Math. Ann. 308, 593–613 (1997)

Mathematische Annalen

Sur la théorie locale des pseudogroupes de transformations continus infinis I

Thierry Robart[1,⋆], **Niky Kamran**[2]

[1] Department of Mathematics, McGill University, Montreal, Quebec, Canada, H3A 2K6
(e-mail: robart@zaphod.math.mcgill.ca)
[2] Department of Mathematics, McGill University, Montreal, Quebec, Canada, H3A 2K6
(e-mail: nkamran@scylla.math.mcgill.ca)

Reçu le 20 octobre 1995 / Version revisée reçue le 29 mai 1996

Mathematics Subject Classification (1991): 22E65, 58H05; 17B65

1 Introduction

Au début des années 1870 Sophus Lie, motivé par la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles et inspiré par les idées de Galois, dégage la notion de "groupe continu de transformations" ou pseudogroupe de Lie.

Si V est une variété analytique de dimension finie, un pseudogroupe de Lie de transformations de V est essentiellement une collection Γ d'homéomorphismes analytiques locaux stable par l'inversion et par la composition qui est partiellement définie, Γ constituant la solution générale d'un système $\mathscr{S}$ déquations aux dérivées partielles analytiques assujetti à certaines conditions de régularité ($\mathscr{S}$ est involutif au sens de Cartan). Ainsi l'ensemble des transformations locales conformes du plan complexe $\mathbb{C}$ constitue un pseudogroupe de Lie d'ordre 1 associé aux équations de Cauchy-Riemann.

Si $\mathscr{S}$ est un système de Mayer-Lie, c'est-à-dire si toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à r s'expriment en fonction des dérivées d'ordre strictement inférieur, Γ est localement représenté par un nombre fini de paramètres. On a un "groupe continu fini". C'est le point de départ de la théorie classique des groupes de Lie.

Par exemple, si $V = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S}$ est l'équation différentielle d'ordre 3

$$\frac{d\overline{x}}{dx}\frac{d^3\overline{x}}{dx^3} - \frac{3}{2}(\frac{d^2\overline{x}}{dx^2})^2 = 0,$$

le pseudogroupe de Lie $\Gamma(\mathscr{S})$ correspondant consiste en les transformations homographiques et peut être regardé comme une action locale de $\mathbb{Z}_2 \times SL(2, \mathbb{R})$.

⋆ NSERC Postdoctoral Fellow

Si $\mathscr{S}$ n'est pas complètement intégrable Γ est dit de type infini. On montre alors que Γ est localement paramétrisé par un nombre fini de fonctions. Le système involutif élémentaire $\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} = 0$ admet, par exemple, pour solutions $\bar{x} = \phi(x)$; $\bar{y} = \psi(x)y + \rho(x)$ et définit un pseudogroupe de Lie de type infini sur $\mathbb{R}^2$.

La théorie des pseudogroupes de Lie de type infini n'a pas connu un développement aussi géométrique que celle des pseudogroupes de type fini. Le point de vue infinitésimal si efficace pour la théorie classique s'est toujours heurté dans le cadre de la dimension infinie à de grandes difficultés. C'est ce que rappelle Élie Cartan dans son exposé de 1937 [Car 37] : "La généralisation aux groupes infinis de la théorie de la structure des groupes finis due à Lie et fondée sur la considération des transformations infinitésimales s'est montrée très difficile, pour ne pas dire impossible, malgré les travaux consacrés à cette question par S. Lie, F. Engel, Medolaghi, etc.". A l'aide d'un principe tout à fait différent et en quelque sorte dual, celui des équations de définition mises sous une forme convenable, Élie Cartan trouve au commencement de ce siècle un nouveau point de départ. A cet effet il introduit la notion de prolongement. Etant donné un pseudogroupe Γ opérant localement sur n variables $x^1, \ldots, x^n$, un pseudogroupe Γ' est dit prolongement de Γ s'il opère simultanément sur les variables $x^1, \ldots, x^n$ augmentées des variables $y^1, \ldots, y^p$ de telle sorte que son action sur les premières variables soit identique à celle de Γ. A une transformation de Γ correspond donc au moins une transformation de Γ'. Le prolongement est dit *holoédrique* si cette correspondance est biunivoque et *mériédrique* dans le cas contraire. Deux pseudogroupes Γ_1, Γ_2 sont alors dits isomorphes (holoédriques) s'ils admettent deux prolongements holoédriques semblables. E. Cartan généralise aux pseudogroupes de type infini les trois théorèmes fondamentaux de S. Lie.

- (Cartan I) Tout "groupe continu" Γ admet un prolongement holoédrique Γ' du premier ordre (prolongement normal) opérant sur un espace de dimension r et caractérisé par la propriété de laisser invariantes certaines variables (cas intransitif) et une collection de r formes de Pfaff (à coefficients généralement indéterminés).
- (Cartan II) Ces formes ω^i vérifient des équations de structure

$$d\omega^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k + a^i_{js} \omega^j \wedge \bar{\omega}^s,$$

  les formes $\bar{\omega}^s$ étant définies sur un prolongement de l'espace où opère Γ'. Les coefficients a^i_{js} forment un tableau involutif.
- (Cartan III) A la donnée des coefficients C^i_{jk} et a^i_{js} vérifiant certaines conditions de compatibilité correspond un "groupe infini" ou pseudogroupe de Lie de type infini.

Voir par exemple [KaS 88]. Ainsi, le pseudogroupe des transformations conformes du plan complexe $\mathbb{C}$ s'identifie à la collection des transformations locales de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées x, y qui préservent les deux formes de Pfaff

$\omega^1 = Pdx + Qdy$, et $\omega^2 = -Qdx + Pdy$ où x, y, P, Q sont les coordonnées du prolongement $\mathbb{R}^4$ de $\mathbb{R}^2$. Ses équations de structure sont donc

$$\begin{pmatrix} d\omega^1 \\ d\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^1 & \overline{\omega}^2 \\ -\overline{\omega}^2 & \overline{\omega}^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

où $\overline{\omega}^1 = \frac{1}{P^2+Q^2}(PdP + QdQ), \overline{\omega}^2 = \frac{1}{P^2+Q^2}(-QdP + PdQ)$ modulo (ω^1, ω^2).

De façon générale, les coefficients C^i_{jk}, a^i_{js} dépendent des invariants de Γ. Un pseudogroupe transitif étant caractérisé par une absence d'invariant (essentiel) voit ses coefficients de structure se réduire à des constantes. Si le pseudogroupe est de type fini les a^i_{js} n'apparaîssent pas.

La notion moderne de pseudogroupe de Lie est dégagée dans les années 1950 [Chn 54]. On revient sur l'aspect infinitésimal et algébrique. C'est la théorie des faisceaux d'algèbres de Lie [Lib 59].

Dès les années 1960 les besoins d'une autre généralisation se font sentir. Il s'agit de fournir un cadre théorique décrivant à la fois groupes de jauge, groupes de difféomorphismes, algèbres de Kac-Moody etc. qui envahissent alors la physique-mathématique. En 1974 [Omo 74] H.Omori expose sa théorie spécifique des groupes de Lie de type ILB/ILH. Mais le bon cadre conceptuel ne veut pas se fixer. En 1981 [Omo 81] H.Omori et al. expriment leur embarras: "*it continues to be a basic question when one may call a group G an infinite dimensional Lie group.*". J.Milnor dégage dans [Mil 83] les concepts fondamentaux. Un groupe de Lie de dimension infinie est, selon J.Milnor, un groupe muni d'une structure de variété C^∞ compatible avec les opérations de groupe; i.e. telle que le produit $(g, g') \mapsto g \cdot g'^{-1}$ est C^∞. Les espaces modèles sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes Hausdorff et (séquentiellement) complets et le calcul différentiel utilisé dans le cadre de ces espaces de dimension infinie est celui de Gâteaux. Si V est une variété compacte le groupe $\mathrm{Diff}^\infty(V)$ des difféomorphismes C^∞ de V est un groupe de Lie modelé sur l'espace de Fréchet $\chi^\infty(V)$ des champs de vecteurs lisses sur V. Bien sûr ce point de vue se heurte à nouveau aux difficultés qui ont rendu l'approche infinitésimale de Sophus Lie quasiment "impossible" pour reprendre le sentiment d'Élie Cartan et que l'on interprète, aujourd'hui, par l'absence de théorèmes fondamentaux du calcul différentiel hors du cadre banachique. Le problème de l'extension à ce cadre-là des second et troisièmes théorèmes fondamentaux de Lie demeure tout particulièrement ouvert. Et la recherche de s'orienter dans de nouvelles directions [Sou 85, Daz 93].

La théorie de Cartan des pseudogroupes de Lie de type infini et la théorie des groupes de Lie réguliers au sens de Milnor peuvent être regardées comme deux extensions de natures différentes de la notion classique de groupe de Lie. La première est certes trop spécifique. D'une part en s'appuyant sur le théorème de Cauchy-Kovalevskaïa elle concerne *essentiellement* les "groupes" de transformations analytiques. D'autre part elle contient des limitations structurelles: ainsi la classe des "groupes" qu'elle décrit n'est pas stable par rapport aux représentations ou bien par passage à un sous-groupe d'isotropie. Sophus Lie soulignait par exemple que la double représentation du ”groupe” général à une variable $\overline{x} = f(x), \overline{y} = f(y)$ n'est pas décrite par cette théorie. Par contraste, la seconde s'avère encore trop générale pour être efficace et se résume souvent à un rôle purement descriptif. Mais quelles sont très précisément leurs différences et en particulier ne peut-on pas réinterpréter toute la théorie de Lie-Cartan à partir du point de vue moderne exposé par J.Milnor? C'est là l'objet de notre série d'articles. On constate que le rapprochement de ces deux extensions fournit un double éclairage profitable aux deux théories.

Cette première partie établit quelques bases nécessaires à un tel rapprochement. La notion de ”formal Lie group” introduite par M.Kuranishi [Kur 59] et vouée à la description abstraite d'un pseudogroupe de Lie est interprétée géométriquement comme une algèbre de Lie *formellement pré-intégrable* en un groupe de Lie de type Campbell-Baker-Hausdorff (voir section 4.2). Cela situe le travail de Kuranishi dans le cadre des groupes et algèbres de Lie de type CBH. L'analyse locale et formelle des pseudogroupes de Lie est ensuite prolongée par l'investigation du groupe formel d'isotropie. On montre en particulier que le groupe formel d'isotropie $G^{\infty}_{O}(n)$ d'un espace à $n \geq 2$ dimensions réelles est un groupe de Lie de dimension infinie de seconde espèce (voir section 4.3) homotope à $O(n, \mathbb{R})$ (théorème 4), tandis que $G^{\infty}_{O}(1)$ est un groupe de Lie de première espèce non analytique homotope à $\mathbb{Z}_2$. Il résulte de cette analyse que la théorie locale et formelle d'une large classe de pseudogroupes de Lie contenant les pseudogroupes transitifs s'inscrit dans un cadre d'algèbres de Lie *presque* de seconde espèce. Plus précisément, à tout pseudogroupe de Lie Γ de cette classe est canoniquement associé une algèbre de Lie $\mathscr{L}^{\infty}(\Gamma)$ décomposable en une somme directe $\mathscr{L}^{\infty}(\Gamma) = \mathscr{A} \bigoplus \mathscr{G}$. Dans cette décomposition $\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie de type CBH de codimension finie qui s'intègre en un groupe de Lie G de type CBH. Par suite $\mathscr{L}^{\infty}(\Gamma)$ est *virtuellement* intégrable au sens de Lie III en le produit $A \bigotimes G$ où A “intègre” $\mathscr{A}$.

Les parties ultérieures aborderont les problèmes plus délicats de la théorie *locale* et *non formelle* des pseudogroupes de Lie et de la théorie globale.

2 Pseudogroupes de Lie

Soit V une variété de dimension finie indéfiniment différentiable (resp. analytique). Un *pseudogroupe de transformations* Γ de V consiste en une famille de *difféomorphismes locaux*, i.e. paires de la forme $p = (D_p, \overline{p})$ où D_p est un ouvert de V et $\overline{p} : D_p \to V$ un difféomorphisme C^{∞} (resp C^{ω}), satisfaisant en outre aux quatre propriétés suivantes:

1. $p, q \in \Gamma$ implique $p \circ q = (\overline{q}^{-1}(D_p \cap \overline{q}(D_q)), \overline{p} \circ \overline{q}) \in \Gamma$,
2. $p \in \Gamma$ implique $p^{-1} = (\overline{p}(D_p), \overline{p}^{-1}) \in \Gamma$,
3. $(V, Id) \in \Gamma$,
4. si $\overline{p}$ est un difféomorphisme local d'un ouvert $D \subseteq V$ à valeurs dans V et si $D = \cup_{\alpha} D_{\alpha}$ où les D_{α} sont des ouverts de V, alors $(D, \overline{p}) \in \Gamma$ si et seulement si $(D_{\alpha}, \overline{p}_{|D_{\alpha}}) \in \Gamma$ pour tout indice α.

De la même façon qu'un groupe de transformations, un pseudogroupe de transformations détermine une relation d'équivalence sur V ; les classes d'équivalence sont appelées ses *orbites*. Un pseudogroupe Γ de transformations d'une variété V est dit *transitif* si V est son unique orbite, et est dit *primitif* si V n'admet pas de feuilletage Γ-invariant non trivial (sinon il est dit *imprimitif*).

Un pseudogroupe Γ de transformations d'une variété analytique est dit *pseudogroupe de Lie de transformations* s'il existe un système $\mathscr{S}$ *involutif* [Car 45] d'équations aux dérivées partielles tel que Γ consiste exactement en l'ensemble des transformations locales C^ω qui satisfont $\mathscr{S}$. L'*ordre* d'un pseudogroupe de Lie est l'ordre minimum de son système d'équations différentielles de définition.

3 Pseudogroupes abstraits de type F

L'objet de ce chapitre est de rappeler le cadre conceptuel dégagé par M. Kuranishi. Il dérive du théorème de Cartan-Kähler [Car 45] et donne lieu à une approche abstraite et formelle. Bien qu'offrant une généralisation de la théorie classique des groupes de Lie, ce point de vue est resté sans applications. On retrouve néanmoins l'influence de cette approche formelle dans l'analyse de Singer et Sternberg [SiS 65].

3.1 La classe des espaces modèles

Le théorème de Cartan-Kähler fournit par voie purement technique un espace "naturel" $\mathscr{H}$ de paramétrisation des transformations locales analytiques d'un pseudogroupe de Lie. La première idée de Kuranishi consiste à "formaliser" l'espace $\mathscr{H}$ en H, c'est-à-dire à renplacer fonctions analytiques par développements de Taylor (voir exemple 2 et définition I.2 p. 229 [Kur 59]). H est un espace vectoriel caractérisé par une structure de type F. Rappelons ce dont il s'agit.

Soit H un espace vectoriel et pour tout entier l, $B^l \subseteq H$ un sous-espace vectoriel de dimension finie d^l auquel on associe une base $\mathbf{h}^l = \{h^l_1, \dots, h^l_{d^l}\}$.

Définition 1 *Une collection* $(H^l, B^l, \mathbf{h}^l)$ *constitue une* structure de type F *associée à* H *si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. $\cdots \subseteq H^{l+1} \subseteq H^l \subseteq \cdots \subseteq H^1 \subseteq H^0 = H$,
2. $H^l = B^l \bigoplus H^{l+1}$ *pour tout* $l \in \mathbb{N}$,
3. *Pour toute suite* $(\xi^l)_{l\in\mathbb{N}}$ *où* $\xi^l \in B^l$, *il existe un unique* $\xi \in H$ *tel que* $\xi - (\xi^0 + \cdots + \xi^l) \in H^{l+1}$, $\forall l \in \mathbb{N}$. *On note* ξ *la somme formelle* $\sum_{l=0}^\infty \xi^l$.
4. *On peut trouver des entiers* p, k *et un réel positif* $m_1 \in \mathbb{R}_+$ *tels que pour* l *assez grand*

$$m_1(l - k)^p \leq \dim(H/H^l) \leq m_1(l + k)^p.$$

Il est clair que tout espace vectoriel de dimension finie admet une structure de type F. Pour les applications qui nous concernent p caractérise le nombre maximal de variables indépendantes et $m = m_1 p!$ la multiplicité de l'espace des fonctions à p variables indépendantes. On vérifie aisément que p et m_1 sont uniquement déterminés par la structure. Le couple (m, p) est dit *caractéristique* de la structure. Si H_p^s désigne la somme directe de s copies de H_p, l'espace des séries formelles à p variables indépendantes, alors H_p^s admet pour caractéristique (s, p).

Un système S de caractères est selon Kuranishi une collection finie et ordonnée d'entiers non négatifs $\{s_0, s_1, \ldots, s_p\}$ où $s_p \neq 0$. On note $H(S)$ la somme directe $H(S) = H_0^{s_0} \bigoplus H_1^{s_1} \bigoplus \cdots \bigoplus H_p^{s_p}$. $H(S)$ est un espace vectoriel muni d'une structure de type F de caractéristique (s_p, p).

Selon Kuranishi, la structure de type F est une structure fondamentale qu'il convient de "conserver". Cette idée lui permet de donner un sens précis au commentaire suivant que fait E. Cartan [Car 45, n^o 69]: "*il convient de ne pas donner un sens trop absolu* (à la paramétrisation explicitée dans le théorème de Cartan-Kähler) [...].*En réalité, le seul de ces entiers qui ait un sens absolu est le nombre des fonctions arbitraires au nombre maximum de variables (σ_p si $\sigma_p \neq 0$).*"

Définition 2 *Soient $H = (H^l, B^l, \mathbf{h}^l)$ et $H' = (H'^l, B'^l, \mathbf{h}'^l)$ deux espaces vectoriels munis de structures de type F. Une application linéaire $\Lambda : H \to H'$ est un* **morphisme** *de F-structures s'il existe un entier k tel que $\Lambda(H^l) \subseteq H'^{(l-k)}$ pour tout l.*

H et H' sont alors dits isomorphes s'il existe une application linéaire bijective $\Lambda : H \to H'$ telle que Λ et Λ^{-1} sont des morphismes de structures de type F. Ainsi, l'application $\Lambda : H_1 \times H_1 \to H_1$ qui à $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$ associe $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + b_n x^{2n+1})$ est un morphisme bijectif qui n'est pas un isomorphisme de F-structures. Pour la démonstration du théorème suivant voir [Kur 62, prop. 9].

Théorème 1 *Deux espaces vectoriels munis de F-structures sont isomorphes si et seulement si ils ont mêmes caractéristiques.*

A tout espace vectoriel H muni d'une structure de type F on associe l'espace ${}^cH$ des chemins formels γ sans terme constant (i.e. $\gamma(0) = 0$). C'est à nouveau un espace vectoriel muni naturellement d'une F-structure. La caractéristique de ${}^cH$ est $(m, p+1)$ si celle de H est (m, p).

3.2 La notion d'analyticité

Soit n^l la dimension de $H/H^{(l+1)}$. On a $n^l = d_0 + d_1 + \cdots + d^l$. On réindexe la famille $\{h_j^l\}$ en posant $h_{n^{l-1}+j} = h_j^l$. Si $h_j \in B^l$ convenons avec Kuranishi de noter $| \ j \ |_H$ l'entier l. Finalement associons à tout h_j une variable a_H^j et notons $I(H)$ la collection des a_H^j. Soit $K[H]$ l'anneau des polynômes ayant pour variables des éléments de $I(H)$. Les polynômes des variables a_H^j où $|\ j\ |_H \leq l$ forment un sous-anneau $K[H, l]$. Bien sûr,

$$K[H] = \lim_{\substack{\rightarrow \\ l}} K[H, l].$$

La notion suivante d'application analytique formelle (Formal analytic mapping) est à la base du travail de Kuranishi.

Définition 3 *Une application analytique formelle $\Phi : H \to H'$ est la donnée pour tout entier $m \in \mathbb{N}^\star$ et pour toute variable $a_{H'}^i$ de $I(H')$ d'un polynôme $\Phi_m^i \in K[H]$ vérifiant en outre la condition suivante: il existe un entier k fixé tel que Φ_m^i est un polynôme homogène de degré m et de poids inférieur ou égal à $|\ i\ |_{H'} + km$, i.e. Φ_m^i est une combinaison linéaire de monômes $a_H^{j_1} \dots a_H^{j_m}$ où $|\ j_1\ |_H + \cdots + |\ j_m\ |_H \leq |\ i\ |_{H'} + km$.*

Il faut concevoir une telle application comme une correspondance formelle

$$\xi \in H \xrightarrow{\Phi} \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^i(\xi)) h_i',$$

laquelle n'a pas toujours un sens. Φ est *définie* ou *convergente* en ξ si et seulement si $\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^i(\xi)$ converge pour tout i. L'entier k est appelé *degré* de Φ.

Remarque. Les fonctions considérées ici sont sans terme constant, c'est-à-dire que l'on restreint l'investigation aux fonctions Φ telles que $\Phi(0) = 0$.

Comme exemples importants notons que la dérivation est de degré +1, tandis que l'intégration est de degré -1. Le degré n'est cependant pas déterminé univoquement. Si Φ est de degré k, Φ est de degré k' pour tout entier $k' \geq k$.

La différentielle d'une application analytique formelle se définit sans difficulté. Cela permet à Kuranishi d'étendre dans ce contexte analytique *non convergent* tous les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel (voir chap. I §3 p. 236-241 [Kur 59]). Malheureusement, et comme le souligne (p. 248) M. Kuranishi lui-même, ces théorèmes n'ont qu'une portée très limitée et ne sont certainement pas valides dans un contexte convergent.

Notons encore que toute application analytique formelle $\Phi : H \to H'$ induit naturellement une application analytique formelle et *convergente* ${}^c\Phi$ de l'espace des chemins formels sans terme constant ${}^cH$ dans ${}^cH'$.

3.3 Groupes et algèbres de Lie de type F

La multiplication dans un pseudogroupe de Lie n'est pas toujours définie. De fait, c'est essentiellement par passage à l'espace des chemins formels sans terme constant que Kuranishi parvient à généraliser la notion classique de groupe de Lie.

Définition 4 *Soit H un espace vectoriel de type F. Une application analytique formelle $G : H \times H \to H$ définit un* groupe de Lie formel de type F *dans l'espace de paramétrisation H si elle satisfait aux conditions suivantes:*

1. *${}^cG :{}^c H \times{}^c H \to{}^c H$ est associative et admet* 0 *pour unité,*
2. *il existe une application analytique formelle $\mathscr{I} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ telle que*

$$\gamma^{-1} ={}^c \mathscr{I}(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in{}^c H$.

Lorsque H est un groupe de Lie formel de type F, H est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie formelle *convergente*. Le calcul différentiel formel permet à Kuranishi d'étendre à ce cadre les théorèmes fondamentaux de Sophus Lie (voir le chap. II p. 253-260 [Kur 59]). Toutefois, ces nouveaux théorèmes ne sont pas valides dans le contexte convergent de la théorie.

4 Groupes de Lie au sens de Milnor

Par groupe de Lie de dimension infinie on entend un groupe muni d'une struture de variété indéfiniment différentiable modelée sur un espace vectoriel localement convexe Hausdorff séquentiellement complet compatible avec les opérations de groupe. Le calcul différentiel usuellement utilisé dans le cadre des espaces de dimension infinie est celui de Gâteaux. C'est également celui que nous adoptons. Nous renvoyons le lecteur à [Mil 83] et ses références pour les définitions et propriétés fondamentales.

4.1 Groupes de Lie réguliers

L'ensemble $C^\infty([0,1], \mathscr{L}(G))$, des chemins lisses de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(G)$, est muni de la topologie de la convergence uniforme C^∞. Selon J.Milnor [Mil 83], un groupe de Lie est dit *régulier* si l'équation différentielle ordinaire

$$g^{-1} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = v(t) \text{ avec } g(0) = e \tag{1}$$

admet une solution lisse γ_v quel que soit le chemin lisse v de $\mathscr{L}(G)$, et si la correspondance $v \mapsto \gamma_v(1)$ de $C^\infty([0,1], \mathscr{L}(G))$ à valeurs dans G est indéfiniment différentiable. On dit alors, que v est la *dérivée logarithmique à gauche* du chemin γ_v. Remarquons que tous les groupes de Lie connus sont réguliers.

4.2 Groupes et algèbres de première espèce

De nombreux groupes de Lie de dimension infinie admettent une carte canonique de première espèce; i.e. l'exponentielle est une carte au voisinage de l'élément neutre. Ils définissent une classe $\mathscr{EXP}$ de groupes de Lie de dimension infinie. Un groupe G de $\mathscr{EXP}$ est dit *de première espèce*.

Si $\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie topologique ayant $\mathscr{Z}$ pour centre, le quotient $\mathscr{K} = \mathscr{L}/\mathscr{Z}$ est naturellement structuré en algèbre de Lie topologique. On peut identifier $\mathscr{K}$ à une sous-algèbre de Lie topologique de l'algèbre de Lie $\mathscr{End}(\mathscr{L})$ des endomorphismes continus de $\mathscr{L}$ par l'injection $\mathscr{K} \overset{ad}{\hookrightarrow} \mathscr{End}(\mathscr{L})$.

Définition 5 *$\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie de première espèce si la fonction exponentielle est définie dans $\mathscr{K}$ et structure $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Exp.\mathscr{K})^n$ en un groupe de Lie de première espèce.*

La classe des algèbres de Lie de première espèce, notée $\mathscr{L}(\mathscr{EXP})$, est précisément la classe associée à $\mathscr{EXP}$.

Lorsqu'un groupe de première espèce est analytique au sens de Gâteaux on dira avec J.Milnor [Mil 83] qu'il est de type Campbell-Baker-Hausdorff ou de type CBH. Cela définit la classe $\mathscr{CBH}$ des groupes de Lie de type CBH. A cette classe est naturellement associée la classe $\mathscr{L}(\mathscr{CBH})$ des algèbres de Lie de type CBH caractérisées par l'analyticité locale de la série formelle de Campbell-Baker-Hausdorff.

Les groupes de Lie banachiques, les nouvelles classes de groupes de Lie construites dans [NRW 94], Les groupes de Lie nilpotents, les groupes de jauge, et les groupes de Lie formels de type Campbell-Baker-Hausdorff construits à partir d'un ensemble fini d'éléments sont des exemples importants de groupes de Lie de type CBH.

4.3 Groupes et algèbres de Lie de seconde espèce

Soit G un groupe de Lie de dimension infinie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$. On dira que G est un groupe de Lie de seconde espèce s'il existe pour $\mathscr{G}$ une décomposition en somme directe $\mathscr{G} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{G}_i$ de telle sorte que l'application $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_i$, qui à $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathscr{G}_1 \times \cdots \times \mathscr{G}_m$ associe le produit $\mathrm{Exp}(x_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{Exp}(x_m) \in G$, définisse une carte de variété au voisinage de l'élément neutre. Afin de préciser la "multiplicité" m de la décomposition, on dira que G appartient à la classe $\mathscr{EXP}^m$. Il est clair que $\mathscr{EXP} \subset \mathscr{EXP}^m \subset \mathscr{EXP}^{m'}$ pour tout $m < m'$. La définition de la classe associée d'algèbres de Lie est analogue à celle de $\mathscr{L}(\mathscr{EXP})$. Si $\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie topologique ayant $\mathscr{Z}$ pour centre, notons $\mathscr{K} = \mathscr{L}/\mathscr{Z}$ l'algèbre de Lie quotient. En identifiant naturellement $\mathscr{K}$ à son image par la représentation adjointe, on a

Définition 6 *$\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie de seconde espèce lorsque la fonction exponentielle est définie dans $\mathscr{K}$ et permet de structurer $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Exp.\mathscr{K})^n$ en un* *groupe de Lie de seconde espèce. La classe des algèbres de Lie de seconde espèce, notée génériquement $\mathscr{L}(\mathscr{EXP}^m)$, est précisément la classe associée à $\mathscr{EXP}^m$.*

Lorsqu'une algèbre de Lie $\mathscr{L}$ admet une décomposition en somme directe de m algèbres de Lie de première espèce et d'un sous-espace $\mathscr{A}$ de dimension finie, $\mathscr{L} = \mathscr{A} \bigoplus_{i=1}^m \mathscr{L}_i$, nous dirons qu'elle est *presque* de seconde espèce d'ordre m. Si en outre chaque $\mathscr{L}_i$ est intégrable au sens de Lie III en un groupe de première espèce G_i, $\mathscr{L}$ sera dite *intégrable par parties*. Cette algèbre est alors *virtuellement intégrable* selon le produit $A \bigotimes_{i=1}^m G_i$.

4.4 Sous-algèbres et sous-groupes de Lie

Un *plongement* entre deux variétés M et N de dimension infinie est une application différentiable $\pi : M \to N$ injective, telle que $(d\pi)_x$ est injectif pour tout x. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie topologique de dimension infinie. Une sous-algèbre $\mathscr{H}$ (au sens algébrique du terme) de $\mathscr{G}$ est dite sous-algèbre de Lie si l'injection de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}$ est un morphisme continu. Il en est de même pour la notion de sous-groupe de Lie. Il est clair que si H est un sous-groupe de Lie de G, son algèbre de Lie $\mathscr{L}(H)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{L}(G)$. Notons qu'alors la topologie de H (resp. $\mathscr{H}$) est plus fine que celle de G (resp. $\mathscr{G}$).

4.5 Sur les théorèmes fondamentaux de Lie

En dimension finie nombre de résultats de la théorie des groupes de Lie s'obtiennent facilement en raison de la très bonne correspondance entre groupe de Lie et algèbre de Lie associée : le point de vue global (propriétés du groupe de Lie) est très largement reflété par le point de vue infinitésimal (propriétés de l'algèbre de Lie). C'est ce qu'illustrent parfaitement les second et troisième théorèmes de Lie. En revanche le situation en dimension infinie est très différente. Le problème de l'extension des second et troisième théorèmes de Lie reste encore, dans une large mesure, un problème ouvert.

Problème 1 (Lie II) *Etant donné un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, comment caractériser les sous-algèbres de Lie $\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}$ pour lesquelles il existe un sous-groupe de Lie H de G admettant $\mathscr{H}$ pour algèbre de Lie?*

Problème 2 (Lie III) *Caractériser les algèbre de Lie topologique de dimension infinie intégrables en un groupe de Lie, en un schéma de groupe de Lie.*

La notion de schéma de groupe de Lie, due à van Est [Van 84], généralise la notion de groupe de Lie. Elle permet de traiter complètement Lie III pour une large classe d'algèbres de Lie. Voir par exemple [Van 64, Van 84, Daz 95, Les 92, Les 93, Rob 96].

5 Pseudogroupes de Lie abstraits formels

L'objet de ce chapitre est de reprendre les idées de Kuranishi sous une forme géométrique. Cette approche offre un double avantage. Elle permet d'une part de préciser en quel sens la théorie de Kuranishi est non convergente et d'autre part de fixer un cadre naturel d'étude valide aussi bien pour les pseudogroupes de Lie de transformations analytiques que pour les pseudogroupes de Lie de transformations seulement indéfiniment différentiables. Il résulte également que la théorie formelle des pseudogroupes de Lie est une théorie d'algèbres de Lie de dimension infinie assez particulières. Tout pseudogroupe de Lie Γ défini par un système involutif $\mathscr{S}$ d'équations aux dérivées partielles est caractérisé par une algèbre de Lie formelle $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Gamma)$. Bien que $\mathscr{L}$ ne soit pas *naturellement* intégrable en un groupe de Lie L au sens de Lie III, on montre que, dans une large classe, $\mathscr{L}$ admet toujours une décomposition en somme directe $\mathscr{L} = \mathscr{K} \bigoplus \mathscr{H}$ telle que $\mathscr{K}$ est une algèbre de Lie de dimension finie et $\mathscr{H}$ est une algèbre de Lie de dimension infinie intégrable pour Lie III. Dans ce cas $\mathscr{L}$ est virtuellement intégrable en un produit de groupes de Lie $K \otimes H$ où K et H intègrent respectivement $\mathscr{K}$ et $\mathscr{H}$.

5.1 Algèbres (formellement) pré-intégrables

Une condition nécessaire pour qu'une algèbre de Lie topologique séquentiellement complète $\mathscr{L}$ soit intégrable au sens de Lie III est qu'elle soit *pré-intégrable* (pour reprendre la terminologie introduite par J. Leslie [Les 93]), c'est-à-dire qu'elle soit telle que l'espace des chemins $C^\infty(I, \mathscr{L})$, muni de la topologie de la convergence uniforme et du crochet de Lie

$$[u, v](t) = [\int_0^t u(\tau)d\tau, v(t)] + [u(t), \int_0^t v(\tau)d\tau]$$

soit une algèbre de Lie intégrable en un groupe de Lie G difféomorphe à son algèbre de Lie $C^\infty(I, \mathscr{L})$. Si en outre G est de type Campbell-Baker-Hausdorff nous dirons que $\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie pré-intégrable de type CBH. Par exemple, les algèbres de Lie banachiques et plus généralement les algèbres de Lie de type CBH sont pré-intégrables de type CBH. Les algèbres de Lie de première espèce sont toujours pré-intégrables.

L'analyse formelle de Kuranishi utilise implicitement la notion d'algèbre de Lie *formellement pré-intégrable*. Soit $\mathscr{L}$ une algèbre de Lie topologique séquentiellement complète Hausdorff. On identifie l'espace des courbes formelles de $I = [0, 1]$ à valeurs dans $\mathscr{L}$ à l'espace $J_0^\infty(I, \mathscr{L})$ des jets d'ordre infini de source le point 0 des applications lisses de I à valeurs dans $\mathscr{L}$. $J_0^\infty(I, \mathscr{L}) \simeq \prod_{i=0}^\infty \mathscr{L}$ est naturellement structuré en espace vectoriel séquentiellement complet via la topologie Tychonov. Un chemin formel $u \in J_0^\infty(I, \mathscr{L})$ est représenté par la série formelle $u(t) = \sum_{n=0}^\infty u_n t^n$ où $u_n \in \mathscr{L}$ pour tout n. Définissons $\int_0^t u(\tau)d\tau$ par $\int_0^t u(\tau)d\tau = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} u_n t^{n+1}$. Il est facile de voir que le crochet

$[u,v](t) = [\int_0^t u(\tau)d\tau, v(t)] + [u(t), \int_0^t v(\tau)d\tau]$ est bien défini dans $J_0^\infty(I,\mathscr{L})$ et fait de cet espace une algèbre de Lie topologique de dimension infinie.

Il est naturel de dire qu'une algèbre de Lie $\mathscr{L}$ est *formellement pré-intégrable (resp. de type CBH)* si l'algèbre de Lie $J_0^\infty(I,\mathscr{L})$ des chemins formels est intégrable en un groupe de Lie (resp. de type CBH). En fait on a

Théorème 2 *Pour toute algèbre de Lie topologique $\mathscr{L}$, l'algèbre de Lie $J_0^\infty(I,\mathscr{L})$ est intégrable en un groupe de Lie exponentiel de type CBH. Par conséquent toute algèbre de Lie topologique est formellement pré-intégrable de type CBH.*

Preuve. Soit $J_{0,0}^\infty(I,\mathscr{L})$ le sous-espace de $J_0^\infty(I,\mathscr{L})$ des chemins formels sans terme constant. $J_{0,0}^\infty(I,\mathscr{L})$ muni du crochet naturellement induit par celui de $\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie topologique de dimension infinie de type CBH intégrable en un groupe de Lie CBH exponentiel. La dérivée logarithmique gauche qui à $\gamma \in J_{0,0}^\infty(I,\mathscr{L})$ associe $\Lambda_\gamma = \frac{d}{d\tau}_{|0} H(\gamma^{-1}, \gamma(t+\tau))$, où H désigne la série formelle de Campbell-Baker-Hausdorff, réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Lambda : J_{0,0}^\infty(I,\mathscr{L}) \xrightarrow{\simeq} J_0^\infty(I,\mathscr{L}).$$

On démontre [Les 93] qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme d'algèbres de Lie. □

Il résulte alors du théorème 2 et du théorème II.1 p. 255 de [Kur 59] que

Proposition 1 Tout groupe de Lie de type F est une algèbre de Lie de type F formellement pré-intégrable de type CBH, i.e. associée au produit formel de CBH.

5.2 Quelques notations

Soit $G_O^\lambda(n) = \mathrm{Diff}_{O,loc}(\mathbb{R}^n)$ le groupe des germes de difféomorphismes C^∞ définis au voisinage de l'origine $O \in \mathbb{R}^n$, et qui fixent O. On montre que $G_O^\lambda(n)$ est muni d'une structure de groupe de Lie de dimension infinie modelé sur $\chi_{O,0}^\lambda(n)$, l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs indéfiniment différentiables définis au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et s'annulant en O. La topologie naturellement associée à $\chi_{O,0}^\lambda(n)$ est de type $\mathscr{L}\mathscr{F}$ (limite inductive d'espaces de Fréchet).

Soit $G_O^\infty(n)$ la formalisation du groupe précédent $G_O^\lambda(n)$. $G_O^\infty(n)$ s'identifie à l'image de $G_O^\lambda(n)$ par l'homomorphisme surjectif $\mathscr{J}^\infty = \pi_\lambda^\infty$. Chacun de ses éléments est un développement de Taylor formel projeté dans $GL(n,\mathbb{R})$ par π_∞^1. Pour tout entier $r > 1$ on a donc la suite de groupes $G_O^\lambda(n) \overset{\mathscr{J}^\infty}{\to} G_O^\infty(n) \overset{\pi_\infty^r}{\to} G_O^r(n) \overset{\pi_r^1}{\to} GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbf{1}$.

De même désignons par $\chi_{O,0}^\infty(n)$ la formalisation de $\chi_{O,0}^\lambda(n)$. C'est l'image de $\chi_{O,0}^\lambda(n)$ par l'homomorphisme d'algèbres de Lie surjectif $\mathscr{J}^\infty$. Avec des notations évidentes on a la suite associée d'algèbres de Lie

$$\chi^{\lambda}_{O,0}(n) \stackrel{\mathscr{T}^{\infty}}{\to} \chi^{\infty}_{O,0}(n) \stackrel{\pi^{r}_{\infty}}{\to} \chi^{r}_{O,0}(n) \stackrel{\pi^{1}_{r}}{\to} End(n,\mathbb{R}) \to 0. \tag{2}$$

5.3 L'algèbre de Lie locale

Soit $\chi^{\lambda}_{O,0}(n)$ l'algèbre locale d'isotropie à l'origine O de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel q, désignons par $\chi^{\lambda}_{O,q}(n)$ la sous-algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs tangents à l'ordre q au point O avec le champ nul. On montre que pour tout couple d'entiers $0 \leq q \leq q'$, $\chi^{\lambda}_{O,q'}(n)$ est un idéal de $\chi^{\lambda}_{O,q}(n)$. De plus $[\chi^{\lambda}_{O,q'}(n), \chi^{\lambda}_{O,q}(n)] \subseteq \chi^{\lambda}_{O,q+q'}(n)$. Comme $\chi^{\lambda}_{O,q+1}(n) \subset \chi^{\lambda}_{O,q}(n)$ pour tout entier q et $\bigcup_{q\in\mathbb{N}} \chi^{\lambda}_{O,q}(n) = \chi^{\lambda}_{O,0}(n)$, on a une *filtration décroissante* de l'algèbre locale d'isotropie par les $\chi^{\lambda}_{O,q}(n)$.

L'algèbre $\chi^{\lambda}_{O,0}(n)$ est munie d'une topologie naturelle. Soit $\mathscr{F} = \{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un filtre décroissant de voisinages compacts de l'origine et soit $T\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} T_x\mathbb{R}^n$ le fibré tangent trivial de la variété $\mathbb{R}^n$. Pour tout indice k, notons Σ^k l'ensemble des sections locales $\sigma : B_k \to T\mathbb{R}^n$ de classe C^{∞} du fibré trivial définies au-dessus de B_k. Identifions canoniquement $T\mathbb{R}^n$ au produit cartésien base par fibre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et munissons la fibre $\mathbb{R}^n$ d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ à laquelle correspond la base duale $(dx^1, \ldots, dx^n)$. Chaque section locale $\sigma : B_k \to T\mathbb{R}^n$ est maintenant perçue comme une application C^{∞} de B_k à valeurs dans la fibre type $\mathbb{R}^n$. Pour tout multiplet $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ d'entiers $\alpha_i \in \mathbb{N}$ notons ∂^{α} l'opérateur de dérivation

$\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ où ∂_i désigne $\frac{\partial}{\partial x^i}$. A toute paire (j, α) constituée d'un indice $j \in \{1, \ldots, n\}$ et d'un multiplet d'entiers α associons la semi-norme $p_{j,\alpha}$ définie dans Σ^k par

$$p_{j,\alpha}(\sigma) = \sup_{x\in B_k} \mid dx^j(\partial^{\alpha}\sigma(x)) \mid .$$

On montre que l'ensemble Σ^k muni de la famille $\{p_{j,\alpha}\}_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ \alpha\in A}}$, où A est l'ensemble des n-multiplets d'entiers, et de ses structures algébriques naturelles est une algèbre de Lie topologique localement convexe Hausdorff et complète. La topologie Θ^k de Σ^k est une topologie de type Fréchet. Pour tout $k < k'$, Σ^k se projette linéairement et continûment dans $\Sigma^{k'}$, $\Sigma^k \stackrel{i_k^{k'}}{\hookrightarrow} \Sigma^{k'}$. On a la projection naturelle $\Sigma^k \stackrel{i_k^{\lambda}}{\hookrightarrow} \chi^{\lambda}_O(n)$ et $\chi^{\lambda}_O(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} i_k^{\lambda}(\Sigma^k)$. L'algèbre de Lie locale s'identifie algébriquement à la limite inductive des espaces Σ^k pour le système dirigé $\{i_k^{k'}\}$. Munissons $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} i_k^{\lambda}(\Sigma^k)$ de sa topologie localement convexe de somme directe [Köt 69]. La projection naturelle $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} i_k^{\lambda}(\Sigma^k) \to \chi^{\lambda}_O(n)$ a un noyau fermé H_0. Par suite $\chi^{\lambda}_O(n)$ muni de sa topologie Θ de limite inductive d'espaces localement convexes est un espace localement convexe Hausdorff. Θ est une topologie de type $\mathscr{LF}$ non stricte [Köt 69]. On montre

Proposition 2 L'algèbre de Lie locale $\chi^{\lambda}_O(n)$ munie de sa topologie de limite inductive des Σ^k est une algèbre de Lie topologique localement convexe Hausdorff complète.

La sous-algèbre de Lie fermée $\chi^{\lambda}_{O,0}(n)$ des germes de champs qui s'annulent en l'origine est munie de la topologie induite. Il en est de même des sous-algèbres $\chi^{\lambda}_{O,q}(n)$ pour tout entier q.

5.4 L'algèbre de Lie formelle

Il est clair que la structure de filtration décroissante présente dans l'algèbre de Lie locale est conservée par passage à la formalisation $\chi^{\infty}_{O,0}(n)$, c'est-à-dire à l'algèbre de Lie formelle d'isotropie. Considérons l'espace vectoriel gradué associé

$$\gamma(\chi^{\infty}_{O,0}(n)) = \sum_{q=0}^{\infty} \chi^{\infty}_{O,q}(n)/\chi^{\infty}_{O,q+1}(n).$$

L'espace vectoriel $\chi^{\infty}_{O,q}(n)/\chi^{\infty}_{O,q+1}(n)$ s'identifie au noyau de la projection π^{q}_{q+1} : $\chi^{q+1}_{O,0}(n) \to \chi^{q}_{O,0}(n)$. Chaque élément de $\chi^{\infty}_{O,q}(n)/\chi^{\infty}_{O,q+1}(n)$ est représenté par un champ de vecteurs dont les composantes sont des polynômes de degré $q+1$. On munit $\chi^{\infty}_{O,0}(n)$ de la topologie Tychonov naturellement induite sur l'espace vectoriel gradué associé. Cela fait de l'algèbre formelle d'isotropie une algèbre de Lie topologique de dimension infinie localement convexe Hausdorff et complète. L'espace vectoriel sous-jacent est un espace vectoriel adapté. La projection $\chi^{\lambda}_{O,0}(n) \xrightarrow{\mathscr{T}^{\infty}} \chi^{\infty}_{O,0}(n)$ est clairement continue de sorte que la suite (2) est une suite d'homomorphismes continus d'algèbres de Lie.

5.5 Le groupe local d'isotropie

Théorème 3 *Le groupe d'isotropie $G^{\lambda}_{O}(n)$ des germes de difféomorphismes C^{∞} définies au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\chi^{\lambda}_{O,0}(n)$. Il a le même type d'homotopie que $O(n,\mathbb{R})$.*

La démonstration du théorème 3 dépend du lemme suivant

Lemme 1 *L'idéal $G^{\lambda}_{O,1}(n)$ des germes de difféomorphismes C^{∞} ayant un contact d'ordre 1 avec la transformation identique est un groupe de Lie difféomorphe à son algèbre de Lie $\chi^{\lambda}_{O,1}(n)$.*

Preuve. Considérons comme unique carte $\phi : \chi^{\lambda}_{O,1}(n) \to G^{\lambda}_{O,1}(n)$ qui au germe de champ de vecteurs X associe le germe de difféomorphisme $\phi(X) : x \mapsto x + X(x)$, noté $Id+X$. Il est clair que ϕ est bijective. Dans cette carte la multiplication de groupe prend la forme $X \star Y = Y + X \circ (Id + Y)$. On vérifie que le produit et l'inversion sont Gâteaux C^{∞}. □

Finalement le théorème 3 s'obtient en modelant localement $G^{\lambda}_{O}(n)$ sur la somme directe $\mathscr{End}(n,\mathbb{R}) \bigoplus \chi^{\lambda}_{O,1}(n)$ via l'application $\mathrm{Exp} \bigotimes \phi$ qui associe à $(A,X) \in \mathscr{End}(n,\mathbb{R}) \bigoplus \chi^{\lambda}_{O,1}(n)$ le germe de transformation $\mathrm{Exp}(A) \circ \phi(X)$. □

5.6 Le groupe formel d'isotropie

Dans cette section on démontre que le groupe d'isotropie formel $G_O^\infty(n)$ est muni d'une structure de groupe de Lie de seconde espèce modelé sur l'algèbre de Lie topologique formelle $\chi_O^\infty(n)$. Le groupe formel $G_O^\infty(n)$ se décompose naturellement selon le produit semi-direct $G_O^\infty(n) = GL(n, \mathbb{R}) \triangleleft G_{O,1}(n)$, où $G_{O,1}(n)$ est le sous-groupe d'isotropie constitué des transformations formelles tangentes à l'ordre 1 avec l'identité. Rappelons qu'un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ est dit *exponentiel* si l'exponentielle de groupe établit un difféomorphisme de $\mathscr{G}$ sur G. Il se trouve que $G_{O,1}(n)$ admet une structure canonique de groupe de Lie Campbell-Baker-Hausdorff de type exponentiel: Exp : $\chi_{O,1}(n) \xrightarrow{\cong} G_{O,1}(n)$. Par suite son homotopie est triviale $G_{O,1}(n) \simeq (*)$ et $O(n, \mathbb{R})$ apparaît comme un rétract fort du groupe d'isotropie formel $G_O^\infty(n) \simeq O(n, \mathbb{R})$.

5.6.1. Structure de seconde espèce. On commence par établir le lemme suivant

Lemme 2 *Pour tout entier r, le groupe d'isotropie $G_{O,1}^r(n)$ est un groupe de Lie de dimension infinie de type CBH exponentiel.*

Preuve. Pour cela il suffit de montrer que les groupes quotient $G_O^r(n) = G_O^\infty(n)$ $/G_{O,r}^\infty(n)$ sont exponentiels pour tout entier r. Fixons un r arbitraire. Comme l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_1^r = \chi_{O,1}^r(n)$ est nilpotente, $\mathscr{L}_1^r$ munie de la série de Campbell-Baker-Hausdorff est un groupe de Lie exponentiel L_1^r de dimension finie. D'autre part, chaque $G_{O,1}^r(n)$ est simplement connexe. Pour le voir il suffit de considérer l'unique carte ϕ^r : $\chi_{O,1}^r(n) \to G_{O,1}^r(n)$ qui à X associe $Id + X$. L'injection canonique de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_1^r$ de L_1^r dans l'algèbre de Lie $\chi_{O,1}^r(n)$ de $G_{O,1}^r(n)$ se relève donc en un isomorphisme de groupes de Lie. Autrement dit, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_1^r & \xrightarrow{Id} & \chi_{O,1}^r(n) \\ Id \downarrow & & \downarrow \mathrm{Exp} \\ L_1^r & \xrightarrow{\cong} & G_{O,1}^{+,r}(n) \end{array}$$

pour tout entier r. Il en résulte que le groupe de dimension infinie $G_{O,1}(n)$ est un groupe de type Campbell-Baker-Hausdorff difféomorphe via la fonction exponentielle à son algèbre de Lie, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 4 *Le groupe formel d'isotropie $G_O^\infty(n)$ d'un espace à n dimensions réelles est un groupe de Lie de dimension infinie de seconde espèce d'ordre 2 modelé sur $\chi_{O,0}^\infty(n) = \mathscr{E}nd(n, \mathbb{R}) \bigoplus \chi_{O,1}(n)$. Il est homotope à $O(n, \mathbb{R})$, i.e. $G_O^\infty(n) \simeq O(n, \mathbb{R})$.*

Preuve. La première assertion est une conséquence de la structure de produit semi-direct pour $G_O^\infty(n)$ décrite par la suite courte exacte de groupes de Lie

$$\mathbf{1} \longrightarrow G_{O,1}(n) \longrightarrow G_O^\infty(n) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

La seconde partie est déduite du lemme 2. □

5.6.2. Traitement analytique. Nous avons montré que pour tout entier n, le groupe formel d'isotropie $G_O^\infty(n)$ est un groupe de Lie de seconde espèce d'ordre 2, c'est-à-dire qu'appartient à $\mathscr{EXP}^2$. Il est important de savoir dans quels cas $G_O^\infty(n)$ est en fait un groupe de première espèce. Lorsque ce n'est pas le cas, il est toujours intéressant de pouvoir caractériser les sous-groupes de Lie de première espèce. Cet objectif est atteint par intégration de l'équation différentielle de définition d'un groupe à un paramètre.

Soit $g : (x^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \to (X^j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ une transformation formelle de $G_O^\infty(n)$ définie par

$$X^j = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_l\in\{1,\ldots,n\}\\ l\in\{1,\ldots,d\}\\ i_1\leq\cdots\leq i_d}} a^j_{i_1\cdots i_d} x^{i_1}\cdots x^{i_d}.$$

Supposons que g préserve l'orientation, c'est-à-dire que le déterminant $\det(a^j_i)$ soit strictement positif. Nous voulons savoir dans quelle mesure il existe un unique champ formel de vecteurs $W = \sum_{k=1}^n W^k \partial_k$ avec

$$W^k = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_l\in\{1,\ldots,n\}\\ l\in\{1,\ldots,d\}\\ i_1\leq\cdots\leq i_d}} b^k_{i_1\cdots i_d} x^{i_1}\cdots x^{i_d},$$

et un arc analytique $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma^t$ de transformations formelles qui préservent l'orientation satisfaisant à l'équation différentielle

$$\partial_t \gamma(t, x^1, \ldots, x^n) = W \circ \gamma(t, x^1, \ldots, x^n) \tag{3}$$

et aux conditions aux limites $\gamma^0 = Id$ et $\gamma^1 = g$. S'il existe une telle solution, l'arc $\gamma^t : (x^i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} \to (X^j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ prend la forme

$$X^j = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_l\in\{1,\ldots,n\}\\ l\in\{1,\ldots,d\}\\ i_1\leq\cdots\leq i_d}} \alpha^j_{i_1\cdots i_d}(t) x^{i_1}\cdots x^{i_d},$$

les coefficients $\alpha^j_{i_1\cdots i_d}(t)$ étant des fonctions analytiques de la variable t. Pour tout jet analogue à α nous utiliserons la notation suivante : quel que soit l'entier d on désignera par $[\alpha]^d$ la matrice

$$(\alpha^j_{i_1\cdots i_d})_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ i_l\in\{1,\ldots,n\}\\ l\in\{1,\ldots,d\}\\ i_1\leq\cdots\leq i_d}}$$

à n lignes et C^d_{n+d-1} colonnes. En comparant les coefficients d'ordre 1 de l'équation (3) on obtient

$$\frac{d}{dt}[\alpha]^1 = [b]^1 \cdot [\alpha]^1, \tag{4}$$

le point "$\cdot$" représentant la multiplication matricielle. Notons $\mathscr{V}$ le voisinage de l'origine dans $\mathscr{End}(n, \mathbb{R})$ constitué des matrices dont les valeurs propres λ_i ont une partie imaginaire qui satisfait à $|\Im(\lambda_i)| < \pi$. On sait que l'application exponentielle du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ restreinte à $\mathscr{V}$ est un isomorphisme. Donc si $(a_i^j) \in \mathrm{Exp}\mathscr{V}$ l'équation (4) admet une unique solution analytique qui satisfait aux conditions aux limites imposées. Soit $[\alpha]^1(t) = \mathrm{Exp}(t[b]^1)$ cette solution. En comparant les coefficients d'ordre m dans l'équation (3) on obtient

$$\frac{d}{dt}[\alpha]^m = [b]^1 \cdot [\alpha]^m + [b]^m \cdot [A^m] + [c]^m \tag{5}$$

où $[A^m]$ est une matrice carrée d'ordre C^d_{n+d-1} dont les coefficients sont des polynômes homogènes d'ordre m uniquement des coefficients de $[\alpha]^1$ et $[c]^m$ est une matrice dont les coefficients sont des polynômes des coefficients de $[\alpha]^k$ pour $1 \le k \le m-1$ et $[b]^k$ pour $2 \le k \le m-1$. Supposons que nous ayons déterminé par induction les $[\alpha]^d$ et $[b]^d$ pour tout entier $d \le m-1$. L'équation (5) s'intègre selon

$$[a]^m = [k]^m + e^{[b]^1} \int_0^1 e^{-t[b]^1}[b]^m \cdot [A^m](t)dt$$

où $[k]^m$ est une matrice constante. Pour pouvoir intégrer (3) avec l'unique restriction $(a_i^j) \in \mathrm{Exp}\mathscr{V}$ et ce en toute généralité il est nécessaire et suffisant de s'assurer que les opérateurs linéaires

$$\Lambda^m : [b]^m \mapsto \int_0^1 e^{-t[b]^1}[b]^m \cdot [A^m](t)dt$$

sont inversibles pour tout entier m.

Proposition 3 La transformation formelle g admet au moins un logarithme si le spectre de $[b]^1$ est réel.

Avant de prouver cette proposition notons un corollaire immédiat. Pour cela, nous dirons qu'un sous-groupe H de transformations formelles de $G_O^\infty(n)$ est *scalaire* si le spectre de $[b]^1$ est réel pour tout W de l'algèbre de Lie $\mathscr{H}$ de H. Par exemple le produit semi-direct de $T(n, \mathbb{R})$ avec $G_{O,1}(n)$ où $T(n, \mathbb{R})$ est le groupe trigonal large supérieur (ou bien inférieur) est un sous-groupe de Lie scalaire de $G_O^\infty(n)$ pour tout n.

Corollaire 1 *Tout sous-groupe de Lie scalaire de transformations formelles de $G_O^\infty(n)$ est un groupe de Lie de première espèce.*

En revanche on a

Proposition 4 Pour tout entier $n \ge 2$ le groupe formel d'isotropie $G_O^\infty(n)$ est un groupe de Lie de seconde espèce qui n'est pas de première espèce. Cela prouve que l'inclusion $\mathscr{EXP} \subset \mathscr{EXP}^2$ est stricte.

Preuve. (des propositions 3 et 4) Le complexifié $\Lambda^m_{\mathbb{C}}$ de Λ^m se triangularise avec $[b]^1$ et admet pour valeurs propes

$$\{\frac{e^{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_m}-\lambda_k}-1}{\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_m}-\lambda_k}\}_{\substack{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le n\\ k\in\{1,\ldots,n\}}}$$

où $\{\lambda_k\}_{1\le k\le n}$ est le spectre de $[b]^1$ □

Remarque. Les opérateurs Λ^m s'interprètent géométriquement en terme de la différentielle $d\mathrm{Exp}_b$ où b désigne le champ de vecteur formel linéaire de composante $[b]^1$. En effet on a l'identité [Gra 93]

$$\mathrm{Exp}(-b)_\star d\mathrm{Exp}_b = \int_0^1 Ad(\mathrm{Exp}(-tb))dt,$$

pour tout b appartenant à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie de dimension infinie au sens de Milnor.

Proposition 5 Le groupe formel d'isotropie $G^\infty_O(1)$ de la droite réelle est un groupe de Lie de première espèce non analytique qui est exponentiel. Cela prouve que l'inclusion $\mathscr{CBH}\subset\mathscr{EXP}$ est stricte. Bien sûr $G^\infty_O(1)=\mathbb{Z}_2\bigotimes G^{+,\infty}_O(1)$ est homotope à $\mathbb{Z}_2$.

Preuve. C'est essentiellement une conséquence du corollaire 1. Pour la non analyticité au sens de Gâteaux on montrera que la série formelle définie dans $\chi^\infty_0(1)\times\chi^\infty_0(1)$ par $(x,y)\mapsto c(adx)y=\sum_{k=0}^\infty(adx)^k y$, n'est pas analytique dans un voisinage de (O,O). □

5.6.3. Second théorème de Lie.

Théorème 5 (Lie II $\mathscr{EXP}$) *Toute sous-algèbre de Lie fermée $\mathscr{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ d'un groupe de Lie G de première espèce (resp. CBH) est l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie H de première espèce (resp. CBH) connexe et plongé dans G.*

Ce théorème s'applique trivialement à $G^\infty_O(1)$. Il n'est pas valide pour la classe générale des groupes de Lie de seconde espèce dont font partie les $G^\infty_O(n)$ pour $n\ge 2$. Toutefois on a pour tout entier n

Théorème 6 (Lie II $G^\infty_O(n)$) *Toute sous-algèbre de Lie fermée $\mathscr{H}$ de $\chi^\infty_{O,0}(n)$ est l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie H de seconde espèce connexe et plongé dans $G^\infty_O(n)$.*

Preuve. Soit $\mathscr{G}$ l'intersection $\mathscr{H}\cap\chi^\infty_{O,1}(n)$. C'est une sous-algèbre de Lie fermée de $\mathscr{H}$ de dimension infinie si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie. Comme c'est également un idéal il existe un sous-espace $\mathscr{K}$ de dimension finie tel que $\mathscr{H}=\mathscr{K}\oplus\mathscr{G}$. L'algèbre de Lie $\mathscr{H}$ s'intègre donc en un sous-groupe de Lie connexe H de seconde espèce (pour cette décomposition) qui est une extension centrale $K\lhd G$ d'un groupe de Lie de dimension finie K par le groupe de Lie connexe G qui intègre $\mathscr{G}$. □

5.7 Pseudogroupes de Lie formels et abstraits

La théorie formelle et abstraite des pseudogroupes de Lie de type infini, pour n'être pas une théorie de véritables groupes, n'entre certainement pas dans le cadre de la théorie des groupes de Lie au sens de J.Milnor. Cependant elle s'interprète toujours et de façon très satisfaisante en termes d'algèbres de Lie topologiques de dimension infinie. Ce point de vue est clairement illustré par le travail de Kuranishi. C'est un corollaire du théorème de Cartan-Kähler. Le but de cette section est de préciser pour une large classe de pseudogroupes de Lie de type infini la structure de l'algèbre de Lie topologique formelle naturellement associée à un tel pseudogroupe.

Définition 7 *Un pseudogroupe de Lie local Γ sera dit* **plat** *s'il est isomorphe à un pseudogroupe de Lie normal caractérisé par des constantes de structure C^k_{ij} et a^i_{js} indépendantes des invariants.*

Bien sûr, tout pseudogroupe de Lie transitif est plat.

Théorème 7 *Tout pseudogroupe de Lie plat Γ est formellement caractérisé par une algèbre de Lie topologique $\mathscr{L}^\infty(\Gamma)$* presque *de seconde espèce intégrable par parties. Plus précisément $\mathscr{L}^\infty(\Gamma)$ admet toujours une décomposition en somme directe*

$\mathscr{L}^\infty(\Gamma) = \mathscr{A} \bigoplus \mathscr{G}$ où $\mathscr{G}$ est une sous-algèbre de Lie de type CBH de codimension finie. En outre $\mathscr{G}$ est intégrable au sens de Lie III en un groupe de Lie G de type CBH. Par suite $\mathscr{L}^\infty(\Gamma)$ est virtuellement *intégrable en un produit $A \bigotimes G$.*

Preuve. Soit $\tilde{\Gamma}$ un "groupe continu" normal agissant au voisinage d'un point O d'un espace de dimension r de coordonnées $x^1, \dots, x^r$ et isomorphe à Γ. On peut toujours choisir les coordonnées de telle façon que $\tilde{\Gamma}$ soit défini comme l'ensemble des transformations locales qui laissent invariantes les ν dernières coordonnées $x^{r-\nu+1}, \dots, x^r$ (ν valant 0 dans le cas transitif) et r formes de Pfaff $\omega^1, \dots, \omega^r$ dont les coefficients dépendent de p indéterminées supplémentaires. Les équations de structure de $\tilde{\Gamma}$ sont

$$d\omega^i = \frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k + a^i_{j\lambda} \omega^j \wedge \overline{\omega}^\lambda,$$

les formes $\overline{\omega}^\lambda$, au nombre de p, étant définies sur le prolongement d'ordre 1 de dimension $r + p$ de l'espace où opère $\tilde{\Gamma}$. Par hypothèse, les coefficients C^i_{jk} et a^i_{js} peuvent être supposés constants. Le tableau a^i_{js} étant involutif, il est toujours possible de choisir [Car 04, n^o 21] les $\overline{\omega}^\lambda$ de telle sorte que

$$d\overline{\omega}^\lambda = \frac{1}{2} \gamma^\lambda_{\alpha\beta} \overline{\omega}^\alpha \wedge \overline{\omega}^\beta + \delta^\lambda_{k\alpha} \omega^k \wedge \overline{\omega}^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon^\lambda_{ij} \omega^i \wedge \omega^j,$$

où les coefficients $\gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, $\delta^\lambda_{k\alpha}$ et ϵ^λ_{ij} sont constants.

L'espace complémentaire $\mathscr{A}$ est constitué des transformations infinitésimales de $\tilde{\Gamma}$ qui, lorsqu'elles sont prolongées au premier ordre (l'espace de dimension $r+p$), laissent invariantes les p formes $\bar{\omega}^{\lambda}$.

Par construction A représente la partie affine de $\tilde{\Gamma}$. Il en résulte que $\mathscr{L}^{\infty}(\Gamma)$ admet la décomposition en somme directe

$\mathscr{L}^{\infty}(\Gamma) = \mathscr{A} \bigoplus \mathscr{G}$ où $\mathscr{G} \simeq \mathscr{L}^{\infty}(\Gamma)_{O,1}$ est représenté par les champs de vecteurs formels de $\mathscr{L}^{\infty}_{O}(\Gamma)$ tangents à l'ordre 1 avec le champ nul. □

La théorie formelle des pseudogroupes de Lie plats est donc une théorie d'algèbres de Lie topologiques *presque* de seconde espèce d'ordre 2. Le produit trivial $A \bigotimes G$ (écrit dans cet ordre) est l'objet qui représente de façon abstraite le pseudogroupe de Lie plat Γ associé. On peut le regarder comme un fibré en groupes de Lie de dimension infinie au-dessus d'un espace A qui est souvent un groupe de Lie de dimension finie. La théorie classique des groupes de Lie correspond à une fibre triviale.

Références

[BC3G 91] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths: Exterior differential systems, MSRI Publications vol. **18** (Springer-Verlag, New-York, 1991)

[Car 04] E. Cartan: Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. Éc. Normale **21**, 153-206 (1904) et Œuvres Complètes d'E.Cartan, Partie II vol. 2, Gauthier-Villars, 571-624 (1953)

[Car 37] E. Cartan: La structure des groupes infinis, Séminaire de Math., exposés G et H, 1er et 15 mars 1937, 1-50; Œuvres Complètes d'E.Cartan, Partie II vol. 2, Gauthier-Villars, 1953, 1335-1384

[Car 45] E. Cartan: Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques; Hermann, Paris, 1945

[Chn 54] S.S. Chern: Pseudo-groupes continus infinis, Colloque de géométrie différentielle, Strasbourg (Editions du CNRS, Paris, 1954)

[Daz 93] P. Dazord: Lie groups and algebras in infinite dimension: a new approach, XXXIII Taniguchi Symposium, Symplectic Geometry and its applications, 1993

[Daz 95] P. Dazord: Sur l'intégration des algèbres de Lie locales et la préquantification, Prepub. Inst. Girard Desargues U.R.A. CNRS **746**, 5/1995

[Gra 93] J. Grabowski: Derivative of the exponential mapping for infinite dimensional Lie groups, preprint, (1993)

[KaS 88] N. Kamran, W.F. Shadwick: E.Cartan's method of equivalence and Lie pseudo-groups, Infinite-Dimensional Lie Algebras and their Applications, ed. S. Kass (World Scientific, Singapore, 1988), 108-129

[Köt 69] G. Köthe: Topological Vector Spaces I. Die Grund. der Math. Wiss. **159** Springer Verlag, 1969

[Kur 59] M. Kuranishi: On the local theory of continuous infinite pseudo groups I, Nagoya Math. J. **15**, (1959), 225-260

[Kur 62] M. Kuranishi: Lectures on exterior differential systems, Tata Institute, Bombay, 1962

[Les 92] J. Leslie: Some integrable subalgebras of the Lie algebras of infinite-dimensional Lie groups. Trans. of the A.M.S. vol.**333**, (1992), 423-443

[Les 93] J. Leslie: On the integrability of some infinite dimensional Lie Algebras preprint, Howard University (Washington DC)

[Lib 59] P. Libermann: Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie, Bull. Soc. math. France **87**, (1959), 409-425

[Mil 83] J. Milnor: Remarks on infinite dimensional Lie groups. Proceedings of Summer School on quantum Gravity, les Houches, session XL, North-Holland, 1983

[NRW 94] L. Natarajan, E. Rodriguez-Carrington, J.A. Wolf: Proc Sympos Pure Math, vol. **56** (1994), Part 2, 377

[Omo 74] H. Omori: Infinite dimensional Lie transformations groups. Lecture Notes in Math. **427**, Springer-Verlag, 1974

[Omo 81] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, O. Kobayashi: On regular Fréchet-Lie groups. Tokyo J.Math. vol. **5**, N2, (1981), 365-397

[Rob 94] T. Robart, Thèse, Université Aix-Marseille II, 1994

[Rob 96] T. Robart, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **322**, Série I, p. 1071-1074, 1996

[SiS 65] I.M. Singer, S. Sternberg: The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups, J. d'Anal. Math. **15** (1965), 1-114

[Sou 85] J-M. Souriau: Un algorithme générateur de structures quantiques, Société Mathématique de France, Astérisque, hors série, 1985, p. 341-399

[Van 64] W.T. van Est, T.J. Korthagen: Nonenlargeable Lie Algebras, Nederl Akad Wetensch Proc Ser A-67=Indag. Math. **26**, (1964), 15-31

[Van 84] W.T. van Est: Rapport sur les S-Atlas, Astérique **116**, (1984), 235-292