rk} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^j}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}} = k.$$

Тогда существует окрестность W точки a в $\mathbb{R}^k$ такая, что $\Psi(W)$ — гладкое подмногообразие в некоторой окрестности точки b в $\mathbb{R}^n$.

Теорема об образе является несложным следствием теоремы о неявных функциях. Мы приведем соответствующее доказательство. Для него нам потребуется, так называемая, теорема об обратном отображении, которая также может быть легко выведена из теоремы о неявных функциях.

Теорема об обратном отображении. Пусть $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение окрестности точки a в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $\Phi(a) = b$, и пусть

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \neq 0.$$

Тогда существует некоторая (вообще говоря, меньшая, чем U) окрестность W начала координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ такая, что Φ является взаимно однозначным отображением W на $\Phi(W)$ и при этом обратное отображение $\Phi^{-1} : \Phi(W) \to W$ также является бесконечно дифференцируемым.

Доказательство. Рассмотрим график Γ отображения Φ: $\Gamma = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^n : y = \Phi(x)\} \subset U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Пусть $x_1, \dots, x^n, y^1, \dots y^n$ — координаты в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. В области $U \times \mathbb{R}^n$ подмножество Γ задается n уравнениями $f_i(x, y) = \varphi_i(x^1, \dots, x^n) - y^i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Матрица производных функций f_i по переменным x^j совпадает с матрицей производных функций φ_i по этим переменным и потому невырождена. По теореме о неявных функциях в некоторой окрестности точки $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ на (подмногообразии) Γ координаты $x^1, \dots, x^n$ являются гладкими функциями координат $y^1, \dots, y^n$: $x^j = \psi_j(y^1, \dots, y^n)$, $j = 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что отображение $\Psi(y) = (\psi_1(y), \dots, \psi_n(y))$ является обратным к отображению Φ. $\square$

Доказательство теоремы об образе. Без ограничения общности можно считать, что

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j}(0)\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}} \neq 0.$$

Рассмотрим отображение $\widetilde{\Psi} : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\widetilde{\Psi}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (\varphi_1(x^1, \dots, x^k), \dots, \varphi_k(x^1, \dots, x^k),$$

$$\varphi_{k+1}(x^1, \dots, x^k) + x^{k+1}, \dots, \varphi_n(x^1, \dots, x^k) + x^n).$$

Здесь $x^{k+1}, \dots, x^n$ — координаты в $\mathbb{R}^{n-k}$. Координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначим через y^1, …, y^n. Имеем

$$d\widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x^k} & & & \\ & & & 1 & & \\ & * & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{rk} d\widetilde{\Psi}(0) = n$. По теореме об обратном отображении существует окрестность нуля U в $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ и окрестность нуля V в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\widetilde{\Psi}$ — взаимно–однозначное, гладкое вместе с обратным отображение $U \to V$. При этом, не теряя общности, можно предполагать, что U является прямым произведением $U_1 \times U_2$ некоторых окрестностей начал координат в $\mathbb{R}^k$ и в $\mathbb{R}^{n-k}$. Пусть $\chi : V \to U$ — отображение, обратное к $\widetilde{\Psi}$, $\chi(y^1, \ldots, y^n) = (\chi_1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, \chi_n(y^1, \ldots, y^n))$. Образ $\Psi(U_1)$ в V задается уравнениями $\chi_{k+1}(y^1, \ldots, y^n) = \ldots = \chi_n(y^1, \ldots, y^n) = 0$. При этом

$$\operatorname{rk} \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial y^j}(0) \right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = n.$$

Поэтому

$$\operatorname{rk} \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial y^j}(0) \right)_{\substack{i=k+1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = n - k,$$

что и требовалось доказать. □

Лекция 2.

Пусть M^k — k–мерное подмногообразие в области $U \subset \mathbb{R}^n$ (например, в самом пространстве $\mathbb{R}^n$), задаваемое уравнениями

$$\begin{gathered} f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0, \end{gathered}$$

где $\operatorname{rk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(p) \right) = n - k$ в любой точке $p \in M^k$. Мы показали (теорема о неявной функции), что для любой точки p в некоторой ее окрестности U подмногообразие M^k является графиком (гладкого) отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, т.е. некоторые $(n-k)$ координат из x^1, …, x^n (гладко) выражаются через остальные k координат. Таким образом в этой окрестности точка подмногообразия M^k однозначно задается указанным набором из k чисел, а само подмногообразие M^k является образом невырожденного (т.е. ранга k) отображения окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ в окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, подмногообразие M^k области $U \subset \mathbb{R}^n$ может быть покрыто некоторым количеством открытых областей, в каждой из которых точка M^k однозначно определяется некоторыми координатами — набором из k вещественных чисел, т.е. точкой пространства $\mathbb{R}^k$ (из некоторого открытого множества). Эти наборы чисел (для двух областей, имеющих непустое пересечение) гладко выражаются друг через друга. При этом сами по себе координаты не являются частью понятия подмногообразия. В окрестности точки они могут быть введены различными способами (даже если в качестве них берется часть декартовых координат). Такое описание подмногообразий в аффинных пространствах (или в областях в них) принимается за общее определение многообразия.

Сначала напомним понятие топологического пространства.

Определение: Топологическое пространство — это множество X с выделенным классом подмножеств, называемых открытыми. При этом пустое множество и само X открыты, пересечение конечного числа или объединение любого числа открытых множеств открыто.

Окрестностью точки p топологического пространства X называется любое открытое множество, содержащее p. Для топологического пространства X можно говорить о пределе последовательности точек $\{p_i\}$ из X и о пределе функции $f(p)$ при $p \to p_0$, о непрерывности функции на пространстве X, о непрерывности отображения X в топологическое пространство Y, ... Например, отображение $f : X \to Y$ непрерывно, если прообраз любого открытого множества в пространстве Y открыт в пространстве X. Любое подмножество Y топологического пространства X обладает естественной топологией, **индуцированной** из пространства X: открытыми подмножествами пространства Y являются пересечения Y с открытыми подмножествами пространства X.

Нам нужны будут понятия хаусдорфовости и сепарабельности. Есть несколько различных понятий хаусдорфовости (впрочем, для наших целей подходит любое из них). Чтобы в дальнейшем не останавливаться на общетопологических проблемах, сформулируем более сильное.

Определение: Говорят, что топологическое пространство X хаусдорфово, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества в X имеют непересекающиеся окрестности. (Окрестностью замкнутого множества называется (любое) содержащее его открытое множество.)

Хаусдорфовость пространства по–существу означает единственность предела. Примером нехаусдорфова пространства является, так называемое, двоеточие Александрова — топологическое пространство X, состоящее из двух точек a и b, в котором открытыми подмножествами являются пустое множество $\emptyset$, $\{a\}$ и все пространство X. Другим (более показательным для обсуждения ниже понятия гладкого многообразия) примером является прямая $\mathbb{R}$, к которой добавлена еще одна точка $0'$ ("еще один нуль") так, что базой окрестностей любой точки a из $\mathbb{R}$ (включая 0) является семейство интервалов $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, а базой окрестностей точки $0'$ является семейство множеств вида $((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}) \cup \{0'\}$. (Семейство окрестностей точки x топологического пространства X называется базой ее окрестностей, если любая окрестность точки x содержит окрестность из этого семейства. Топология на пространстве X может быть определена заданием базы окрестностей для каждой точки $x \in X$.)

Сепарабельность пространства означает, что это пространство "не слишком велико".

Определение: Базой (открытых множеств) пространства X называется семейство открытых подмножеств пространства X такое, что любое открытое подмножество пространства X является объединением некоторого количества (вообще говоря, бесконечного) подмножеств из этого семейства.

Определение: Говорят, что топологическое пространство X сепарабельно, если оно имеет счетную базу.

Эквивалентно, топологическое пространство X сепарабельно, если в нем имеется счетное семейство открытых подмножеств такое, что для любой точки $x \in X$ и для любой ее окрестности U имеется множество из указанного семейства, содержащее точку x и содержащееся в множестве U.

Примером несепарабельного топологического пространства является дизъюнктное объединение несчетного числа произвольных (непустых) топологических пространств. (Дизъюнктное объединение топологических пространств X_α $(\alpha \in \Omega)$ — это объединение (непересекающихся) множеств X_α, наделенное топологией, в которой множество U открыто тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \Omega$ пересечение $U \cap X_\alpha$ открыто в пространстве X_α. Более явно описанным примером несепарабельного пространства является множество $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, в котором база окрестностей точки (u_0, v_0) состоит из множеств вида $\{(u,v) : |u - u_0| < \varepsilon, v = v_0\}$ $(\varepsilon > 0)$.

Пространство R^n и любое его подпространство (рассматриваемое с индуцированной топологией) очевидным образом хаусдорфовы и сепарабельны. Если при обобщении понятия подмногообразия аффинного пространства мы не хотим зайти слишком далеко, от соответствующего обобщения следует потребовать хаусдорфовости и сепарабельности.

Как мы знаем, в некоторой окрестности любой точки подмногообразия M^k аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ на M^k можно ввести гладкие локальные координаты (k величин, которые однозначно определяют точку множества M^k), в качестве которых могут быть взяты некоторые из аффинных координат $x^1, \ldots, x^n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это свойство мы хотели взять за основу для общего определения (абстрактного) многообразия.

Определение: Картой (k–мерной) (U, Ψ) на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм (т.е. взаимно–однозначное, взаимно–непрерывное отображение) $\Psi : U \to V$ открытого множества $U \subset X$ на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^k$.

Определение: Говорят, что карты (U_1, Ψ_1) и (U_2, Ψ_2) $(\Psi_i : U_i \to V_i)$ согласованы, если отображения $\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : \Psi_1(U_1 \cap U_2) \to \Psi_2(U_1 \cap U_2)$ и $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} : \Psi_2(U_1 \cap U_2) \to \Psi_1(U_1 \cap U_2)$ — гладкие (т.е. бесконечно–дифференцируемые).

Определение: Атласом на топологическом пространстве X называется система карт $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ на X, каждые две из которых согласованы.

Определение: Говорят, что атласы $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ и $\{(U'_\beta, \Psi'_\beta)\}$ эквивалентны, если любая карта из первого атласа согласована с любой картой из второго атласа.

Нетрудно видеть, что описанное отношение действительно является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Задача$_*$. Два атласа эквивалентны тогда и только тогда, когда их объединение также является атласом.

Определение: Гладким многообразием размерности k называется хаусдорфово сепарабельное топологическое пространство M^k вместе с атласом на нем.

Примеры объектов, которые (в естественном смысле) являются "гладкими многообразиями", не удовлетворяющими аксиомам хаусдорфовости и сепарабельности, были приведены на предыдущей лекции. Как объяснялось, они (ни в каком смысле) не изоморфны подмногообразиям аффинного пространства.

Замечание. Условие сепарабельности гарантирует (и эквивалентно тому), что из любого атласа на многообразии можно выбрать не более чем счетный податлас. (Задача$_*$. Докажите это.)

Выделение одного конкретного атласа выглядит "не вполне инвариантным". Поэтому часто определение формулируется чуть–чуть иначе.

Определение$'$: Гладким многообразием размерности k называется топологическое пространство M^k вместе с классом эквивалентных атласов на нем.

Примеры: 1) любая (открытая) область евклидова пространства;
2) любое открытое подмножество в многообразии;
3) любое подмногообразие области евклидова пространства;
4) n–мерное проективное пространство $\mathbb{RP}^n$;
5) группа $SO(n)$ ортогональных матриц с определителем, равным единице;
6) так называемое, грассманово многоообразие $Gr(n,k)$ k–мерных линейных подпространств в n–мерном векторном пространстве, ...

Задача. Доказать, что $\mathbb{RP}^n$, $Gr(n,k)$ и $SO(n)$ являются многообразиями (в последнем случае доказать, что $SO(n)$ является подмногообразием в (линейном) пространстве матриц размера $n \times n$).

Замечание. Когда говорят, что что-то (например, $\mathbb{RP}^n$) является гладким многообразием, то подразумевают, что оно является таковым в *некотором естественном смысле*, т.е. при естественном выборе гладкой структуры (которая определяется выбором атласа).

Замечание. Если в определении согласованности карт потребовать, чтобы отображения $\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}$ и $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}$ были вещественно– или комплексно–аналитическими (в последнем случае пространство $\mathbb{R}^k$ должно быть заменено на $\mathbb{C}^k$), то мы приходим к определению вещественно– или комплексно–аналитического многообразия. Например, проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ является (вещественно) аналитическим многообразием, комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ является комплексно–аналитическим многообразием. (Свойства вещественно– и комплексно–аналитических многообразий существенно отличаются от свойств обычных (гладких, т.е. C^∞) многообразий. Например, на аналитическом многообразии отсутствует (аналитическое) разбиение единицы.) Если же потребовать, чтобы эти отображения были класса гладкости C^r (т.е., чтобы их компоненты имели непрерывные частные производные до порядка r включительно), получаем определение многообразия класса гладкости C^r (при $r = 0$ — топологического многообразия).

Определение: Говорят, что функция $f : U \to \mathbb{R}$, заданная на области U гладкого (или аналитического) многообразия M^k гладкая (соответственно — аналитическая), если для любой карты (U_α, Ψ_α) (из атласа, задающего гладкую структуру на M^k) функция $f \circ \Psi_\alpha^{-1}$ является гладкой (соответственно — аналитической) функцией (на области $\Psi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ аффинного пространства $\mathbb{R}^k$). (Для того, чтобы определение аналитической функции на многообразии было корректно, необходимо, чтобы само многообразие было аналитическим.)

Говоря менее формально, функция f гладкая (аналитическая), если в любых локальных координатах она записывается как гладкая (аналитическая) функция от этих координат.

Задача$_*$. Доказать, что в предыдущем определении слова "если для любой карты (U_α, Ψ_α)"могут быть заменены на "если для любой точки x области U для некоторой карты (U_α, Ψ_α), содержащей точку x,".

Задача*. Можно дать другое ("максимально инвариантное") определение гладкого многообразия. Предположим, что для каждого открытого подмножества Ω хаусдорфова, сепарабельного топологического пространства X в пространстве непрерывных функций на Ω выделено (линейное) подпространство $C^\infty(\Omega)$ (называемое пространством гладких функций на Ω) так, что:
1) если $\Omega' \subset \Omega$ и $f \in C^\infty(\Omega)$, то ограничение $f_{|\Omega'}$ функции f на (открытое) множество Ω' также является гладким (т.е. принадлежит пространству $C^\infty(\Omega')$);
2) если открытое подмножество Ω представлено в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_\alpha \Omega_\alpha$ открытых подмножеств Ω_α и ограничение функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ на каждое из подмножеств Ω_α является гладким, то и сама функция f является гладкой (т.е. принадлежит $C^\infty(\Omega)$).
Два топологических пространства X_1 и X_2 с такой структурой изоморфны, если существует их гомеоморфизм $F : X_1 \to X_2$ такой что для любого открытого подмножества $\Omega \subset X_2$ естественный гомоморфизм (в действительности — изоморфизм) F^* алгебры (непрерывных) функций на Ω в алгебру функций на $F^{-1}(\Omega)$ $(F^*h = h \circ F)$ осуществляет изоморфизм между $C^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(F^{-1}\Omega)$ (т.е. отображает $C^\infty(\Omega)$ **на** (!) $C^\infty(F^{-1}\Omega)$.
На любом открытом подмножестве U аффинного пространства $\mathbb{R}^k$ естественным образом определена такая структура: пространство $C^\infty(\Omega)$ состоит из бесконечно дифференцируемых (в обычном смысле!) функций на Ω. Теперь само определение: топологическое пространство X с описанной структурой называется гладким k–мерным многообразием, если оно локально изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^k$, т.е. у любой точки $x \in X$ имеется окрестность, изоморфная открытому подмножеству аффинного пространства $\mathbb{R}^k$. Доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше.

Задача*. Если на топологическом пространстве X определена описанная структура, а Y — подпространство в X, то на Y также можно определить описанную структуру: функция f на открытом подмножестве Ω пространства Y считается гладкой, если у любой точки $y \in Y$ имеется окрестность U в пространстве X такая, что ограничение f на $U \cap Y$ является ограничением некоторой гладкой функции F, определенной на U: $f_{|U\cap Y} = F_{|U\cap Y}$. Пусть Y — график функции $|x|$ на плоскости (в обычных декартовых координатах). Доказать, что с описанной структурой (пространствами гладких функций на его открытых подмножествах) пространство Y гладким многообразием не является.

Пусть $f : M^k \to N^\ell$ — отбражение гладких многообразий (размерностей k и ℓ).

Определение: Говорят, что отображение $f : M^k \to N^\ell$ гладкое, если для любой точки $x \in M^k$, любой карты $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ (из атласа, задающего гладкую структуру на многообразии M^k), содержащей точку x, и любой карты $\Psi' : U' \to V' \subset \mathbb{R}^\ell$, содержащей точку $f(x)$, отображение $\Psi' \circ f \circ \Psi^{-1} : \Psi(U \cap f^{-1}(U')) \to V'$ является гладким.

Иными словами, отображение гладкое, если его запись в любых локальных координатах — гладкая. (Отображение области аффинного пространства в аффинное пространство гладкое, если все его компоненты являются гладкими функциями.)
Задача$_*$. Доказать, что в этом определении слова "любой карты"могут быть заменены на "некоторой карты"(2 раза).

Определение: Отображение $f : M^k \to N^\ell$ называется диффеоморфизмом, если оно гладкое и имеет гладкое обратное (т.е. существует гладкое отображение $g : N^\ell \to M^k$ такое, что $g \circ f = id_{M^k}$, $f \circ g = id_{N^\ell}$). Говорят, что многообразия M^k и N^ℓ диффеоморфны, если между ними существует диффеоморфизм.

Для гладкого многообразия M^k (размерности k) мы определили понятие касательного вектора в некоторой точке. Касательные вектора в одной точке $a \in M^k$ образуют касательное пространство T_aM^k (векторное пространство размерности k). Рассмотрим множество $TM = \bigcup\limits_{a\in M^k} = \{(a, v) : a \in M^k, v \in T_aM^k\}$ всех касательных векторов к многообразию M^k во всех точках.

Утверждение. TM^k является гладким многообразием размерности $2k$.

Замечание. Здесь использован термин "Утверждение"а не "Теорема", поскольку прежде, чем его доказывать, ему надо придать смысл, например, определить на TM^k топологию. Правильнее было бы его сформулировать в следующем виде: "На TM^k имеется естественная структура гладкого многообразия (размерности $2k$)".

Доказательство. Определить сразу и топологию и структуру гладкого многообразия на пространстве TM^k можно, описав атлас на нем. Пусть $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ — атлас, определяющий гладкую структуру на многообразии M^k (U_α — открытое подмножество в M^k, ψ_α — гомеоморфизм U_α на открытое подмножество $V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$, такие что для любых α и β отображение $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ является гладким; после того, как было сказано, что M^k является гладким многообразием, можно было просто сказать, что отбражения ψ_α являются диффеоморфизмами).
□

Для гладкого многообразия M^k (размерности k) мы определили, так называемое, касательное расслоение (или, правильнее, — пространство касательного расслоения) TM^k, которое является гладким многообразием размерности $2k$; $TM^k = \{(x, v) : x \in M^k, v \in T_xM^k\} = \bigcup\limits_{x\in M^k} T_xM^k$, где T_xM^k — касательное пространство к многообразию M^k в точке x. Имеется естественное (гладкое) отображение $TM^k \to M^k$ ($(x, v) \mapsto x$). Если $\{x^i_\alpha\}$ — координаты на области $U_\alpha \subset M^k$, v^i_α — компоненты касательного вектора в этой системе координат, то $\{x^i_\alpha, v^i_\alpha\}$ — координаты на области TU_α ($\subset TM^k$). Они определяют изоморфизм (диффеоморфизм) $\widetilde{\Psi}_\alpha : TU_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$, который "уважает структуру линейного пространства на слоях", т.е. является линейным отображением $T_xM^k \to \mathbb{R}^k$. Если $\{x^j_\beta\}$ — другие локальные координаты, $\{v^j_\beta\}$ — компоненты вектора в них, то $v^j_\beta = \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha} v^i_\alpha$. Понятие векторного расслоения формализует эту конструкцию. Хотя обычно мы стараемся формулировать определения и утверждения только для гладких многообразий, начнем с понятия векторного расслоения над произвольным топологическим пространством.

Определение: Векторным расслоением (размерности или ранга k) над топологическим пространством X называется отображение $p : E \to X$ топологического пространство E на топологическое пространство X, такое что:
1) для любой точки $x \in X$ на ее прообразе $E_x = p^{-1}(x)$ (называемом слоем расслоения) определена структура (вещественного) линейного пространства;
2) у любой точки $x \in X$ имеется окрестность U, такая что "ограничение p на U изоморфно прямому произведению", т.е. существует гомеоморфизм $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, который коммутирует с проекцией на U (т.е. $\pi_1 \circ \Phi = p$, где $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ — проекция произведения $U \times \mathbb{R}^k$ на первый сомножитель) и линеен на каждом слое (т.е. отображение $\Phi_{|E_x} : E_x \to \mathbb{R}^k$ линейно).

X называется базой расслоения, а E — пространством расслоения.

В определении на слоях E_x расслоения $p : E \to X$ может быть определена структура линейного пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В этом $p : E \to X$ называется комплексным векторным расслоением. Расслоение ранга (размерности) 1 иногда называется линейным.

В соответствии с определением, на слоях векторного расслоения определены операции сложения и умножения на числа. Может возникнуть желание потребовать, чтобы эти операции были непрерывными. В действительности это свойство следует из определения. Сформулируем его более точно (в виде задачи).

Пусть $A = \{(e_1, e_2) \in E \times E : p(e_1) = p(e_2)\} \subset E \times E$. Как подпространство топологического пространства $E \times E$, множество A наследует естественную топологию. Сложение — это отображение $+ : A \to E$. Умножение на элементы поля k ($= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) — это отображение $\cdot : k \times E \to E$.
Задача. Отображения $+$ и $\cdot$ непрерывны.

Замечание. Имеется очень общая конструкция, обобщающая построение пространства A по отображению $p : E \to X$. Пусть $p_i : Y_i \to X$ $(i = 1, 2)$ — два отображения множеств Y_1 и Y_2 в одно множество X. Рассматриваемые множества могут обладать дополнительной структурой, а отображения — уважать эту структуру. Например, p_1 и p_2 могут быть непрерывными отображениями топологических пространств. Расслоенным произведением $Y_1 \times_X Y_2$ множеств Y_1 и Y_2 над X называется множество $\{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 : p_1(y_1) = p_2(y_2)\}$ вместе с естественным отображением $p : Y_1 \times_X Y_2 \to X$: $p(y_1, y_2) = p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Определены также естественные отображения расслоенного произведения $Y_1 \times_X Y_2$ в "сомножители"Y_1 и Y_2 (определяемые проекциями прямого произведения $Y_1 \times Y_2$ на сомножители). В этих обозначениях $A = E \times_X E$.

Определение: Если участвующие в определении векторного расслоения топологические пространства X и E являются гладкими многообразиями, p — гладкое отображение, а Φ — диффеоморфизм, то говорят, что $p : E \to X$ — гладкое векторное расслоение.

Задача. Пусть $p : E \to X$ — гладкое векторное расслоение. Доказать, что $A = E \times_X E$ — гладкое подмногообразие в прямом произведении $E \times E$. Доказать, что отображение сложения $+ : A \to E$ — гладкое.

Задача*. Доказать, что естественная проекция $A \to X$ и отображение сложения $+ : A \to E$ являются (гладкими) векторными расслоениями.

Окрестности U, над которыми определены тривиализации Φ, соответствуют точкам x топологического пространства X. Таким образом, можно сказать, что имеется семейство $U(x)$ таких окрестностей, нумерованное точками пространства X. Однако, достаточно, чтобы существовало некоторое (например, конечное) покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X открытыми множествами U_α, для каждого из которых была бы определена тривиализация Φ_α (в этом случае в качестве $U = U(x)$ можно взять одно из множеств U_α, содержащих точку x).

Пусть $\Phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ и $\Phi_\beta : p^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^k$ — тривиализации векторного расслоения $p : E \to X$ над двумя элементами покрытия U_α и U_β. Отображение $\varphi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ переводит $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ в себя. При этом оно коммутирует с проекцией на $U_\alpha \cap U_\beta$. Поэтому для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a \in \mathbb{R}^k$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}(x, a) = (x, g_{\alpha\beta}(x)a)$, где $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(k, \mathbb{R})$ ($GL(k, \mathbb{R})$ — группа обратимых (вещественных) $(k \times k)$–матриц). Т.к. $\varphi_{\alpha\beta}$ — непрерывное отображение $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$, то $g_{\alpha\beta}$ — непрерывные функции на $U_\alpha \cap U_\beta$ со значениями в $GL(k, \mathbb{R})$. (Матричнозначная функция непрерывна (или дифференцируема), если непрерывными (дифференцируемы) функциями (обычными, т.е. со значениями в $\mathbb{R}$) являются ее матричные элементы.) Если $p : E \to X$ — гладкое расслоение, то отображения $\varphi_{\alpha\beta}$ и, следовательно, функции $g_{\alpha\beta}$ — гладкие. Нетрудно видеть, что для $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеет место равенство $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)$.

Задача*. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами и пусть на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ элементов покрытия заданы (непрерывные) функции $g_{\alpha\beta}$ со значениями в группе $GL(n, \mathbb{R})$ обратимых $(k \times k)$–матриц такие, что $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)$ при $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Доказать, что эти данные определяют векторное расслоение над пространством X, т.е. существует (единственное с точностью до изоморфизма: см. ниже) векторное расслоение $p : E \to X$, для которого $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, a) = (x, g_{\alpha\beta}(x)a)$.

Задача*. В условиях предыдущей задачи показать, что если X — гладкое многообразие, а функции $g_{\alpha\beta}(x)$ — гладкие, то $p : E \to X$ — гладкое векторное расслоение.

Примеры: 1) Тривиальное расслоение $p = \pi_1 : X \times \mathbb{R}^k \to X$.
2) Касательное расслоение $p : TM^n \to M^n$ гладкого многообразия M^n.
3) Линейное (т.е. ранга 1) расслоение над окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, определяемое следующими данными: покрытием $S^1 = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = S^1 \setminus \{-1\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{1\}$, функцией $g_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, определяемой тем, что $g_{12}(z) = 1$ при $Im\, z > 0$, $g_{12}(z) = -1$ при $Im\, z < 0$.

Задача. Показать, что последнее расслоение не изоморфно тривиальному (см. определение изоморфности ниже). Описать пространство E этого расслоения.

В определении на слоях E_x расслоения $p : E \to X$ может быть определена структура линейного пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В этом $p : E \to X$ называется комплексным векторным расслоением. Расслоение ранга (размерности) 1 иногда называется линейным.

Окрестности U, над которыми определены тривиализации Φ, соответствуют точкам x топологического пространства X. Таким образом, можно сказать, что имеется семейство $U(x)$ таких окрестностей, нумерованное точками пространства X. Однако, достаточно, чтобы существовало некоторое (например, конечное) покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X открытыми множествами U_α, для каждого из которых была бы определена тривиализация Φ_α (в этом случае в качестве $U = U(x)$ можно взять одно из множеств U_α, содержащих точку x).

Пусть $\Phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ и $\Phi_\beta : p^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^k$ — тривиализации векторного расслоения $p : E \to X$ над двумя элементами покрытия U_α и U_β. Отображение $\varphi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ переводит $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ в себя. При этом оно коммутирует с проекцией на $U_\alpha \cap U_\beta$. Поэтому для $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a \in \mathbb{R}^k$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}(x, a) = (x, g_{\alpha\beta}(x)a)$, где $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(k, \mathbb{R})$ ($GL(k, \mathbb{R})$ — группа обратимых (вещественных) $(k \times k)$–матриц). Т.к. $\varphi_{\alpha\beta}$ — гладкое отображение $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$, то $g_{\alpha\beta}$ — гладкие функции на $U_\alpha \cap U_\beta$ со значениями в $GL(k, \mathbb{R})$. (Матричнозначная функция непрерывна (или дифференцируема), если непрерывными (дифференцируемы) функциями (обычными, т.е. со значениями в $\mathbb{R}$) являются ее матричные элементы.) Нетрудно видеть, что для $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеет место равенство $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x)$.

Задача*. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие гладкого многообразия X открытыми множествами и пусть на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ элементов покрытия заданы (гладкие) функции $g_{\alpha\beta}$ со значениями в группе $GL(n, \mathbb{R})$ обратимых $(k \times k)$–матриц такие, что $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x)$ при $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Доказать, что эти данные определяют векторное расслоение над пространством X, т.е. существует (единственное с точностью до изоморфизма: см. ниже) векторное расслоение $p : E \to X$, для которого $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, a) = (x, g_{\alpha\beta}(x)a)$.

Примеры: 1) Тривиальное расслоение $p = \pi_1 : X \times \mathbb{R}^k \to X$.
2) Касательное расслоение $p : TM^n \to M^n$ гладкого многообразия M^n.
3) Линейное (т.е. ранга 1) расслоение над окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, определяемое следующими данными: покрытием $S^1 = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = S^1 \setminus \{-1\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{1\}$, функцией $g_{12} : U_1 \cap U_2 \to GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, определяемой тем, что $g_{12}(z) = 1$ при $Im\, z > 0$, $g_{12}(z) = -1$ при $Im\, z < 0$.

Задача. Показать, что последнее расслоение не изоморфно тривиальному (см. определение изоморфности ниже). Описать пространство E этого расслоения.

Мы хотим сформулировать некоторые задачи, но сначала дадим определение.

Определение: Пусть $p_1 : E_1 \to X$ и $p_2 : E_2 \to X$ — два векторных расслоения над пространством X. Говорят, что эти расслоения изоморфны, если существует диффеоморфизм $F : E_1 \to E_2$ такой, что:

1. диффеоморфизм F переводит слой над точкой $x \in X$ в слой над той же точкой, т.е. $p_2 \circ F = p_1$;
2. диффеоморфизм F линеен на слоях, т.е. для любой точки $x \in X$ ограничение $F_{|p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x)$ отображения F на слой $p_1^{-1}(x)$ линейно.

Определение: Говорят, что векторное расслоение $p : E \to X$ тривиально, если оно изоморфно (тривиальному) раслоению $\pi_1 : X \times \mathbb{R}^k \to X$.

Было объяснено, что векторное расслоение над некоторым многообразием X может быть описано некоторым покрытием U_α многообразия X и матричнозначными функциями $g_{\alpha\beta}(x)$ со значениями в группе $GL(k,\mathbb{R})$ обратимых матриц размера $k\times k$, определенных на пересечениях $U_\alpha\cap U_\beta$ элементов покрытия и удовлетворяющих равенству $g_{\alpha\gamma}(x)=g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)$ для любой точки x тройного пересечения $\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$.
Задача. Описать в этих терминах касательное расслоение $TS^2\to S^2$ двумерной сферы.

Задача*. Рассмотрим двумерное вещественное расслоение над (двумерной) сферой S^2 задаваемое следующими данными. Пусть U_1 и U_2 — сфера без южного и северного полюса соответственно, φ и ψ — сферические координаты на пересечении $U_1\cap U_2$ (долгота и широта) и пусть $g_{1,2}(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ для $x\in U_1\cap U_2$. Доказать, что расслоение, описываемое этими данными, неизоморфно касательному расслоению к сфере.

Задача*. Пусть два расслоения $p:E\to X$ и $p':E'\to X$ над многообразием X описываются одним и тем же покрытием $\{U_\alpha\}$ и (различными) функциями перехода $\{g_{\alpha\beta}(x)\}$ и $\{g'_{\alpha\beta}(x)\}$. Сформулировать условие изоморфности расслоений $p:E\to X$ и $p':E'\to X$ в терминах функций перехода.

Задача. Что такое функции перехода $\{g_{\alpha\beta}(x)\}$ для касательного расслоения $TM^n\to M^n$?

Из курса анализа известно, что гладкая функция $f(x^1,\dots,x^n)$ n переменных определяет (в каждой точке) вектор — ее градиент $grad\, f(x)=(\partial f/\partial x^1(x),\dots,\partial f/\partial x^n(x))$. Однако, этот вектор корректно определен лишь постольку, поскольку на пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксированы координаты (или, по крайней мере, евклидова структура). Пусть $x^1,\dots,x^n$ и $\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n$ — две системы координат на области U гладкого n–мерного многообразия M^n, f — функция на U. Частные производные функции f относительно этих систем координат связаны соотношением $\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}\cdot\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$ (производные берутся в соответствующей точке). Из этой формулы видно, что при замене координат набор чисел $(\partial f/\partial x^1,\dots,\partial f/\partial x^n)$ преобразуется не так, как набор компонент вектора. Поэтому (касательного) вектора он не определяет.

Чтобы сообразить, что за объект определяет набор чисел $(\partial f/\partial x^1(x),\dots,\partial f/\partial x^n(x))$, заметим, что дифференциал в точке x можно рассматривать как класс эквивалентных функций, где эквивалентными считаются функции, разность между которыми является бесконечно малой более высокого порядка, чем расстояние до точки x: $f_1 f_2$, если $f_2(x)-f_1(x)=o(\|x-x_0\|)$. Это напоминает определение касательного вектора как класса эквивалентных кривых. Функцию можно дифференцировать вдоль кривой. При этом производные эквивалентных функций вдоль эквивалентных кривых совпадают. Производная функции f вдоль кривой с касательным вектором $v=(v^1,\dots,v^n$ равна скалярному произведению $<grad\, f(x),v>=v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$ "векторов"$grad\, f(x)$ и v. Это — линейная функция от вектора v. Поэтому дифференциал в точке x — это линейная функция на векторах, касательных к многообразию M^n в точке x. (Очевидно, что любая линейная функция на касательном пространстве T_xM^n является дифференциалом некоторой функции.) Линейная функция на векторах называется ковектором.

Таким образом, мы приходим к следующим эквивалентным определениям касательного ковектора в точке x многообразия M^n:

1. класс эквивалентных функций (см. выше);

2. набор из n чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (компонент ковектора) в каждой системе $x^1, \ldots, x^n$ локальных координат, который при замене координат меняется по формуле $\alpha_i = \widetilde{\alpha}_j \cdot \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}$;

3. (самое разумное) линейная функция на касательном пространстве T_xM^n.

Ковектора в точке $x \in M^n$ образуют линейное пространство $T^*_xM^n$, двойственное к касательному пространству T_xM^n. Мы знаем, что касательные пространства T_xM^n во всех точках многообразия M^n вместе образуют гладкое многообразие TM^n, а естественная проекция $p : TM^n$ является векторным расслоением. В действительности, множество всех касательные ковекторов многообразия M^n также образует гладкое многообразие T^*M^n, причем естественная проекция $p^* : T^*M^n$ также является векторным расслоением (кокасательным расслоением многообразия M^n). Для того, чтобы это показать, на множестве T^*M^n касательных ковекторов надо определить топологию, описать атлас, определяющий гладкую структуру на T^*M^n, и тривиализацию проекции p^* над окрестностью любой точки многообразия M^n. Все эти три задачи одновременно решаются с помощью конструкции, которую мы опишем в более общей ситуации.

Тензором типа (p, q) на векторном пространстве E называется полилинейная функция на

$$\underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ сомножителей}} \times \underbrace{E^* \times \ldots \times E^*}_{q \text{ сомножителей}}.$$

Тензор типа $(1, 0)$ — это просто вектор, т.е. элемент пространства E; тензор типа $(0, 1)$ — элемент пространства E^*, двойственного к E (ковектор). Тензор типа $(0, 2)$ — это билинейная форма на векторном пространстве E (вообще говоря, ни симметричная, ни кососимметричная). Тензоры типа $(1, 1)$ естественным образом отождествляются с операторами (в пространстве E или E^*).

Пусть $p : E \to X$ — векторное расслоение ранга k над некоторым многообразием X (например. Обозначим через $E^{p,q}$ **множество** тензоров типа (p, q) на всех слоях $E_x = p^{-1}(x)$ расслоения p. Имеется естественное отображение $p^{p,q}$ на X: тензор на слое E_x отображается в точку x. Для того, чтобы определить топологию (а заодно и структуру гладкого многообразия), опишем покрытие $E^{p,q}$ множествами, на которых топология определяется естественным образом и которые будут рассматриваться как открытые. В этом случае топология на $E^{p,q}$ определяется тем, что множество $W \subset E^{p,q}$ открыто, если открыты его пересечения с элементами покрытия. Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие пространства X такими открытыми множествами U_α, что имеются тривиализации $\Phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ (которые линейны на каждом слое и для которых $\pi_1 \circ \Phi_\alpha = p$). Пусть $U_\alpha^{p,q} = (p^{p,q})^{-1}(U_\alpha)$ — множество всех тензоров типа (p, q) на слоях $E_x = p^{-1}(x)$ с $x \in U_\alpha$. Отображение Φ_α определяет естественное взаимно–однозначное соответствие $\Phi_\alpha^{p,q}: U_\alpha^{p,q} \to U_\alpha \times (\mathbb{R}^k)^{p,q}$, где $(\mathbb{R}^k)^{p,q}$ — (линейное) пространство тензоров типа (p,q) на пространстве $\mathbb{R}^k$ (которое естественным образом отождествляется с аффинным пространством $\mathbb{R}^N$ для некоторого N). Это взаимно–однозначное соответствие определяет (индуцированную) топологию на множестве $U_\alpha^{p,q}$. Множества $U_\alpha^{p,q}$ образуют покрытие пространства $E^{p,q}$, которое тем самым наделяется структурой топологического пространства. Если $p: E \to X$ — гладкое расслоение (в частности, X является гладким многообразием некоторой размерности m), а U_α являются координатными окрестностями на X, то (координатные) отображения $U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ определяют естественные отображения $U_\alpha^{p,q} \to V_\alpha \times \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N$, которые определяют покрытие $\{U_\alpha^{p,q}\}$ пространства $E^{p,q}$ как атлас на $E^{p,q}$, вводя тем самым на последнем структуру гладкого многообразия (а на $p^{p,q}: E^{p,q} \to X$ структуру гладкого расслоения.

Лекция 7.

Прошлый раз мы показали, что множество $E^{p,q}$ тензоров типа (p,q) на слоях (гладкого) векторное расслоение $p: E \to M^n$ над многообразием M^n само является гладким многообразием и (вместе с естественным отображением на M^n) векторным расслоением над M^n. Рассмотрим теперь тензоры на касательных пространствах к многообразию M^n. Тензор T типа (p,q) в точке x многообразия M^n — это тензор (того же типа) на касательном пространстве T_xM^n к многообразию M^n в точке x.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис векторного пространства V (размерности n). Базис $\{e_i\}$ пространства V определяет двойственный базис $e^1, \ldots, e^n$ сопряженного пространства V^*, определяемый формулами $(e^i, e_j) = \delta^i_j$ ($= 1$ при $i = j$, $=$ 0 при $i \neq j$). Тензор T типа (p,q) на пространстве V (рассматриваемый как полилинейная функция на $\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ сомножителей}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ сомножителей}}$) приобретает координаты $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, определяемые формулами $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$.

Локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности точки x определяют базис $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ в касательном пространстве T_xM^n к многообразию M^n в точке x. Двойственным базисом в кокасательном пространстве $T_x^*M^n$ является базис dx^1, $\ldots$, d_x^n, состоящий из дифференциалов координат. Тем самым тензор T приобретает свои координаты (компоненты) $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$:

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T\left(dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}, \frac{\partial}{\partial x^{j^1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j^q}}\right).$$

В соответствии с известными из линейной алгебры формулами компоненты $\widetilde{T}^{\widetilde{i}_1\ldots\widetilde{i}_p}_{\widetilde{j}_1\ldots\widetilde{j}_q}$ в другой системе координат $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n$ выражаются через его компоненты в координатах $x^1, \ldots, x^n$ по формуле

$$\widetilde{T}^{\widetilde{i}_1\ldots\widetilde{i}_p}_{\widetilde{j}_1\ldots\widetilde{j}_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}_1}}{\partial x^{i^1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}_p}}{\partial x^{i^p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{j}^1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_q}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{j}^q}} \qquad (*)$$

(как всегда по повторяющимся индексам производится суммирование).

Задача$_*$. Написать законы преобразования компонент тензоров типов $(2,0)$, $(1,1)$ и $(0,2)$ в "нормальных"обозначениях, т.е. со всеми знаками суммирования.

Тензор типа (p,q) в точке x многообразия M^n (в координатной форме) может быть определен как набор компонент $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ в каждой системе локальных координат, преобразующийся по правилу (*).

Операции с тензорами.

Если f — функция (на многообразии с локальными координатами x^i), то, как мы знаем, величины $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ являются компонентами тензора (типа $(0,1)$). (Часто для краткости мы будем говорить, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ является тензором.) С другой стороны, если, например, $v^i = v^i(x)$ — тензорное поле типа $(1,0)$ (т.е. векторное поле), то производные $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором, вообще говоря, не являются.

Задача$_*$. Доказать это.

Задача$_*$. Пусть f — функция на многообразии. Доказать, что вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ (в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$) не являются компонентами тензора (никакого типа).

Сегодня мы обсудим некоторые операции с тензорами (те, результатами которых снова являются тензоры). Эти операции относятся не к тензорным полям, а к тензорам, определенным в одной точке. В этом смысле эти операции являются объектом линейной алгебры. Поэтому многие (простые) утверждения будут сформулированы в виде задач (часто — со звездочкой внизу).

0. Тензоры фиксированного типа (p,q) (естественно, на одном и том же пространстве) образуют линейное пространство и поэтому их можно складывать и умножать на числа.

1. Тензорное произведение. Определение тензора типа (p,q) на векторном пространстве V как полилинейной функции на произведении

$$\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ сомножителей}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ сомножителей}}$$

эквивалентно утверждению о том, что такой тензор является элементом пространства

$$\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ сомножителей}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ сомножителей}} .$$

Задача$_*$. Доказать, что это пространство изоморфно пространству

$$Hom\left(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q \text{ сомножителей}}, \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p \text{ сомножителей}}\right)$$

($Hom\,(W_1, W_2)$ — пространство линейных отображений W_1 в W_2).

Тензорное произведение пространств тензоров типа (p_1, q_1) и (p_2, q_2), т.е. пространств

$$\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p_1 \text{ сомнож.}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ сомнож.}} \text{ и } \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p_2 \text{ сомнож.}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q_2 \text{ сомнож.}},$$

совпадает с пространством тензоров типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$. Поэтому двум тензорам типов (p_1, q_1) и (p_2, q_2) соответствует их тензорное произведение — тензор типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$. Дадим его определение в терминах компонент.

Пусть T (соответственно S) — тензор типа (p_1, q_1) (соответственно (p_2, q_2)) с компонентами $T^{i_1 \dots i_{p_1}}_{j_1 \dots j_{q_1}}$ (соответственно $S^{k_1 \dots k_{p_2}}_{\ell_1 \dots \ell_{q_2}}$) в некоторых (локальных) координатах.

Определение: Тензорным произведением (или просто произведением) тензоров T и S называется тензор $T \otimes S$ типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$, компоненты которого задаются формулами

$$(T \otimes S)^{i_1 \dots i_{p_1+p_2}}_{j_1 \dots j_{q_1+q_2}} = T^{i_1 \dots i_{p_1}}_{j_1 \dots j_{q_1}} \cdot S^{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}}.$$

Задача$_{**}$. Доказать, что $T \otimes S$ действительно является тензором.

Задача$_*$. Дать определение тензорного произведения $T \otimes S$ в терминах полилинейной функции от векторов и ковекторов.

Задача$_*$. Выяснить, какими из следующих свойств обладает тензорное произведение (доказать или опровергнуть):
1) $(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S$;
2) $T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2$;
3) $(S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R)$;
4) $T \otimes S = S \otimes T$.

Задача$_*$. Доказать, что любой тензор типа (p, q) является суммой (тензорных) произведений тензоров типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

2. Свертка. Тензоры типа $(1, 1)$ естественным образом отождествляются с операторами на рассматриваемом пространстве. (Задача$_*$. Опишите это отождествление.) Операторы имеют такой инвариант, как след. След оператора T^i_j — число T^i_i. Числа можно рассматривать как тензоры типа $(0, 0)$. Тем самым, по тензору типа $(1, 1)$ строится тензор типа $(0, 0)$. Аналогичная операция применима и к тензорам более высокого ранга. Пусть T — тензор типа (p, q) ($p > 0$, $q > 0$) с компонентами $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ и пусть зафиксированы номера p_0 и q_0 ($1 \le p_0 \le p$, $1 \le q_0 \le q$).

Определение: Сверткой тензора T по выбранным индексам называется тензор $\widehat{T}$ типа $(p - 1, q - 1)$, компоненты которого определяются формулой:

$$\widehat{T}^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = T^{i_1 \dots i_{p_0-1} k i_{p_0} \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q_0-1} k j_{q_0} \dots j_{q-1}}$$

(как обычно, здесь подразумевается суммирование по верхнему и нижнему индексу k).

Задача$_*$. Доказать, что свертка $\widehat{T}$ действительно является тензором.

Задача. Дать определение свертки в терминах полилинейной функции от векторов и ковекторов.

Задача$_*$. Доказать, что результат свертки зависит от того, по какой паре индексов производится сворачивание.

Задача$_*$. Пусть T — тензор типа $(1, 0)$, S — тензор типа $(0, 1)$. Что такое свертка их тензорного произведения?

Задача. Пусть $1 \le q_1 \le q_2 \le q$,

$$\widehat{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-2}} = \sum_{k=1}^{n} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q_1-1} k j_{q_1} \dots j_{q_2-2} k j_{q_2-1}, \dots, j_{q-2}}.$$

Доказать, что $\widehat{T}$ тензором (никакого типа) не является.

Свертку, естественно, можно проводить по нескольким ("непересекающимся") парам верхних и нижних индексов. При этом результат не зависит от порядка "обработки"пар, по которым производится свертка.

Задача$_*$. Пусть $T^{ij}_{k\ell}$ — тензор типа $(2,2)$, $\widehat{T}_{k\ell} = \sum\limits_{i=1}^{n} T^{ii}_{k\ell}$. Доказать, что $\widehat{T}_{k\ell}$ тензором не является.

3. Перестановка индексов. Пусть, например, T — тензор типа $(2,2)$ с компонентами $T^{ij}_{k\ell}$. Пусть $\widehat{T}^{ij}_{k\ell} = T^{ji}_{k\ell}$. Нетрудно видеть, что $\widehat{T}$ — тензор (докажите: задача$_*$). Говорят, что он получен из тензора T перестановкой двух верхних индексов. Точно так же можно переставить два нижних индекса. Если индексов (верхних или нижних) больше чем 2, то при перестановке двух индексов надо зафиксировать их позиции. Можно также подвергнуть все верхние или нижние индексы произвольной (фиксированной) перестановке.

Задача$_{**}$. Пусть $\widehat{T}^{ij}_{k\ell} = T^{kj}_{i\ell}$. Показать, что $\widehat{T}$, вообще говоря, тензором не является.

Задача$_*$. Доказать, что $\widehat{T}$ из предыдущей задачи является тензором тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Определение: Говорят, что тензор T симметричен (соответственно, кососимметричен) по паре индексов (верхних **или** нижних), если при их перестановке он не меняется (соответственно, умножается на (-1)). Говорят, что тензор полностью симметричен (или просто симметричен) по верхним (аналогично — по нижним) индексам, если он не меняется при перестановке любых двух из них. Говорят, что тензор полностью кососимметричен (или просто кососимметричен) по верхним (аналогично — по нижним) индексам, если при перестановке любых двух из них он умножается на (-1). (При произвольной перестановке верхних (соответственно — нижних) индексов такой тензор умножается на знак перестановки.)

Пусть T — тензор типа $(0,2)$.

Утверждение. Тензор T представим в виде суммы симметричного и кососимметричного, причем единственным образом.

Доказательство. Такое представление можно написать явно: $T_{ij} = \frac{T_{ij}+T_{ji}}{2} + \frac{T_{ij}-T_{ji}}{2}$. Единственность представления докажите сами. □

Задача$_*$. Верно ли, что любой тензор типа $(0,q)$ представим в виде суммы (полностью) симметричного и кососимметричного?

Задача**. Придумать аналог приведенного утверждения для тензоров типа $(0,q)$.

3. Симметризация и альтернирование. Выше по тензору типа $(0,2)$ мы построили два тензора: $\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}$ и $\frac{T_{ij}-T_{ji}}{2}$. Аналог этой операции существует для тензоров любого типа. Пусть T — тензор типа (p,q) с компонентами $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. Пусть $\widehat{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{1}{q!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} T^{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_p)}_{j_1\ldots j_q}$, $\hat{\widehat{T}} = \frac{1}{q!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} \operatorname{sign}\sigma\cdot T^{\sigma(i_1)\ldots\sigma(i_p)}_{j_1\ldots j_q}$, где S_q — группа перестановок q элементов, $\sigma = (\sigma(1),\ldots,\sigma(q))$ — перестановка из S_q, $\operatorname{sign}\sigma$ — знак перестановки σ.

Задача$_{**}$. Доказать, что $\widehat{T}$ и $\hat{\widehat{T}}$ — тензоры. Доказать, что тензор $\widehat{T}$ симметричен, а тензор $\hat{\widehat{T}}$ кососимметричен по верхним индексам.

Задача$_*$. Имеет ли место равенство $T = \widehat{T} + \hat{\widehat{T}}$?

Определение: Говорят, что тензор $\widehat{T}$ (соответственно, $\widehat{\widehat{T}}$) получен из тензора T симметризацией (соответственно, альтернированием) по верхним индексам.

Аналогично определяются операции симметризации и альтернирования по нижним индексам.

Поведение тензоров при отображениях. Известно, что (линейное) отображение векторных пространств $H_1 \to H_2$ индуцирует отображение двойственных пространств (т.е. пространств ковекторов) $H_2^* \to H_1^*$ в обратном направлении. Гладкое отображение $F : M^n \to N^m$ определяет линейное отображение $dF(x) : T_xM^n \to T_{F(x)}N^m$ касательного пространства в точке $x \in M^n$ в касательное пространство в точке $F(x) \in N^m$. Поэтому оно индуцирует отображение кокасательных пространств в обратном направлении: $dF(x)^* : T^*_{F(x)}N^m \to T^*_xM^n$. Линейное отображение $H_1 \to H_2$ индуцирует также отображение пространства тензоров типа $(0, k)$ на пространстве H_2 (т.е. полилинейных функций на $H_2 \times \ldots \times H_2$) в пространство тензоров того же типа на H_1 и отображение пространства тензоров типа $(k, 0)$ на H_1 (полилинейных функций на $H_1^* \times \ldots \times H_1^*$) в пространство тензоров того же типа на H_2. Следовательно, то же самое имеет место для тензоров на касательных пространствах T_xM^n и $T_{F(x)}N^m$. Однако, если мы расматриваем не тензоры в одной точке, а тензорные поля, ситуация несколько меняется. Именно, отображение $F : M^n \to N^m$, вообще говоря, не определяет отображение пространства тензорных полей типа $(k, 0)$ (в частности, векторных полей) на многообразии ^{n} в пространство тензорных полей на многообразии N^m. Причина довольно прозаична. Точка многообразия N^m может иметь несколько прообразов при отображении F, а может и не иметь ни одного прообраза. В первом случае образы соответствующих векторов в точках–прообразах могут не совпадать, а во втором такой вектор вообще отсутствует.

Для тензорных полей типа $(0, k)$ подобная проблема отсутствует. Гладкое отображение $F : M^n \to N^m$ определяет отображение dF^* пространства тензорных полей типа $(0, k)$ (в частности, ковекторных полей) на многообразии N^m в пространство тензорных полей того же типа на многообразии M^n. Определение этого отображения: если T — тензорное поле типа $(0, k)$ на многообразии N^m (т.е. (гладко зависящая от точки $y \in N^m$) полилинейная функция на $T_yN^m \times \ldots \times T_yN^m$), $v_1, \ldots, v_k$ — векторы из касательного пространства T_xM^n, то $dF^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(dFv_1, \ldots, dFv_k)$. При этом симметричные тензоры отображаются в симметричные, а кососимметричные — в кососимметричные.

Лекция 8.

Кососимметрические тензоры типа $(0, k)$.

Пусть M^n — гладкое n–мерное многообразие, $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на нем. Эти локальные координаты определяют базис $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в касательном пространстве T_xM^n к многообразию M^n в точке x и двойственный базис $dx^1, \ldots, dx^n$ в кокасательном пространстве $T^*_xM^n$: $\frac{<dx^i,\partial}{\partial x^j>=\delta^i_j}$.

Определение: Внешним произведением $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ называется кососимметрический тензор типа $(0, k)$, равный

$$k! \left[dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_k}\right]_{Alt}.$$

(Здесь $[\bullet]_{Alt}$ — альтернирование тензора $\bullet$.)

Замечание. В некоторых учебниках коэффициент $k!$ перед $[\bullet]_{Alt}$ в этом определении не ставится. Формально говоря, выбор между этими двумя возможными определениями не принципиален. Само по себе определение тензора $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ (т.е. его значения на наборе из k касательных векторов) не используется ни в одном содержательном утверждении. Кососимметрические тензоры типа $(0,k)$ важны постольку, поскольку они участвуют в теории интегрирования по многообразиям или по подмногообразиям. Определение же интеграла такого тензора по многообразию не использует его определение: величина интеграла от этого определения не зависит. С другой стороны, наличие коэффициента $k!$ дает более удобное (психологически) значение тензора $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ на наборе из k базисных векторов. Так, в соответствии с нашим определением, на (стандартной) двумерной плоскости значение тензора $dx\wedge dy$ на паре базисных векторов $e_1=\frac{\partial}{\partial x}$ и $e_2=\frac{\partial}{\partial y}$ равно 1 (при отсутствии коэффициента $k!=2!$ оно равно $1/2$).

Утверждение. Внешние произведения $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ с $i_1<\cdots<i_k$ образуют базис в пространстве кососимметрических тензоров типа $(0,k)$ на касательном пространстве T_xM^n в точке x.

Мы рассматриваем кососимметричные тензоры типа $(0,k)$ в какой-либо точке a многообразия M^n. Как мы знаем, выбор локальных координат x^1, $\ldots$, x^n в окрестности этой точки определяет базис $\partial/\partial x^1$, $\ldots$, $\partial/\partial x^n$ в касательном пространстве T_aM^n к многообразию M^n в точке a и (двойственный) базис dx^1, $\ldots$, dx^n в пространстве $T_a^*M^n$. Кстати, кокасательное пространство $T_a^*M^n$ и есть пространство **кососимметричных** тензоров типа $(0,1)$ в точке a просто потому, что все тензоры типа $(0,1)$ кососимметричны (а заодно и симметричны). Как известно из линейной алгебры, базис в пространстве векторов T_aM^n определяет и базис в пространстве в пространстве кососимметричных полилинейных k–форм на нем. Чтобы его описать, введем следующее определение. Пусть T и S — кососимметричные тензоры в точке a типов $(0,k)$ и $(0,\ell)$ соответственно.

Определение: Внешним произведением кососимметричных тензоров T и S называется тензор $T\wedge S$ типа $(0,k+\ell)$, компоненты которого определяются формулой

$$(T\wedge S)_{i_1,\ldots,i_{k+\ell}}=\frac{1}{k!\cdot\ell!}\cdot\sum_\sigma \operatorname{sign}\sigma\cdot T_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}}\cdot S_{i_{\sigma(k+1)},\ldots,i_{\sigma(k+\ell)}},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ элементов $1,\ \ldots,\ k+\ell$.

То, что $T\wedge S$ — тензор, следует из того, что он является линейной комбинацией тензоров, получаемых из тензорного произведения $T\otimes S$ перестановками индексов. Непосредственно проверяются следующие факты:
1) $T\wedge S$ — кососимметричный тензор;
2) $(T_1+T_2)\wedge S=T_1\wedge S+T_2\wedge S$, $(c\cdot T)\wedge S=c\cdot T\wedge S$;
3) $(T\wedge S)\wedge R=T\wedge(S\wedge R)$ (это равенство позволяет не расставлять скобки в "длинных"внешних произведениях, например, писать $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$);
4) $T\wedge S=(-1)^{k+\ell}S\wedge T$;
5) $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=\sum\limits_\sigma \operatorname{sign}\sigma\cdot dx^{\sigma(i_1)}\otimes\ldots\otimes dx^{\sigma(i_k)}$.

Замечание. Довольно часто в книгах внешнее произведение форм определяют так, что вместо 5) имеет место формула $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!}\sum\limits_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma\cdot dx^{\sigma(i_1)}\otimes\ldots\otimes dx^{\sigma(i_k)}$ (т.е. внешнее произведение $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ меньше "нашего"в $k!$ раз). Такое определение приводит к некоторым (возможно, психологическим) неудобствам. Так, при таком определении на обычной плоскости значение $(dx\wedge dy)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ тензора $dx\wedge dy$ на паре базисных векторов равно не 1 (как у нас и как бы хотелось), а 1/2. Бывает, что дается определение внешнего произведения, совпадающее с тем, которое используем мы, однако некоторые формулы приводятся в таком виде, в котором они верны как раз для другого определения.

Нетрудно видеть, что базис в пространстве кососимметричных тензоров типа $(0,k)$ (в точке a) образуют внешние произведения $dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ с $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Таким образом, любой кососимметричный тензор ω типа $(0,k)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Кососимметричные тензорные поля типа $(0,k)$ обычно называются дифференциальными k–формами. В локальных координатах дифференциальная k–форма записывается точно такой же формулой, в которой коэффициенты $\omega_{i_1\ldots i_k}$ являются функциями от точки (обычно, как всегда в нашем курсе, бесконечно дифференцируемыми). На дифференциальных формах также определена операция внешнего произведения, обладающая свойствами 1)—5).

Помимо этого на дифференциальных формах определена операция, которая из k–формы делает $(k+1)$–форму.

Определение: Внешним дифференциалом дифференциальной k–формы $\omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$ $(\omega_{i_1\ldots i_k} = \omega_{i_1\ldots i_k}(x))$ называется

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} d\omega_{i_1\ldots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j}\cdot dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

(здесь, как обычно, по индексу j производится суммирование).

Это определение дано в (локальных) координатах и поэтому априори неясно, что оно корректно (т.е. что внешний дифференциал $d\omega$ дифференциальной формы ω не зависит от выбора системы координат). Нужно проверить, что операция внешнего дифференцирования коммутирует с операцией замены координат.

Теорема. Операция внешнего дифференцирования коммутирует с операцией замены координат и поэтому внешний дифференциал формы определен корректно.

——————————————————-

Свойства внешнего дифференциала.

Теорема. Внешнее дифференцирование d обладает следующими свойствами:
1) если ω и η — дифференциальные k– и ℓ–формы, то $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$;
2) $dd = 0$;
3) если $F: M^m\to N^n$ — гладкое отображение, ω — дифференциальная k–форма на многообразии N^n, то $F^*d\omega = dF^*\omega$.

Доказательство. Свойство 1) можно проверить в координатах для форм ω и η вида $f \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и $g \cdot dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}$ соответственно. Имеем $d(\omega \wedge \eta) = d(fg \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}) = \frac{\partial(fg)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell} = (\frac{\partial(f)}{\partial x^j} g + f \frac{\partial(g)}{\partial x^j}) \cdot dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) \wedge (g \cdot dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}) + (-1)^k (f \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_\ell}\right) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

Свойство 2) ($dd = 0$) также можно проверить на форме $\omega = f \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$: $dd\omega = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^\ell} \cdot dx^\ell \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$, поскольку коэффициенты (вторые частные производные) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^\ell}$ симметричны по j и ℓ, а внешние произведения $dx^\ell \wedge dx^j$ — кососимметричны.

Явная проверка свойства 3) (в локальных координатах на прообразе M^m и на образе N^n) несколько сложнее. Поэтому мы приведем другое доказательство (и даже два).

1. Как и раньше, равенство

$$F^* d\omega = dF^* \omega \qquad (*)$$

достаточно проверить для формы ω на многообразии N^n вида $f \cdot dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$ ($y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты на N^n). Воспользуемся индукцией по порядку k дифференциальной формы ω. Предположим, что $k > 1$ и равенство $(*)$ имеет место для форм порядка $< k$. В рассматриваемой координатной окрестности форма ω является произведением $\omega_1 \wedge \omega_2$ форм порядков k_1 и k_2, где $k_i < k$ ($i = 1, 2$). Имеем $F^* d\omega = F^* d(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*\left(d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2\right) = (F^* d\omega_1) \wedge (F^* \omega_2) + (-1)^{k_1} (F^* \omega_1) \wedge (F^* d\omega_2) = (dF^* \omega_1) \wedge (F^* \omega_2) + (-1)^{k_1} (F^* \omega_1) \wedge (dF^* \omega_2) = d\left((F^* \omega_1) \wedge (F^* \omega_2)\right) = dF^* (\omega_1 \wedge \omega_2) = dF^* \omega$.

Осталось доказать равенство $(*)$ для 0– и для 1–форм. Для 0–форм (т.е. для функций) это равенство — свойство, хорошо известное из анализа (заметим, что для функции f на многообразии N^n $(F^* f)(x) = f(F(x))$). Для 1–формы $\omega = f \cdot dx^i$ равенство $(*)$ можно доказать так же, как и для произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ выше. Имеем: $F^* d\omega = F^* d(f \cdot dx^i) = F^*(df \wedge dx^i)$ (здесь мы воспользовались тем, что $ddx^i = 0$). Далее, $F^* d\omega = (F^* df) \wedge (F^* dx^i) = (dF^* f) \wedge (dF^* x^i) + F^* f \cdot ddF^* x^i = d((F^* f) \cdot (dF^* x^i)) = d((F^* f) \cdot (F^* dx^i)) = dF^*(f \cdot dx^i) = dF^* \omega$.

2. Если отображение F равно композиции $F_2 \circ F_1$ ($F_1 : M^m \to W^N$, $F_2 : W^N \to N^n$), то равенство $(*)$ достаточно доказать для отображений F_1 и F_2: $F^* d\omega = (F_2 \circ F_1)^* d\omega = (F_1^* F_2^*) d\omega = F_1^* (F_2^* d\omega) = F_1^* dF_2^* \omega = d(F_1^* F_2^*) \omega = dF^* \omega$. Равенство $(*)$ нетрудно явно проверить для вложений и для проектирований, т.е. для отображений, задаваемых в локальных координатах формулами $F_1(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$, $F_2(x^1, \ldots, x^N) = (x^1, \ldots, x^n)$. Наконец, любое отображение F может быть представлено в виде композиции $F_2 \circ F_1$ вложения F_1 и проектирования F_2. Можно взять $W = M^m \times N^n$, $F_1(x) = (x, F(x))$, $F_2(x, y) = y$ ($x \in M^m$, $y \in N^n$). □

Лекция 9.

Осталось доказать равенство $(*)$ для 0– и для 1–форм. Для 0–форм (т.е. для функций) это равенство — свойство, хорошо известное из анализа (заметим, что для функции f на многообразии N^n $(F^* f)(x) = f(F(x))$). Для 1–формы $\omega = f \cdot dx^i$ равенство $(*)$ можно доказать так же, как и для произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$ выше. Имеем:

$F^*d\omega = F^*d(f \cdot dx^i) = F^*(df \wedge dx^i)$ (здесь мы воспользовались тем, что $ddx^i = 0$). Далее, $F^*d\omega = (F^*df)\wedge(F^*dx^i) = (dF^*f)\wedge(dF^*x^i) + F^*f \cdot ddF^*x^i = d((F^*f)\cdot(dF^*x^i)) = d((F^*f)\cdot(F^*dx^i)) = dF^*(f \cdot dx^i) = dF^*\omega$.

Дифференциальные формы максимального ранга и интегрирование по подмногообразиям.

Пространство кососимметричных полилинейных n–форм на n–мерном векторном пространстве одномерно. В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ на n–мерном многообразии M^n дифференциальная n–форма ω (однозначно) записывается в виде $f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. В других локальных координатах $\widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n$ форма ω записывается в виде $\widetilde{f} \cdot d\widetilde{x}^1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx}^n$. Имеем

$$\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = f \cdot (\frac{\partial x^1}{\partial \widetilde{x}^{j_1}} d\widetilde{x}^{j_1}) \wedge \dots \wedge (\frac{\partial x^n}{\partial \widetilde{x}^{j_n}} d\widetilde{x}^{j_n}) =$$

$$= \left(\sum_{\sigma=(j_1,\dots,j_n)} \operatorname{sign} \sigma \prod_{s=1}^{n} \frac{\partial x^s}{\partial \widetilde{x}^{j_s}} \right) \cdot f \cdot d\widetilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\widetilde{x}^n = \det J \cdot f \cdot d\widetilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\widetilde{x}^n,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ элементов $1, \dots, n$, J — матрица Якоби $\left(\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j}\right)$ замены координат. Таким образом, $\widetilde{f} = \det J \cdot f$. Итак, при замене координат коэффициент при (внешнем) произведении дифференциалов переменных в n–форме на n–мерном многообразии умножается на якобиан замены координат, т.е. преобразуется почти так же, как и подинтегральная функция при замене координат в интеграле по n–мерной области. В последнем случае подинтегральная функция умножается на модуль якобиана. Если K — некоторая область в координатной окрестности на многообразии M^n, в которой определены координаты $x^1, \dots, x^n$, то для $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ определим интеграл $\int_K \omega$ формы ω по области K как

$$\int \dots \int f dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n.$$

В соответствии с приведенным выше описанием этот интеграл (почти) корректно определен: он не меняется при любых заменах координат с положительным якобианом. Таким образом, если ориентировать область K, т.е. зафиксировать класс систем локальных координат с положительным якобианом перехода от одних к другим, определенный нами интеграл формы ω по области K будет корректно определен.

Определение, которое мы обсуждаем, пока имеет смысл для областей, находящихся в пределах одной координатной окрестности. Если мы хотим интегрировать n–форму по всему n–мерному многообразию, нам нужно решить следующие проблемы:

1) Поскольку, как уже обсуждалось, область интегрирования должна быть ориентированной, надо дать определение ориентации на гладком многоообразии.

2) Мы хотим иметь возможность обсуждать интеграл формы по ограниченной области (в частности, для того, чтобы сравнивать интеграл по области с интегралом по ее границе). Для этого мы введем понятие (гладкого) многообразия с краем.

3) Наконец, в настоящий момент мы имеем определение интеграла n–формы

по области, находящейся в пределах одной координатной окрестности. Наиболее естественный переход от такого "локального"определения к определению интеграла формы по гладкому многообразию (с краем или без) состоит в разбиении многообразия на части, интегралы по которым уже определены (т.е. каждая область находится в пределах координатной окрестности), и определении интеграла по многообразию как суммы интегралов по частям разбиения. Однако, такой подход встречает некоторые трудности. Так, существование разбиения многообразия на куски относительно простой формы является не очень простым утверждением. Даже если существование таких разбиений доказано, для сравнения двух разбиений следует рассмотреть пересечения кусков из двух разбиений, которые могут быть устроены довольно сложно. Можно, конечно, рассматривать разбиения на измеримые (в смысле Лебега) множества. Это позволяет обойти технические трудности. Однако, привлечение интеграла Лебега для определения интеграла гладкой дифференциальной формы по гладкому многообразию выглядит не вполне разумным (как попытка "перекачать"мелкие трудности в область относительно сложной (хотя и известной) теории). Вместо того, чтобы разбивать многообразие, можно "разбивать"интегрируемую n–форму, т.е. представить ее в виде суммы дифференциальных n–форм, каждая из которых отлична от нуля только в области, находящейся в пределах одной координатной окрестности. Для реализации такого подхода требуется понятие разбиения единицы, которое мы и опишем. Помимо использования для определения интеграла по многообразию и доказательства его свойств, разбиения единицы необходимы для доказательства ряда утверждений о гладких многообразиях, таких, как существование продолжений тензорных (например, векторных) полей, существование римановых метрик, теорема о вложимости гладкого многообразия в аффинное пространство, ...

Начнем с самого короткого.

Определение: Ориентирующим атласом на (гладком) многообразии M^n называется такой атлас $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$, для которого все отображения замен координат $\Psi_\alpha \circ \Psi_{\alpha'}^{-1}$ имеют положительные якобианы.

Определение: Ориентирующие атласы $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ и $\{(U'_\beta, \Psi'_\beta)\}$ эквивалентны, если объединение этих атласов также является ориентирующим атласом.

Определение: Говорят, что гладкое многообразие M^n ориентируемо, если на нем существует ориентирующий атлас.

Определение: Ориентацией гладкого многообразия называется выбор ориентирующего атласа (или класса эквивалентных ориентирующих атласов) на нем. Многообразие с его ориентацией называется ориентированным.

Замечание. Если **ориентируемое (!)** многообразие M^n линейно связно (т.е. для любой пары точек x_0 и x_1 существует (непрерывное) отображение $\gamma : I \to M^n$ отрезка $I = [0, 1]$ в многообразие M^n, для которого $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$), то на нем существует ровно две различные ориентации. (Неориентируемое многообразие не имеет ни одной ориентации.)

На ориентированном многообразии M^n про любой репер на нем (набор из n линейно независимых касательных векторов в одной точке многообразия M^n)

можно говорить о его ориентации (положительной или отрицательной). Ориентацию многообразия можно определять и в терминах ориентаций касательных реперов.

Многообразия с краем.

Простейшим (и характерным) примером гладкого n–мерного многообразия является стандартное (координатное) аффинное пространство $\mathbb{R}^n$. Простейшим и характерным примером n–мерного многообразия с краем является полупространство $\mathbb{R}^n_- = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \le 0\}$.

Замечание. Тот факт, что при определении полупространства мы выделили первую координату (x^1) в пространстве $\mathbb{R}^n$ и написали неравенство $x^1 \le 0$ (а, скажем, не $x^1 \ge 0$) выглядит чистой случайностью. В действительности, это сделано совершенно сознательно. В дальнейшем это сделает (более) естественным определение ориентации края ориентированного многообразия, при котором в формуле Стокса не будет знака, зависящего от размерности.

Гладкое многообразие (без края) — это то, что локально изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^n$. После того, как определено "характерное"многообразие с краем, общее определение можно (несколько упрощенно) сформулировать следующим образом: гладкое многообразие с краем — это то, что локально изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}^n_-$. С учетом этого замечания определение (гладкого) многообразия с краем практически дословно повторяет определение гладкого многообразия (без края); см. лекцию 3. Сделаем лишь некоторые комментарии.

Во-первых, должно быть несколько модифицировано определение карты:

Определение$'$: Картой (k–мерной) (U, Ψ) на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм (т.е. взаимно–однозначное, взаимно–непрерывное отображение) $\Psi : U \to V$ открытого множества $U \subset X$ на открытое множество V пространства $\mathbb{R}^k$ или полупространства $\mathbb{R}^k_-$.

Для того, чтобы все последующие определения имели смысл, нужно только сформулировать, что означает гладкость отображения открытого множества W полупространства R^n_- в аффинное пространство $\mathbb{R}^m$ (для самого определения гладкого многообразия с краем достаточно случая $m = n$). Отображение $\Psi : W \to \mathbb{R}^m$ задается набором из m функций $\psi_1, \dots, \psi_m$: $\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))$ $(x \in W)$. Отображение Ψ гладко тогда и только тогда, когда гладки все функции $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. Поэтому достаточно дать определение гладкости функции $f : W \to \mathbb{R}$. Дадим (честно говоря, излишне общее для наших целей) определение гладкости функции $f : X \to \mathbb{R}$ на произвольном подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Гладкость функции — понятие локальное. В частности, можно говорить о гладкости функции в данной точке. Поэтому мы дадим локальное определение.

Определение: Говорят, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$, гладкая, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x в пространстве $\mathbb{R}^n$ и гладкая функция $F : U \to \mathbb{R}$, ограничение которой на $X \cap U$ совпадает с f: $F_{|X \cap U} = f_{|X \cap U}$.

Задача. Пусть f — гладкая функция на полупространстве $\mathbb{R}^n_-$. Доказать, что она является ограничением на $\mathbb{R}^n_-$ некоторой гладкой функции, определенной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Задача*. Сформулировать и доказать аналог утверждения предыдущей задачи для гладкой функции f на открытом подмножестве V полупространства $\mathbb{R}^n_-$.

Задача$_*$. Доказать, что для гладкой (в смысле сформулированного определения) функции на открытом подмножестве V полупространства $\mathbb{R}^n_-$ в точках границы $\partial\mathbb{R}^n_-$ корректно определены все ее частные производные всех порядков.

После указанных замечаний определение формулируется точно так же, как и раньше: гладким многообразием с краем называется топологическое пространство M^k вместе с классом эквивалентных атласов на нем.

Задача$_{**}$. Что произойдет, если в определении гладкого многообразия с краем вместо (замкнутого) полупространства $\mathbb{R}^n_-$ мы возьмем открытое полупространство $\mathbb{R}^n_-{}' = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 < 0\}$?

Определение: Говорят, что точка $x \in M^n$ гладкого многообразия M^n с краем принадлежит краю (многообразия M^n), если в некоторой карте (U, Ψ) (из атласа, определяющего гладкую структуру на M^k; $x \in U$), в которой $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n_-$, $\Psi(x) \in \partial\mathbb{R}^n_- = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\}$.

Задача. Доказать, что если в одной карте (U, Ψ), $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n_-$, образ $\Psi(x)$ точки x принадлежит границе $\partial\mathbb{R}^n_-$ полупространства $\mathbb{R}^n_-$, то то же самое имеет место в любой карте.

(*Указание.* Это утверждение может быть выведено, например, из теоремы об обратном отображении).

Множество ∂M^n точек многообразия M^n, принадлежащих его краю, естественно, называется краем многообразия M^n. Нетрудно видеть, что край ∂M^n n–мерного многообразия M^n с краем само является гладким многообразием размерности $n-1$ без края. Нетрудно описать атлас на краю ∂M^n, задающий на нем структуру гладкого многообразия. Пусть $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ — атлас на многообразии M^n (задающий на нем гладкую структуру). Атласом на краю ∂M^n является семейство карт $\{(U'_\alpha, \Psi'_\alpha)\}$ с $U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M^n$, $\Psi'_\alpha = h \circ \Psi_{\alpha|U'_\alpha}$, где h — естественный изоморфизм границы (края) $\partial\mathbb{R}^n_-$ полупространства $\mathbb{R}^n_-$ со стандартным $(n-1)$–мерным аффинным пространством $\mathbb{R}^{n-1}$: $h(0, x^2, \dots, x^n) = (x^2, \dots, x^n)$. Более того, имеет место следующий факт:

Утверждение. Если многообразие M^n с краем ориентировано, то его край ∂M^n ориентируем и на нем может быть определена каноническая ориентация.

Доказательство (или, правильнее, описание ориентации края ∂M^n). Пусть $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ — ориентирующий атлас на многообразии M^n. В точках $y \in \partial\mathbb{R}^n_-$ матрица дифференциала (матрица Якоби) отображения $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (\widetilde{x}^1, \dots, \widetilde{x}^n)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{x}^1}{\partial x^1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\widetilde{x}^2}{\partial x^1} & & & \\ \vdots & & * & \\ \frac{\partial\widetilde{x}^n}{\partial x^1} & & & \end{pmatrix},$$

где $* = \left(\frac{\partial\widetilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{i=2,\dots,n\\ j=2,\dots,n}}$, $\frac{\partial\widetilde{x}^1}{\partial x^1} \geq 0$ (поскольку при отрицательных значениях x^1 координата $\widetilde{x}^1$ тоже отрицательна). Так как определитель (полной) матрицы Якоби положителен (поскольку рассматриваемый атлас — ориентирующий), то $\det\left(\frac{\partial\widetilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{i=2,\dots,n\\ j=2,\dots,n}} > 0$ и, следовательно, описанный выше атлас $\{(U'_\alpha, \Psi'_\alpha)\}$ является ориентирующим для края ∂M^n многообразия M^n. $\square$

Приведенное описание может быть переформулировано следующим образом. Пусть v_0 — вектор в касательном пространстве к многообразию M^n в точке x, принадлежащей краю ∂M^n и направленный наружу. Последнее означает, что в локальных координатах (со значениями в полупространстве $\mathbb{R}^n_-$) производная $v_0 x^1$ координаты x^1 по направлению вектора v_0 положительна. (Иногда говорят, что v_0 — внешняя нормаль к краю ∂M^n многообразия M^n. Строго говоря, это имеет смысл только если на многообразии M^n задана риманова метрика. Впрочем, от ее выбора определение ориентации (см. ниже) не зависит.) Тогда репер $v_1, \dots, v_{n-1}$ на краю ∂M^n положительно ориентирован тогда и только тогда, когда репер $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ на многообразии M^n положительно ориентирован.

Задача*. Доказать, что любое гладкое $(n-1)$–мерное подмногообразие n–мерного аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ ориентируемо.

Задача$_*$. Верно ли, что любое гладкое $(n-1)$–мерное подмногообразие области n–мерного аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ ориентируемо?

Задача. Верно ли, что любое гладкое $(n-1)$–мерное подмногообразие M^{n-1} замкнутого (т.е. — компактного без края) n–мерного многообразия ориентируемо?

Задача. Доказать, что пространства TM^n и T^*M^n касательного и кокасательного расслоений над (любым) многообразием M^n ориентируемы. Доказать, что пространство $\wedge^n TM^n$ расслоения n–форм над многообразием M^n ориентируемо. Верно ли, что пространство $T^{k,\ell}M^n$ расслоения тензоров типа (k,ℓ) над многообразием M^n ориентируемо?

Задача. Какие из следующих многообразий ориентируемы? a) S^n; b) $\mathbb{RP}^n$; c) $\mathbb{CP}^n$; d) $SO(n)$; e) многообразие единичных касательных векторов на проективном пространстве $\mathbb{RP}^n$ (пространство $\mathbb{RP}^n$ является фактором стандартной сферы S^n по антиподальной инволюции, вектор, касательные к $\mathbb{RP}^n$ единичен, если единичен соответствующий касательный вектор к сфере S^n); f) многообразие аффинных прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Разбиение единицы.

Как уже говорилось, в настоящий момент понятие разбиения единицы требуется нам для того, чтобы определить интеграл n–формы по компактному ориентированному n–мерному многообразию. (Можно не предполагать, что многообразие компактно, но в этом случае надо требовать, чтобы интегрируемая по нему форма имела компактный носитель. Иначе возникают проблемы со сходимостью интеграла.) Поскольку помимо частной задачи, решаемой нами в данный момент, (определение интеграла формы) разбиение единицы имеет множество важных приложений, мы докажем его существование в форме, более сильной, чем нам необходимо: для произвольных (не обязательно компактных многообразий).

Пусть M^n — гладкое многообразие (с краем или без), $\{U_\alpha\}$ — его покрытие открытыми множествами U_α: $\bigcup_\alpha U_\alpha = M^n$.

Определение: Разбиением единицы, вписанным в покрытие $\{U_\alpha\}$, называется семейство (гладких) функций $\{\varphi_\alpha\}$ на многообразии M^n такое, что:
1) $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ для любой точки $x \in M^n$;
2) носитель $supp\,\varphi_\alpha = \overline{\{x \in M^n : \varphi_\alpha(x) \neq 0\}}$ функции φ_α содержится в U_α (через $\overline{X}$ обозначается замыкание подмножества $X \subset M^n$);
3) у любой точки $x \in M^n$ существует ее окрестность U, для которой количество функций φ_α, не равных (тождественно) нулю на U, конечно;
4) $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha \equiv 1$ (указанная сумма имеет смысл в силу условия 3).

Замечание. Хотя априори мы ничего не предполагаем о количестве (мощности множества) элементов покрытия U_α, однако без ограничения общности можно считать, что множество индексов α не более, чем счетно. Более точно, можно показать, что: 1) из любого (открытого) покрытия (гладкого) многообразия можно выбрать не более чем счетное; 2) в любом случае множество тех индексов α, для которых функция φ_α не равна тождественно нулю, не более чем счетно. (**Задача:** докажите это.)

Теорема. Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия M^n существует вписанное в него разбиение единицы.

Лекция 10.

Теорема. Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия M^n существует вписанное в него разбиение единицы.

Замечание. Хотя априори мы ничего не предполагаем о количестве (мощности множества) элементов покрытия U_α, однако без ограничения общности можно считать, что множество индексов α не более, чем счетно. Более точно, можно показать, что: 1) из любого (открытого) покрытия (гладкого) многообразия можно выбрать не более чем счетное; 2) в любом случае множество тех индексов α, для которых функция φ_α не равна тождественно нулю, не более чем счетно. (**Задача:** докажите это.)

Доказательство. Покажем сначала, что любое многообразие может быть представлено как объединение счетного числа компактных множеств. Внутренностью $Int\,Y$ подмножества Y топологического пространства X называется $X \setminus \overline{X \setminus Y}$, т.е. множество точек x, лежащих в Y вместе с некоторой окрестностью $U = U(x)$.

Лемма. Существует такая последовательность K_i $(i = 1, 2, \ldots)$ компактных подмножеств многообразия M^n, что:
1) $K_i \subset Int\,K_{i+1}$;
2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i = M^n$.

Замечание. Если многообразие M^n компактно, то можно положить $K_i = M^n$ для всех i.

Доказательство. Нетрудно показать, что многообразие M^n имеет счетное покрытие открытыми областями W_i, каждая из которых является открытым шаром (некоторого радиуса r_i) в какой-нибудь из координатных окрестностей (вообще говоря, каждая в своей). (Такое покрытие можно построить, например, следующим способом. Следует взять элементы счетной базы открытых множеств многообразия M^n, содержащиеся в картах некоторого атласа (зафиксировав свою карту для каждого из элементов базы). Это семейство также является базой открытых множеств в M^n. В качестве покрытия $\{W_i\}$ можно взять семейство всех открытых шаров рационального радиуса с центрами в рациональных точках в этих элементах базы (в соответствующих картах).) Теперь пусть K_1 — замкнутый шар радиуса $(1-1)\cdot r_1$ в шаре W_1; K_2 — объединение замкнутого шара радиуса $(1-\frac{1}{2})\cdot r_1$ в шаре W_1 и замкнутого шара радиуса $(1-1)\cdot r_2$ в шаре W_2; $\ldots$; K_i — объединение замкнутого шара радиуса $(1-\frac{1}{i})\cdot r_1$ в шаре W_1, замкнутого шара радиуса $(1-\frac{1}{i-1})\cdot r_2$ в шаре W_2, $\ldots$, замкнутого шара радиуса $(1-\frac{1}{2})\cdot r_{i-1}$ в шаре W_{i-1} и замкнутого шара радиуса $(1-1)\cdot r_i$ в шаре W_i; $\ldots$ Нетрудно видеть, что построенная последовательность множеств K_i обладает требуемыми свойствами. $\square$

Для каждой точки $x \in M^n$ выберем окрестность $A(x)$, обладающую следующими свойствами:
1) $A(x)$ содержится в одном из элементов покрытия U_α;
2) $A(x)$ является (открытым) шаром с центром в точке x (некоторого радиуса $r = r(x)$) в некоторой координатной окрестности;
3) если $x \in K_i \setminus K_{i-1}$, то окрестность $A(x)$ не пересекается ни с множеством $M^n \setminus K_{i+1}$, ни с множеством K_{i-1}.
Пусть $A'(x)$ и $A''(x)$ — открытые шары в шаре $A(x)$ радиусов $r(x)/3$ и $2r(x)/3$ соответственно. Пусть $\eta(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменной t, которая принимает значения от 0 до 1, равна единице при $t < \frac{1}{3}$ и равна нулю при $t > \frac{2}{3}$ (существование подобной функции доказывалось в курсе анализа). Пусть ψ_x — (бесконечно дифференцируемая) функция на многообразии M^n, равная $\eta(r/r(x))$ в шаре $A(x)$ (r — "растояние" до центра в шаре $A(x)$) и равная нулю вне $A(x)$. Семейство $\{A'(x)\}$ является открытым покрытием многообразия M^n. Для любого компактного множества из этого покрытия можно выбрать конечное. Пусть $x_1, \ldots, x_{k_1}$ — такое множество точек (компактного) множества K_1, что $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} A'(x_i)$; $x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}$ — такое множество точек из $K_2 \setminus K_1$, что $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} A'(x_i)$; $\ldots$; $x_{k_{s-1}+1}, \ldots, x_{k_s}$ — такое множество точек из $K_s \setminus K_{s-1}$, что $K_s \subset \bigcup_{i=1}^{k_s} A'(x_i)$; $\ldots$ Функции $\psi_i = \psi_{x_i}$ обладают следующими свойствами:
1) $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$;
2) $supp\,\psi_i \subset A(x_i)$;
3) для любой точки $x \in M^n$ существует такой номер i, что $\psi_i(x) = 1$;
4) множество K_{s+1} пересекается с $supp\,\psi_i$ только если $i \leq k_{s+2}$; поэтому у любой точки из множества K_s существует ее окрестность $(Int\,K_{s+1})$, для которой количество функций ψ_i, не равных (тождественно) нулю на ней, конечно.

Замечание. Существование последовательности функций ψ_i, обладающей описанными здесь свойствами, полезно для ряда задач (например, для доказательства вложимости гладкого многообразия в аффинное пространство).

Для каждого i выберем $\alpha = \alpha(i)$ так, что $A(x_i) \subset U_\alpha$ (тогда $supp\,\psi_i$ содержится в $U_{\alpha(i)}$). Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sum\limits_{i:\,\alpha=\alpha(i)} \psi_i(x)}{\sum\limits_i \psi_i(x)}.$$

Нетрудно видеть, что семейство функций φ_α является разбиением единицы, вписанным в покрытие $\{U_\alpha\}$. $\square$

Интеграл формы по многообразию.

Существование разбиения единицы в общей ситуации (для некомпактного многообразия) используется для доказательства ряда утверждений, таких как продолжимость функции или дифференциальной формы с подмножества на многообразие, вложимость многообразия в аффинное пространство, аппроксимируемость непрерывного отображения гладким, ... Для наших ближайших целей потребуется только существование разбиения единицы для компактного многообразия. Такое разбиение единицы конечно, т.е. в него входит конечное число функций, отличных от нуля.

Пусть M^n — гладкое n–мерное ориентированное многообразие (с краем или без), ω — дифференциальная n–форма на M^n. Мы хотим определить интеграл формы ω по многообразию M^n. Если подмногообразие M^n некомпактно (например, если M^n — аффинное пространство $\mathbb{R}^n$), возникают трудности, связанные со сходимостью интеграла. Методы преодоления подобных трудностей обсуждаются в математическом анализе и мы не будем здесь на них останавливаться. Поэтому мы будем предполагать, что многообразие M^n компактно. (Без каких-либо изменений можно предполагать, что многообразие M^n произвольно, но форма ω имеет компактный носитель.)

Предположим, сначала, что форма ω имеет "небольшой"носитель в том смысле, что этот носитель целиком помещается в пределах одной координатной карты (U, Ψ) (из ориентирующего (**!**) атласа) ($\Psi : U \to V$, V — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_-$, $supp\,\omega \subset U$). В этом случае мы можем дать следующее "определение": интегралом $\int_{M^n} \omega$ формы ω по многообразию M^n называется "ее интеграл в соответствующей карте", т.е. интеграл $\int_V (\Psi^{-1})^*\omega$. Если $(\Psi^{-1})^*\omega = f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то последний интеграл — это $\int_V f \cdot dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$. Независимость этого "определения"от выбора координатной карты, в которой помещается носитель $supp\,\omega$ формы ω, обсуждалась ранее.

Теперь пусть ω — произвольная n–форма на многообразии M^n и пусть $\{(U_i, \Psi_i)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ — ориентирующий атлас на M^n.

Определение: Интегралом $\int_{M^n} \omega$ формы ω по многообразию M^n называется $\sum\limits_{i=1}^N \int_{M^n} \varphi_i\omega$, где $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{U_i\}$.

Замечание. В этом определении каждая из дифференциальных форм $\varphi_i \omega$ имеет носитель, содержащийся в одной из координатных карт, и поэтому ее интеграл дается предыдущим "определением". Очевидно, что такой интеграл линеен как функция от формы. В частности, если $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где носители форм ω_1 и ω_2 лежат в одной координатной окрестности, то $\int_{M^n} \omega = \int_{M^n} \omega_1 + \int_{M^n} \omega_2$.

Утверждение. Определение интеграла формы ω по многообразию M^n корректно, т.е. не зависит от выбора атласа $\{(U_i, \Psi_i)\}$ и разбиения единицы $\{\varphi_i\}$.

Доказательство. Пусть $\{(U'_j, \Psi'_j)\}$ $(j = 1, \ldots, M)$ — другой (ориентирующий) атлас на многообразии M^n, $\{\varphi'_j\}$ — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{U'_j\}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{M} \int_{M^n} \varphi'_j \omega = \sum_{j=1}^{M} \int_{M^n} \varphi'_j \left(\sum_{i=1}^{N} \varphi_i \right) \omega = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \int_{M^n} \varphi'_j \varphi_i \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{M^n} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{M} \varphi'_j \right) \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{M^n} \varphi_i \omega.$$

(Мы воспользовались линейностью интеграла в описанной выше формулировке.) $\square$

Укажем на некоторые (очевидные) свойства интеграла.

1. **Линейность**: $\int_{M^n} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{M^n} \omega_1 + \int_{M^n} \omega_2$, $\int_{M^n} (\lambda \omega) = \lambda \int_{M^n} \omega$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
2. **Аддитивность** по отношению к разбиениям области интегрирования. Конечно, такая аддитивность имеет место по отношению к широкому классу разбиений области интегрирования. Например, область интегрирования может быть разбита на симплексы или на кубы. Однако, ни симплексы, ни кубы многообразиями с краем не являются и поэтому, формально говоря, интеграл по симплексу или по кубу нами не был определен. Конечно, нетрудно было бы перефомулировать (или, доформулировать) понятие интеграла так, чтобы оно включало интегралы по подобным областям. Однако, мы этого делать не будем и поэтому сформулируем свойство аддитивности в самой простой форме. Пусть замкнутое (компактное без края) ориентированное многообразие M^n представлено в виде объединения двух многообразий с краем W_1^n и W_2^n, пересекающихся по их общему краю: $M^n = W_1^n \cup W_2^n$, $W_1^n \cap W_2^n = \partial W_1^n = \partial W_2^n$. Тогда

$$\int_{M^n} \omega = \int_{W_1^n} \omega + \int_{W_2^n} \omega.$$

(Здесь подразумевается, что многообразия W_1^n и W_2^n рассматриваются с ориентацией, наследуемой из ориентации многообразия M^n. Кстати, в этом случае ориентации многообразия $\partial W_1^n = \partial W_2^n$, рассматриваемого как край многообразий W_1^n и W_2^n соответственно, противоположны.)

Формула Стокса.

В анализе известны формулы, связывающие интеграл по области с (некоторым) интегралом по ее краю: формулы Грина, Стокса, Гаусса–Остроградского. Все они являются частными случаями следующего общего утверждения.

Теорема Стокса. Пусть M^n — компактное ориентированное многообразие с краем ∂M^n. ∂M^n является замкнутым (т.е. компактным без края) ориентированным многообразием. Пусть ω — $(n-1)$–форма на многообразии M^n. Тогда

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega.$$

Задача. Проверить (или, правильнее, проинтерпретировать), что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями (общей) теоремы Стокса.

Доказательство. Как это часто бывает, доказательство общей теоремы Стокса в определенном смысле проще доказательств ее частных случаев. Основную роль в этом играет доказанная нами инвариантность дифференциала формы, позволяющая производить вычисления в удобных локальных координатах.

Используя разбиение единицы и линейность интеграла, мы можем свести доказательство к случаю, когда носитель дифференциальной формы ω находится в пределах одной координатной карты (U, Ψ): $supp\,\omega \subset U$. Более того, не теряя общности мы можем предполагать, что эта координатная карта является является параллелепипедом (в своих координатах, т.е. параллелепипедом является соответствующая область $V = \Psi(U)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$). Кроме того, можно считать, что (в рассматриваемых координатах) форма ω имеет вид $f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1}\widehat{\wedge dx^i} \wedge dx^{i+1} \ldots \wedge x^n$, где $supp\, f \subset V$ (здесь, как принято записывать, знак $\widehat{\ }$ означает отсутствие соответствующего сомножителя.) Рассмотрим различные случаи.

1. $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, $V = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : A_j < x^j < B_j, j = 1, \ldots, n\}$. В этом случае $\int_{\partial M^n} \omega = 0$ (просто потому, что носитель формы ω не пересекается с краем ∂M^n многообразия M^n). Имеем $d\omega = \pm \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ (здесь $\pm 1 = (-1)^{i-1}$, однако точное значение этого знака для нас неважно). Поэтому

$$\int\limits_{M^n} d\omega = \pm \int\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \pm \int\limits_{A_n}^{B_n} \cdots \widehat{\int\limits_{A_i}^{B_i}} \cdots \int\limits_{A_1}^{B_1} \left(\int\limits_{A_i}^{B_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^n = 0,$$

поскольку (в соответствии с формулой Ньютона–Лейбница) обыкновенный интеграл в круглых скобках равен нулю.

2. $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n_-$, $V = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : A_1 < x^1 \le 0, A_j < x^j < B_j$ при $j \ne 1\}$. Рассмотрение зависит от того, равен ли индекс i единице или нет (i определяется тем, что $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \ldots \widehat{\wedge dx^i} \wedge \ldots \wedge x^n$). Пусть сначала $i \ne 1$. Тогда $\omega_{|\partial M^n} = 0$ (т.к. $dx^1 = 0$ на $\partial \mathbb{R}^n_-$) и значит $\int_{\partial M^n} \omega = 0$. Имеем $d\omega = \pm \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$,

$$\int\limits_{M^n} d\omega = \pm \int\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \pm \int_{A_n}^{B_n} \cdots \int_{A_i}^{\widehat{B_i}} \cdots \int_{A_2}^{B_2} \int_{A_1}^{0} \left(\int_{A_i}^{B_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1\, dx^2 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^n = 0.$$

3. $\Psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n_-$, $V = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : A_1 < x^1 \leq 0, A_j < x^j < B_j$ при $j \neq 1\}$, $\omega = f \cdot dx^2 \wedge \ldots \wedge x^n$, $supp\, f \subset V$. Имеем $(\Psi^{-1})^* \omega_{|\partial \mathbb{R}^n_-} = f(0, x^2, \ldots, x^n) \cdot dx^2 \wedge \ldots \wedge x^n$. Поэтому

$$\int_{\partial M^n} \omega = \int_{A_n}^{B_n} \cdots \int_{A_2}^{B_2} f(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \ldots dx^n.$$

(Обратите внимание на то, что система координат x^2, $\ldots$, x^n на краю ∂M^n многообразия M^n является ориентирующей.) Далее имеем $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ (здесь важно то, что в выражении для ω отсутствует дифференциал именно первой переменной и поэтому в выражении для $d\omega$ не появляется никакого знака). Поэтому

$$\int_{M^n} d\omega = \int_V \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{A_n}^{B_n} \cdots \int_{A_2}^{B_2} \left(\int_{A_1}^{0} \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \right) dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \int_{A_n}^{B_n} \cdots \int_{A_2}^{B_2} f(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \ldots dx^n = \int_{\partial M^n} \omega.$$

□

Лекция 11.

Задача. Проверить (или, правильнее, проинтерпретировать), что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями (общей) теоремы Стокса.

Задача. Вывести из теоремы Стокса теорему Коши: если f — голоморфная функция в области комплексной прямой, ограниченной кривой γ, то $\oint_\gamma f dz = 0$.

Когомологии де Рама.

Пусть M^n — произвольное гладкое многообразие — компактное или нет, с краем или без. Обозначим через $\Omega^k(M^n)$ (линейное) пространство дифференциальных k–форм на многообразии M^n. Дифференциал формы является (линейным) отображением $d_k = d : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k-1}(M^n)$. Таким образом, операторы внешнего дифференцирования d связывают пространства $\Omega^k(M^n)$ в последовательность

$$0 \to \Omega^0(M^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(M^n) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^k(M^n) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M^n) \xrightarrow{d} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M^n) \xrightarrow{d} \Omega^n(M^n) \to 0.$$

При этом суперпозиция $d_{k+1} \circ d_k = d \circ d$ двух последовательных операторов равна нулю. Последовательность гомоморфизмов с таким свойством называется (коцепным) комплексом. Такая ситуация часто встречается в топологии и в алгебре и в таком случае полезно бывает рассматривать, так называемые, группы (ко)гомологий комплекса.

Определение: Группой когомологий де Рама (k–ой или k–мерной) многообразия M^n называется группа

$$H^k_{dR}(M^n) := \frac{Ker\, d : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k+1}(M^n)}{Im\, d : \Omega^{k-1}(M^n) \to \Omega^k(M^n)} \left(= \frac{Ker\, d_k}{Im\, d_{k-1}}\right).$$

Замечание. Мы рассматриваем группу когомологий $H^k_{dR}(M^n)$ просто как линейное пространство, без какой-либо дополнительной структуры, например, без топологии. В действительности, часто группа когомологий $H^k_{dR}(M^n)$ является конечномерным линейным пространством (см. задачу ниже). В таком случае топология на этом пространстве определена однозначно.

Формы, дифференциал которых равен нулю, называются замкнутыми. Те, которые являются дифференциалами других форм, называются точными. Свойство $d \circ d = 0$ означает, что точные формы замкнуты. Определение можно переформулировать следующим образом: группа $H^k_{dR}(M^n)$ когомологий де Рама — это факторпространство замкнутых k–форм по точным.

Определение групп когомологий де Рама – довольно простое. Однако, его трудно непосредственно использовать для их вычисления. Даже вычисление когомологий де Рама аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ не является вполне тривиальным. Исходя из определения, легко их вычислить только для точки и, возможно, для прямой $\mathbb{R}^1$ и для окружности S^1. Так для точки имеем:

$$H^k_{dR}(\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ \mathbb{R} & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что когомологии де Рама являются инвариантами дифференцируемого типа многообразия, т.е. группы когомологий де Рама диффеоморфных многообразий изоморфны. В действительности, когомологии де Рама инвариантны относительно гораздо более слабой эквивалентности. Прежде, чем описать соответствующее свойство, обсудим поведение когомологий де Рама при (гладких) отображениях.

Пусть $F : M^n \to N^m$ — гладкое отображение. Мы знаем, что оно индуцирует отображение F^* пространств дифференциальных форм на многообразии N^m в пространства дифференциальных форм на многообразии M^n: $F^* : \Omega^k(N^m) \to \Omega^k(M^n)$. При этом отображение (или, правильнее, отображения) F^* коммутирует (или коммутируют) с внешним дифференцированием: $F^*d = dF^*$.

Утверждение. Отображения F^* индуцируют линейные отображения групп когомологий де Рама: $F^* : H^k_{dR}(N^m) \to H^k_{dR}(M^n)$.

Доказательство. Отображение $F^* : H^k_{dR}(N^m) \to H^k_{dR}(M^n)$, естественно, определяется следующим образом. Пусть a — элемент группы когомолгий $H^k_{dR}(N^m)$. Он представлен замкнутой k–формой α на многообразии N^m. Форма $F^*\alpha$ на многообразии M^n замкнута, так как $dF^*\alpha = F^*d\alpha = 0$. Тогда F^*a — элемент группы $H^k_{dR}(M^n)$, представленный формой $F^*\alpha$. Для доказательства корректности надо проверить, что класс смежности элемента $F^*\alpha$ не зависит от выбора представителя α класса a. Пусть α' — другая (замкнутая) форма на многообразии N^m, являющаяся представителем класса a. Это означает, что $\alpha' = \alpha + d\beta$ для некоторой $(k-1)$–формы β. Имеем $F^*\alpha' = F^*\alpha + F^*d\beta = F^*\alpha + dF^*\beta$, что и требовалось доказать. □

Имеют место следующие (очевидные) свойства функториальности:
1) $id^* = id$ (здесь одно из отображений id — это тождественное отображение многообразия в себя, а другое — тождественное отображение его группы когомологий де Рама);
2) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ (здесь F — отображение M^n в N^m, G — отображение многообразия K^ℓ в M^n).
Эти свойства иногда формулируются в виде утверждения, что "когомологии де Рама являются контравариантными функторами из категории многообразий в категорию линейных пространств".

Очевидно, что когомологии де Рама являются инвариантами дифференцируемого типа многообразий, т.е. диффеоморфные многообразия имеют изоморфные группы когомологий. Это можно доказать, например, воспользовавшись свойствами отображений групп когомологий де Рама, индуцированных отображением многообразий. Пусть $F : M^n \to N^n$ и $G = F^{-1} : N^n \to M^n$ — взаимно обратные диффеоморфизмы многообразий M^n и N^n ($G \circ F = id_{M^n}$, $F \circ G = id_{N^n}$), $F^* : H^k_{dR}N^n \to H^k_{dR}M^n$ и $G^* : H^k_{dR}M^n \to H^k_{dR}N^n$ — отображения групп когомологий, индуцированные отображениями F и G. Тогда $G^* \circ F^* = (F \circ G)^* = (id_{N^n})^* = id_{H^k_{dR}(N^n)}$, $F^* \circ G^* = (G \circ F)^* = (id_{M^n})^* = id_{H^k_{dR}(M^n)}$. Поэтому F^* и G^* — (взаимно обратные) изоморфизмы групп (линейных пространств) $H^k_{dR}M^n$ и $H^k_{dR}N^n$.

Гомотопическая эквивалентность.

Мы покажем, что группы когомологий де Рама инвариантны относительно гораздо более грубого отношения эквивалентности — гомотопической эквивалентности многообразий. Гомотопическая эквивалентность играет очень большую роль в топологии. Опишем сначала это отношение эквивалентности между топологическими пространствами. Отношения эквивалентности, которые мы рассматривали, (гомеоморфность топологических пространств, диффеоморфность многообразий) определялись сразу для пространств. В некоторых случаях удобно начинать с отношения эквивалентности между отображениями. (Вопрос(ы) на сообразительность. Почему такой путь не используется при определении гомеоморфности или диффеоморфности? Какое отношение эквивалентности между отображениями соответствует этим отношениям эквивалентности между пространствами или многообразиями.) Пусть X и Y — топологические пространства, f и g — непрерывные отображения $X \to Y$.

Определение: Говорят, что отображения f и g гомотопны ($f \sim g$), если существует непрерывное семейство отображений $f_t : X \to Y$ такое, что $f_0 = f$, $f_1 = g$, т.е. (расшифровка) если существует непрерывное отображение $F : X \times I \to Y$ (I — отрезок $[0,1]$), для которого $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$.

Здесь $F(x,t) = f_t(x)$. Семейство f_t или отображение F называется гомотопией между отображениями f и g.

Нетрудно видеть, что отношение $\sim$ гомотопности является отношением эквивалентности на множестве (непрерывных) отображений топологических пространств. (Докажите.) Отношение эквивалентности на множестве отображений (обладающее некоторыми естественными свойствами) индуцирует отношение эквивалентности между пространствами: пространства X и Y эквивалентны, если существуют отображения $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ такие, что отображение (композиция) $\psi \circ \varphi$ эквивалентно тождественному отображению id_X пространства X, а отображение $\varphi \circ \psi$ эквивалентно тождественному отображению id_Y пространства Y. Если в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение гомотопности, то мы приходим к понятию гомотопической эквивалентности.

Определение: Говорят, что топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны ($X \sim Y$), если существуют (непрерывные) отображения $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ такие, что отображение $\psi \circ \varphi$ гомотопно id_X, а отображение $\varphi \circ \psi$ гомотопно id_Y. (Отображения φ и ψ называются гомотопическими эквивалентностями.)

Задача$_*$. Докажите, что гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности (между топологическими пространствами).

Примеры: 1. Аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке.
2. Окружность S^1 гомотопически эквивалентна плоскости без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
3. Прямая $\mathbb{R}^1$ гомотопически не эквивалентна окружности S^1.

Следующие утверждения, сформулированные в виде задач, показывают, что гомотопические эквивалентности между гладкими многообразиями могут быть выбраны гладкими.

Задача. Пусть f — непрерывное отображение компактного многообразия M^m в многообразие N^n. Доказать, что отображение f гомотопно гладкому отображению $M^m \to N^n$.

Задача*. Доказать утверждение предыдущей задачи для произвольного многообразия M^m.

Задача. Пусть f и g — гомотопные гладкие отображение компактного многообразия M^m в многообразие N^n. Тогда между ними существует гладкая гомотопия (т.е. гладкое отображение $F : M^m \times I \to N^n$ такое, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$).

Задача*. Доказать утверждение предыдущей задачи для произвольного многообразия M^m.

Следствие. Если гладкие многообразия M^m и N^n гомотопически эквивалентны, то между ними существуют гладкие гомотопические эквивалентности $\varphi : M^m \to N^n$ и $\psi : N^n \to M^m$ ($\psi \circ \varphi \sim id_{M^m}$, $\varphi \circ \psi \sim id_{N^n}$).

Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама.

Теорема А. Группы когомологий де Рама являются гомотопическими инвариантами многообразий, т.е. гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.

Это утверждение является следствие следующей теоремы, которая в определенном смысле является "более правильной"(или более математически грамотной) формой утверждения о гомотопической инвариантности когомологий де Рама. Гладкое отображение $f : M^m \to N^n$ индуцирует для любого k (линейное) отображение $f^* = f_k^* : H^k_{dR}(N^n) \to H^k_{dR}(M^m)$ групп когомологий де Рама.

Теорема B. Если (гладкие) отображения f_0 и f_1 многообразия M^m в многообразие N^n гомотопны, то индуцированные отображения f_0^* и f_1^* групп когомологий де Рама $H_{dR}^k(N^n) \to H_{dR}^k(M^m)$ совпадают.

Вывод теоремы A из теоремы B. Пусть $\varphi : M^m \to N^n$ и $\psi : N^n \to M^m$ — гладкие гомотопические эквивалентности между многообразиями M^m и N^n: $\psi \circ \varphi \sim id_{M^m}$, $\varphi \circ \psi \sim id_{N^n}$). Тогда $\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^* = id_{M^m}^* = id_{H_{dR}^k(M^m)}$, $\psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^* = id_{N^n}^* = id_{H_{dR}^k(N^n)}$. Следовательно, (линейные) отображения φ^* и ψ^* являются взаимно обратными изоморфизмами между $H_{dR}^k(M^m)$ и $H_{dR}^k(N^n)$.

Лекция 12.

Доказательство Теоремы B. Пусть $f_t : M^m \to N^n$ $(t \in I = [0,1])$ — гладкая гомотопия между отображениями f_0 и f_1 и пусть F — (гладкое) отображение $M^m \times I \to N^n$, определяемое формулой $F(x,t) = f_t(x)$. Нам надо доказать, что для замкнутой k–формы ω на многообразии N^n формы $f_0^*\omega$ и $f_1^*\omega$ определяют один и тот же класс когомологий (элемент группы $H_{dR}^k(M^m)$), т.е. что форма $f_1^*\omega - f_0^*\omega$ на многообразии M^n точна (равна $d\eta$ для некоторой $(k-1)$-формы η).

При доказательстве мы будем использовать схему, широко распространенную в алгебраической топологиии и в коммутативной алгебре. Предположим, что $D = D_k : \Omega^k(N^n) \to \Omega^{k-1}(M^m)$ — операторы, определенные для каждого k на пространстве $\Omega^k(N^n)$ всех (а не только замкнутых) k–форм на многообразии N^n), для которых имеет место равенство $f_1^* - f_0^* = \pm Dd \pm dD$ (т.е. $f_{1(k)}^* - f_{0(k)}^* = D_{k+1}d_k + d_{k+1}D_k$; здесь $d_k = d$ и $f_{i(k)}^*$ — соответствующие операторы (внешнее дифференцирование и оператор, индуцированный отображением f_i) на пространствах k–форм, $i = 0, 1$. В этом случае для замкнутой формы ω имеем $f_1^*\omega - f_0^*\omega = \pm d(D\omega)$, что и требовалось. (Семейство операторов D_k, обладающих описанными свойствами, называется (ко)цепной гомотопией (между f_0^* и f_1^*).) Мы (явно) построим такие операторы D. (В действительности у нас знаки $\pm$ в соответствующих формулах будут отсутствовать: $f_1^* - f_0^* = Dd + dD$.)

Пусть ω — k-форма на многообразии N^n. Рассмотрим ее обратный образ $F^*\omega$ (при отображении $F : M^m \times I \to N^n$) на многообразии $M^n \times I$. k-форма Ω на декартовом произведении $M^m \times I$ имеет вид

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} \Omega_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + \sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}} \Omega'_{i_1\ldots i_{k-1}} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}},$$

где $x^1, \ldots, x^m$ — (локальные) координаты на многообразии M^m, t — (естественная) координата на отрезке $I = [0,1]$. Отсюда следует, что форма Ω однозначно представима в виде $\Omega_1 + dt \wedge \Omega_2$, где формы Ω_i не содержат дифференциал dt координаты t (коэффициенты форм Ω_i, конечно, являются функциями как от x^1, $\ldots$, x^m, так и от t; Ω_1 — k–форма, Ω_2 — $(k-1)$ — форма). Пусть $F^*\omega = \omega_1 + dt \wedge \omega_2$ — такое представление для формы $F^*\omega$. Определим $D\omega$ формулой

$$D\omega = \int_0^1 \omega_2 dt. \tag{1}$$

Здесь под интегралом понимается интеграл формы по параметру t, т.е. форма, коэффициенты которой равны интегралам от соответствующих коэффициентов формы ω_2. После интенрирования по t коэффициенты формы будут функциями только от $x^1, \ldots, x^m$, т.е. $D\omega$ является $(k-1)$–формой на многообразии M^m. Для проверки равенства $f_1^*\omega - f_0^*\omega = Dd\omega + dD\omega$ вычислим $f_1^*\omega - f_0^*\omega$, $Dd\omega$ и $dD\omega$.

Пусть $i_t : M^m \to M^m \times I$ — вложение, переводящее $x \in M^m$ в $(x,t) \in M^m \times I$. Имеем $F \circ i_t = f_t$, $f_t^*\omega = i_t^* \circ F^*\omega = i_t^*(\omega_1 + dt \wedge \omega_2) = \omega_1|_{t=const}$ (т.к. $i_t^* dt = 0$). Поэтому

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = \omega_1|_{t=1} - \omega_1|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$dD\omega = \int_0^1 d_x\omega_2 dt, \tag{3}$$

где через $d_x\omega_2$ обозначен внешний дифференциал формы ω_2 по x-координатам (сумма мономов формы $d\omega_2$, не содержащих дифференциал dt). Для вычисления $Dd\omega$ надо написать представление формы $F^*d\omega$ в виде $\Omega_1 + dt \wedge \Omega_2$. Имеем $F^*d\omega = d(F^*\omega) = d(\omega_1 + dt \wedge \omega_2) = d_x\omega_1 + dt \wedge (\partial\omega_1/\partial t) - dt \wedge d_x\omega_2$, откуда

$$Dd\omega = \int_0^1 (\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d_x\omega_2) dt. \tag{4}$$

Формулы (2), (3) и (4) вместе дают требуемое равенство $f_1^*\omega - f_0^*\omega = Dd\omega + dD\omega$. $\square$

Поскольку аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке, имеем:

Следствие.

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ \mathbb{R} & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Из тривиальности групп $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$ когомологий де Рама аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ вытекает:

(лемма Пуанкаре). Любая замкнутая k-форма на аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ точна.

То же самое утверждение имеет место для любой области в $\mathbb{R}^n$, гомотопически эквивалентной точке, например, для шаровой окрестности точки.

Задача. Пусть $\omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ — замкнутая k–форма на пространстве $\mathbb{R}^n$. Написать явную формулу, определяющую $(k-1)$–форму χ, для которой $d\chi = \omega$.

Задача$_*$. Доказать, что $H_{dR}^0(M^n)$ — линейное пространство, размерность которого равна количеству связных компонент многообразия M^n. (Говорят, что две точки x и y лежат в одной компоненте связности многообразия M^n, если их можно соединить путем, т.е. если существует (непрерывное) отображение $f : I \to M^n$ отрезка $I = [0,1]$ в многообразие M^n такое, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.)

Пусть M^n — замкнутое (т.е. компактное без края) ориентированное многообразие, $a \in H_{dR}^n(M^n)$. Пусть ω — (замкнутая) n–форма на многообразии M^n из класса смежности a: $[\omega] = a$. Покажем, что интеграл $\int_{M^n} \omega$ зависит только от класса формы ω в группе когомологий де Рама, т.е. от элемента a. Действительно, пусть ω' — другая n–форма из того же класса смежности: $[\omega'] = a$. Тогда $\omega' - \omega$ — точная форма:

$\omega' - \omega = d\eta$. Следовательно, $\int_{M^n} \omega' = \int_{M^n} \omega + \int_{M^n} d\eta$, а последний интеграл равен нулю по теореме Стокса: $\int_{M^n} d\eta = \int_{\partial M^n} \eta = 0$ (т.к. $\partial M^n = \emptyset$). Тем самым определено (линейное) отображение $int : H^n_{dR}(M^n) \to \mathbb{R}$.

Замечание. Требование, что многообразие M^n ориентированно существенно: интеграл n–формы по неориентированному n–мерному многообразию не определен.

Задача$_*$. Доказать, что int — отображение на.

Следствие. Для замкнутого ориентированного многообразия M^n имеем

$$\dim H^n_{dR}(M^n) \geq 1.$$

Задача*. Доказать, что для замкнутого ориентированного связного многообразия M^n группа когомологий де Рама $\dim H^n_{dR}(M^n)$ одномерна.

Задача. Пусть M^n — неориентируемое связное многообразие. Доказать, что

$$H^n_{dR}(M^n) = 0.$$

Задача. Вычислить когомологии $H^k_{dR}(S^1)$ окружности S^1.

Задача*. Вычислить когомологии $H^k_{dR}(S^2)$ двумерной сферы S^2.

Задача**. Доказать, что группы $H^k_{dR}(M^n)$ когомологий де Рама **компактного** многообразия M^n конечномерны.

Ковариантное дифференцирование.

Из курса анализа известно, сколь полезной является операция дифференцирования функций. Функцию можно дифференцировать по направлению вектора (как в аффинном пространстве, так и на многообразии). При этом $f_{;i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ является тензором типа $(0,1)$, т.е. ковектором. Функция — это тензор типа $(0,0)$. Мы переходим к описанию операции дифференцирования тензора (точнее, тензорного поля) вдоль вектора. Обычное дифференцирование компонент тензора по (локальным) переменным для этой цели не подходит. Так, если $v^i = v^i(x)$ — векторное поле (т.е. тензор типа $(1,0)$), то, как мы знаем, $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором не является. Поэтому надо подойти к этой задаче несколько по–иному. Поскольку тензор — понятие (в определенном смысле) вторичное по отношению к понятию (касательного) вектора, начнем с обсуждения операции дифференцирования векторного поля $v = v(x)$ вдоль вектора $w \in T_{x_0}M^k$ на k–мерном многообразии M^k. (Принципиально, что мы обсуждаем производную вдоль вектора, а не вдоль векторного поля. В последнем случае имеется другое понятие производной (так называемая, производная Ли), которое мы сейчас обсуждать не будем.)

Производная функции f на многообразии M^n по направлению вектора $w \in T_{x_0}M^k$ может быть определена следующим образом. Нужно взять (гладкую) кривую $\gamma(t)$ такую, что $\gamma(0) = x_0$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = w$, и тогда производная wf функции f по направлению вектора w равна

$$wf \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}.$$

Для векторного поля $v = v(x)$ аналогичная формула (с заменой f на v) просто не имеет смысла. Вектора $v(\gamma(t))$ и $v(\gamma(0))$ являются элементами разных пространств ($T_{\gamma(t)}M^k$ и $T_{\gamma(0)}M^k$ соответственно) и их нельзя вычитать. (Даже если многообразие M^k вложено в аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ (см. ниже) и вектора, касательные к M^k, могут рассматриваться просто как вектора из $\mathbb{R}^n$, то в результате вычитания мы получим вектор, ни в каком касательном пространстве к подмногообразию M^k, вообще говоря, не лежащий.) Возникает идея, что для определения производной векторного поля вдоль вектора нужно (или, по крайней мере, можно) определить правило переноса вектора вдоль кривой (из точки $\gamma(t)$ в точку $\gamma(0)$). После такого переноса вектора будут лежать в одном пространстве ($T_{x_0}M^k$) и предел их разности, деленной на t, будет лежать в том же пространстве, т.е. будет (касательным) вектором (конечно, если этот предел существует).

Мы подчеркивали, что понятие многообразия является (не слишком далеким) обобщением понятия подмногообразия аффинного пространства. Поэтому сначала обсудим как можно (а, в действительности, и как нужно) переносить касательные вектора на подмногообразии M^k аффинного пространства $\mathbb{R}^n$. Для определения производной нам требуется научиться переносить вектора в близкие точки (понятие производной является локальным). Локально подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ может быть задано либо семейством уравнений, либо с помощью параметризации. Второе описание в каком-смысле ближе к общему определению многообразия при помощи локальных карт и поэтому есть надежда, что результаты, полученные с его помощью проще обобщить (или переформулировать) для общего многообразия. Пусть $x^1, \ldots, x^k$ — локальные координаты на подмногообразии $M^k \subset \mathbb{R}^n$ (в окрестности точки x_0). Вложение M^k в $\mathbb{R}^n$ определяет аффинные координаты $y^1, \ldots, y^n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ как функции от $x^1, \ldots, x^k$: $y^j = y^j(x^1, \ldots, x^k)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Базис касательного пространства $T_{x_0}M^k$ образуют вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, которые как вектора в $\mathbb{R}^n$ равны $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$. Поэтому векторному полю $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(v^i = v^i(x))$ на многообразии M^k в пространстве $\mathbb{R}^n$ соответствует $v^i(x)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$ (это векторное поле определено только на подмногообразии M^k).

Во всем аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется естественный способ переноса векторов: касательные пространства к $\mathbb{R}^n$ во всех точках естественно отождествляются друг с другом (и с самим пространством $\mathbb{R}^n$). Вектор (как "материальный"направленный отрезок) переносится параллельно самому себе, т.е. "без применения силы"(точнее, без приложения "крутящего момента"). Подобные соображения можно применить и для определения переноса касательных векторов вдоль кривой на подмногообразии аффинного пространства $\mathbb{R}^n$.

При таком переносе нам бы "не хотелось применять силу". Однако, вектор должен оставаться касательным к подмногообразию. Следовательно, на него должна действовать "реакция связи-— сила, ортогональная касательному пространству к подмногообразию. В этой ситуации изменение вектора тоже будет ортогонально касательному пространству к подмногообразию. Поэтому перенос вектора на малое расстояние вдоль кривой $\gamma(t)$ (а именно это нам нужно для определения производной) в первом приближении должен осуществляться следующим образом. Мы берем (касательный к подмногообразию) вектор $v = v(\gamma(t))$ (t мало) в точке

$\gamma(t)$, переносим его в точку $\gamma(0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (т.е. просто рассматриваем его приложенным к другой точке) и проектируем на касательное пространство $T_{x_0}M^k$ к подмногообразию M^k в точке x_0. При таком описании переноса производная (в описанном смысле) векторного поля $v(x)$ вдоль вектора w равна

$$\lim_{t\to 0}\frac{pr_{T_{x_0}M^k}v(\gamma(t))-v(\gamma(0))}{t},$$

где $pr_{T_{x_0}M^k}:\mathbb{R}^n\to T_{x_0}M^k$ — проекция на касательное пространство $T_{x_0}M^k$ к многообразию M^k в точке x_0. Поскольку проектирование $pr_{T_{x_0}M^k}$ — линейный оператор, этот предел равен

$$pr_{T_{x_0}M^k}\left(\lim_{t\to 0}\frac{v(\gamma(t))-v(\gamma(0))}{t}\right)=pr_{T_{x_0}M^k}\left(\frac{dv(\gamma(t))}{dt}\right).$$

Производная по t в нуле вектора $v^i(\gamma(t))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial y^j}$ равна

$$w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q}(x_0)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)+v^p(x_0)\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p\partial x^q}(x_0)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

(т.к. $\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)^q(0)=w^q$). Касательное пространство $T_{x_0}M^k$ к подмногообразию M^k в точке x_0 порождено как базисом векторами $\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$. Обозначим через Γ^i_{pq} компоненты разложения проекции вектора

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p\partial x^q}(x_0)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

на подпространство $T_{x_0}M^k\subset\mathbb{R}^n$ по базису $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, т.е. пусть эта проекция равна $\Gamma^i_{pq}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда проекция на подпространство $T_{x_0}M^k$ производной по t в нуле вектора $v^i(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^i}=v^i(\gamma(t))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial y^j}$ равна $w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q}+\Gamma^i_{pq}v^p\right)$. В соответствии с нашим описанием этот касательный вектор (в точке x_0 многообразия M^k) следует рассматривать как производную $\nabla_w v$ векторного поля $v=v(x)$ по направлению вектора w **на подмногообразии** M^k. Мы будем называть вектор $\nabla_w v$, i–ая компонента $\nabla_w v^i$ которого равна $w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q}+\Gamma^i_{pq}v^p\right)$, **ковариантной** производной векторного поля $v=v(x)$ по направлению вектора $w\in T_{x_0}M^k$. Для $w=\frac{\partial}{\partial x^q}$ мы будем обычно обозначать вектор $\nabla_w v$ через $v_{;q}$ или $\nabla_{;q}v$;

$$\nabla_{;q}v^i\,(=v^i_{;q})=\frac{\partial v^i}{\partial x^q}+\Gamma^i_{pq}v^p.$$

Замечание. Можно показать, что величины Γ^i_{pq} выражаются через компоненты $g_{ij}=(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}$ метрического тензора на многообразии M^k (индуцированного из стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$). Мы получим этот факт позже как следствие более общего утверждения.

Прежде, чем перейти к описанию соответствующего обобщения на произвольные многообразия (не обязательно подмногообразия аффинного пространства), сделаем несколько замечаний (некоторые из которых будут использованы немедленно, а некоторые — чуть позже).

1) При фиксированном $w \in T_{x_0}M^k$ ковариантная производная $\nabla_w v$ является касательным вектором в точке x_0.

2) При фиксированном векторном поле $v = v(x)$ ковариантная производная $\nabla_w v$ линейна по $w \in T_{x_0}M^k$.

Свойства 1) и 2) означают, что $v^i_{;q}$ — тензор типа $(1,1)$.

3) Поскольку $\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p \partial x^q} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^q \partial x^p}$, имеем $\Gamma^i_{pq} = \Gamma^i_{qp}$.

4) При описанном выше переносе вектора из точки $\gamma(t)$ в точку $\gamma(0)$ (t мало) вектор меняется на **ортогональный ему** вектор, величина которого является бесконечно малой по t порядка не выше 1. Отсюда следует, что при таком переносе скалярное произведение двух векторов меняется (если вообще меняется) только на величину порядка t^2. Этим свойством мы воспользуемся когда будем обсуждать соотношение между (ковариантным) дифференцированием векторов (и тензоров вообще) с римановой метрикой.

Теперь мы можем сформулировать обобщение описанной конструкции на произвольные гладкие многообразия.

Определение: Аффинной связностью (или операцией ковариантного дифференцирования) на многообразии M^k называется способ дифференцирования векторных полей $v = v(x)$ вдоль касательных векторов $w \in T_{x_0}M^k$, результатом которого является касательный вектор $\nabla_w v$ в точке x_0 и который в локальных координатах $x^1, \ldots, x^k$ записывается формулой

$$\nabla_w v^i = w^q \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p \right),$$

где Γ^i_{pq} — функции от $x^1, \ldots, x^k$ (v^i и w^i — компоненты векторов v и w в координатах $x^1, \ldots, x^k$).

Поскольку $\nabla_w v^i$ — вектор, линейно зависящий от w, $v^i_{;q} = \nabla_{\partial/\partial x^q} v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p$ является тензором типа $(1,1)$.

Выясним, как меняются величины Γ^i_{pq} при замене (локальных) координат. Заодно мы сможем понять, является ли Γ^i_{pq} тензором. Пусть $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^k$ — другая система локальных координат, $\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\widetilde{q}}$ — величины, описывающие операцию ковариантного дифференцирования в этих координатах.

Теорема.

$$\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\widetilde{q}} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} \left(\Gamma^i_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}} \frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}} \partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} \right).$$

Доказательство.

В новых координатах имеем:

$$\widetilde{v}^{\widetilde{i}}_{;\widetilde{q}} = \frac{\partial v^{\widetilde{i}}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\widetilde{q}} \widetilde{v}^{\widetilde{p}}. \tag{1}$$

С другой стороны, пользуясь тем, что $v^i_{;q}$ — тензор типа $(0,1)$, получаем:

$$\widetilde{v}^{\widetilde{i}}_{;\widetilde{q}} = v^i_{;q}\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq}v^p\right)\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} =$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}v^p\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} = \frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\left(\widetilde{v}^{\widetilde{p}}\frac{\partial x^i}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\right)\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}\left(\widetilde{v}^{\widetilde{p}}\frac{\partial x^p}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\right)\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} =$$

$$= \frac{\partial\widetilde{v}^{\widetilde{p}}}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}} + \widetilde{v}^{\widetilde{p}}\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\right] =$$

$$= \frac{\partial\widetilde{v}^{\widetilde{i}}}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \left[\frac{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\left(\Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\frac{\partial x^q}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial\widetilde{x}^{\widetilde{p}}\partial\widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\right)\right]\widetilde{v}^{\widetilde{p}}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаем требуемый результат. □

Лекция 13.

Базис касательного пространства $T_{x_0}M^k$ образуют вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,\ldots,k)$, которые как вектора в $\mathbb{R}^n$ равны $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$. Поэтому векторному полю $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(v^i = v^i(x))$ на многообразии M^k в пространстве $\mathbb{R}^n$ соответствует $v^i(x)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$ (это векторное поле определено только на подмногообразии M^k).

Мы договорились, что производной векторного поля $v(x)$ вдоль вектора w следует считать

$$pr_{T_{x_0}M^k}\left(\lim_{t\to 0}\frac{v(\gamma(t)) - v(\gamma(0))}{t}\right) = pr_{T_{x_0}M^k}\left(\frac{dv(\gamma(t))}{dt}\right).$$

Производная по t в нуле вектора $v^i(\gamma(t))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial y^j}$ равна

$$w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q}(x_0)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) + v^p(x_0)\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p\partial x^q}(x_0)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

(т.к. $\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)^q(0) = w^q$). Касательное пространство $T_{x_0}M^k$ к подмногообразию M^k в точке x_0 порождено как базисом векторами $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$. Обозначим через Γ^i_{pq} компоненты разложения проекции вектора

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p\partial x^q}(x_0)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

на подпространство $T_{x_0}M^k \subset \mathbb{R}^n$ по базису $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, т.е. пусть эта проекция равна $\Gamma^i_{pq}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда проекция на подпространство $T_{x_0}M^k$ производной по t в нуле вектора $v^i(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^i} = v^i(\gamma(t))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial y^j}$ равна $w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq}v^p\right)$. В соответствии с нашим описанием этот касательный вектор (в точке x_0 многообразия M^k) следует рассматривать как производную $\nabla_w v$ векторного поля $v = v(x)$ по направлению вектора w **на подмногообразии** M^k. Мы будем называть вектор $\nabla_w v$, i–ая компонента $\nabla_w v^i$ которого равна $w^q\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq}v^p\right)$, **ковариантной** производной векторного поля $v = v(x)$ по направлению вектора $w \in T_{x_0}M^k$. Для $w = \frac{\partial}{\partial x^q}$ мы будем обычно обозначать вектор $\nabla_w v$ через $v_{;q}$ или $\nabla_{;q} v$;

$$\nabla_{;q} v^i \, (= v^i_{;q}) = \frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p.$$

Замечание. Можно показать, что величины Γ^i_{pq} выражаются через компоненты $g_{ij} = (\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^j}$ метрического тензора на многообразии M^k (индуцированного из стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$). Мы получим этот факт позже как следствие более общего утверждения.

Прежде, чем перейти к описанию соответствующего обобщения на произвольные многообразия (не обязательно подмногообразия аффинного пространства), сделаем несколько замечаний (некоторые из которых будут использованы немедленно, а некоторые — чуть позже).

1) При фиксированном $w \in T_{x_0}M^k$ ковариантная производная $\nabla_w v$ является касательным вектором в точке x_0.

2) При фиксированном векторном поле $v = v(x)$ ковариантная производная $\nabla_w v$ линейна по $w \in T_{x_0}M^k$.

Свойства 1) и 2) означают, что $v^i_{;q}$ — тензор типа $(1,1)$.

3) Поскольку $\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p \partial x^q} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^q \partial x^p}$, имеем $\Gamma^i_{pq} = \Gamma^i_{qp}$.

4) При описанном выше переносе вектора из точки $\gamma(t)$ в точку $\gamma(0)$ (t мало) вектор меняется на **ортогональный ему** вектор, величина которого является бесконечно малой по t порядка не выше 1. Отсюда следует, что при таком переносе скалярное произведение двух векторов меняется (если вообще меняется) только на величину порядка t^2. Этим свойством мы воспользуемся когда будем обсуждать соотношение между (ковариантным) дифференцированием векторов (и тензоров вообще) с римановой метрикой.

Теперь мы можем сформулировать обобщение описанной конструкции на произвольные гладкие многообразия.

Определение: Аффинной связностью (или операцией ковариантного дифференцирования) на многообразии M^k называется способ дифференцирования векторных полей $v = v(x)$ вдоль касательных векторов $w \in T_{x_0}M^k$, результатом которого является касательный вектор $\nabla_w v$ в точке x_0 и который в локальных координатах $x^1, \ldots, x^k$ записывается формулой

$$\nabla_w v^i = w^q \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p \right),$$

где Γ^i_{pq} — функции от $x^1, \ldots, x^k$ (v^i и w^i — компоненты векторов v и w в координатах $x^1, \ldots, x^k$).

Поскольку $\nabla_w v^i$ — вектор, линейно зависящий от w, $v^i_{;q} = \nabla_{\partial/\partial x^q} v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p$ является тензором типа $(1,1)$.

Выясним, как меняются величины Γ^i_{pq} при замене (локальных) координат. Заодно мы сможем понять, является ли Γ^i_{pq} тензором. Пусть $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^k$ — другая система локальных координат, $\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}$ — величины, описывающие операцию ковариантного дифференцирования в этих координатах.

Теорема.

$$\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\,\widetilde{q}} = \frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\left(\Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\right).$$

Доказательство. В новых координатах имеем:

$$\widetilde{v}^{\widetilde{i}}_{;\widetilde{q}} = \frac{\partial v^{\widetilde{i}}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \widetilde{\Gamma}^{\widetilde{i}}_{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}\widetilde{v}^{\widetilde{p}}. \tag{1}$$

С другой стороны, пользуясь тем, что $v^i_{;q}$ — тензор типа $(0,1)$, получаем:

$$\widetilde{v}^{\widetilde{i}}_{;\widetilde{q}} = v^i_{;q}\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq}v^p\right)\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} =$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}v^p\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\left(\widetilde{v}^{\widetilde{p}}\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\right)\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}\left(\widetilde{v}^{\widetilde{p}}\frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\right)\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} =$$

$$= \frac{\partial \widetilde{v}^{\widetilde{p}}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}} + \widetilde{v}^{\widetilde{p}}\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\right] =$$

$$= \frac{\partial \widetilde{v}^{\widetilde{i}}}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \left[\frac{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{i}}}{\partial x^i}\left(\Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^{\widetilde{p}}\partial \widetilde{x}^{\widetilde{q}}}\right)\right]\widetilde{v}^{\widetilde{p}}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаем требуемый результат. □

Следствие. Коэффициенты связности Γ^i_{pq} преобразуются как компоненты тензора при аффинных заменах координат.

Следствие. Разность $\Gamma^i_{pq} - \Gamma^i_{qp}$ является тензором.

Тензор $\Gamma^i_{pq} - \Gamma^i_{qp}$ называется тензором кручения аффинной связности. Связность называется симметричной, если ее тензор кручения равен нулю.

Перейдем к (ковариантному) дифференцированию тензоров произвольного порядка. Для того, чтобы выяснить, как дифференцируются тензоры различных типов, сформулируем некоторые требования к ковариантному дифференцированию тензоров. Все эти требования можно рассматривать как следствия некоторых (естественных) требований к операции переноса тензоров из точки в (близкую) точку (например, результат переноса тензорного произведения двух тензоров равен тензорному произведению результатов их переноса и, вообще, перенос тензоров согласован с тензорными операциями). Из–за недостатка времени мы на не будем обсуждать требования к операции переноса, а сразу сформулируем свойства ковариантного дифференцирования, которыми мы будем пользоваться. Эти свойства (или требования) — следующие.

1) Операция ковариантного дифференцирования линейна.

2) Ковариантная производная функции (т.е. тензора типа $(0,0)$) — это обычная производная (по направлению вектора).

3) Ковариантная производная векторного поля v в локальных координатах определяется формулой $v^i_{;q} = \frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p$.
4) Ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница дифференцирования произведения: ковариантная производная тензорного произведения $U \otimes V$ тензоров U и V (произвольного типа) дается формулой

$$(U \otimes V)_{;q} = U_{;q} \otimes V + U \otimes V_{;q}.$$

5) (Ковариантная) производная свертки тензора (по двум его индексам) равна свертки производной (по соответствующим индексам).

Из этих свойств вытекают формулы для ковариантных производных произвольных тензоров. **Лекция 14.**

Теорема. Пусть $\xi_i = \xi_i(x)$ — ковекторное поле. Тогда

$$\xi_{i;q} \left(= \nabla_{;q} \xi_i\right) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^q} - \Gamma^p_{iq} \xi_p.$$

Доказательство. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле. Величина $\xi_i v^i$ (значение ковектора ξ на векторе v) является скаляром и поэтому дифференцируется "обычным образом":

$$(\xi_i v^i)_{;q} = \frac{\partial (\xi_i v^i)}{\partial x^q} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^q} v^i + \xi_i \frac{\partial v^i}{\partial x^q}. \qquad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с перечисленными свойствами имеем:

$$(\xi_i v^i)_{;q} = \xi_{i;q} v^i + \xi_i v^i_{;q} = \xi_{i;q} v^i + \xi_i \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} v^p \right) = \xi_{i;q} v^i + \xi_i \frac{\partial v^i}{\partial x^q} + \xi_p \Gamma^p_{iq} v^i \qquad (2)$$

(в последней части равенства мы поменяли местами индексы i и p, по которым производится суммирование). Сравнивая (1) и (2), получаем

$$\xi_{i;q} v^i = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^q} - \Gamma^p_{iq} \xi_p \right) v^i.$$

Поскольку это равенство имеет место для любого векторного поля v, получаем требуемую формулу. $\square$

Пусть T_{ij}, T^j_i и T^{ij} — тензоры типов $(0,2)$, $(1,1)$ и $(2,0)$ соответственно.

Теорема.

$$T_{ij;q} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma^p_{iq} T_{pj} - \Gamma^p_{jq} T_{ip},$$

$$T^i_{j;q} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} T^p_j - \Gamma^p_{jq} T^i_p,$$

$$T^{ij}_{;q} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^q} + \Gamma^i_{pq} T^{pj} + \Gamma^j_{pq} T^{ip}.$$

Доказательство. Докажем это утверждение для тензора типа $(0,2)$. Любой тензор типа $(0,2)$ представим (по крайней мере локально) в виде суммы тензоров вида $\xi_i\eta_j$, т.е. тензорных произведений ковекторов (см. Лекцию 8, задача$_*$). Поэтому утверждение достаточно доказать для тензора $T_{ij}=\xi_i\eta_j$. Имеем

$$T_{ij;q}=(\xi_i\eta_j)_{;q}=\xi_{i;q}\eta_j+\xi_i\eta_{j;q}=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x^q}-\Gamma^p_{iq}\xi_p\right)\eta_j+\xi_i\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial x^q}-\Gamma^p_{jq}\eta_p\right)=$$

$$=\frac{\partial(\xi_i\eta_j)}{\partial x^q}-\Gamma^p_{iq}\xi_p\eta_j-\Gamma^p_{jq}\xi_i\eta_p=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^q}-\Gamma^p_{iq}T_{pj}-\Gamma^p_{jq}T_{ip},$$

что и требовалось доказать. □

Задача$_*$. Доказать указанные формулы для тензоров типа $(1,1)$ и $(2,0)$.

Задача*. Написать и доказать аналогичную формулу для ковариантной производной тензора произвольного типа.

Метрический тензор и ковариантное дифференцирование.

Обсуждение ковариантного дифференцирования тензоров на произвольных многообразиях мы начинали (используя в качестве модельного примера) с (ковариантного) дифференцирования векторов (или, точнее, векторных полей) на подмногообразиях аффинного пространства. В действительности, описанная нами конструкция имела смысл не в произвольном аффинном пространстве, а в евклидовом: существенной частью конструкции было рассмотрение (ортогонального) проектирования на касательное пространство к подмногообразию. Аналогом евклидовой структуры на аффинном пространстве является риманова метрика на гладком многообразии. Структура евклидова пространства задается скалярным произведением векторов. Риманова метрика на многообразии M^k — скалярное произведение векторов в касательном пространстве в каждой точке $x\in M^k$ (гладко зависящее от точки x). Скалярное произведение — это (положительно определенная) симметричная билинейная функция на векторах, т.е. тензор типа $(0,2)$.

Определение: Римановой метрикой на многообразии M^k называется симметричное положительно определенное тензорное поле $g_{ij}=g_{ij}(x)$ типа $(0,2)$ на нем. Римановым многообразием называется многообразие с заданной на нем римановой метрикой.

Замечание. Некоторые из последующих утверждений имеют место и на многообразиях с, так называемой, псевдоримановой метрикой. Псевдоримановой метрикой называется симметричное невырожденное $(det\,(g_{ij})\neq 0)$ тензорное поле типа $(0,2)$. Положительно определенная квадратичная форма невырождена. Поэтому риманова метрика является частным случаем псевдоримановой метрики.

Теорема. На любом многообразии существует риманова метрика.

Задача$_*$. Доказать это.

Указание. Воспользоваться теоремой о разбиении единицы.

Риманова метрика используется для измерения длин кривых и объемов областей на многообразии. Так, длина кривой $\gamma=\gamma(t)$ $(\gamma:[a,b]\to M^k)$ равна $\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|dt$, где (в координатах: $\gamma(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))$) $\|\dot\gamma(t)\|=\sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot x^i(t)\dot x^j(t)}$.

Задача. Пусть M^k — ориентированное риманово многообразие. Доказать, что $\sqrt{det(g_{ij}(x))}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ ($x^1, \ldots, x^k$ — положительно ориентированная локальная система координат на M^k) является (корректно определенной) k–формой на M^k.

k–форма $dV = \sqrt{det(g_{ij}(x))}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ называется формой объема на многообразии M^k. (Подчеркнем, что форма объема имеет смысл только на ориентированном многообразии.) Объем области $V \subset M^k$ — это интеграл формы объема по ней.

Мы заметили, что перенос векторов вдоль кривой на подмногообразии евклидова пространства обладает следующим свойством (замечание 4 после соответствующего обсуждения). Если $u(t)$ (аналогично $v(t)$) — векторное поле вдоль кривой $\gamma(t)$, полученное переносом одного вектора вдоль этой кривой, то скалярное произведение $(u(t), v(t))$ векторов $u(t)$ и $v(t)$ есть $o(t)$, т.е. $\frac{d(u(t),v(t))}{dt}_{|t=0} = 0$. Если вектора $u(t)$ получены операцией перенесения вдоль кривой $\gamma(t)$ с $\dot{\gamma}(0) = w$ из одного вектора, то $\nabla_w u(t) = 0$ (аналогично для $v(t)$). (В этом случае в числителе соответствующего предела, определяющего $\nabla_w v(t)$, стоит тождественный ноль.) Скалярное произведение $(u, v) = g_{ij}u^i v^j$ — это скаляр. Следовательно, его (обычная) производная (по направлению вектора w) совпадает с ковариантной:

$$0 = \frac{d(u(t), v(t))}{dt}_{|t=0} = (u(t), v(t))_{;w} = g_{ij;w}u^i v^j + g_{ij}u^i_{;w}v^j + g_{ij}u^i v^j_{;w} = g_{ij;w}u^i v^j$$

(т.к. $u^i_{;w} = v^i_{;w} = 0$). Отсюда следует, что $g_{ij;w} = 0$. Это является мотивировкой следующего определения.

Определение: Говорят, что аффинная связность на римановом многообразии M^k согласована с римановой метрикой, если $g_{ij;q} = 0$.

Теорема. На римановом многообразии существует и единственна симметричная аффинная связность, согласованная с метрикой.

Доказательство. Пусть Γ^i_{pq} — коэффициенты связности в локальных координатах $x^1, \ldots, x^k$. Имеем:

$$0 = g_{ij;q} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma^p_{iq}g_{pj} - \Gamma^p_{jq}g_{ip} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} - \Gamma^p_{iq}g_{pj} - \Gamma^p_{jq}g_{pi}. \qquad (0)$$

Пусть $\Gamma_{j,iq} = \Gamma^p_{iq}g_{pj}$ — результат опускания индекса у величин Γ^p_{iq} (Γ^p_{iq} — не тензор, поэтому и $\Gamma_{j,iq}$ тензором не является). Имеет место симметрия $\Gamma_{j,iq} = \Gamma_{j,qi}$. С учетом этих обозначений уравнение (0) может быть записано в виде

$$\Gamma_{j,iq} + \Gamma_{i,jq} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q}. \qquad (1)$$

Циклически переставляя индексы в уравнении (1) получаем еще два уравнения:

$$\Gamma_{q,ji} + \Gamma_{j,qi} = \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}, \qquad (2)$$

$$\Gamma_{i,qj} + \Gamma_{q,ij} = \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j}. \qquad (3)$$

Имеем

$$(3) + (1) - (2) = 2 \cdot \Gamma_{i,jq} = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}\right)$$

(здесь мы пользовались симметричностью связности). Таким образом

$$\Gamma_{i,jq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}\right).$$

Поднимая индекс у $\Gamma_{i,jq}$, получаем

$$\Gamma^s_{jq} \,(= g^{si}\Gamma_{i,jq}) = \frac{g^{si}}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i}\right). \tag{4}$$

Тем самым единственность связности доказана. В действительности одновременно мы (почти) доказали и ее существование. Оно вытекает из следующих рассуждений. В каждой карте рассмотрим связность, коэффициенты которой определяются формулой (4). Нам надо доказать, что получается действительно связность, т.е. при переходе от карты (U_α, Φ_α) к карте (U_β, Φ_β) коэффициенты преобразуются требуемым образом. Рассмотрим связность, получаемую из связности на U_α при переходе от карты (U_α, Φ_α) к карте (U_β, Φ_β) (т.е. — связность на $U_\alpha \cap U_\beta$, определённую известными нам формулами преобразования). Относительно этой связности производная метрического тензора равна нулю и по доказанному в карте U_β она единственна и задаётся такой же формулой (4), что и требовалось доказать. □

Замечание. Аффинная связность, согласованная с метрикой, называется связностью Леви–Чивита. Нетрудно видеть, что утверждение о существовании и единственности согласованной с метрикой аффинной связности имеет место и для псевдориманова многообразия.

Лекция 15.

Ковариантная производная векторного поля $v = v(x)$ по направлению вектора w на подмногообразии M^k евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ ($w \in T_{x_0}M^k$) определялась через операцию переноса вектора $(v(\gamma(t)))$ вдоль кривой $\gamma(t)$ на многообразии M^k ($\gamma(0) = x_0$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = w$). Если предположить, что вектора $v(\gamma(t))$ получены из вектора $v(\gamma(0))$ переносом вдоль кривой $\gamma(t)$, то ковариантная производная $\nabla_{\dot\gamma(t)}v^i$ равна нулю при любом t (мы воспользовались тем, что результат переноса вектора вдоль кривой $\gamma(t)$ из точки с $t = t_0$ в точку с $t = t_1$ с последующим переносом из точки с $t = t_1$ в точку с $t = t_2$ совпадает с его переносом из точки с $t = t_0$ в точку с $t = t_2$). Отсюда вытекает, что

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} + \Gamma^i_{pq}v^p\dot\gamma^q(t) = \frac{dv^i(\gamma(t))}{dt} + \Gamma^i_{pq}v^p\dot\gamma^q(t) = 0.$$

Это является мотивировкой для следующего общего определения.

Определение: Пусть M^k — многообразие с аффинной связностью. Говорят, что вектора $v(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M^k$ получены из вектора $v_0 \in T_{x_0}M^k$ ($x_0 = \gamma(0)$) параллельным переносом вдоль кривой $\gamma(t)$, если они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} v^i = \frac{dv^i(\gamma(t))}{dt} + \Gamma^i_{pq} v^p \dot\gamma^q(t) = 0, \tag{1}$$

$v(\gamma(0)) = v_0$.

(1) является (линейным) обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Следствие. Для любого (дифференцируемого) пути $\gamma(t)$ корректно определена операция параллельного переноса векторов, которая является линейным отображением $T_{\gamma(0)}M^k \to T_{\gamma(t)}M^k$ и гладко зависит от t.

Замечание. Результат параллельного переноса из точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(t_0)$, вообще говоря, зависит от пути $\gamma(t)$, а не только от концов $\gamma(0)$ и $\gamma(t_0)$.

При движении материальной точки по подмногообразию в евклидовом пространстве (скажем, по поверхности в $\mathbb{R}^3$) сила и, следовательно, ускорение ортогональны к касательному пространству к подмногообразию. В терминах ковариантоного дифференцирования это означает, что ковариантная производная вектора скорости точки вдоль ее траектории (т.е. вдоль того же вектора скорости) равна нулю. Такое описание создает основу для следующего определения.

Определение: Кривая $\gamma = \gamma(t)$ на многообразии M^n с аффинной связностью называется геодезической, если

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} \dot\gamma(t) = 0. \tag{$*$}$$

Утверждение. Если $\gamma(t)$ — геодезическая на римановом многообразии со связностью, согласованной с римановой метрикой, то $\|\dot\gamma(t)\| = const$.

Доказательство. Пусть в локальных координатах $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Тогда $\frac{d}{dt}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = (g_{ij}(\gamma(t))\dot x^i(t)\dot x^j(t))_{;\dot\gamma(t)} = \left(\nabla_{\dot\gamma(t)} g_{ij}(\gamma(t))\right)\dot x^i(t)\dot x^j(t) + g_{ij}(\gamma(t))\left(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot x^i(t)\right)\dot x^j(t) + g_{ij}(\gamma(t))\dot x^i(t)\left(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot x^j(t)\right) = 0$, т.к. $\nabla_{\dot\gamma(t)} g_{ij} = 0$ (поскольку связность согласована с метрикой) и $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot x^i(t) = 0$ (поскольку $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ — геодезическая). $\square$

Следствие. Длина геодезической $\gamma(t)$, $t \in [0, t_0]$, равна $t_0\|\dot\gamma(0)\|$.

Уравнение геодезических (*) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} + \Gamma^i_{pq}\frac{dx^p(t)}{dt}\frac{dx^q(t)}{dt} = 0. \tag{$**$}$$

Таким образом уравнение геодезических является обыкновенным дифференциальным уранением, разрешенным относительно старшей (т.е. второй) производной. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения гарантирует существование (и единственность) решения уравнения (**) при фиксированных начальных условиях ($\gamma(0) = x_0$, $\dot\gamma(0) = v \in T_{x_0}M^n$) для достаточно малых значений параметра t. Решение уравнения

(**), вообще говоря, может быть не определено для всех значений t от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку оно "может уходить на бесконечность за конечное время". Пример такой ситуации — геодезические на проколотой (т.е. с удаленной точкой) стандартной евклидовой плоскости.

Пусть x_0 — фиксированная точка многообразия M^n. Для вектора $v \in T_{x_0}M^n$ пусть $x_v = \gamma(1)$, где $\gamma(t)$ — геодезическая (т.е. решение уравнения (*)) с начальными условиями $\gamma(0) = x_0$, $\dot\gamma(0) = v$. Мы говорили, что решение уравнения (*) определено, вообще говоря, только для достаточно малых значений параметра t. Однако, имеет место

Утверждение. Точка x_v корректно определена для всех векторов v из некоторой окрестности нуля в касательном пространстве $T_{x_0}M^n$, т.е. для достаточно малых v решение уравнения (*) определено для всех t от 0 до 1.

Это вытекает из того, что для $v = 0$ решение уравнения (*) очевидным образом определено для всех t.

Соответствие $v \mapsto x_v$ определяет отображение окрестности нуля в $T_{x_0}M^n$ в многообразие M^n. Это отображение называется экспоненциальным и обозначается через exp (или через exp_{x_0}): $exp(v) = x_v$, $exp : (T_{x_0}M^n, 0) \to (M^n, x_0)$.

Утверждение. Экспоненциальное отображение exp_{x_0} является изоморфизмом окрестности нуля в касательном пространстве $T_{x_0}M^n$ на окрестность точки x_0 в многообразии M^n.

Доказательство. Это сразу вытекает из того очевидного утверждения, что дифференциал $d\,exp(0)$ отображения exp в нуле является тождественным отображением $T_0(T_{x_0}M^n) \equiv T_{x_0}M^n$ в $T_{x_0}M^n$. $\square$

Следствие. Если M^n — риманово многообразие, то для любой точки $x_0 \in M^n$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$, что для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 существует геодезическая длины меньше ε, соединяющая x_0 с x (т.е. такая, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$), и при этом только одна.

Многообразие с римановой метрикой, вообще говоря, локально не изоморфно евклидову пространству, т.е. в нем не существуют локальные координаты, в которых метрический тензор имеет компоненты g_{ij}, равные δ_{ij} (символ Кронекера). Мы приступаем к построению тензорного инварианта, позволяющего, в частности, распозновать римановы многобразия, локально не изоморфные евклидову пространству.

Рассмотрим (тензорное) выражение $[\nabla_{;k}, \nabla_{;\ell}]v^i = (\nabla_{;k}\nabla_{;\ell} - \nabla_{;\ell}\nabla_{;k})v^i$. В евклидовом пространстве оно тождественно равно нулю. В декартовых координатах это следует из того, что ковариантное дифференцирование совпадает с обычным, а (обычные) дифференцирования по разным переменным коммутируют друг с другом. (В других координатах также получается тождественный ноль вследствии тензорного характера рассматриваемой величины). Вычислим $[\nabla_{;k}, \nabla_{;\ell}]v^i$ для симметричной аффинной связности. Имеем: $\nabla_{;\ell}v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{p\ell}v^p$. Поэтому (используя правило ковариантного дифференцирования тензора типа $(1,1)$) получаем:

$$\nabla_{;k}\nabla_{;\ell}v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^\ell} + \Gamma^i_{p\ell}\frac{\partial v^p}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^i_{p\ell}}{\partial x^k}v^p + \Gamma^i_{pk}\left(\frac{\partial v^p}{\partial x^\ell} + \Gamma^p_{s\ell}v^s\right) - \Gamma^p_{\ell k}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^p} + \Gamma^i_{sp}v^s\right).$$

Отсюда (учитывая симметричность связности) имеем:

$$[\nabla_{;k}, \nabla_{;\ell}]v^i = v^p \left[\frac{\partial \Gamma^i_{p\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{pk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{qk}\Gamma^q_{p\ell} - \Gamma^i_{q\ell}\Gamma^q_{pk}\right].$$

Обозначим

$$\left[\frac{\partial \Gamma^i_{p\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{pk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{qk}\Gamma^q_{p\ell} - \Gamma^i_{q\ell}\Gamma^q_{pk}\right]$$

через $R^i_{p;kl}$. Поскольку (для любого векторного поля v^p) $v^p R^i_{p;kl}$ является тензором, $R^i_{p;kl}$ — тензор типа $(1,3)$. Тензор $R^i_{p;kl}$ называется тензором кривизны. Поскольку он равен нулю для евклидова пространства, имеем

Следствие. Если тензор кривизны $R^i_{p;kl}$ не равен тождественно нулю, то риманово многообразие M^n локально не изоморфно евклидову пространству.

Задача. Вычислить тензор кривизны для двумерной сферы S^2 (например, в координатах φ и ψ, в которых метрический тензор имеет вид $(d\psi)^2 + \cos^2\psi(d\varphi)^2$) и тем самым показать, что двумерная сфера локально не изоморфна евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача. Доказать утверждение предыдущей задачи (о неизоморфности S^2 и $\mathbb{R}^2$) без использования тензора кривизны.

Свойства тензора кривизны.

Теорема. 1) Тензор кривизны $R^i_{p;kl}$ кососимметричен по индексам k и ℓ: $R^i_{p;k\ell} = -R^i_{p;\ell k}$.
2) $R^i_{pk\ell} + R^i_{k\ell p} + R^i_{\ell pk} = 0$ (тождество Якоби). 3) Если (симметричная) связность согласована с метрикой g_{ij}, то при фиксированных k и ℓ величины $R^i_{p;k\ell}$ являются матричными элементами кососимметричного (относительно рассматриваемой метрики) оператора. Это свойство удобно формулировать в терминах тензора $R_{ipk\ell} = g_{im}R^m_{p;k\ell}$ типа $(0,\ 4)$, получаемого из тензора кривизны опусканием индекса. Кососимметричночность оператора $R^i_{p;k\ell}$ (при фиксированных k и ℓ) означает, что $R_{ipk\ell} = -R_{ik\ell}$. 4) Для симметричной связности согласованной с римановой метрикой $R_{ipk\ell} = R_{k\ell ip}$.

Замечания. 1. В действительности свойства 1 и 3 выполняются и без предположения о симметричности связности. Однако тензор кривизны несимметричной связности мы здесь не обсуждаем.
2. Из описанных свойств вытекает, в частности, что для двумерного риманова многообразия (поверхности) все ненулевые компоненты тензора $R_{ijk\ell}$ отличаются друг от друга только знаком. Таким образом все они определяются одной, например, R_{1212}.

Доказательство. Свойство 1 очевидно (см. формулу для $R^i_{p;kl}$). Свойство 2 также проверяется непосредственно. Для доказательства свойства 3 достаточно проверить, что для любого векторного поля ξ имеет место равенство $([\nabla_{;k}, \nabla_{;\ell}]\xi, \xi) = 0$. Имеем (вследствие согласованности связности с метрикой) $\frac{\partial}{\partial x^\ell}(\xi,\xi) = \nabla_{;\ell}(\xi,\xi) = 2(\nabla_{;\ell}\xi,\xi)$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell}(\xi,\xi) = (\nabla_{;k}\nabla_{;\ell}\xi,\xi) + (\nabla_{;\ell}\xi, \nabla_{;k}\xi). \tag{1}$$

Меняя местами k и ℓ, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial x^k}(\xi, \xi) = (\nabla_{;\ell}\nabla_{;k}\xi, \xi) + (\nabla_{;k}\xi, \nabla_{;\ell}\xi). \tag{2}$$

Вычитая из формулы (1) формулу (2), получаем требуемое равенство Свойство 4 является формальным следствием свойств 1–3 (докажите самостоятельно или посмотрите в любом учебнике). $\square$