

**Géométrie différentielle,  
groupes et algèbres de Lie,  
fibrés et connexions**

Version du 19 décembre 2001

Thierry MASSON

Laboratoire de Physique Théorique<sup>1</sup>  
Université Paris XI, Bâtiment 210  
91 405 Orsay Cedex, France  
Courriel : [thierry.masson@th.u-psud.fr](mailto:thierry.masson@th.u-psud.fr)

---

<sup>1</sup>Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique - UMR-8627

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Variétés différentiables</b>	<b>7</b>
1.1 Variétés différentiables, généralités . . . . .	7
1.1.1 Définitions des variétés . . . . .	7
1.1.2 Espace tangent . . . . .	12
1.1.3 Champs de vecteurs . . . . .	15
1.1.4 Espace cotangent . . . . .	17
1.1.5 Applications différentiables entre variétés . . . . .	19
1.2 Tenseurs et formes différentielles . . . . .	21
1.2.1 Rappel sur les tenseurs . . . . .	22
1.2.2 Tenseurs sur une variété . . . . .	24
1.2.3 Formes différentielles . . . . .	25
1.2.4 Différentielle . . . . .	27
1.2.5 Cohomologie de de Rham . . . . .	28
1.2.6 Dérivée de Lie . . . . .	28
1.2.7 Intégration . . . . .	31
1.3 Connexions linéaires . . . . .	34
1.3.1 Connexions . . . . .	34
1.3.2 Torsion et courbure . . . . .	37
1.4 Variétés riemanniennes . . . . .	41
1.4.1 Métrique . . . . .	41
1.4.2 Connexion de Lévi-Civita . . . . .	44
1.4.3 Coordonnées normales . . . . .	46
1.4.4 Bases non-coordonnées, repères locaux . . . . .	47
1.4.5 Théorie de Hodge . . . . .	51
1.4.6 Exemple de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	52
1.5 Groupes d'homotopie . . . . .	58
1.5.1 Composantes connexes par arcs . . . . .	58
1.5.2 Le groupe fondamental . . . . .	58
1.5.3 Revêtement universel . . . . .	60
1.5.4 Groupes d'homotopie d'ordres supérieurs . . . . .	62

<b>2</b>	<b>Groupes et algèbres de Lie, représentations</b>	<b>63</b>
2.1	Définitions . . . . .	63
2.1.1	Groupes topologiques et groupes de Lie . . . . .	63
2.1.2	Algèbres de Lie . . . . .	65
2.1.3	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . . .	66
2.1.4	Application exponentielle . . . . .	69
2.2	Action d'un groupe de Lie . . . . .	71
2.2.1	Définitions . . . . .	71
2.2.2	Champ de vecteurs fondamental . . . . .	72
2.2.3	Orbite d'une action, espaces quotients, espaces homogènes . . . . .	74
2.3	Représentations de groupes . . . . .	75
2.3.1	Généralités sur les représentations . . . . .	76
2.3.2	Représentations de groupes finis . . . . .	82
2.3.3	Représentations de groupes compacts . . . . .	88
2.4	Développements sur les algèbres de Lie . . . . .	91
2.4.1	Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie . . . . .	91
2.4.2	Dualité sur une algèbre de Lie . . . . .	93
2.4.3	Représentations d'algèbres de Lie . . . . .	98
2.4.4	Représentations adjointe et coadjointe . . . . .	101
2.4.5	Formes bilinéaires . . . . .	104
2.4.6	Algèbres de Lie et semi-simplicité . . . . .	107
2.5	Revêtements et groupes . . . . .	109
2.5.1	Généralités . . . . .	109
2.5.2	Les groupes Spin . . . . .	109
2.5.3	Le groupe des rotations . . . . .	110
2.5.4	Le groupe de Lorentz . . . . .	113
<b>3</b>	<b>Fibrés, connexions</b>	<b>119</b>
3.1	Notions de fibrés . . . . .	119
3.1.1	Fibré principal . . . . .	120
3.1.2	Fibré de fibre quelconque . . . . .	126
3.1.3	Fibré vectoriel . . . . .	128
3.1.4	Opérations sur les fibrés . . . . .	130
3.1.5	Fibrés associés . . . . .	135
3.2	Connexions sur un fibré principal . . . . .	139
3.2.1	Connexions . . . . .	139
3.2.2	Formes à valeurs vectorielles . . . . .	143
3.2.3	Formes tensorielles . . . . .	144
3.2.4	Différentielle covariante . . . . .	147
3.2.5	Courbure . . . . .	149
3.2.6	Le groupe de jauge et son action . . . . .	151
3.2.7	Relèvement horizontal, groupe d'holonomie . . . . .	154
3.3	Connexions sur un fibré vectoriel associé . . . . .	156

---

3.3.1	Du fibré principal au fibré vectoriel associé . . . . .	156
3.3.2	Dérivation covariante et connexion . . . . .	157
3.4	Expressions locales . . . . .	163
3.4.1	Préliminaires . . . . .	163
3.4.2	La 1-forme de connexion et la courbure . . . . .	167
3.4.3	La différentielle covariante . . . . .	169
3.5	Le fibré principal $L(M)$ . . . . .	171
3.5.1	Le fibré principal $L(M)$ . . . . .	171
3.5.2	Connexions linéaires . . . . .	173
3.5.3	La torsion revisitée . . . . .	175
3.6	Classes caractéristiques . . . . .	178
3.6.1	Polynômes invariants . . . . .	179
3.6.2	L'homomorphisme de Weil . . . . .	179
3.6.3	Classes et caractères de Chern . . . . .	183
3.6.4	Classes de Pontrjagin . . . . .	185
3.6.5	Classe d'Euler . . . . .	185
	<b>Bibliographie</b>	<b>187</b>
	<b>Index</b>	<b>189</b>

# Introduction

Dans ce polycopié sont donnés quelques bases sur les variétés différentiables, les groupes, les algèbres de Lie, leurs représentations, les fibrés et objets associés. Loin d'être complet, ce texte expose des définitions et résultats importants dans ces domaines. Il est destiné à une utilisation en physique théorique, où ces outils mathématiques sont de première importance aujourd'hui. Peu d'exemples y sont développés car les références citées en sont bien fournies. À partir de ce texte, il doit être possible d'aborder ces divers ouvrages avec profit, c'est d'ailleurs l'un de ses buts. Les démonstrations sont souvent absentes, car leur présence nuirait trop à l'enchaînement des idées. Seuls quelques calculs techniques souvent absents dans les ouvrages courants sont exposés, de façon à illustrer des concepts et rendre moins mystérieux certains résultats.

Pour aborder ce cours, nous supposons connues les notions de calcul différentiel sur  $\mathbb{R}^n$  (applications différentiables de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ , dérivées de ces applications, ...), les notions d'algèbres linéaires élémentaires (espaces vectoriels de dimensions finie, bases, dualité, quotients, matrices, ...) et quelques notions simples sur les groupes (définition, homomorphismes, sous-groupes, ...).

**Notation** : La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, l'un en « haut », l'autre en « bas », est systématiquement utilisée. Une même lettre d'indice qui apparaît deux fois, une fois comme indice haut et une fois comme indice bas, est l'expression d'une sommation :

$$X^i \alpha_i$$

se lit donc

$$\sum_i X^i \alpha_i$$

Si une même lettre d'indice apparaît plusieurs fois mais toujours à la même hauteur, ce n'est pas une sommation (sauf mention contraire!) :

$$S_i = g_{ij} S_j$$

n'est pas une sommation sur  $j$ . Dans  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , l'indice  $i$  est en position basse, donc  $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  est une sommation.

---

# Chapitre 1

## Variétés différentiables

### 1.1. Variétés différentiables, généralités

*Références* : [1], [4], [7], [9], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [20], [26], [27], [30].

#### 1.1.1. Définitions des variétés

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à  $\mathbb{R}^n$ , afin d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (*i.e.* continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à  $\mathbb{R}^n$ . De tels objets nous sont familiers dans  $\mathbb{R}^3$  : une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à  $\mathbb{R}^2$ . Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de  $\mathbb{R}^3$ . Ce que nous allons définir ne peut *a priori* pas être vu comme sous-ensemble d'un  $\mathbb{R}^n$ . Nous voulons en donner une définition intrinsèque, que nous appellerons **variétés**, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à  $\mathbb{R}^3$ . Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que *localement* (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Globalement, nous n'auront pas nécessairement  $\mathbb{R}^n$ , mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Variétés topologiques

Nous allons ainsi définir ce qu'est une **variété topologique**.  $M$  est une variété topologique si :

- $M$  est un espace topologique séparé<sup>1</sup> ;

---

<sup>1</sup>Un espace topologique est dit séparé si, pour tous points  $x, y$  de cet espace, il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un voisinage  $V$  de  $y$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ .

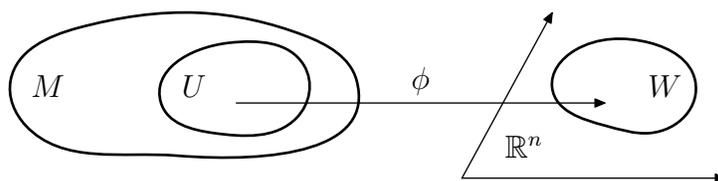


FIG. 1.1 – Le couple  $(U, \phi)$  constitue une carte de la variété  $M$ .

- Pour tout  $p \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $p$ , et un homéomorphisme

$$\phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

où  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous dirons que  $n$  est la **dimension** de  $M$ . Le couple  $(U, \phi)$  est une **carte locale** de  $M$ . Un ensemble de cartes locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  tel que la réunion des  $U_i$  soit  $M$  tout entier est appelé **atlas** de la variété. On dira alors que  $\{U_i\}_{i \in I}$  est un **recouvrement d'ouverts** de  $M$ . *A priori*, cet atlas n'est pas unique. En particulier, la réunion de deux atlas est encore un atlas.

Éclairons cette définition.  $M$  est un espace topologique, c'est à dire que l'on a accès sur  $M$  à la notion de *continuité*. Ainsi, il est possible de considérer des fonctions continues  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Ensuite,  $M$  ressemble localement à  $\mathbb{R}^n$ . En effet, autour de chaque point de  $M$ , nous identifions un ouvert  $U$  de  $M$  à un ouvert  $W = \phi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  grâce à l'homéomorphisme  $\phi$ <sup>2</sup>. L'image visuelle que nous pouvons nous donner de cette identification est donnée par la figure 1.1.

Nous rappelons qu'un espace topologique  $M$  est **connexe** s'il ne peut pas s'écrire  $M = U_1 \cup U_2$  avec  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  et  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts de cet espace topologique  $M$ .

Une **variété connexe** est une variété topologique connexe. Elle est donc constituée d'un seul morceau. Dans la suite, nous ne considérerons que des espaces topologiques connexes, donc des variétés connexes, sans qu'il soit nécessaire de le préciser.

## Variétés différentiables

Il est maintenant naturel de vouloir définir la notion de dérivabilité. Nous devons bien comprendre que nous n'avons pas accès directement à cette notion sur l'espace topologique  $M$ . En effet, la dérivabilité sur  $\mathbb{R}^n$  fait explicitement appel à la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , puisqu'on forme le rapport

$$[f(x + hy) - f(x)]/h$$

Sur un espace quelconque, nous constatons que cette relation n'a aucun sens. La solution consiste à transférer la dérivabilité connue sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  vers les ouverts de  $M$  qui leur sont homéomorphes.

<sup>2</sup>Nous rappelons qu'un homéomorphisme est une application bijective et continue dans les deux sens.

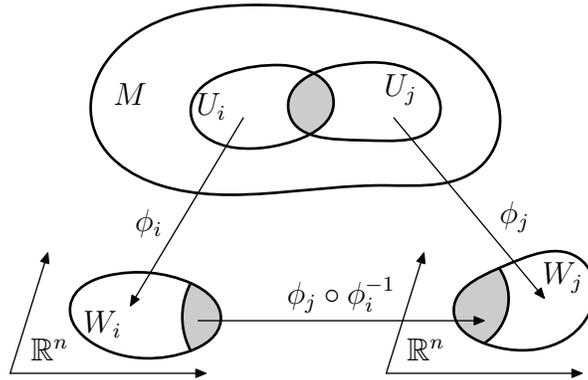


FIG. 1.2 – Les deux cartes  $(U_i, \phi_i)$  et  $(U_j, \phi_j)$  se raccordent sur l'intersection  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

Pour cela, remarquons que si nous nous donnons une fonction continue  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , alors localement, nous avons une fonction continue  $f \circ \phi^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous pouvons envisager la dérivabilité de cette fonction puisqu'elle part d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et va dans  $\mathbb{R}$ . En un point  $p \in U$ , nous souhaitons donc dire que  $f$  est dérivable si  $f \circ \phi^{-1}$  l'est en  $x = \phi(p)$ . Mais qu'advient-il de cette définition si  $p \in U_i \cap U_j$  pour deux ouverts  $U_i$  et  $U_j$  de cartes locales de  $M$ ? Est-on sûr que si  $f \circ \phi_i^{-1}$  est dérivable en  $x = \phi_i(p)$ ,  $f \circ \phi_j^{-1}$  l'est aussi en  $y = \phi_j(p)$ ? La définition n'aura un sens que si elle est indépendante du choix de l'ouvert contenant  $p$ .

Nous rencontrons pour la première fois ici un problème de définition lié au raccordement de deux cartes. En effet, afin que les définitions proposées soient cohérentes, il nous faudra toujours vérifier qu'elles ne dépendent pas du choix de l'ouvert (et de la carte) contenant le point où nous travaillons.

Ici, cette condition de cohérence revient en fait à imposer que les applications  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  soient dérivables, ces applications allant bien sûr d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans un autre ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons donc :

$M$  est une **variété différentiable de classe  $C^r$**  ( $r \geq 1$ ) si (figure 1.2)

- $M$  est une variété topologique ;
- Il existe un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$  tel que pour tous  $i, j$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe  $C^r$ . Nous dirons alors que l'atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  est de classe  $C^r$ .

Nous voyons ainsi que la notion de dérivabilité sur la variété n'est acquise qu'à travers la composition avec les  $\phi_i$  afin de retrouver des applications de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^n$ ).

Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe  $C^r$ . Deux tels atlas ne sont pas toujours compatibles (leur réunion n'est pas nécessairement un atlas de classe  $C^r$ ). Cela signifie qu'une variété topologique peut admettre plusieurs **structures différentiables**. Un atlas de classe  $C^r$  est bien sûr un atlas de classe  $C^{r'}$  pour tout  $r' \leq r$ .

Une carte locale  $(U, \phi)$  d'une variété différentiable de classe  $C^r$  sera dite de classe  $C^{r'}$  pour  $r' \leq r$ , si la réunion de cette carte avec un atlas qui définit la structure différentiable

de  $M$  est un atlas de classe  $C^{r'}$ . Cette définition impose donc que les applications  $\phi_i \circ \phi^{-1}$  soient de classe  $C^{r'}$ . Il sera donc possible de réunir deux atlas de classe  $C^r$  en un atlas de classe  $C^r$ , si toutes les cartes locales de l'un sont de classe  $C^r$  pour la structure différentiable définie par l'autre.

Nous dirons qu'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable de classe  $C^{r'}$ , avec  $r' \leq r$ , si pour toute carte locale  $(U, \phi)$  de classe  $C^{r'}$ ,  $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^{r'}$ .

Dans toute la suite, les variétés différentiables seront prises de classe  $C^\infty$ , et toutes les cartes locales seront prises de classe  $C^\infty$ .

### Coordonnées locales

Soit  $(U, \phi)$  une carte locale de la variété différentiable  $M$ . Pour  $p \in U$ ,  $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$  peut s'écrire  $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ . Nous dirons que  $(x^1(p), \dots, x^n(p))$  sont les **coordonnées de  $p$  dans la carte  $(U, \phi)$** . Nous dirons alors que les  $n$  applications  $(x^1, \dots, x^n)$  sont les  $n$  **applications coordonnées** associées à cette carte, que nous noterons plus brièvement  $(x^i)$ .

Soit  $\chi : \phi(U) \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme (de classe  $C^\infty$ ) entre l'ouvert  $\phi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  et un autre ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $(U, \chi \circ \phi)$  est encore une carte locale de la variété différentiable  $M$ , dont les coordonnées associées ne sont plus celle associées à la carte locale  $(U, \phi)$ . Pour un ouvert  $U$  de  $M$  donné, il existe donc une infinité de systèmes de coordonnées sur  $U$ .  $\chi$  permet d'effectuer un **changement de coordonnées** sur l'ouvert  $U$ . Si  $(x^i)$  sont les coordonnées associées à  $(U, \phi)$  et  $(y^j)$  sont celles associées à  $(U, \chi \circ \phi)$ , alors nous noterons symboliquement le changement de coordonnées  $(y^j(x^i))$  où l'on regarde les  $y^j$  comme  $n$  fonctions (de classe  $C^\infty$ ) définies sur l'ouvert  $\phi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous dirons que le système de coordonnées associé à une carte locale  $(U, \phi)$  est centré en  $p \in M$  si  $p \in U$  et  $\phi(p) = (0, \dots, 0)$ . Les coordonnées de  $p$  sont donc nulles. Un tel système de coordonnées existe toujours pour n'importe quel  $p$ , puisqu'il suffit de composer l'homéomorphisme d'une carte locale par une translation dans  $\mathbb{R}^n$ .

Étant donné une carte locale  $(U, \phi)$ , une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  prendra localement la forme  $f(x^1, \dots, x^n)$  au dessus de  $U$  (par abus de notation). En fait, il s'agit ici de la fonction  $f \circ \phi^{-1}$ . Attention donc de ne pas se laisser piéger par de tels abus d'écriture fréquents et sous-entendus.

### Sous-variétés

Un sous-ensemble  $N$  d'une variété  $M$  est une **sous-variété** s'il existe un entier  $k \leq n$  tel que pour tout  $p \in N$ , il existe une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$  autour de  $p$  telle que

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

où  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  des éléments de la forme  $(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ .

Alors  $N$  est une variété de dimension  $k$  dont les cartes locales ont pour ouverts les  $U \cap N$  et pour homéomorphismes associés les applications  $\phi_N = \phi|_{U \cap N}$  que l'on considère comme allant de  $U \cap N$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ .

Nous avons la notion évidente de **sous-variété différentiable**, où la structure différentiable est héritée de celle de la variété ambiante.

### Variétés à bord

Une **variété topologique à bord**  $M$  est un espace topologique séparé tel que pour tout  $p \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $p$  et un homéomorphisme

$$\phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}_{x^1 \geq 0}^n$$

où  $\mathbb{R}_{x^1 \geq 0}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n / x^1 \geq 0\}$ .  $W$  est donc de deux type possibles :

- Ou bien  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire ne rencontre pas l'hyperplan  $x^1 = 0$  de  $\mathbb{R}^n$ ;
- Ou bien  $W$  est l'intersection d'un ouvert  $\widetilde{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}_{x^1 \geq 0}^n$ , où  $\widetilde{W}$  rencontre l'hyperplan  $x^1 = 0$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans le premier cas, nous dirons que  $(U, \phi)$  est une **carte locale du premier type**, dans le second cas, une **carte locale du second type**. Les points  $p \in M$  tels que  $\phi(p) = (0, x^2, \dots, x^n) \in \widetilde{W} \cap \mathbb{R}_{x^1 \geq 0}^n$  pour une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$  du second type (et donc pour toute carte locale qui contient  $p$ ), constituent le **bord de la variété**  $M$ , sous ensemble de  $M$  noté  $\partial M$ . Ce sous-ensemble  $\partial M$  est une variété topologique de dimension  $n - 1$ , dont les cartes locales sont les  $(U \cap \partial M, \phi|_{\partial M})$  pour les cartes locales  $(U, \phi)$  du second type sur  $M$ . Cette variété topologique est sans bord, ce qui s'écrit

$$\partial(\partial M) = \emptyset$$

Un ensemble  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de cartes locales de  $M$  où les  $U_i$  forment un recouvrement d'ouverts de  $M$  est appelé un atlas de  $M$ .

Nous dirons qu'un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  est de classe  $C^r$  si :

- Pour toute carte locale du premier type  $(U_i, \phi_i)$  et toute carte locale de type quelconque  $(U_j, \phi_j)$ , telles que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe  $C^r$  (en tant qu'application entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ );

- Pour toutes cartes locales du second type  $(U_i, \phi_i)$  et  $(U_j, \phi_j)$  telles que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

peut être prolongée en une application de classe  $C^r$  entre un ouvert  $\widetilde{W}_1 \supset \phi_i(U_i \cap U_j)$  de  $\mathbb{R}^n$  et un ouvert  $\widetilde{W}_2 \supset \phi_j(U_i \cap U_j)$  de  $\mathbb{R}^n$ . La structure différentiable au bord de  $M$  est donc obtenue par restriction des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  à des ouverts de  $\mathbb{R}_{x^1 \geq 0}^n$ .

Un atlas de classe  $C^r$  sur une variété à bord  $M$  donne à  $M$  une structure de variété différentiable.

Il sera facile de voir que les définitions à venir d'objets définis sur une variété sans bord grâce à sa structure différentiable pourront être généralisées à toute variété différentiable à bord.

Sauf mention contraire, dans la suite toutes les variétés sont sans bord.

### 1.1.2. Espace tangent

Soit  $M$  une variété différentiable de classe  $C^\infty$ . Nous allons définir la notion d'**espace tangent**. Cette notion est assez immédiate dans le cas d'une sphère (par exemple) : c'est le plan tangent, dans  $\mathbb{R}^3$ , à la sphère au point considéré ; c'est donc un sous-espace de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ . Ici cependant, nous allons devoir définir ce que sont les vecteurs tangents et le plan tangent sans avoir à faire référence à un quelconque espace plus grand que  $M$ .

Il y a plusieurs façons de faire. Ici nous en donnons deux, équivalentes comme nous le verrons, et complémentaires dans la vision qu'elles nous donnent du plan tangent.

#### Première définition : tangentes à une courbe

Soit  $p$  un point de la variété  $M$ . On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des courbes  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M$  telles que  $\gamma(0) = p$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\gamma([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset U$  pour un ouvert  $U$  d'une carte locale  $(U, \phi)$ . Nous notons (notation très usuelle souvent sous-entendue)  $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$  sur cet intervalle, où les  $x^i$  sont les applications coordonnées associées à la carte locale  $(U, \phi)$ . Sur  $\mathcal{C}$ , nous définissons une relation d'équivalence :

$$\gamma \sim \gamma' \iff \left( \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right)_{|t=0} = \left( \frac{d\gamma'^i(t)}{dt} \right)_{|t=0}$$

Il est aisé de vérifier que cette relation d'équivalence est indépendante du choix du système de coordonnées sur  $U$ . Cette relation signifie que nous considérons deux courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$  comme équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans  $\mathbb{R}^n$  », sur n'importe quelle carte locale.

Par définition, l'**espace tangent en  $p$  à  $M$** , que l'on note  $T_pM$ , est l'ensemble des classes d'équivalences dans  $\mathcal{C}$  pour cette relation.

Cette définition signifie donc que  $T_pM$  est constitué des « tangentes » des courbes  $\gamma$  dans  $M$ . L'indépendance vis à vis du choix des coordonnées locales est essentielle pour assurer la cohérence de cette définition. Il faut cependant souligner qu'un « vecteur tangent » à  $M$  n'a pas de sens si  $M$  n'est pas un sous-ensemble d'un  $\mathbb{R}^m$ . La tangente est plutôt vue ici dans  $\mathbb{R}^n$ , grâce aux cartes locales.

Bien que nous puissions visualiser les vecteurs (au moins dans  $\mathbb{R}^n$ ), cette définition ne fait pas apparaître de façon évidente une éventuelle structure d'espace vectoriel de  $T_pM$ . C'est pourquoi nous avons recours à une seconde définition.

### Seconde définition : dérivations

On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ de classe } C^\infty\}$ . Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions :  $(fg)(p) = f(p)g(p)$ . Pour  $p \in M$ , nous définissons sur  $\mathcal{F}(M)$  une relation d'équivalence :

$$f \sim g \iff \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } p \in U, \text{ tel que } f|_U = g|_U$$

On note  $C_p^\infty(M)$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $\mathcal{F}(M)$  pour cette relation. Le produit sur  $\mathcal{F}(M)$  passe au quotient (comme il est aisé de le vérifier). Donc  $C_p^\infty(M)$  est une algèbre.

Une **dérivation** sur  $C_p^\infty(M)$  est une application linéaire  $\mathcal{L} : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie la **relation de Leibniz en  $p$**  :  $\mathcal{L}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \mathcal{L}(\tilde{f})g(p) + f(p)\mathcal{L}(\tilde{g})$  où  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont les classes d'équivalence de  $f$  et  $g$ . Par définition, l'**espace tangent en  $p$  à  $M$** ,  $T_pM$ , est l'espace vectoriel des dérivations sur  $C_p^\infty(M)$ .

Quelques remarques sont nécessaires pour éclairer cette définition fort abstraite. Tout d'abord, la relation d'équivalence définie sur  $\mathcal{F}(M)$  sert à ne faire dépendre  $\mathcal{L}(\tilde{f})$  que des valeurs de  $f$  et de ses dérivées en  $p$ . En effet, la seule information que  $\tilde{f}$  garde de  $f$  est l'ensemble des valeurs de  $f$  et de ses « dérivées » en  $p$  (s'en convaincre est un excellent exercice)<sup>3</sup>. Donc aucun autre point que  $p$  ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation  $\mathcal{L}$  sur  $C_p^\infty(M)$ . Ensuite, la relation de Leibniz assure que cette dépendance ne peut se faire qu'au maximum par la première dérivée de  $f$  en  $p$ , car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.

### Équivalence des définitions

Ces deux définitions sont bien sûr équivalentes. Nous pouvons les relier de la façon suivante. Soit  $\gamma \in \mathcal{C}$  un représentant d'une classe de  $\mathcal{C}/\sim$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(M)$  un représentant d'une classe de  $C_p^\infty(M)$ . On définit une dérivation associée à  $\gamma$  par la formule :

$$\tilde{f} \mapsto \left( \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right)_{t=0}$$

Il est facile de vérifier que nous définissons bien une dérivation sur  $C_p^\infty(M)$ , c'est à dire que le résultat ne dépend que des classes de  $f$  et  $\gamma$ . Nous avons ainsi une relation entre la première définition et la seconde. Il est possible de montrer que cette application est une bijection.

Nous tirons de tout cela que  $T_pM$  est un espace vectoriel, dont tout **vecteur**  $X(p)$  peut être vu soit comme la dérivée d'une courbe (non unique) passant par  $p$ , donc comme un « vecteur », soit comme une dérivation en  $p$  sur les fonctions définies au voisinage de  $p$ . Nous ne nous priverons pas d'utiliser l'un ou l'autre de ces points de vue, selon les besoins.

<sup>3</sup>On dit alors que  $\tilde{f}$  est le **jet d'ordre infini de  $f$  en  $p$** .

### Une base de l'espace tangent

Puisque nous avons un espace vectoriel, il est utile d'en trouver une base. Soient  $(x^1, \dots, x^n)$  des coordonnées au voisinage de  $p$ . Une base de  $T_pM$  est donnée par les  $n$  dérivations  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , dont les courbes associées sont les  $\gamma_i$  définies par :  $x^j(\gamma_i(t)) = 0$  pour  $j \neq i$  et  $x^i(\gamma_i(t)) = t$ . En particulier, la dimension de  $T_pM$  en tant qu'espace vectoriel est la dimension de  $M$  en tant que variété. Donc tout vecteur  $X(p) \in T_pM$  s'écrit  $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ , où les  $X^i(p)$  sont des réels. Cette écriture a l'avantage de suggérer que  $X(p)$  est un vecteur puisqu'il a  $n$  composantes  $X^1(p), \dots, X^n(p)$ , et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe  $\gamma$  définit ce vecteur, avec bien sûr  $\gamma(0) = p$ , alors nous avons

$$X^i(p) = \left( \frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right)_{|t=0}$$

Nous utiliserons souvent cette relation, que nous écrirons  $\dot{\gamma}(0) = X(p)$ .

Nous pouvons considérer l'effet d'un changement de coordonnées sur les  $n$  nombres  $X^i(p)$  : si nous passons des coordonnées  $(x^i)$  aux coordonnées  $(y^j(x^i))$ , alors si  $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^j(p) \frac{\partial}{\partial y^j}(p)$ , nous avons

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) X^i(p)$$

### Variétés orientables

La variété différentiable (connexe)  $M$  est dite **orientable** s'il existe un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$  tel que si  $(x^i)$  et  $(y^j)$  désignent les coordonnées de deux cartes quelconques de  $M$  s'intersectant, le changement de coordonnées  $y^j(x^i)$  vérifie

$$\det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \right) > 0$$

pour tout  $p$  dans l'intersection des ouverts des deux cartes.

Ainsi, si nous décidons que la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right\}$  de  $T_pM$  est orientée dans le sens positif, alors la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j}(p) \right\}$  l'est aussi, puisque le changement de base s'effectue grâce à une matrice de déterminant strictement positif. Lorsque le choix d'une telle orientation est fait, on dit que  $M$  est **orientée**. Une variété orientable n'a que deux orientations possibles.

### Cas d'un espace vectoriel

Considérons un espace vectoriel  $V$  de dimension finie comme une variété différentiable. Pour cela, il suffit de prendre une unique carte dont l'ouvert est  $V$  tout entier, et comme coordonnées la décomposition de tout élément sur une base quelconque.

Pour un point  $v$  donné, son espace tangent est l'ensemble des dérivations sur les fonctions définies sur un voisinage de  $v$ . Soit  $f$  une telle fonction. Tout élément  $x$  de  $V$  définit alors une dérivation, par la formule :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(v + hx) - f(v))}{h}$$

qui est la formule usuelle de dérivation dans la direction de  $x$  si  $V = \mathbb{R}^n$ .

Or, nous savons que l'espace vectoriel  $T_v V$  a pour dimension la dimension de  $V$  en tant que variété, donc a pour dimension la dimension de  $V$  en tant qu'espace vectoriel. Il est d'autre part facile de voir que l'espace vectoriel des dérivations définies ci-dessus est de cette dimension aussi. Donc nous avons  $T_v V \simeq V$  par l'application  $x \mapsto$  « dérivation dans la direction de  $x$  ». Ce résultat est valable en tout point  $v$  de  $V$ .

### 1.1.3. Champs de vecteurs

En chaque point  $p$  de  $M$ , nous venons de définir l'espace tangent. Nous avons alors la possibilité de considérer une application qui associe à tout point  $p$  de  $M$  un vecteur dans  $T_p M$ . C'est la notion de **champ de vecteurs**. Formalisons ce concept.

#### Fibré tangent

Nous posons tout d'abord

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Alors  $TM$  est une variété différentiable, dont il est facile de voir qu'elle est orientable, appelée **fibré tangent à  $M^4$** .

Un élément de  $TM$  est un couple  $(p, X(p))$  avec  $p \in M$  et  $X(p) \in T_p M$ . Cherchons des coordonnées sur  $TM$ . Soit  $(U, \phi)$  une carte locale sur  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$ . Pour  $p \in U$ , et  $X(p) \in T_p M$ , nous pouvons prendre comme coordonnées du couple  $(p, X(p))$  les réels  $(x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p, X), \dots, X^n(p, X))$  où nous décomposons  $X(p)$  selon  $X(p) = X^i(p, X) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_p M$ . Nous avons donc  $2n$  coordonnées pour caractériser un élément de  $TM$ . Cette variété topologique est donc de dimension  $2n$ . De plus, il est facile de voir, grâce à ces coordonnées, que  $TM$  est bien une variété différentiable. Il est de même assez facile de montrer que c'est une variété orientable.

Il existe une application surjective particulière  $\pi : TM \rightarrow M$  définie par  $\pi(p, X) = p$ . C'est la **projection** de  $TM$  sur  $M$ . Nous remarquons que les ouverts des cartes de  $TM$ , définies ci-dessus, sont les ouverts  $\pi^{-1}(U) \subset TM$ . D'autre part, en identifiant  $p \in M$  au point  $(p, 0)$  de  $TM$ , on peut considérer  $M$  comme une sous-variété de  $TM$ .

---

<sup>4</sup>La définition précise de fibré est donnée au Chapitre 3. On peut juste expliquer ici que comme son nom l'indique, un fibré est une variété qui est une sorte de réunion de copies d'une fibre type, ici l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  (isomorphe à chaque  $T_p M$ )

## Champs de vecteurs

Une **section de  $TM$**  est une application  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X$  soit l'identité sur  $M$ . C'est à dire que pour tout  $p \in M$ , nous associons un  $X(p) \in T_pM$ . Une telle section  $X$  de classe  $C^\infty$ , sera appelée **champ de vecteurs** sur  $M$ . La notion d'application de classe  $C^\infty$  entre variétés est définie plus bas.

Un champ de vecteurs est donc une application qui à tout point de la variété  $M$  associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon  $C^\infty$ . Cette dernière hypothèse équivaut à ce que, si  $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ , les fonctions  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  soient  $C^\infty$  sur l'ouvert de la carte locale.

Nous notons  $\Gamma(M)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $M$  et par la suite, nous noterons souvent  $X_p$  à la place de  $X(p)$ .

## Dérivations et champs de vecteurs

Nous appellerons **dérivation sur l'algèbre  $\mathcal{F}(M)$**  toute application linéaire  $D : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  qui vérifie la **relation de Leibniz** :  $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ . Alors tout champ de vecteur  $X$  sur  $M$  définit une dérivation sur  $\mathcal{F}(M)$  par la relation suivante :  $(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$  où dans le second membre,  $X(p)$  est pris comme dérivation au sens de la définition de  $T_pM$ .

Localement, cette formule s'écrit

$$(X \cdot f)(p) = X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

C'est la « dérivée de  $f$  dans la direction de  $X$  », comme il est facile de le voir dans  $\mathbb{R}^n$ .

Réciproquement, il est facile de voir que toute dérivation de l'algèbre  $\mathcal{F}(M)$  définit un champ de vecteurs. Donc nous identifions  $\Gamma(M)$  aux dérivations de  $\mathcal{F}(M)$ .

## Crochet de Lie

Nous pouvons munir  $\Gamma(M)$  d'une structure supplémentaire. Soient  $X, Y \in \Gamma(M)$  et  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Puisque  $X \cdot f \in \mathcal{F}(M)$ , nous pouvons lui appliquer  $Y$ . Nous obtenons ainsi une application linéaire  $YX : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ . Mais cette application n'est pas une dérivation (le vérifier !). Il est possible de construire une dérivation à partir de  $X$  et  $Y$ , en posant

$$[X, Y] = XY - YX$$

Un calcul simple montre que  $[X, Y]$  est une dérivation (*i.e.* vérifie la relation de Leibniz), donc appartient à  $\Gamma(M)$ . Nous appellerons **crochet de Lie** de  $X$  et  $Y$  le champ de vecteurs  $[X, Y]$ . Le crochet de Lie est antisymétrique en  $X$  et  $Y$  et vérifie l'**identité de Jacobi** :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Muni de ce crochet,  $\Gamma(M)$  est une **algèbre de Lie** (voir Chapitre 2). Son expression locale est

$$[X, Y] = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

On remarque que  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$ . Ceci est une caractéristique des dérivations le long de coordonnées.

### Flot d'un champ de vecteurs

Tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  définit une équation différentielle

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = X|_{\gamma(t)}$$

dont l'inconnue est la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ . En chacun de ses points, cette courbe doit avoir pour vecteur tangent le vecteur associé à  $X$  en ce point. En physique, ce type d'équation différentielle est très commune.

Le **flot** de  $X$ , noté  $t \mapsto \phi_X(t, p)$ , est l'unique solution de cette équation différentielle de condition initiale  $\phi_X(0, p) = p$  pour tout  $p \in M$ , c'est à dire

$$\frac{d\phi_X(t, p)}{dt} = X|_{\phi_X(t, p)}$$

Le flot de  $X$  n'est pas nécessairement défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On note  $I(p)$  le plus grand interval sur lequel le flot est défini en  $p \in M$ . On peut montrer que pour tous  $s \in I(p)$  et  $t \in I(\phi_X(s, p))$ , on a  $\phi_X(t, \phi_X(s, p)) = \phi_X(t+s, p)$ . À  $t$  donné, l'application  $\phi_X(t, \cdot) : M \rightarrow M$  est un difféomorphisme, d'inverse  $\phi_X(-t, \cdot)$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on peut montrer, en utilisant l'unicité du flot, que

$$\phi_{\lambda X}(t/\lambda, p) = \phi_X(t, p)$$

### 1.1.4. Espace cotangent

#### Dualité

Comme  $T_p M$  est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, que nous noterons  $T_p^* M$ . C'est l'**espace cotangent à  $M$  en  $p$** . Nous rappelons que le dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des applications linéaires de cet espace vectoriel vers  $\mathbb{R}$ . Cet ensemble forme lui-même un espace vectoriel, de même dimension. Nous noterons  $\langle \alpha|_p, X|_p \rangle \in \mathbb{R}$  le couplage entre  $\alpha|_p \in T_p^* M$  et  $X|_p \in T_p M$ , c'est-à-dire  $\alpha|_p(X|_p)$ .

### Différentielle d'une fonction

Soit  $f$  une fonction sur  $M$ . Si nous considérons  $X|_p$  comme une dérivation,  $X|_p \cdot f \in \mathbb{R}$  dépend linéairement de  $X|_p$ . Ainsi,  $f$  définit une application linéaire  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , donc un élément de  $T_p^* M$ . On note  $df(p)$  ou  $df|_p$  cet élément, qui ne dépend bien sûr que de  $f$  et  $p$ . Nous avons ainsi

$$\langle df|_p, X|_p \rangle = X|_p \cdot f$$

Nous dirons que  $df|_p$  est la **différentielle de  $f$  en  $p$** . Elle ne peut dépendre que des dérivées premières de  $f$  en  $p$ .

### Une base de l'espace cotangent

Nous savons que localement, au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte locale  $(U, \phi)$ ,  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$  est une base de  $T_p M$  pour tout  $p \in U$ . Nous notons  $\{dx^i|_p\}$  sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les  $x^i$  sont  $n$  fonctions définies localement sur  $M$  et puisque nous avons par définition même de la différentielle

$$\langle dx^j|_p, \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta_i^j$$

Il est aisé de vérifier que dans cette base,

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p$$

### Fibré cotangent et 1-formes différentielles

Comme pour  $T_p M$ , nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

appelée **fibré cotangent de  $M$** .

Une section de classe  $C^\infty$ ,  $\alpha : M \rightarrow T^* M$ , de ce fibré, est appelée une **1-forme différentielle sur  $M$** . C'est donc une application qui à tout  $p \in M$  associe un élément  $\alpha|_p$  de  $T_p^* M$ . On note  $\Omega^1(M)$  l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur  $M$ . Ainsi, si  $f \in \mathcal{F}(M)$ , nous avons  $df \in \Omega^1(M)$  ( $df : p \mapsto df|_p \in T_p^* M$ ).

Localement, au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$ , nous pouvons écrire  $\alpha = \alpha_i dx^i$  avec  $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  fonction  $C^\infty$ . Le couplage avec un champ de vecteurs  $X$  s'écrit  $\langle \alpha, X \rangle = \alpha_i X^i$ . Par recollement sur tous les ouverts des cartes locales, ce couplage donne une fonction  $C^\infty$  sur  $M$  :

$$\langle \alpha, X \rangle(p) = \langle \alpha|_p, X|_p \rangle \in \mathbb{R}$$

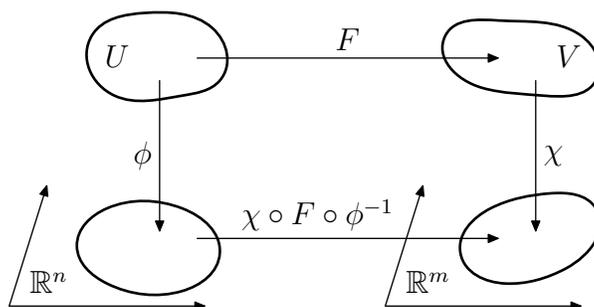


FIG. 1.3 – L'application  $F$  est différentiable si  $\chi \circ F \circ \phi^{-1}$  est différentiable en tant qu'application entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

### 1.1.5. Applications différentiables entre variétés

#### Définition

Soient deux variétés différentiables  $M$  et  $N$ . Une **application**  $F : M \rightarrow N$  est **différentiable de classe  $C^r$** , si pour tout  $p \in M$ , il existe une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$  autour de  $p$ , de classe  $C^r$ , et une carte locale  $(V, \chi)$  de  $N$ , de classe  $C^r$ , telles que  $F(U) \subset V$  et  $\chi \circ F \circ \phi^{-1}$  soit de classe  $C^r$  (voir figure 1.3).

Ainsi, pour parler de dérivabilité d'une telle application, nous sommes obligés de composer à la fois à droite et à gauche par les homéomorphismes définissant les cartes locales.

#### Application linéaire tangente

Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable. Munissons les deux variétés différentiables  $M$  et  $N$  ci dessus de coordonnées locales  $(x^i)$  et  $(y^j)$  respectivement, autour des point  $p \in M$  et  $F(p) \in N$ .

Nous voulons définir une application linéaire de  $T_p M$  dans  $T_{F(p)} N$ , canoniquement associée à  $F$  et notée  $T_p F$ . Pour cela, nous avons trois manières de faire, totalement équivalentes.

La première façon de procéder considère un vecteur tangent comme la dérivée d'une courbe. Soit  $X|_p \in T_p M$ . Alors il existe une courbe  $\gamma$  dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = X|_p$ . Nous remarquons alors que  $F \circ \gamma$  est une courbe dans  $N$  qui passe en  $F(p)$  à  $t = 0$ . Si nous la dérivons en ce point, nous obtenons un vecteur de  $T_{F(p)} N$ . Par définition nous posons

$$T_p F X|_p = \left( \frac{dF \circ \gamma(t)}{dt} \right)_{t=0}$$

Nous définissons ainsi l'**application linéaire tangente**  $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ .

La seconde façon de procéder consiste à considérer  $X|_p$  comme une dérivation sur les fonctions définies sur  $M$ . Soit  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $N$ . Nous remarquons que  $f \circ F$

est une fonction définies sur  $M$ . Par définition, nous posons :

$$\left(T_p F X|_p\right) \cdot f = X|_p \cdot (f \circ F)$$

Il est possible de montrer que  $T_p F X|_p$  est bien une dérivation sur  $C_p^\infty(N)$ , définissant ainsi un élément de  $T_{F(p)}N$ .

Enfin, la troisième façon de définir l'application linéaire tangente peut se faire par son expression dans des cartes locales, de coordonnées  $(x^i)$  sur  $M$  et  $(y^j)$  sur  $N$ . Si dans ces coordonnées nous posons

$$F^j(x^1(p), \dots, x^n(p)) = y^j(F(x^1(p), \dots, x^n(p)))$$

(que nous abrégons sous la forme  $y^j = F^j(x^i)$ ), nous posons

$$T_p F \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

et nous prolongeons par linéarité.

De ce point de vue, dans les bases  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right\}$  et  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j}(p) \right\}$ ,  $T_p F$  est la matrice  $\left( \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \right)$ . Cela nous permet de définir le **rang de  $F$  en  $p$**  comme le rang de la matrice  $\left( \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \right)$ . Cet entier est indépendant du choix des coordonnées, mais dépend du point  $p$  considéré.

Si nous ôtons la dépendance en  $p$ , nous avons défini

$$TF : TM \rightarrow TN$$

application  $C^\infty$  entre variétés différentiables. Cette application est aussi notée  $F_* : TM \rightarrow TN$ .

### Application pull-back

Soit maintenant  $\alpha \in \Omega^1(N)$  et  $X \in \Gamma(M)$ . On définit  $F^*\alpha \in \Omega^1(M)$  par

$$\langle F^*(\alpha|_{F(p)}), X|_p \rangle = \langle \alpha|_{F(p)}, T_p F X|_p \rangle$$

en tout  $p \in M$ . Localement, si  $y^j = F^j(x^i)$ , nous avons

$$F^*\alpha = (\alpha_j \circ F) dF^j$$

C'est une formule qui peut se révéler utile en pratique.  $F^*$  est appelée l'**application pull-back** associée à  $F$ .

Pour résumer, nous avons donc

$$\begin{aligned} F &: M \rightarrow N \\ F_* &: TM \rightarrow TN \\ F^* &: \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M) \end{aligned}$$

Nous pouvons encore (et nous le ferons par la suite) étendre ces définitions. Pour le moment, nous allons définir  $F^* : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  par la formule :

$$F^* f = f \circ F$$

pour  $f \in \mathcal{F}(N)$ . On montre alors que

$$d(F^* f) = F^*(df)$$

Il est facile de vérifier que pour  $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$  où  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont des variétés différentiables, nous avons :

$$\begin{aligned} (G \circ F)_* &= G_* \circ F_* \\ (G \circ F)^* &= F^* \circ G^* \end{aligned}$$

Enfin, si  $F$  est un difféomorphisme (i.e.  $F^{-1}$  existe et est  $C^\infty$  aussi), alors il est possible de définir l'application pull-back sur les vecteurs par la formule :

$$F^* X = (F^{-1})_* X$$

### Immersion, plongement, submersion

Nous dirons que l'application différentiable  $F : M \rightarrow N$  est une **immersion** si  $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  est injective pour tout  $p \in M$ . Dans ce cas  $\dim M \leq \dim N$  et le rang de  $F$  est égal à la dimension de  $M$  en tout point  $p$  de  $M$ .

Nous dirons que  $F$  est un **plongement** si  $F$  est une immersion et si  $F$  réalise un homéomorphisme de  $M$  sur  $F(M)$  (pour la topologie induite). Ceci permet de caractériser les sous-variétés  $M$  de  $N$  : ce sont les sous-ensembles  $M \subset N$  tel que l'inclusion  $i : M \hookrightarrow N$  soit un plongement. Si  $F$  est un plongement, alors  $F(M)$  est trivialement une sous-variété de  $N$ .

Enfin,  $F$  est une **submersion** si  $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  est surjective pour tout  $p \in M$ . Dans ce cas,  $\dim M \geq \dim N$  et le rang de  $F$  est égal à  $\dim N$  en tout point  $p$  de  $M$ .

## 1.2. Tenseurs et formes différentielles

Références : [1], [4], [6], [7], [9], [12], [13], [14], [15], [16], [20], [26], [27].

### 1.2.1. Rappel sur les tenseurs

#### Définitions

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels réels de dimensions  $p$  et  $q$  respectivement. Nous notons  $E^*$  et  $F^*$  leur espace vectoriel dual. Pour  $f \in E^*$ ,  $g \in F^*$ ,  $x \in E$  et  $y \in F$ , nous posons  $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ . Nous définissons ainsi  $f \otimes g$  comme une forme bilinéaire sur  $E \times F$ . C'est le **produit tensoriel des deux formes  $f$  et  $g$** .

Si  $\{e^1, \dots, e^p\}$  est une base de  $E^*$  et  $\{f^1, \dots, f^q\}$  une base de  $F^*$ , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $E \times F$  admet pour base les  $pq$  éléments  $e^i \otimes f^j$ .

Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur  $E \times F$  est noté  $E^* \otimes F^*$  et appelé **produit tensoriel** de  $E^*$  et  $F^*$ . Tout élément  $T \in E^* \otimes F^*$  s'écrit donc  $T = T_{ij}e^i \otimes f^j$ .

Nous savons d'autre part que tout vecteur de  $E$  peut être considéré comme une forme linéaire sur  $E^*$ , c'est à dire comme élément de  $E^{**}$  (en dimension finie, nous avons  $E^{**} \simeq E$ ). Nous pouvons donc appliquer ce schéma de construction à  $E^*$  et  $F^*$  afin de définir le produit tensoriel  $E \otimes F \simeq E^{**} \otimes F^{**}$ . Une base de  $E \otimes F$  est alors  $\{e_i \otimes f_j\}$  où  $\{e_i\}$  et  $\{f_j\}$  sont des bases de  $E$  et  $F$ .

Nous avons alors les règles algébriques suivantes, faciles à vérifier : si  $x, x_1, x_2 \in E$ ,  $y, y_1, y_2 \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ (\lambda x) \otimes y &= x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y) \end{aligned}$$

Nous pouvons itérer le processus de tensorialisation et définir ainsi  $E \otimes \dots \otimes E \otimes F \otimes \dots \otimes F$ . Pour la suite, nous particularisons  $F$  en prenant  $F = E^*$ . Nous obtenons alors  $E \otimes \dots \otimes E \otimes E^* \otimes \dots \otimes E^*$  où  $E$  apparaît  $s$  fois et  $E^*$   $r$  fois. Les éléments de cet ensemble sont des formes  $(r + s)$ -linéaires sur  $E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots \times E$ . Un tel élément s'écrit  $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$ , c'est un **tenseur de type  $(s, r)$** . Nous dirons que les coefficients  $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$  sont les **coordonnées du tenseur  $T$  dans la base  $(e_i)$** .

Effectuons un changement de base  $e'_i = a^j_i e_j$  dans  $E$ . Nous avons alors  $e'^i = (a^{-1})^i_j e^j$ . Il est facile de montrer que les coordonnées du tenseur  $T$  se transforment selon :

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = (a^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (a^{-1})^{i_s}_{k_s} T_{\ell_1 \dots \ell_r}^{k_1 \dots k_s} a^{\ell_1}_{j_1} \dots a^{\ell_r}_{j_r}$$

De cette relation, nous dirons que les indices bas de  $T$  sont **covariants**, et les indices hauts **contravariants**.

Un élément de  $\mathbb{R}$  est par convention un tenseur de type  $(0, 0)$ . Ces tenseurs sont appelés des **scalaires**. Ces tenseurs n'ayant pas d'indice, par la relation précédente ils sont invariants par changements de base. C'est bien ce qu'on attend d'un scalaire. Un tenseur de type  $(1, 0)$  est bien sûr un vecteur de  $E$ , et un tenseur de type  $(0, 1)$  est une forme de  $E^*$ .

Nous dirons qu'un tenseur  $T = T^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$  est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si  $T^{i_1 \dots i_s} = T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$  (resp.  $T^{i_1 \dots i_s} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$ ) pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_s$  où  $\mathfrak{S}_s$

est le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, s\}$ . Cette définition est indépendante du choix de la base.

Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés.

Le **produit tensoriel** du tenseur

$$S = S_{\ell_1 \dots \ell_p}^{k_1 \dots k_q} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{\ell_1} \otimes \dots \otimes e^{\ell_p}$$

avec le tenseur

$$T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S_{\ell_1 \dots \ell_p}^{k_1 \dots k_q} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{\ell_1} \otimes \dots \otimes e^{\ell_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

La **contraction** d'un tenseur consiste à sommer l'un de ses indices hauts avec l'un de ses indices bas. Par exemple, la contraction de  $\alpha \otimes X$  où  $\alpha \in E^*$  et  $X \in E$ , est  $\langle \alpha, X \rangle$ , c'est à dire que nous sommions un indice haut ( $X^i$ ) et un indice bas ( $\alpha_i$ ) :  $\alpha_i X^j \mapsto \alpha_i X^i$ . Dans ce cas particulier, nous obtenons un scalaire. Dans le cas général, la contraction d'un seul indice fait passer d'un tenseur de type  $(s, r)$  à un tenseur de type  $(s-1, r-1)$ .

**Première application** :  $E \otimes E^* \simeq \mathcal{L}(E)$

La première utilisation de la notion de tenseur est la suivante : nous allons montrer que  $E \otimes E^*$  s'identifie canoniquement, en dimension finie, à  $\mathcal{L}(E)$ , l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ .

En effet, tout élément  $M = M_j^i e_i \otimes e^j \in E \otimes E^*$  s'identifie à l'endomorphisme

$$v = v^i e_i \mapsto Mv = M_j^i e_i e^j(v) = (M_j^i v^j) e_i$$

c'est à dire, tout simplement, que  $(M_j^i)$  est la matrice de cet endomorphisme dans la base  $\{e_i\}$  de  $E$ . Réciproquement, tout endomorphisme  $M \in \mathcal{L}(E)$  se met sous forme d'une matrice  $(M_j^i)$  dans la base  $\{e_i\}$ , et donne l'élément  $M_j^i e_i \otimes e^j \in E \otimes E^*$  dans cette identification. Il est facile de montrer que cette identification est indépendante du choix de la base  $\{e_i\}$  de  $E$ , et qu'elle est donc canonique.

**Seconde application** : l'algèbre extérieure

La seconde utilisation du produit tensoriel va consister à définir l'espace  $\bigwedge^r E^*$  des  $r$ -formes multilinéaires antisymétriques sur  $E$ .

Pour cela, considérons l'espace vectoriel

$$\otimes^r E^* = \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{r \text{ fois}}$$

et posons  $\bigwedge^r E^*$  le sous espace vectoriel de  $\otimes^r E^*$  des éléments complètement antisymétriques.

Définissons alors le **produit extérieur**

$$\begin{aligned} \wedge : \bigwedge^r E^* \times \bigwedge^s E^* &\rightarrow \bigwedge^{r+s} E^* \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

par

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot \eta(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})$$

pour tous  $x_1, \dots, x_{r+s} \in E$ . Ce produit a la propriété de commutativité

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$$

Définissons l'espace vectoriel

$$\bigwedge E^* = \bigwedge^0 E^* \oplus \bigwedge^1 E^* \oplus \dots \oplus \bigwedge^p E^*$$

où nous posons  $\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$ ,  $\bigwedge^1 E^* = E^*$ . Nous remarquons que  $\bigwedge^n E^* = \{0\}$  pour  $n > p =$  dimension de  $E$ .

Alors le produit extérieur donne à  $\bigwedge E^*$  une structure d'algèbre. C'est l'**algèbre extérieure sur  $E^*$** .

## 1.2.2. Tenseurs sur une variété

### Définition

Pour tout  $p \in M$ , définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)} M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_s \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_r$$

Un élément  $T \in T_p^{(s,r)} M$  est un **tenseur de type  $(s, r)$  au dessus de  $p$** . Dans une base associée à des coordonnées  $(x^i)$  au voisinage de  $p$ , il s'écrit

$$T|_p = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

### Champs de tenseurs

Nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^{(s,r)} M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(s,r)} M$$

qui est un fibré au dessus de  $M$ , le **fibré des tenseurs de type  $(s, r)$** . Des sections  $C^\infty$  de ce fibré seront appelées **champs de tenseurs de type  $(s, r)$** . Un champ de tenseurs  $T$

de type  $(s, r)$  s'écrit donc localement, au dessus d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$ ,

$$T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$$

Globalement, il est facile de vérifier qu'un tenseur de type  $(s, r)$  est une application  $\mathcal{F}(M)$ -multilinéaire sur  $\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \times \Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)$  à valeurs dans  $\mathcal{F}(M)$ . Un champ de tenseurs de type  $(0, 0)$  n'est autre qu'une fonction sur  $M$ , un tenseur de type  $(1, 0)$  est un champ de vecteurs, et un tenseur de type  $(0, 1)$  est une 1-forme différentielle.

Lors d'un changement de coordonnées  $x^i \mapsto y^j(x^i)$ , les composantes du tenseur se changent selon la relation

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial y^{i_s}}{\partial x^{k_s}} T_{\ell_1 \dots \ell_r}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{\ell_r}}{\partial y^{j_r}}$$

Enfin, si  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme, nous pouvons définir l'**application pull-back sur les champs de tenseurs** :

$$(F^*T)(\alpha^1, \dots, \alpha^s, X_1, \dots, X_r) = T\left((F^{-1})^*\alpha^1, \dots, (F^{-1})^*\alpha^s, F_*X_1, \dots, F_*X_r\right)$$

où  $T$  est un champ tensoriel sur  $N$ ,  $\alpha^i \in \Omega^1(M)$  et  $X_i \in \Gamma(M)$ .

### 1.2.3. Formes différentielles

#### Définition

Une  **$r$ -forme différentielle** (ou plus brièvement  **$r$ -forme**) sur  $M$  est un champ tensoriel de type  $(0, r)$  complètement antisymétrique. Nous noterons  $\Omega^r(M)$  l'espace vectoriel de ces  $r$ -formes. Pour  $r = 0$ , nous avons  $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$ . Pour  $r = 1$ , nous retrouvons les 1-formes différentielles. Pour  $r > n$  ( $n$  dimension de  $M$ ), nous avons  $\Omega^r(M) = \{0\}$ . Une  $r$ -forme différentielle est donc une application  $\mathcal{F}(M)$ -multilinéaire antisymétrique de  $\Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)$  dans  $\mathcal{F}(M)$ .

#### Expressions locales

Si  $\{dx^i\}$  est une base locale des 1-formes différentielles, au dessus de l'ouvert  $U$  d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$ , nous posons

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

pour  $i_1 < \dots < i_r$ . Alors les  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  engendrent localement  $\Omega^r(M)$  sur les fonctions. C'est à dire que toute  $r$ -forme  $\omega$  s'écrit, au dessus de  $U$ ,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \\ &= \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

où la seconde sommation porte sur  $i_1 < \dots < i_r$  et où les  $\omega_{i_1 \dots i_r}$  sont des fonctions  $U \rightarrow \mathbb{R}$ . Parfois, cette seconde sommation portera sur tous les indices  $i_1, \dots, i_r$ , ce qui suppose que l'on étende la définition des  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$  à tous les  $(i_1, \dots, i_r)$  et que les  $\omega_{i_1 \dots i_r} : U \rightarrow \mathbb{R}$  deviennent des fonctions complètement antisymétriques sur leurs indices; il faudra alors aussi placer un facteur  $\frac{1}{r!}$  devant la somme. Nous l'indiquerons quand ce sera le cas.

### Produit extérieur

Pour  $\omega \in \Omega^r(M)$  et  $\eta \in \Omega^s(M)$ , nous pouvons définir le **produit extérieur**  $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$  par la formule :

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \cdot \eta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel  $\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega^n(M)$  une structure d'algèbre. Il a la propriété de commutativité

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$$

### Fibré des formes différentielles

Jusqu'à présent, nous avons regardé les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles et les champs de tenseurs comme des sections de fibrés. Nous pouvons faire de même pour les  $r$ -formes différentielles sur  $M$ . Pour tout  $p \in M$ , posons  $\bigwedge^r T_p^* M$  l'espace vectoriel des  $r$ -formes multilinéaires antisymétriques sur  $T_p M$ . Définissons alors la variété

$$\bigwedge^r T^* M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^r T_p^* M$$

appelée **fibré des  $r$ -formes différentielles**. Alors toute  $r$ -forme différentielle est une section  $C^\infty$  de ce fibré.

### Pull-back des formes différentielles

Soit  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable, et  $\omega \in \Omega^r(N)$ . Alors  $F^* \omega$  est une  $r$ -forme différentielle sur  $M$ , appelée le **pull-back** de  $\omega$  par  $F$ . On remarquera que cette définition ne suppose pas que  $F$  soit inversible, puisque dans le cas des formes, la formule donnée comme définition sur les tenseurs généraux se réduit à

$$(F^* \omega)(X_1, \dots, X_r) = \omega(F_* X_1, \dots, F_* X_r)$$

Pour  $r = 1$ , on retrouve la définition déjà donnée du pull-back.

### 1.2.4. Différentielle

#### Définition

Nous définissons la **différentielle**  $d$  sur  $\Omega(M)$  par l'ensemble des applications linéaires

$$d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

avec  $d : \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  la différentielle sur les fonctions déjà définie, et pour tout  $\omega \in \Omega^r(M)$ ,

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \overset{i}{\cdot} \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \overset{i}{\cdot} \dots \overset{j}{\cdot} \dots, X_r) \end{aligned}$$

Dans le premier terme du second membre,  $X_i$  agit comme dérivation sur la fonction  $\omega(X_0, \dots, \overset{i}{\cdot}, \dots, X_r)$  ( $\overset{i}{\cdot}$  signifie que l'on omet  $X_i$  dans les arguments de  $\omega$ ).

#### Propriétés

Il est facile, en utilisant l'identité de Jacobi, de vérifier que

$$d^2 = 0$$

Nous avons aussi l'importante relation (qui fait de  $d$  une antidérivation de l'algèbre  $\Omega^*(M)$ ) :

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$$

où  $\omega \in \Omega^r(M)$ .

Au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte locale de  $M$ , si  $\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ , alors

$$d\omega = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_{i_1 \dots i_r} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Cette sommation porte sur toutes les valeurs de  $i$  et sur  $i_1 < \dots < i_r$ .

Si  $M$  et  $N$  sont deux variétés différentiables, et si  $F : M \rightarrow N$  est une application différentiable, alors, pour toute forme différentielle  $\omega \in \Omega^*(N)$ , nous avons

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$$

c'est à dire que  $F^*$  et  $d$  commutent. Attention, d'un côté, il s'agit de la différentielle sur  $M$ , et de l'autre de la différentielle sur  $N$ .

### 1.2.5. Cohomologie de de Rham

Nous allons donner ici un bref aperçu de ce qu'est la cohomologie de de Rham. Dans chaque espace vectoriel  $\Omega^r(M)$ , nous avons deux sous-espaces vectoriels associés canoniquement à la différentielle  $d$ . Le premier est le noyau de  $d$ , considérée comme application  $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ . Nous notons  $Z^r(M) = \text{Ker } d \subset \Omega^r(M)$ , et nous dirons qu'une  $r$ -forme dans  $Z^r(M)$  est **fermée**. Le second est l'image de  $d$ , considérée comme application  $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ . Nous notons  $B^r(M) = \text{Im } d \subset \Omega^r(M)$ , et nous dirons qu'une  $r$ -forme dans  $B^r(M)$  est **exacte**. Comme  $d^2 = 0$ , nous constatons que

$$B^r(M) \subset Z^r(M)$$

mais nous n'avons pas toujours égalité entre ces sous-espaces vectoriels.

Rappelons le **Lemme de Poincaré** : si  $U$  est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ , alors toute forme fermée sur  $U$  est exacte sur  $U$ .

Pour un tel ouvert  $U$ , il y a donc égalité  $B^r(U) = Z^r(U)$ . Mais dans le cas où  $U$  n'est pas étoilé, nous ne savons en général rien de plus que l'inclusion déjà évoquée.

*A priori*, la « différence » entre ces deux espaces vectoriels doit donc être reliée à la structure de l'ouvert  $U$ , aussi bien topologique que différentielle. Dans le cas d'une variété  $M$ , il en est de même. Or, cette différence est « mesurée » par l'espace vectoriel quotient

$$H^r(M, d) = Z^r(M)/B^r(M)$$

Nous appellerons **cohomologie de de Rham** l'espace vectoriel

$$H^*(M, d) = \bigoplus_{r \geq 0} H^r(M, d)$$

Le théorème de de Rham, qu'il serait trop long d'énoncer ici, nous apprend qu'en réalité la cohomologie de de Rham ne capture que des informations sur la structure topologique de la variété. Cette cohomologie a néanmoins de nombreuses applications dans le domaine des variétés différentiables.

### 1.2.6. Dérivée de Lie

Nous voulons maintenant généraliser le fait qu'un champ de vecteurs  $X$  soit une dérivation sur  $\mathcal{F}(M)$ , en étendant cette dérivation aux tenseurs et aux formes. Cette dérivation portera le nom de **dérivée de Lie** dans la direction  $X$  et sera notée  $L_X$ . Elle ne modifiera pas le type du tenseur auquel elle s'applique (un vecteur est envoyé sur un vecteur, une  $r$ -forme sur une  $r$ -forme...)

Il y a plusieurs approches possibles (toutes équivalentes) à cette définition. La première approche est algébrique : on se donne des règles de calcul qui permettent d'atteindre tous les tenseurs et toutes les formes. La seconde est analytique : on se donne l'expression de cette dérivée dans des coordonnées locales. Enfin, la dernière est géométrique : on réinterprète ce que signifie géométriquement la dérivée sur les fonctions et on généralise aux tenseurs et aux formes. Ces définitions nous donnent des visions complémentaires de la dérivée de Lie dont il est parfois utile de disposer face à un problème concret.

### Approche algébrique

Sur les fonctions, nous posons  $L_X f = X \cdot f = \langle df, X \rangle$ , qui n'est autre que l'action de  $X$  sur  $f$  en tant que dérivation. Sur les champs de vecteurs, nous posons  $L_X Y = [X, Y]$  pour  $Y \in \Gamma(M)$ . Pour définir  $L_X$  sur les tenseurs, nous nous donnons les règles suivantes :

- $L_X(T \otimes S) = T \otimes L_X S + (L_X T) \otimes S$  ;
- $L_X$  commute avec la contraction des tenseurs ;
- $L_X$  est linéaire (sur  $\mathbb{R}$ ).

Ces règles nous assurent que  $L_X$  est bien définie sur tout tenseur. En effet, un tenseur quelconque est une somme finie de produits tensoriels de vecteurs et de 1-formes. Si nous connaissons  $L_X$  sur les vecteurs (ce qui est le cas) et les 1-formes (nous allons voir comment l'obtenir) alors la linéarité et la première règle nous donnent  $L_X$  sur ce tenseur.

Pour  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , calculons  $L_X \alpha$ . Pour tous  $X, Y \in \Gamma(M)$ , la première règle donne :

$$L_X(\alpha \otimes Y) = (L_X \alpha) \otimes Y + \alpha \otimes L_X Y$$

Appliquons alors l'opération de contraction et utilisons la seconde règle au premier membre :

$$L_X \langle \alpha, Y \rangle = \langle L_X \alpha, Y \rangle + \langle \alpha, L_X Y \rangle$$

or  $\langle \alpha, Y \rangle$  est une fonction, donc  $L_X \langle \alpha, Y \rangle = X \cdot \langle \alpha, Y \rangle$ , d'où

$$\langle L_X \alpha, Y \rangle = X \cdot \langle \alpha, Y \rangle - \langle \alpha, [X, Y] \rangle$$

Nous avons donc là l'expression de  $L_X \alpha$ , puisque pour tout  $Y \in \Gamma(M)$  nous connaissons  $\langle L_X \alpha, Y \rangle$ .

La définition de  $L_X$  sur tous les tenseurs est donc complète, bien que nous n'en ayons pas une expression explicite.

Sur les formes différentielles,  $L_X$  est donc définie par la méthode précédente. Cependant, une autre approche algébrique est possible. Pour cela, nous devons définir le **produit intérieur**  $i_X$  sur les formes différentielles.

Pour  $\omega \in \Omega^r(M)$ , nous définissons  $i_X \omega \in \Omega^{r-1}(M)$  par

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

c'est à dire que  $X$  « prend la place du premier argument » dans  $\omega$ . Sur les fonctions, nous posons  $i_X f = 0$ . Nous pouvons alors montrer que pour  $\omega \in \Omega^r(M)$  et  $\eta \in \Omega^s(M)$  :

$$i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_X \eta$$

et

$$(i_X)^2 = 0$$

(C'est à dire que  $i_X$  est une antidérivation sur  $\Omega^*(M)$ ).

Une fois défini ce produit intérieur, nous posons

$$L_X = i_X d + di_X$$

Alors  $L_X$  est une dérivation qui coïncide sur les formes différentielles avec la dérivée de Lie définie ci-dessus.

Il est alors possible de montrer que

$$\begin{aligned} L_X d &= dL_X \\ [L_X, i_Y] &= i_{[X, Y]} \\ L_{[X, Y]} &= [L_X, L_Y] \end{aligned}$$

### Approche analytique

Au dessus d'une carte locale de  $M$ , de coordonnées  $(x^i)$ , prenons  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$ . Nous posons alors

$$(L_X T)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = X^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - \sum_{p=1}^s T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{p-1} \ell i_{p+1} \dots i_s} \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x^\ell} + \sum_{p=1}^r T_{j_1 \dots j_{p-1} \ell j_{p+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} \frac{\partial X^\ell}{\partial x^{j_p}}$$

Cette définition permet de calculer explicitement la dérivée de Lie sur un tenseur donné. Il faut cependant remarquer que dans les calculs les plus courants, les règles algébriques suffisent. Cette définition n'est à utiliser qu'en dernier recours !

### Approche géométrique

Nous avons vu qu'un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  définit un flot  $\phi_X$  sur  $M$ , qui définit à son tour un difféomorphisme que nous notons  $\phi_{X,t} : M \rightarrow M$ .

Or, nous avons vu qu'un difféomorphisme sur une variété permet (par l'application pull-back) de transporter des quantités (vecteurs, formes, tenseurs) d'un point de la variété sur un autre. Ainsi, pour un champ de vecteurs  $Y$  sur  $M$ , les deux vecteurs  $Y|_p$  et  $\phi_{X,t}^* Y|_{\phi_{X,t}(p)}$  sont dans le même espace vectoriel  $T_p M$ . Il est donc possible de les soustraire. Nous définissons alors la dérivée de Lie de  $Y$  dans la direction  $X$  par :

$$\begin{aligned} (L_X Y)|_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \phi_{X,t}^* Y|_{\phi_{X,t}(p)} - Y|_p \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} (\phi_{X,t}^* Y) (p) \right)_{|t=0} \end{aligned}$$

où cette dérivée est la dérivée d'un vecteur dépendant de  $t$  dans  $T_p M$  (voir figure 1.4).

Un calcul montre alors que cette quantité vaut bien  $[X, Y]|_p = (L_X Y)|_p$ . Pour une fonction  $f$  à la place de  $Y$ , la même expression donnerait  $(X \cdot f)(p) = (L_X f)(p)$ . C'est en fait la définition de  $X|_p \cdot f$  lorsqu'on considère  $X$  comme la dérivée sur les fonctions donnée par  $f \mapsto \left( \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right)_{|t=0}$ , où ici  $\gamma(t) = \phi_{X,t}(p)$  et  $\phi_{X,t}^* f = f \circ \phi_{X,t}$ .

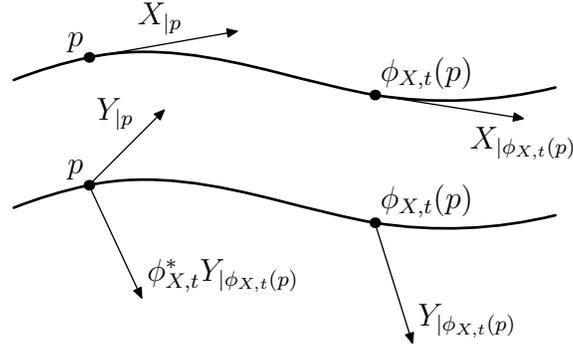


FIG. 1.4 – Interprétation géométrique de la dérivée de Lie : le champ de vecteurs  $X$  détermine le flot  $\phi_X$ . Pour calculer  $L_X Y$ , on compare au dessus du point  $p$  les vecteurs  $Y|_p$  et  $\phi_{X,t}^* Y|_{\phi_{X,t}(p)}$  lorsque  $t$  est infinitésimal.

Nous reconnaissons donc dans cette limite une dérivée qui coïncide avec les dérivées associées à  $X$  précédemment rencontrées. Il est alors aisé de généraliser cette expression à un tenseur  $T$  sur  $M$  :

$$(L_X T)|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \phi_{X,t}^* T|_{\phi_{X,t}(p)} - T|_p \right)$$

Cette expression s'écrit encore :

$$(L_X T)|_p = \left( \frac{d}{dt} (\phi_{X,t}^* T) (p) \right)_{|t=0}$$

Il est important ici de bien comprendre le mécanisme géométrique mis en jeu dans cette définition. Sur une variété  $M$ , il n'existe pas d'application canonique entre  $T_p M$  et  $T_q M$  (resp.  $T_p^{(s,r)} M$  et  $T_q^{(s,r)} M$ ) pour deux points  $p$  et  $q$  de  $M$  différents. Nous ne pouvons donc pas effectuer la différence  $Y|_p - Y|_q$  (resp.  $T|_p - T|_q$ ), qui n'a aucun sens puisque les deux vecteurs (resp. tenseurs) vivent dans des espaces vectoriels différents et non canoniquement reliés. Cependant, afin de définir une dérivée sur les tenseurs, nous avons besoin de comparer deux tenseurs au dessus de points différents. Grâce au champ  $X$ , nous parvenons à le faire au travers d'une application pull-back canoniquement associée au flot de  $X$ .

Nous rencontrerons de nouveau cette façon de procéder, lorsque nous étudierons la notion de connexion.

## 1.2.7. Intégration

### Intégration des $n$ -formes sur $\mathbb{R}^n$

Nous allons rappeler et étendre des définitions liées à la notion d'intégration sur des objets de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous pouvons considérer  $\mathbb{R}^n$  comme une variété de dimension  $n$ , avec une seule carte, de coordonnées  $(x^i)$ , les  $n$  composantes d'un élément de  $\mathbb{R}^n$ . Soit une  $n$ -forme différentielle  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette  $n$ -forme s'écrit  $\omega = \omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  où il n'y a pas de sommation. Soit  $W \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons

$$\int_W \omega = \int_W \omega_{1\dots n}(x) dx^1 \dots dx^n$$

où dans le second membre, il s'agit d'une intégrale multiple habituelle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Dans cette expression, nous avons implicitement choisi une orientation sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire un choix dans l'ordre  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . En effet, nous avons  $\omega_{12\dots n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = +\omega_{21\dots n} dx^2 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  car  $\omega_{21\dots n} = -\omega_{12\dots n}$ . Donc, avec la seconde expression de  $\omega$ , nous aurions

$$\begin{aligned} \int_W \omega &= \int_W \omega_{21\dots n}(x) dx^2 dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_W \omega_{21\dots n}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n \\ &= - \int_W \omega_{12\dots n}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n \end{aligned}$$

Cette expression de l'intégrale de  $\omega$  est l'opposée de la première définition. Cela montre que l'ordre des  $dx^i$  est important, afin que l'application

$$\omega_{i_1\dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \mapsto \omega_{i_1\dots i_n} dx^{i_1} \dots dx^{i_n}$$

(sans sommation sur les indices dans ces deux expressions) qui intervient dans la définition de l'intégrale ôte toute ambiguïté. Il est alors facile de voir que seule l'orientation doit être imposée, car l'ordre exact des  $dx^i$  n'importe pas : une permutation paire des  $dx^i$  donne la même valeur à l'intégrale.

## Partition de l'unité

Afin de pouvoir donner des définitions d'intégrales de formes différentielles sur des variétés quelconques, il nous faut un concept supplémentaire, que nous allons introduire ici, et qui va nous permettre de définir l'intégrale en recollant des expressions locales.

Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts d'une variété différentiable  $M$ , localement fini, c'est à dire que tout sous-ensemble compact de  $M$  ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts  $U_i$ . Alors il est possible de montrer qu'il existe un ensemble de fonctions  $h_i$  telles que

- $h_i(p) \geq 0$  pour tout  $p \in M$  ;
- Le support de  $h_i$  est inclus dans  $U_i$  (donc  $h_i$  est nulle en dehors de  $U_i$ ) ;
- $\sum_{i \in I} h_i(p) = 1$  pour tout  $p \in M$  (comme le recouvrement est localement fini, cette somme est une somme finie).

Un tel système de fonctions est appelé une **partition de l'unité de  $M$  associée au recouvrement d'ouverts localement fini  $\{U_i\}_{i \in I}$** . Souvent, le recouvrement d'ouverts  $\{U_i\}_{i \in I}$  est celui associé à un atlas (localement fini)  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $M$ .

### Intégration des $n$ -formes sur une variété

Pour intégrer une  $n$ -forme différentielle  $\omega$  sur une variété différentiable  $M$ , orientable, munie d'un atlas orienté localement fini  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , nous allons, comme d'habitude, transporter les objets sur  $\mathbb{R}^n$ . Or, nous ne savons pas (et ne pouvons pas) transporter globalement une forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$ . Une partition de l'unité  $\{h_i\}_{i \in I}$  associée au recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  nous permet de transporter cette forme différentielle localement sur  $\mathbb{R}^n$  (sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ) puis de recoller ces « morceaux ».

En effet,  $h_i \omega$  est une  $n$ -forme différentielle sur  $U_i$ , puisqu'elle est nulle à l'extérieur de  $U_i$ . De plus, nous avons  $\omega = \sum_{i \in I} (h_i \omega)$  par propriété de la partition de l'unité. Sur chaque ouvert  $U_i$ , la  $n$ -forme différentielle  $h_i \omega$  peut être envoyée sur  $\mathbb{R}^n$  grâce à  $\phi_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{R}^n$ . La  $n$ -forme différentielle  $\phi_i^{-1*}(h_i \omega)$  sur  $W_i = \phi_i(U_i)$  peut alors être intégrée en tant que  $n$ -forme différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous posons alors naturellement

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(U_i)} \phi_i^{-1*}(h_i \omega)$$

lorsque cette expression a un sens (convergence des intégrales et de la somme). Dans le cas où  $M$  est compacte, cette intégrale est toujours bien définie. Elle l'est aussi si  $\omega$  est à support compact.

Cette définition est indépendante du choix de la partition de l'unité associée au recouvrement d'ouverts  $\{U_i\}_{i \in I}$ . L'orientabilité de la variété est nécessaire pour garantir que tout ce passe bien sur les intersections d'ouverts  $U_i$ , et donc que cette définition soit indépendante du choix de l'atlas orienté (de même orientation).

### Forme de volume

Sur une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$ , toute  $n$ -forme  $\omega$  qui ne s'annule en aucun point de  $M$  sera appelée une **forme de volume**. Il est facile de vérifier qu'il y a équivalence entre le fait que  $M$  soit orientable et le fait que  $M$  admette une forme de volume.

Pour  $M$  orientable, deux formes de volume  $\omega$  et  $\omega'$  ont même orientation s'il existe une fonction strictement positive  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\omega = h\omega'$ . Ces formes de volumes ont des orientations opposées si une telle fonction  $h$  n'existe pas, et dans ce cas la relation  $\omega = h\omega'$  est satisfaite pour  $h$  strictement négative. La donnée d'une forme de volume correspond à la donnée d'une orientation de  $M$ .  $M$  n'admet que deux orientations différentes possibles.

La donnée d'une forme de volume  $\omega$  sur  $M$  orientable permet de définir la **divergence** d'un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ . La divergence de  $X$  est la fonction sur  $M$  définie par la relation

$$(\operatorname{div}_\omega X)\omega = d(i_X \omega)$$

## Intégration des fonctions

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $M$ , et  $\omega$  une forme de volume sur  $M$ . L'intégrale sur  $M$  de  $f$  relativement à  $\omega$  est l'intégrale

$$\int_M f\omega$$

si elle existe. Une forme volume joue donc le rôle de mesure sur une variété orientable.

## Théorème de Stokes

Soit  $M$  une variété différentiable orientable à bord de dimension  $n$ . Alors son bord  $\partial M$  est une sous-variété différentiable orientable de  $M$ , dont l'orientation est induite de façon canonique par celle de  $M$  (par restriction en quelque sorte). Notons  $i : \partial M \rightarrow M$  l'inclusion de cette sous-variété. Il n'est pas difficile d'étendre la définition de l'intégration des  $n$ -formes différentielles à la variété à bord  $M$ , puisque tout revient à calculer des intégrales sur des domaines à bord de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous avons alors le **théorème de Stokes** : soit  $\omega$  une  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $M$ , alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

où  $\partial M$  est munie de l'orientation canonique induite par celle de  $M$ .

En particulier, si  $M$  est une variété sans bord, alors

$$\int_M d\omega = 0$$

pour tout  $(n-1)$ -forme différentielle  $\omega$  sur  $M$ .

Il est possible de considérer l'intégrale d'une  $r$ -forme différentielle  $\omega$  sur une sous-variété orientable  $N$  de  $M$  de dimension  $r$ , en reprenant la définition précédente pour une partition de l'unité associée à un atlas localement fini de  $N$ . Le théorème de Stokes est encore valable pour de telles intégrales.

## 1.3. Connexions linéaires

*Références* : [9], [12], [13], [14], [15], [16], [19], [20], [31].

### 1.3.1. Connexions

Nous allons introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété  $M$ . Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivation covariante, par un mécanisme géométrique analogue à celui utilisé lors de la définition de la dérivée de Lie. Cette dérivation agira tout d'abord sur les champs de vecteurs, mais par le même processus que celui utilisé pour la dérivée de Lie, nous l'étendrons aux tenseurs en général.

**Définition**

Une **connexion linéaire** est une application  $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$  telle que, pour tous  $X, X', Y, Y' \in \Gamma(M)$  et  $f \in \mathcal{F}(M)$  :

- $\nabla_{X+X'}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'} Y$  ;
- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ ,  $\mathcal{F}(M)$ -linéarité sur le premier argument ;
- $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$  ;
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)Y$ .

De cette définition, il est possible de montrer que  $(\nabla_X Y)|_p$  ne dépend que de  $X|_p$  et de  $Y$  et de ses dérivées en  $p$ . C'est à dire que pour tout ouvert  $U$  contenant  $p$ , ce vecteur en  $p$  ne peut dépendre que de  $Y|_U$  et de  $X|_p$ .

Les règles imposées sur la connexion linéaire permettent aussi de montrer que localement, dans un système de coordonnées  $(x^i)$ ,  $\nabla$  est complètement définie par les **symboles de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$  définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

En effet, on a alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$  est la **dérivée covariante** associée à la connexion linéaire  $\nabla$ .

Il est intéressant de voir comment se transforment les symboles de Christoffel lors d'un changement de coordonnées : dans des nouvelles coordonnées  $(y^j)$ , un calcul simple donne

$$\Gamma_{pq}^{r'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial y^p \partial y^q} \frac{\partial y^r}{\partial x^\ell}$$

Le second terme nous montre que ces symboles ne sont pas les composantes d'un tenseur sur la variété. Ceci est dû au fait que tous les indices des symboles de Christoffel n'ont pas le même rôle car, comme nous le verrons un peu plus loin, la connexion linéaire effectue la liaison entre deux espaces tangents en des points différents (infinitésimalement voisins). L'indice  $i$  dans  $\Gamma_{ij}^k$  sert à contracter le vecteur  $X$  dans la direction duquel on dérive, c'est donc un indice de 1-forme. Les indices  $k, j$  sont des indices d'une matrice pour l'espace vectoriel  $T_p M$ . En effet, l'expression  $\Gamma_{ij}^k Y^j \frac{\partial}{\partial x^k}$  montre que l'on envoie  $Y|_p$  sur un autre vecteur de  $T_p M$ . Le rôle respectif des indices s'éclaircira lors de l'étude des connexions sur les fibrés (voir 3.2).

**Aspect géométrique**

Cette dérivée covariante permet de définir une **dérivation covariante le long d'une courbe**  $\gamma$  dans  $M$ . Nous verrons que cette dérivation covariante nous donnera une interprétation géométrique de la connexion.

Pour cela, soit donné un champ de vecteurs  $Y(t)$  le long d'une courbe  $\gamma$ . C'est à dire que  $Y(t)$  n'est *a priori* défini qu'au dessus des points  $\gamma(t)$  de  $M$  (ce peut être la restriction

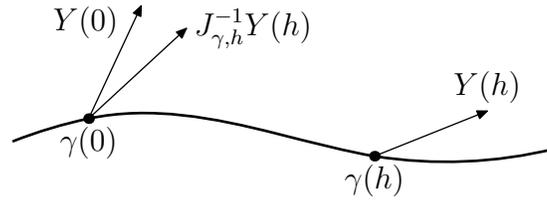


FIG. 1.5 – Interprétation géométrique de la connexion :  $J_\gamma$  est défini à partir de la connexion, c'est le transport horizontal le long de la courbe  $\gamma$ . Pour calculer la dérivée covariante de  $Y$  le long de  $\gamma$ , on compare au dessus du point  $p$  les vecteurs  $Y(0)$  et  $J_{\gamma,h}^{-1}Y(h)$  lorsque  $h$  est infinitésimal.

le long de la courbe  $\gamma$  d'un champ de vecteurs  $Y$ ). Alors la **dérivation covariante** de  $Y(t)$  le long de  $\gamma$ , notée  $\frac{DY}{dt}$ , est par définition

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y(t)$$

Nous avons ici une dérivation le long d'un paramètre  $t$ . Cette définition n'a rien de fondamentale, car c'est juste la restriction de l'application  $\nabla$  à des champs de vecteurs particuliers. Cependant, il faut remarquer que la donnée de la dérivation covariante le long de toute courbe  $\gamma$  est équivalente à la donnée de la connexion linéaire  $\nabla$ , puisque tout vecteur est tangent à au moins une courbe.

Nous dirons que le champ  $Y(t)$  est **parallèle le long de  $\gamma$**  si pour tout  $t$ ,  $\frac{DY}{dt}(t) = 0$ . Comme nous avons là une équation différentielle du premier ordre en  $t$ , pour une condition initiale  $Y(0) \in T_{\gamma(0)}M$  donnée, il existe un unique champ de vecteurs  $Y(t)$  parallèle le long de  $\gamma$  qui admet cette valeur en  $t = 0$ . Ceci définit alors une application

$$J_{\gamma,h} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(h)}M$$

qui à  $Y(0)$  associe  $Y(h)$  où le champ  $Y(t)$  est l'unique solution évoquée ci-dessus, de valeur initiale  $Y(0)$ . Cette application est linéaire et inversible, elle porte le nom de **transport parallèle le long de  $\gamma$** .

Il est alors facile de constater que la dérivation covariante n'est rien d'autre que la limite :

$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (J_{\gamma,h}^{-1}Y(t+h) - Y(t))$$

Nous retrouvons là le même type de mécanisme de dérivation que pour la dérivée de Lie : l'application  $J_{\gamma,h}^{-1}$  nous sert à transporter  $Y(t+h) \in T_{\gamma(t+h)}M$  en  $T_{\gamma(t)}M$ , où nous le comparons à  $Y(t)$  (voir figure 1.5). L'interprétation géométrique de la connexion linéaire est maintenant claire : c'est se donner une notion de transport parallèle le long de toute courbe dans  $\gamma$ , qui nous permette de comparer des vecteurs au-dessus de points différents de cette courbe.

Intéressons nous maintenant aux courbes elles-même : nous dirons que  $\gamma$  est une **courbe autoparallèle** si  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0$ , c'est à dire si  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ . Ceci signifie encore que le champs de vecteurs  $\dot{\gamma}$  le long de  $\gamma$  est parallèle le long de  $\gamma$ .

Une courbe autoparallèle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0$$

Nous verrons quel rôle joueront ces courbes lorsque nous aurons introduit la notion de métrique sur une variété.

### Extension de la définition

Pour définir la dérivée covariante sur les champs de tenseurs, nous nous donnons des règles (algébriques), exactement comme pour la dérivée de Lie :

- $\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S)$  pour deux tenseurs  $T$  et  $S$  ;
- $\nabla_X$  commute avec la contraction des tenseurs ;
- $\nabla_X f = X \cdot f$  pour tout  $f \in \mathcal{F}(M)$  ;
- $\nabla_X$  est linéaire.

Nous trouvons alors que pour une 1-forme  $\alpha$  sur  $M$  :

$$\nabla_X \alpha = X^i \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \alpha_k \right) dx^j$$

par un calcul tout à fait analogue à celui effectué pour la dérivée de Lie.

Pour un tenseur  $T$  sur  $M$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} = X^\ell \left( \frac{\partial}{\partial x^\ell} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} + \sum_{p=1}^s \Gamma_{\ell k}^{i_p} T^{i_1 \dots i_{p-1} k i_{p+1} \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^r \Gamma_{\ell j_p}^k T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_{p-1} k j_{p+1} \dots j_r} \right) \end{aligned}$$

### 1.3.2. Torsion et courbure

Nous avons constaté que les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un tenseur. Il est cependant possible de définir des tenseurs à partir de ces symboles, comme nous allons le voir.

#### Torsion

La **torsion** d'une connexion est le tenseur de type (1, 2) défini par l'expression

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$T(X, Y)$  est donc un champ de vecteurs. Par définition, nous remarquons que  $T(X, Y) = -T(Y, X)$ . La nullité du tenseur de torsion est équivalente à la relation  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . En effet, il est facile de constater que ce tenseur est la partie antisymétrique des symboles de Christoffel :

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

En utilisant la formule de changement de coordonnées pour les symboles de Christoffel, il est facile de voir que la torsion est bien un tenseur sur  $M$ . Les indices  $i, j$  de  $T$  sont donc des indices de 2-forme sur  $M$ .

## Courbure

La **courbure** est un tenseur de type  $(1, 3)$  défini par

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) Z$$

Nous avons ainsi  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ . Il est aisé de vérifier que pour trois fonctions  $f, g, h$  sur  $M$ , nous avons  $R(fX, gY)hZ = fghR(X, Y)Z$ , ce qui aide à prouver la tensorialité des trois indices bas. L'indice haut est lui aussi tensoriel puisque  $R(X, Y)Z$  est un vecteur.

Il faut remarquer que  $R(X, Y)|_p : T_p M \rightarrow T_p M$  est une application linéaire. Cela prouve que tous les indices n'ont pas le même rôle. Écrivons  $R^k{}_{\ell ij}$ , où les indices  $i, j$  se réfèrent à  $X$  et  $Y$ , et  $\ell$  à  $Z$ . Alors  $i, j$  sont les indices d'une 2-forme sur  $M$ , et  $k, \ell$  sont des indices matriciels dans l'espace vectoriel  $T_p M$ .

Le tenseur de courbure s'exprime en fonction des symboles de Christoffel :

$$R^k{}_{\ell ij} = \partial_i \Gamma_{j\ell}^k - \partial_j \Gamma_{i\ell}^k + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{j\ell}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{i\ell}^p$$

où nous notons  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

La torsion et la courbure vérifient d'autres identités, les **identités de Bianchi**, que nous n'écrivons qu'en 1.4.4 car elles y prendront une forme plus intrinsèque que ce que nous pourrions écrire ici.

## Interprétations géométriques

Pour donner une interprétation géométrique de la torsion et de la courbure, nous devons définir ce qu'est un **parallélogramme** sur une variété munie d'une connexion.

Soit  $p \in M$  un point de cette variété, et  $X|_p, Y|_p$  deux vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ , non colinéaires. La donnée de  $p$  et  $X|_p \in T_p M$  détermine localement une courbe autoparallèle  $\gamma_X$  telle que  $\gamma_X(0) = p$  et  $\dot{\gamma}_X(0) = X|_p$ . De même,  $p$  et  $Y|_p$  déterminent une courbe autoparallèle  $\gamma_Y$ . Parcourons la courbe  $\gamma_X$  jusqu'à un point  $\gamma_X(t)$  et la courbe  $\gamma_Y$  jusqu'à un point  $\gamma_Y(u)$ , pour  $t$  et  $u$  deux paramètres positifs petits. Ceci définit deux côtés de notre « parallélogramme » :  $p \rightarrow \gamma_X(t)$  et  $p \rightarrow \gamma_Y(u)$  (voir Figure 1.6).

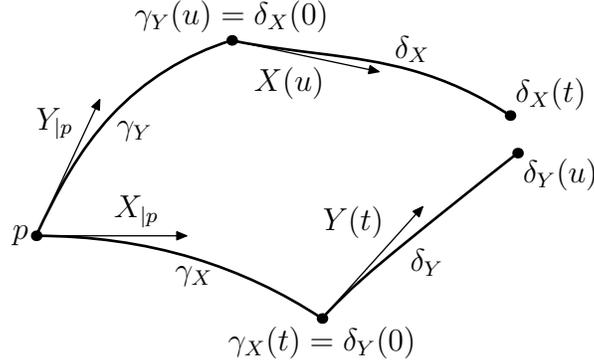


FIG. 1.6 – Un parallélogramme, dont les côtés sont constitués de courbes autoparallèles, ne se referme pas nécessairement. La courbure de la connexion est l'obstruction à cette fermeture.

Pour construire les deux autres côtés, nous nous inspirons du cas euclidien : ils doivent être parallèles aux côtés déjà construits. Pour cela, nous transportons parallèlement le vecteur  $Y|_p$  le long de  $\gamma_X$  jusqu'à  $\gamma_X(t)$ . Nous notons  $Y(t) \in T_{\gamma_X(t)}M$  le vecteur obtenu. Ce vecteur définit à son tour une courbe autoparallèle  $\delta_Y$  telle que  $\delta_Y(0) = \gamma_X(t)$  et  $\dot{\delta}_Y(0) = Y(t)$ . En parcourant cette courbe jusqu'au point  $\delta_Y(u)$ , nous construisons le troisième côté,  $\gamma_X(t) \rightarrow \delta_Y(u)$  « parallèle » au côté  $p \rightarrow \gamma_Y(u)$ . De la même façon, nous transportons parallèlement le long de  $\gamma_Y$  le vecteur  $X|_p$  jusqu'à  $\gamma_Y(u)$  : nous obtenons le vecteur  $X(u)$ , qui définit à son tour une courbe autoparallèle  $\delta_X$ , donnant le quatrième côté du parallélogramme,  $\gamma_Y(u) \rightarrow \delta_X(t)$ , « parallèle » à  $p \rightarrow \gamma_X(t)$ .

Il faut alors remarquer que les points  $\delta_X(t)$  et  $\delta_Y(u)$  n'ont aucune raison de coïncider ! Le « parallélogramme » ainsi construit n'est pas nécessairement fermé. Nous allons étudier ce défaut de fermeture pour  $t$  et  $u$  petits. Dans ce cas, des développements limités sont possibles pour les fonctions coordonnées des points considérés.

En  $p$ , nous avons

$$\frac{d\gamma_X^i}{dt}(0) = X|_p^i$$

et

$$\frac{d\gamma_Y^i}{du}(0) = Y|_p^i$$

Au premier ordre en  $t$ , nous avons donc

$$\gamma_X^i(t) = \gamma_X^i(0) + tX|_p^i + \dots$$

et au premier ordre en  $u$

$$\gamma_Y^i(u) = \gamma_Y^i(0) + tY|_p^i + \dots$$

Le champ de vecteurs le long de  $\gamma_X$ , transporté parallèle de  $Y|_p$ , vérifie par définition

$$\dot{\gamma}_X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) = 0$$

Si nous notons  $t \mapsto Y(t)$  ce champ de vecteurs le long de  $\gamma_X$ , alors

$$Y^k(t) = Y^k(0) + t \frac{dY^k}{dt}(0) + \dots$$

avec

$$\frac{dY^k}{dt}(0) = \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(p) \frac{d\gamma_X^i}{dt}(0) = -\Gamma_{ij}^k(p) Y_{|p}^j X_{|p}^i$$

compte-tenu de l'équation de la courbe autoparallèle. D'où la relation

$$Y^k(t) = Y^k(0) - t\Gamma_{ij}^k(p) X_{|p}^i Y_{|p}^j + \dots$$

De même, le transporté parallèle  $X(u)$  de  $X_{|p}$  le long de  $\gamma_Y$  vérifie

$$X^k(u) = X^k(0) - u\Gamma_{ji}^k(p) X_{|p}^i Y_{|p}^j + \dots$$

La courbe autoparallèle  $\delta_Y$  est donc donnée, au premier ordre en  $t$  et  $u$ , par

$$\delta_Y^k(u) = \gamma_X^k(0) + tX_{|p}^k + uY_{|p}^k - tu\Gamma_{ij}^k(p) X_{|p}^i Y_{|p}^j + \dots$$

et de même

$$\delta_X^k(t) = \gamma_Y^k(0) + uY_{|p}^k + tX_{|p}^k - tu\Gamma_{ji}^k(p) X_{|p}^i Y_{|p}^j + \dots$$

La non fermeture du parallélogramme est mesurée par la différence

$$\delta_X^k(t) - \delta_Y^k(u) = tu (\Gamma_{ij}^k(p) - \Gamma_{ji}^k(p)) X_{|p}^i Y_{|p}^j + \dots$$

où nous reconnaissons l'expression de la torsion. Ce calcul montre donc que *la torsion est une obstruction à la fermeture de parallélogrammes* (construits par la méthode précédente).

Considérons maintenant une connexion linéaire de torsion nulle. Le parallélogramme construit ci-dessus se referme donc en  $q = \delta_X(t) = \delta_Y(u)$ . Soit  $Z_{|p}$  un vecteur de  $T_pM$ . Nous pouvons transporter parallèlement  $Z_{|p}$  jusqu'en  $q$  selon deux chemins :

$$p \rightarrow \gamma_X(t) = \delta_Y(0) \rightarrow \delta_Y(u) = q$$

ou

$$p \rightarrow \gamma_Y(u) = \delta_X(0) \rightarrow \delta_X(t) = q$$

Examinons le transport selon le premier chemin. Notons  $Z(t)$  le transporté parallèle de  $Z_{|p}$  le long de  $\gamma_X$  jusqu'à  $\gamma_X(t)$ , et considérons  $t$  petit. Alors nous avons

$$Z^k(t) = Z_{|p}^k - t\Gamma_{ij}^k(p) X_{|p}^i Z_{|p}^j + \dots$$

Notons  $Z(u)$  le transporté parallèle de  $Z(t)$  le long de  $\delta_Y$  jusqu'à  $\delta_Y(u)$ , et considérons  $u$  petit. Alors

$$Z^k(u) = Z^k(t) - u\Gamma_{ij|\gamma_X(t)}^k Y^i(t) Z^j(t) + \dots$$

Notons  $\Gamma_{ij|\gamma_X(t)}^k = \Gamma_{ij}^k(t)$  (avec  $\Gamma_{ij}^k(0) = \Gamma_{ij}^k(p)$ ). Alors

$$\Gamma_{ij}^k(t) = \Gamma_{ij}^k(0) + t \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^\ell}(p) X_{|p}^\ell + \dots$$

En ne retenant que les termes en  $t$ ,  $u$ , et  $tu$ , il reste

$$\begin{aligned} Z^k(u) = & Z_{|p}^k - t \Gamma_{ij}^k(p) X_{|p}^i Z_{|p}^j - u \Gamma_{ij}^k(p) Y_{|p}^i Z_{|p}^j \\ & + tu \left( \Gamma_{i\ell}^k(p) \Gamma_{sj}^\ell(p) X_{|p}^s Y_{|p}^i Z_{|p}^j - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^\ell}(p) X_{|p}^\ell Y_{|p}^i Z_{|p}^j + \Gamma_{is}^\ell(p) \Gamma_{\ell j}^k(p) X_{|p}^i Y_{|p}^s Z_{|p}^j \right) + \dots \end{aligned}$$

Si maintenant nous transportons parallèlement le vecteur  $Z_{|p}$  jusqu'en  $q$  par le second chemin, nous trouverions la même expression avec  $X$  et  $Y$  intervertis et  $t$  et  $u$  intervertis. En utilisant alors le fait que  $\Gamma_{ij}^k$  est symétrique en  $i, j$  (torsion nulle), la différence entre ces deux vecteurs en  $q$  vaut

$$tu \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^k}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^k}{\partial x^j}(p) + \Gamma_{is}^k(p) \Gamma_{j\ell}^s(p) - \Gamma_{js}^k(p) \Gamma_{i\ell}^s(p) \right) X_{|p}^i Y_{|p}^j Z_{|p}^\ell + \dots$$

Nous reconnaissons dans ce terme l'expression de la courbure  $R(X, Y)_{|p} Z_{|p}$  associée à  $X, Y, Z$ . Ce calcul montre que si l'on transporte parallèlement un vecteur selon un chemin fermé constitué de courbes autoparallèles, le vecteur transporté ne coïncident pas avec le vecteur de départ. La différence est mesurée, pour des chemins infinitésimaux, par la courbure de la connexion linéaire.

Remarquons que dans le développement ci-dessus nous n'avons pas considéré les termes en  $t^2$  et  $u^2$ . Un calcul simple montrerait que ces termes disparaissent dans la différence finale.

## 1.4. Variétés riemanniennes

*Références* : [5], [9], [12], [13], [14], [15], [16], [19], [20], [31].

### 1.4.1. Métrique

La notion de métrique permet d'introduire une distance sur la variété. Infinitésimale-ment (dans un plan tangent), la métrique est un produit scalaire.

#### Rappels sur les produits scalaires

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , muni d'un produit scalaire non dégénéré  $X, Y \mapsto \langle X, Y \rangle$ . Soit  $\{e_a\}$  une base de  $V$ . Dans cette base, tout vecteur  $X$  s'identifie à un

élément  $(X) = (X^a)$  de  $\mathbb{R}^n$  où  $X = X^a e_a$ . Le produit scalaire s'identifie alors à une matrice symétrique  $(S)$  de taille  $n \times n$  pour laquelle

$$\langle X, Y \rangle = (X)^t (S) (Y) = X^i S_{ij} Y^j$$

où  $(X)^t$  est le vecteur transposé de  $(X)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et les indices  $i, j$  se réfèrent à une base quelconque de  $V$ . Des résultats d'algèbre linéaire nous apprennent qu'il existe une base  $\{e_a\}$  dite orthonormale telle que

$$\langle e_a, e_b \rangle = \pm \delta_{ab}$$

et donc pour laquelle la matrice  $(S)$  est une matrice diagonale

$$(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ & & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\langle X, Y \rangle = X^1 Y^1 + \cdots + X^p Y^p - X^{p+1} Y^{p+1} - \cdots - X^n Y^n$$

dans cette base. La **signature** d'un produit scalaire sur  $V$  est l'entier  $p - q \in \mathbb{Z}$  où  $p$  est le nombre de 1 et  $q$  est le nombre de  $-1$ . Ce produit scalaire étant non dégénéré, nous avons  $p + q = n$ .

À tout produit scalaire de matrice symétrique  $(S)$  comme ci-dessus, nous pouvons associer un groupe de symétries  $O(p, q)$ , sous groupe des automorphismes de  $V$  qui laissent le produit scalaire invariant :  $O \in O(p, q)$  si et seulement si  $O \in GL(V)$  (groupe des automorphismes de  $V$ ) et  $\langle OX, OY \rangle = \langle X, Y \rangle$  pour tous  $X, Y \in V$ . Dans le cas où  $q = 0$ , on note  $O(n)$  ce groupe. Ce sont les **groupes orthogonaux**. En fixant le déterminant à la valeur 1, on réduit ces groupes aux **groupes spéciaux orthogonaux**  $SO(p, q)$ .

## Tenseur métrique

Une **métrique**  $g$  sur la variété différentiable  $M$  est un tenseur de type  $(0, 2)$  symétrique et non dégénéré au sens suivant : l'application

$$g_p^\flat : T_p M \rightarrow T_p^* M \\ X \mapsto [Y \mapsto g_p(X, Y)]$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Nous notons  $g_p^\sharp$  son inverse.

Cette expression est l'opération d'élévation et d'abaissement des indices : à un champ de vecteurs  $X$ , nous associons la 1-forme différentielle  $\alpha = g^\flat X$  dont l'expression en coordonnées locales est  $\alpha_i = g_{ij} X^j$ , où  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$  (en tout point  $p$  de la carte locale

considérée,  $(g_{ij}(p))$  est une matrice symétrique inversible); et à une 1-forme différentielle  $\alpha$  nous associons le champ de vecteurs  $X = g^\sharp \alpha$  par  $X^i = g^{ij} \alpha_j$  où  $(g^{ij}(p))$  est la matrice inverse de  $(g_{ij}(p))$ .

Au dessus de chaque point  $p$  de  $M$ ,  $g|_p$  définit un produit scalaire sur  $T_p M$  :

$$(X|_p, Y|_p) \mapsto g|_p(X|_p, Y|_p)$$

La non dégénérescence de  $g$  au sens ci-dessus équivaut à la non dégénérescence au sens du produit scalaire pour tout  $p \in M$ .

Comme  $g$  est un tenseur, l'application  $p \mapsto \ll \text{signature de } g|_p \gg$  est continue. Or, comme elle est à valeurs dans les entiers, elle doit être constante (on suppose  $M$  connexe). Il est donc possible de parler de la signature de  $g$ .

Nous dirons que  $g$  est une **métrique riemannienne** si  $g$  a pour signature  $n$ , la dimension de  $M$ , et  $g$  est une **métrique lorentzienne** (ou **pseudo-riemannienne**) si  $g$  a pour signature  $n - 2$ . Dans le cas riemannien, les produits scalaires sont définis positifs. On dira que la métrique est définie positive.

### Champs de vecteurs de Killing

Un difféomorphisme  $F : M \rightarrow M$  est une **isométrie** pour la métrique  $g$  si

$$T_p F : (T_p M, g|_p) \rightarrow (T_{F(p)} M, g|_{F(p)})$$

est une isométrie d'espaces vectoriels munis de produits scalaires. On peut considérer la version infinitésimale de ce concept en remplaçant le difféomorphisme par un champ de vecteurs.

Nous dirons qu'un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est un **champ de vecteurs de Killing** si

$$L_X g = 0$$

Cette relation s'écrit encore, compte-tenu de la définition de la dérivée de Lie sur les tenseurs

$$X \cdot g(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$$

Le flot  $\phi_t$  de  $X$  est alors une isométrie de  $(M, g)$ .

Il est facile de voir que si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs de Killing, alors  $[X, Y]$  est aussi un champ de vecteurs de Killing. Donc les vecteurs de Killing forment une sous-algèbre de Lie de  $\Gamma(M)$ .

### Intégrale de Lebesgue

Nous avons vu que pour intégrer une fonction  $f$  sur une variété différentiable  $M$ , il faut disposer d'une  $n$ -forme différentielle qui ne s'annule en aucun point de  $M$ . Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une telle forme différentielle est que la variété soit orientable.

En réalité, il est possible de se passer de l'orientabilité en définissant une mesure sur une variété différentiable riemannienne  $M$  en posant, pour  $g$  la métrique sur  $M$ , et  $f$  une fonction sur  $M$  à support dans un ouvert  $U$  d'une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$  :

$$\int_U f dv = \int_{\phi(U)} (f \sqrt{|g|}) \circ \phi^{-1} dx^1 \dots dx^n$$

où  $(x^i)$  sont les coordonnées locales sur  $U$  et  $|g|$  est la valeur absolue du déterminant de la matrice  $(g_{ij})$  dans la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ .

Lors d'un changement de coordonnées locales,  $(x^i) \mapsto (x'^j)$ , le déterminant de la métrique se transforme en

$$|g| \mapsto |g'| = \left| \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) \right|^2 |g|$$

et  $dx^1 \dots dx^n$  se transforme en

$$dx'^1 \dots dx'^n = \left| \left( \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \right) \right| dx^1 \dots dx^n$$

Le produit fait donc apparaître le jacobien du changement de coordonnées, comme il faut s'y attendre pour un changement de coordonnées dans une intégrale sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'intégrale  $\int_U f dv$  est donc parfaitement définie. En utilisant une partition de l'unité sur  $M$ , nous pouvons définir l'intégrale

$$\int_M f dv$$

où «  $dv = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n$  » est l'**élément de volume riemannien** de  $(M, g)$ .

Dans cette définition de l'intégrale, nous ne définissons donc pas un objet global qui serait une  $n$ -forme différentielle partout non nulle, mais une « mesure de Lebesgue »  $dv$ . Géométriquement, cet objet est une **densité** sur  $M$ .

## 1.4.2. Connexion de Lévi-Civita

### Connexion linéaire compatible avec une métrique

Une connexion linéaire  $\nabla$  sera dite **compatible avec la métrique**  $g$  si

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour trois champs de vecteurs quelconques  $X, Y, Z$  sur  $M$ . Nous dirons aussi que  $\nabla$  est une **connexion métrique**. Il est facile de voir, grâce à la définition de  $\nabla_X$  sur les tenseurs, que cette relation est équivalente à

$$\nabla_X g = 0$$

pour tout  $X \in \Gamma(M)$ .

Il existe une unique connexion sans torsion compatible avec la métrique  $g$ , c'est la **connexion de Lévi-Civita**, qui a pour expression :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{k\ell}(\partial_j g_{\ell i} + \partial_i g_{\ell j} - \partial_\ell g_{ij})$$

Soient  $p$  et  $q$  deux points distincts de  $M$ , et  $\gamma : [t_p, t_q] \rightarrow M$  une courbe ( $C^1$  par morceaux) joignant  $p$  à  $q$  :  $\gamma(t_p) = p$  et  $\gamma(t_q) = q$ . La **longueur de la courbe**  $\gamma$  est l'intégrale

$$L(p, q, \gamma) = \int_{t_p}^{t_q} \sqrt{g_{|\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

Dans le cas où  $\gamma$  n'est pas dérivable partout, on considère la somme de ces intégrales prises sur les intervalles où elle est  $C^1$ . La **distance riemannienne**  $d(p, q)$  entre  $p$  et  $q$  est le minimum des longueurs  $L(p, q, \gamma)$  lorsqu'on considère toutes les courbes  $\gamma$  ( $C^1$  par morceaux) joignant  $p$  à  $q$ .

Pour une connexion de Levi-Civita, les courbes autoparallèles sont appelées **géodésiques**. Elles minimisent localement la longueur  $L(p, q, \gamma)$  (pour des « petites perturbations » de  $\gamma$ ). Le minimum (absolu) donnant la distance n'est pas nécessairement atteint par une courbe. Une géodésique joignant  $p$  à  $q$  dont la longueur est exactement la distance  $d(p, q)$  est appelée **minimalisante**.

L'application transport parallèle le long d'une courbe devient une **isométrie** :

$$g_{|\gamma(0)}(X, Y) = g_{|\gamma(h)}(J_{\gamma, h}X, J_{\gamma, h}Y)$$

En particulier, dans le cas où  $\gamma$  est une géodésique, puisque le champ de vecteurs  $\dot{\gamma}$  est parallèle le long de  $\gamma$ ,  $g_{|\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$  est constant pour tout  $t$ . En d'autres termes, le vecteur tangent à  $\gamma$  a une longueur constante. Si cette longueur vaut 1, on dit que  $t$  est le **paramètre canonique** de la géodésique  $\gamma$ .

### Tenseur de courbure de Riemann

La courbure de la connexion de Lévi-Civita pour une métrique  $g$  sur  $M$  est appelée **courbure de Riemann** et vérifie

$$g(R(X, Y)Z, T) = -g(Z, R(X, Y)T)$$

pour  $X, Y, Z, T$  champs de vecteurs sur  $M$ . Cette expression s'écrit encore

$$R_{k\ell ij} = -R_{\ell k ij}$$

où nous abaissons l'indice  $k$  grâce à  $g$ .

### Tenseur de Ricci et courbure scalaire

Le **tenseur de Ricci** est le tenseur

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$

obtenu par contraction du tenseur de courbure de Riemann. On remarquera qu'en réalité, la courbure de Riemann et la courbure de Ricci peuvent être définie pour des connexions linéaires sans faire intervenir de métrique. La notions suivante, par contre, fait usage de la métrique.

Si nous contractons la courbure de Ricci en utilisant la métrique, nous obtenons la **courbure scalaire**

$$R = R_{ij}g^{ij}$$

C'est une fonction sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire interviennent dans les équations de la théorie d'Einstein de la gravitation.

#### 1.4.3. Coordonnées normales

Soit  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $M$ . Pour tout vecteur  $X|_p \in T_pM$ , on sait qu'il existe une unique courbe autoparallèle  $\gamma_X$  sur  $M$  telle que  $\gamma_X(0) = p$  et  $\dot{\gamma}_X(0) = X|_p$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , la courbe  $t \mapsto \gamma_X(\lambda t) = \tilde{\gamma}(t)$  est aussi autoparallèle, de conditions initiales  $\tilde{\gamma}(0) = p$  et  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda X|_p$ . Cette courbe est donc associée au vecteur  $\lambda X|_p$  de  $T_pM$ . On la note  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_{\lambda X}(t)$ . Ainsi,  $\gamma_{\lambda X}(t) = \gamma_X(\lambda t)$ .

Si  $\gamma_X$  est définie pour  $t \in ]-\varepsilon_1, \varepsilon_2[$ , alors  $\gamma_{\lambda X}$  est définie pour  $t \in ]-\varepsilon_1/\lambda, \varepsilon_2/\lambda[$ . Ainsi, quitte à multiplier  $X|_p$  par un scalaire plus petit que 1, on suppose que  $\gamma_X$  est définie pour  $t = 1$ . Dans ce cas, pour tout  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $\gamma_{\lambda X}$  est aussi définie pour  $t = 1$ . On pose  $V_0$  le plus grand ouvert de  $T_pM$  tel que si  $X|_p \in V_0$ , alors  $\gamma_X$  est définie en  $t = 1$ . Cet ouvert contient bien sûr  $0 \in T_pM$ . Sur cet ouvert, on définit l'**application exponentielle**

$$\begin{aligned} \exp_p : V_0 &\rightarrow M \\ X|_p &\mapsto \gamma_X(1) \end{aligned}$$

Cette application induit alors un difféomorphisme entre  $V_0 \subset T_pM$  et un voisinage ouvert  $U_p$  de  $p$  dans  $M$ . Si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors  $\exp_p \circ u : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_p$  définit une carte locale  $(U_p, (\exp_p \circ u)^{-1})$  contenant  $p$ . Les coordonnées sur  $U_p$  données par cette carte locale sont les **coordonnées normales** en  $p$  associées à  $\nabla$  et  $u$ . Elles sont centrées en  $p$ . Dans ce système de coordonnées, si  $X|_p \in T_pM$  s'écrit  $X|_p = (X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$ , alors la courbe autoparallèle  $\gamma_X$  a pour expression simple

$$\gamma_X^i(t) = X^i t$$

de plus, si  $\Gamma_{jk}^i$  sont les composantes de la connexion dans ce système de coordonnées, on a

$$\Gamma_{jk}^i(p) + \Gamma_{kj}^i(p) = 0$$

En particulier, si la connexion est sans torsion, on a

$$\Gamma_{jk}^i(p) = 0$$

Bien sûr, en dehors du point  $p$ , les symboles de Christoffel n'ont aucune raison d'être nuls.

Dans le cas où la variété  $M$  est riemannienne, et où  $\nabla$  est la connexion de Lévi-Civita, on peut choisir  $u$  de telle façon que les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  forment une base orthonormée de  $T_pM$ . En dehors de  $p$ , on ne peut rien imposer de tel. Nous dirons qu'on a alors des **coordonnées normales riemanniennes**, ce que nous allons supposer pour la suite. Ainsi, dans ce système de coordonnées, la matrice de la métrique en  $p$ ,  $g_p$  est diagonale (d'éléments  $+1$  si la variété est riemannienne, et  $\pm 1$  si la variété est pseudo-riemannienne) et  $\Gamma_{jk}^i(p) = 0$ .

Pour  $r > 0$ , on définit  $B(p, r)$  le voisinage de  $0$  dans  $T_pM$  des vecteurs  $X_p$  tels que

$$\|X_p\| = \sqrt{g_p(X_p, X_p)} < r$$

et on définit  $U(p, r)$  le voisinage de  $p$  dans  $M$  des points tels que  $\sum_i (x^i)^2 < r$  où les  $x^i$  sont les coordonnées normales. Alors il existe un  $r > 0$  tel que

- $\exp_p : B(p, r) \rightarrow U(p, r)$  soit un difféomorphisme ;
- chaque point  $q \in U(p, r)$  peut être joint à  $p$  par une géodésique unique contenue dans  $U(p, r)$ , et dont la longueur est exactement  $d(p, q)$  ;
- $U(p, r)$  peut être caractérisé comme l'ensemble des points  $q$  de  $M$  tels que  $d(p, q) < r$ .

Cet ouvert  $U(p, r)$  ressemble donc localement à un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$ , à la différence que les segments de droite dans  $\mathbb{R}^n$  sont remplacés par des géodésiques (qui sont les « droites » en géométrie riemannienne).

Dans la théorie d'Einstein de la gravitation, l'espace-temps est une variété pseudo-riemannienne dont la métrique est reliée à la distribution de matière. Tout corps libre, y compris les photons, suivent des géodésiques dans cet espace-temps. Le principe d'équivalence permet de compenser localement l'action du champ de gravité en se plaçant dans un repère accéléré. Dans ce repère inertiel, on doit retrouver la physique d'un espace-temps de Minkowski, c'est à dire une métrique diagonale (d'éléments  $\pm 1$ ), et dont les symboles de Christoffel sont nuls (les forces d'inertie sont représentées par les symboles de Christoffel dans cette théorie). En réalité, mathématiquement, il est impossible de trouver dans tous les cas un tel repère local, c'est à dire sur un ouvert de la variété espace-temps, aussi petit soit-il. Par contre, en un point  $p$  quelconque, grâce aux coordonnées normales riemanniennes, on peut rendre la métrique diagonale et annuler les symboles de Christoffel. Cela correspond tout à fait à ce qui est recherché dans un repère inertiel. Malheureusement, cela ne peut se faire qu'au point lui-même, et non dans un de ses voisinages.

#### 1.4.4. Bases non-coordonnées, repères locaux

##### Définitions

Soit  $p \in M$ . Dans l'espace vectoriel  $T_pM$ , au lieu de prendre la base naturelle  $\{\partial_i(p)\} = \{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$  fournie par un système de coordonnées locales, nous pouvons prendre toute autre

base, c'est à dire  $n$  vecteurs indépendants. On parle alors de **base non coordonnée**. Si on souhaite travailler localement autour de  $p$  avec de telles bases dans chaque espaces tangents, il est souhaitable de se donner localement  $n$  champs de vecteurs locaux indépendants en tout point de leur définition. Nous parlerons alors de **repère local**<sup>5</sup>. Les repères locaux  $\{\partial_i\}$  sont appelées **holonomes** et les autres **non holonomes**.

Dans ce qui suit, nous allons considérer une variété munie d'une métrique  $g$ . Nous pouvons alors prendre un repère local tel qu'en chaque point,  $g$  ait une expression diagonale avec des coefficients  $\pm 1$ , selon sa signature. Nous dirons alors que nous avons un **repère local orthonormé**.

Supposons donc que localement, au dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$ , nous ayons  $n$  champs de vecteurs  $\{e_a\}$  (nous réserverons les indices  $i, j, k, \dots$  aux bases holonomes) tels que  $g(e_a, e_b) = \delta_{ab}$  (nous supposerons, pour simplifier, que  $g$  est définie positive). Ces champs se décomposent sur un repère local holonome :  $e_a = e_a^i \partial_i$  où, pour tout  $p \in U$ ,  $(e_a^i(p)) \in GL(n, \mathbb{R})$ . La matrice inverse sera notée  $(e_j^b) : U \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Posons  $\{\theta^a\}$  le repère dual de  $\{e_a\}$ . Les  $\theta^a$  sont  $n$  1-formes linéairement indépendantes définies localement. Alors on a  $\theta^a = e_i^a dx^i$  et  $g = \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b$ .

Dans un repère local non holonome, les crochets de Lie ne sont plus *a priori* nuls. En toute généralité nous écrivons  $[e_a, e_b] = C_{ab}^c e_c$ , où les  $C_{ab}^c$  sont des fonctions de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ .

Si  $M$  est munie d'une connexion, nous posons  $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$ . La torsion s'écrit alors  $T = T_{bc}^a e_a \otimes \theta^b \otimes \theta^c$  avec

$$T_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a - C_{bc}^a$$

Nous lui associons les **2-formes de torsion** à valeurs vectorielles

$$T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$$

La sommation porte sur toutes les valeurs de  $b$  et  $c$ .

Nous effectuons un traitement similaire pour la courbure :  $R = R^a_{bcd} e_a \otimes \theta^b \otimes \theta^c \otimes \theta^d$ , et lui associons la **2-forme de courbure** à valeurs matricielles

$$R^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d$$

La sommation porte sur toutes les valeurs de  $c$  et  $d$ .

Enfin nous définissons la **1-forme de connexion** à valeurs matricielles :

$$\omega^a_b = \Gamma_{cb}^a \theta^c$$

---

<sup>5</sup>Dans la terminologie habituelle, un repère est la donnée d'un point et d'une base. Cela correspond bien à ce qu'on fait ici : à chaque point  $p$  d'un ouvert de  $M$  on attache une base dans  $T_p M$ .

### Identités

Cette écriture particulière de la torsion et de la courbure permettent de faire apparaître des relations simples entre ces quantités, les **équations de structure de Cartan** :

$$\begin{aligned} T^a &= d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b \\ R^a_b &= d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \end{aligned}$$

et les **identités de Bianchi** :

$$\begin{aligned} dT^a + \omega^a_c \wedge T^c &= R^a_c \wedge \theta^c \\ dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - R^a_c \wedge \omega^c_b &= 0 \end{aligned}$$

Nous démontrerons ces équations en 3.5.

Ces équations peuvent être utiles dans la pratique : elles permettent par exemple de calculer plus facilement les coefficients du tenseur de courbure de la connexion de Lévi-Civita d'une métrique donnée (voir [19, page 355]).

### Changement de repère

Le choix du repère local orthonormé n'est pas unique : une rotation de chaque base (différente en chaque point si on veut) donne encore un repère orthonormé. Soit  $(\Lambda^a_b(p)) \in O(n)$  une telle rotation, qui dépend en toute généralité du point  $p \in U$  où l'on se place. Alors un nouveau repère local orthonormé peut être défini par les champs de vecteurs locaux  $e'_a = e_b(\Lambda^{-1})^b_a$ . Son repère dual est donnée par  $\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b$ .

Il est alors possible de montrer que les nouvelles expressions de la 1-forme de connexion et de la 2-forme de courbure sont :

$$\begin{aligned} \omega'^a_b &= \Lambda^a_c \omega^c_d (\Lambda^{-1})^d_b + \Lambda^a_c d(\Lambda^{-1})^c_b \\ R'^a_b &= \Lambda^a_c R^c_d (\Lambda^{-1})^d_b \end{aligned}$$

Nous remarquons que la 2-forme de courbure se transforme de façon tensorielle, alors que la 1-forme de connexion admet un terme supplémentaire qui l'empêche d'être tensorielle. Nous comprendrons tout cela beaucoup mieux lors de l'étude des connexions sur les fibrés.

Si nous notons  $(\omega)$  et  $(R)$  les matrices définies ci-dessus (matrices dont les coefficients sont des 1-formes et 2-formes!), alors toutes ces équations prennent la forme compacte :

$$\begin{aligned} (R) &= d(\omega) + (\omega) \wedge (\omega) \\ (\omega)' &= \Lambda(\omega)\Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1} \\ (R)' &= \Lambda(R)\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

Ces transformations qui correspondent à un changement de repère local, sont les **transformations de jauge** que connaissent les physiciens.

### Expression de la différentielle

Lorsque nous travaillons avec de tels repères locaux non holonomes, certaines formules écrites jusqu'à présent changent de forme. Le premier exemple que nous venons de rencontrer est  $T_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a - C_{bc}^a$  où apparaissent les fonctions  $C_{bc}^a$ .

Regardons maintenant la différentielle. Décomposons  $\eta \in \Omega^1(M)$  sur le repère local des 1-formes différentielles  $\{\theta^a\}$  par  $\eta = \eta_a \theta^a$ , où  $\eta_a : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $n$  fonctions. Au dessus de  $U$ , nous avons donc

$$d\eta = (d\eta_a) \wedge \theta^a + \eta_a d\theta^a$$

Il nous faut calculer  $d\theta^a$  pour connaître l'expression complète de la différentielle dans ce contexte. Par définition de  $d$ , nous avons

$$\begin{aligned} d\theta^c(e_a, e_b) &= e_a \cdot \theta^c(e_b) - e_b \cdot \theta^c(e_a) - \theta^c([e_a, e_b]) \\ &= e_a \cdot \delta_b^c - e_b \cdot \delta_a^c - C_{bc}^a \end{aligned}$$

Or,  $\delta_b^c$  et  $\delta_a^c$  sont des constantes au dessus de  $U$ , les deux premiers termes sont donc nuls. Il reste  $d\theta^c(e_a, e_b) = -C_{bc}^a$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_{de}^c \theta^d \wedge \theta^e(e_a, e_b) &= \frac{1}{2} C_{de}^c (\delta_a^d \delta_b^e - \delta_b^d \delta_a^e) \\ &= \frac{1}{2} C_{ab}^c - \frac{1}{2} C_{ba}^c \\ &= C_{ab}^c \end{aligned}$$

où nous sommes sur toutes les valeurs des indices  $d$  et  $e$ . Nous avons ainsi l'expression de la différentielle sur les 1-formes du repère local :

$$d\theta^c = -\frac{1}{2} C_{ab}^c \theta^a \wedge \theta^b$$

où nous sommes sur toutes les valeurs des indices  $a$  et  $b$ . Il faut bien sûr comparer cette expression à  $d(dx^i) = 0$ .

Le calcul donne donc, pour la 1-forme quelconque  $\eta$  :

$$d\eta = d\eta_a \wedge \theta^a - \frac{1}{2} \eta_a C_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$$

Or,

$$\begin{aligned} d\eta_a \wedge \theta^a &= (e_b \cdot \eta_a) \theta^b \wedge \theta^a \\ &= e_b^i \partial_i \eta_a \theta^b \wedge \theta^a \\ &= \frac{1}{2} (e_b^i \partial_i \eta_c - e_c^i \partial_i \eta_b) \theta^b \wedge \theta^c \end{aligned}$$

d'où finalement

$$d\eta = \frac{1}{2} (e_b^i \partial_i \eta_c - e_c^i \partial_i \eta_b - \eta_a C_{bc}^a) \theta^b \wedge \theta^c$$

où nous sommes sur toutes les valeurs de  $b$  et  $c$ .

### 1.4.5. Théorie de Hodge

#### L'application \*

Soit  $p \in M$ . Comme les espaces vectoriels  $\bigwedge^r T_p^* M$  et  $\bigwedge^{n-r} T_p^* M$  sont de mêmes dimensions, les espaces  $\Omega^r(U)$  et  $\Omega^{n-r}(U)$  sont isomorphes pour des ouverts assez petits  $U \subset M$ .

Dans le cas où  $M$  est orientable et munie d'une métrique  $g$  que nous supposons définie positive, il est facile de réaliser un isomorphisme

$$\Omega^r(M) \simeq \Omega^{n-r}(M)$$

Pour cela, soit  $\{e_a\}$  un repère local orthonormé pour  $g$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$ . Toute  $r$ -forme différentielle  $\omega$  s'écrit localement au dessus de  $U$

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_r} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r}$$

où  $\{\theta^a\}$  est la base locale duale de  $\{e_a\}$ . Nous posons, au dessus de  $U$ ,

$$*\omega = \frac{1}{(n-r)!} \omega_{a_1 \dots a_r} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} \delta^{a_1 b_1} \dots \delta^{a_r b_r} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_n}$$

où  $\varepsilon_{b_1 \dots b_n}$  est complètement antisymétrique en les  $b_1 \dots b_n$  avec  $\varepsilon_{12 \dots n} = +1$ . On peut alors montrer que :

- Les expressions locales  $*\omega$  se recollent sans ambiguïté sur  $M$  tout entier, et définissent une  $(n-r)$ -forme  $*\omega \in \Omega^{n-r}(M)$  ;
- $**\omega = (-1)^{r(n-r)}\omega$  pour  $\omega \in \Omega^r(M)$ .

La première propriété utilise de façon essentielle l'orientabilité de  $M$ . La seconde propriété assure que

$$* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{n-r}(M)$$

est un isomorphisme. C'est l'**isomorphisme \* de Hodge**.

#### Produit scalaire

Cet isomorphisme permet de définir un produit scalaire sur  $\Omega^r(M)$  lorsque la variété  $M$  est en plus compacte, en posant, pour  $\omega, \eta \in \Omega^r(M)$  :

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge *\eta$$

Il est facile de montrer que  $(\omega, \eta) = (\eta, \omega)$  et que ce produit est défini positif si la métrique est riemannienne. Si la métrique n'est pas définie positive, ce produit scalaire ne l'est pas non plus.

### Codifférentielle

Ce produit scalaire sur  $\Omega^*(M)$  permet de définir un opérateur adjoint de la différentielle  $d$ . On définit

$$\delta : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$$

en posant

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta)$$

pour tous  $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$  et  $\eta \in \Omega^r(M)$ .  $\delta$  est appelé la **codifférentielle de**  $(M, g)$ . On peut démontrer qu'elle prend la forme

$$\delta = (-1)^{nr+n+1} * d*$$

sur  $\Omega^r(M)$ , et que  $\delta^2 = 0$  sur  $\Omega(M)$ .

Une forme différentielle  $\omega \in \Omega^r(M)$  est **cofermée** si  $\delta\omega = 0$ , et **coexacte** si  $\omega = \delta\eta$  pour  $\eta \in \Omega^{r+1}(M)$ .

### Laplacien

Le **laplacien** est l'application

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$$

On dira que  $\omega \in \Omega^r(M)$  est une **forme harmonique** si  $\Delta\omega = 0$ . On peut montrer que  $\omega$  harmonique équivaut à  $\omega$  fermée et cofermée.

On a alors le **théorème de Hodge** : si  $M$  est une variété riemannienne orientable compacte sans bord, alors toute  $r$ -forme différentielle  $\omega$  se décompose de façon unique en

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$$

où  $\gamma$  est une  $r$ -forme différentielle harmonique.

En d'autres termes, on a la **décomposition de Hodge** :

$$\Omega(M) = \text{Im } d \oplus \text{Im } \delta \oplus \text{Ker } \Delta$$

Grâce à cette décomposition, il est possible de montrer que la cohomologie de de Rham de  $M$  n'est autre que  $H(M, d) = \text{Ker } \Delta$ . Ceci justifie l'importance du laplacien et des formes différentielles harmoniques, qui constituent des représentants de choix dans les classes de cohomologie de de Rham de  $M$ .

#### 1.4.6. Exemple de $\mathbb{R}^3$

##### Le calcul vectoriel sur $\mathbb{R}^3$

On va montrer ici que les objets introduits jusqu'à présent sont bien connus sous d'autres formes dans le cas particulier de la variété  $\mathbb{R}^3$  munie de la métrique euclidienne  $g = (\delta_{ij})$

et de son orientation habituelle. On notera  $x, y, z$  les trois fonctions coordonnées globales sur  $\mathbb{R}^3$ .

On remarque tout d'abord que l'application  $g^\sharp$  qui associe à tout champ de vecteurs une 1-forme différentielle est « triviale », au sens où à un champ de vecteurs  $\vec{v}$  de composantes  $(v_x, v_y, v_z)$ , on associe la 1-forme différentielle de mêmes composantes. C'est ce qui fait que sur  $\mathbb{R}^3$ , on ne distingue pas, en règle générale, vecteurs et 1-formes.

Remarquons maintenant que l'application  $*$  identifie  $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$  à  $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ , et  $\Omega^0(\mathbb{R}^3)$  à  $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ . Sur  $\mathbb{R}^3$ , il ne reste donc que les fonctions et les 1-formes différentielles, qui sont elles-mêmes identifiées aux champs de vecteurs ! Sur  $\mathbb{R}^3$ , un champ de vecteurs qui provient en réalité d'une 2-forme est un **pseudo-vecteur**. De même, une fonction qui provient d'une 3-forme est un **pseudo-scalaire**. Cette dénomination vient du fait que ces vecteurs et fonctions dépendent de l'orientation (ce qui n'est pas le cas des vecteurs et des scalaires ordinaires). En effet, ils sont définis en utilisant l'opération  $*$  qui dépend de l'orientation. Par exemple, il est bien connu que le champ magnétique  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur. L'objet plus fondamental indépendant de l'orientation dont il découle est une 2-forme différentielle.

Le calcul vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$  « cache » les opérations diverses que nous venons de définir de façon générale sur les variétés différentiables en des opérateurs vectoriels, comme nous allons le voir.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Alors  $df$  est une 1-forme différentielle, et en utilisant  $g^\sharp$  on a

$$g^\sharp df = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Ce vecteur est le **gradient** de  $f$ . Le gradient peut être défini en dimension quelconque et sur toute variété riemannienne.

Soit  $\vec{v}$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . On lui applique les opérations successives :

$$\begin{array}{lll} \vec{v} \text{ champ de vecteurs} & \mapsto & g^\flat \vec{v} \quad 1\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & *g^\flat \vec{v} \quad 2\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & d * g^\flat \vec{v} \quad 3\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & *d * g^\flat \vec{v} \quad \text{fonction} \end{array}$$

Cette fonction est la **divergence** du vecteur  $\vec{v}$  :

$$*d * g^\flat \vec{v} = \text{div } \vec{v}$$

Cette définition est valable en toute dimension. Nous avons déjà défini une notion de divergence associée à une forme de volume. La divergence que nous venons d'introduire coïncide avec cette définition pour la forme volume riemannienne  $\omega = *1 = \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n$  (ici le déterminant  $g$  de la métrique est supposé positif).

Soit enfin la série d'opérations :

$$\begin{array}{lll} \vec{v} \text{ champ de vecteurs} & \mapsto & g^\flat \vec{v} \quad 1\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & dg^\flat \vec{v} \quad 2\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & *dg^\flat \vec{v} \quad 1\text{-forme différentielle} \\ & \mapsto & g^\sharp * dg^\flat \vec{v} \quad \text{champ de vecteurs} \end{array}$$

On a alors

$$g^\sharp * dg^b \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$$

Ce vecteur est le **rotationnel** de  $\vec{v}$ . Cette définition n'a de sens qu'en dimension 3.

Comme on l'a déjà remarqué,  $*$  fait intervenir l'orientation. Donc, si on l'applique deux fois dans une telle série d'opérations (exemple de la divergence), le résultat est indépendant de l'orientation. Par contre, si  $*$  n'est appliquée qu'une seule fois (ou un nombre impair de fois), le résultat dépend de l'orientation. C'est pourquoi le rotationnel d'un vecteur est un « pseudo-vecteur », au sens qu'il dépend de l'orientation.

L'opérateur laplacien  $\Delta$  vaut, sur les fonctions, l'opposé du laplacien habituel. Dans  $\mathbb{R}^4$  munie de la métrique de Minkowski, cet opérateur  $d\delta + \delta d$  n'est autre que le d'**Alembertien** qui intervient dans les équations d'ondes (à un signe près éventuel).

Les relations bien connues entre les opérateurs vectoriels sont des conséquences de relations entre les applications  $g^b, g^\sharp, d, *$  et les formules suivantes qu'il est facile de montrer :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= *(g^b \vec{v} \wedge *g^b \vec{w}) \\ \vec{v} \wedge \vec{w} &= g^\sharp * (g^b \vec{v} \wedge g^b \vec{w}) \end{aligned}$$

La première de ces formules est valable en toute dimension, alors que la seconde n'a de sens qu'en dimension 3, où le produit vectoriel de vecteurs est défini. Le laplacien vectoriel, défini en analyse vectorielle ordinaire comme le vecteur obtenu en appliquant le laplacien ordinaire sur chaque composante d'un vecteur, a ici pour expression

$$\Delta \vec{v} = g^\sharp (d\delta + \delta d) g^b \vec{v}$$

(le laplacien vectoriel ordinaire vaut bien sûr l'opposé de cette expression). Ainsi, par exemple,  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} = 0$  et  $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} = 0$  sont des conséquences directes de  $d^2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} - \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v} &= g^\sharp * dg^b g^\sharp * dg^b \vec{v} - g^\sharp d * d * g^b \vec{v} \\ &= g^\sharp (\delta d + d\delta) g^b \vec{v} \\ &= \Delta \vec{v} (= -\Delta_{\text{ordinaire}} \vec{v}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= *d * g^b (g^\sharp * (g^b \vec{v} \wedge g^b \vec{w})) \\ &= *d(g^b \vec{v} \wedge g^b \vec{w}) \\ &= *(d(g^b \vec{v}) \wedge g^b \vec{w} - g^b \vec{v} \wedge d(g^b \vec{w})) \\ &= *( *g^b (g^\sharp * dg^b \vec{v}) \wedge g^b \vec{w} - * (g^b \vec{v} \wedge *g^b (g^\sharp * dg^b \vec{w})) ) \\ &= (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{w}) \end{aligned}$$

### Coordonnées cartésiennes

Les trois fonctions coordonnées globales  $x, y, z$  sur  $\mathbb{R}^3$  sont appelées habituellement **coordonnées cartésiennes**.

Pour ces coordonnées, on choisit le repère holonome  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $\vec{i} = \frac{\partial}{\partial x}, \dots$ . C'est un repère orthonormé pour la métrique euclidienne

$$g = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ces coordonnées, le gradient d'une fonction  $f$  s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

la divergence d'un vecteur  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$  a pour expression

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

le rotationnel de  $\vec{v}$  prend la forme

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

et enfin le laplacien de  $f$  s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Il serait possible bien sûr de donner une expression du laplacien sur des vecteurs (dans l'identification « vecteur = 1-forme différentielle »), ce que nous ne ferons pas ici.

Sur  $\mathbb{R}^3$ , il est naturel et utile de considérer des systèmes de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes. Les deux systèmes de coordonnées les plus connus sont les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques. En toute rigueur, ces systèmes de coordonnées ne sont valables qu'en dehors de  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Pour ces systèmes de coordonnées, le repère cartésien est mal adapté, et on recourt aux repères cylindriques et sphériques.

### Coordonnées cylindriques

Les **coordonnées cylindriques** autour de l'axe  $(Oz)$  de  $\mathbb{R}^3$  sont  $(r, \theta, z)$ , reliées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  par

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

avec  $r \geq 0$  et  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Dans ce système de coordonnées, la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  prend la forme

$$g = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{zr} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut obtenir cette matrice en considérant les champs de vecteurs

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

Alors  $g_{rr} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)$  etc., et on connaît  $g$  sur  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

Le repère cylindrique est défini en chaque point  $(r, \theta, z)$  par les trois vecteurs orthonormés  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  donnés par

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} = \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \vec{u}_z &= \vec{k} = \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

C'est un repère non holonome orthonormé.

On peut alors, par exemple, calculer le gradient d'une fonction  $f$  dans ces coordonnées

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

On peut calculer les opérateurs  $\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}$  par une méthode semblable, et on trouve, pour  $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$ ,

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_z + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_r$$

Enfin, le laplacien de  $f$  prend la forme

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### Coordonnées sphériques

Les **coordonnées sphériques** centrées en  $O$  sont  $(r, \theta, \varphi)$ , reliées aux coordonnées cartésiennes par

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

avec  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

d'où

$$g = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Le repère orthonormé adapté à ce système de coordonnées est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{u}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Par un calcul analogue au précédent, le gradient d'une fonction  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

De même, on peut calculer les opérateurs  $\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}$  sur le vecteur  $\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_\varphi \vec{u}_\varphi$ ,

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} v_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\ &\quad + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\varphi \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

Enfin, le laplacien de  $f$  prend la forme

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

## 1.5. Groupes d'homotopie

*Références* : [4], [7], [12], [20], [29].

Nous revenons ici à un point de vue plus topologique sur les variétés. Nous abandonnons provisoirement l'aspect différentiel que nous venons d'étudier, pour ne regarder que l'aspect topologique. Bien sûr, ce qui va suivre sera valable en particulier pour des variétés différentiables. Nous allons associer à tout espace topologique  $M$  des ensembles qui donnent des informations sur sa topologie.

### 1.5.1. Composantes connexes par arcs

Soit  $p \in M$  un point de  $M$ . Nous dirons que  $q \in M$  est dans la même **composante connexe par arcs** que  $p$ , s'il existe une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , continue, telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = q$ . Donc, par définition, les points d'une même composante connexe par arc de  $M$  peuvent être reliés entre eux par une courbe continue dans  $M$ . Nous noterons  $\pi_0(M)$  l'ensemble des composantes connexes par arc de  $M$ .

Nous dirons que  $M$  est **connexe par arc** si  $\pi_0(M)$  est réduit à un seul point, c'est à dire si  $M$  n'a qu'une seule composante connexe par arcs. Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

### 1.5.2. Le groupe fondamental

Dans ce qui suit,  $M$  désigne un espace topologique connexe par arc.

#### L'ensemble $\pi_1(M)$

L'ensemble le plus utilisé dans les applications qui nous concerne est certainement l'ensemble  $\pi_1(M)$ . Nous allons voir que cet ensemble peut être muni d'une loi de composition interne qui en fait un groupe.

Soit  $p_0 \in M$  un point quelconque de  $M$ , fixé. Nous posons  $\mathcal{C}(p_0)$  l'ensemble des courbes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  telles que  $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$ . Ce sont donc les courbes qui commencent et se referment en  $p_0$ .  $\mathcal{C}(p_0)$  est l'**espace des lacets centrés en  $p_0$** , et nous dirons que  $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$  est un **lacet**.

Il faut remarquer que si  $\gamma_1$  est un lacet  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$  tel que  $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = p_0$ , alors il existe un lacet  $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$  qui passe par les mêmes points de  $M$  que  $\gamma_1$ . Il suffit en effet de changer la paramétrisation, par exemple en posant

$$\gamma(t) = \gamma_1(a + t(b - a))$$

Maintenant, nous dirons que deux lacets  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  de  $\mathcal{C}(p_0)$  sont **homotopes** s'il existe une application continue  $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(p_0)$  telle que  $F(0) = \gamma_0$  et  $F(1) = \gamma_1$ . On peut encore voir  $F$  comme une application continue

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

avec

$$\begin{aligned} F(0, t) &= \gamma_0(t) \\ F(1, t) &= \gamma_1(t) \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ . Ainsi, pour toute valeur  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u, \cdot)$  est un lacet de  $\mathcal{C}(p_0)$ . L'application  $F$  permet de déformer continûment le lacet  $\gamma_0$  (à  $u = 0$ ) en le lacet  $\gamma_1$  (à  $u = 1$ ).

Bien sûr, les lacets ne sont pas toujours homotopes entre eux. Prenons par exemple pour espace  $M$  une couronne. Si  $\gamma_0$  est un lacet qui ne fait pas le tour du trou, et si  $\gamma_1$  fait au contraire le tour du trou, alors il est impossible de déformer  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$ . En effet, nous constatons facilement que  $\gamma_0$  peut être « contracté » en le lacet  $\gamma(t) \equiv p_0$ , le lacet qui ne « bouge » pas dans  $M$ , alors que le trou de la couronne empêche  $\gamma_1$  de pouvoir être ainsi contracté en un point.

La relation d'homotopie sur les lacets est une relation d'équivalence, qui permet de quotienter  $\mathcal{C}(p_0)$ . Nous posons  $\pi_1(M, p_0)$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{C}(p_0)$  pour la relation d'homotopie. Nous noterons  $[\gamma] \in \pi_1(M, p_0)$  la classe d'homotopie de  $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$ .

### Structure de groupe

Nous allons maintenant donner à l'ensemble  $\pi_1(M, p_0)$  une structure de groupe. Pour cela, nous définissons sur  $\mathcal{C}(p_0)$  une composition des lacets. Soient  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  deux lacets de  $\mathcal{C}(p_0)$ . Nous notons  $\gamma_1\gamma_0$  le lacet obtenu en parcourant d'abord  $\gamma_0$  puis  $\gamma_1$ . Ce lacet, par un changement de paramétrisation (il suffit de parcourir les deux lacets deux fois plus vite) est un élément de  $\mathcal{C}(p_0)$ . Nous définissons donc une composition interne

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p_0) \times \mathcal{C}(p_0) &\rightarrow \mathcal{C}(p_0) \\ (\gamma_0, \gamma_1) &\mapsto \gamma_1\gamma_0 \end{aligned}$$

Maintenant, il est facile de montrer que  $[\gamma_1\gamma_0]$  ne dépend que de  $[\gamma_0]$  et  $[\gamma_1]$ . Nous avons donc un produit

$$\begin{aligned} \pi_1(M, p_0) \times \pi_1(M, p_0) &\rightarrow \pi_1(M, p_0) \\ ([\gamma_0], [\gamma_1]) &\mapsto [\gamma_0] \cdot [\gamma_1] = [\gamma_1\gamma_0] \end{aligned}$$

C'est ce produit qui donne à  $\pi_1(M, p_0)$  une structure de groupe. En effet, l'élément neutre de ce produit, comme il est aisé de s'en convaincre, est la classe d'homotopie du lacet

$$\gamma_{p_0}(t) = p_0 \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

le lacet constant. Nous avons alors

$$[\gamma] \cdot [\gamma_{p_0}] = [\gamma_{p_0}] \cdot [\gamma] = [\gamma]$$

Si  $\gamma$  est un lacet de  $\mathcal{C}(p_0)$ , nous notons  $\gamma^{-1}$  le lacet obtenu en le parcourant dans l'autre sens

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$$

Alors nous avons

$$[\gamma] \cdot [\gamma^{-1}] = [\gamma^{-1}] \cdot [\gamma] = [\gamma_{p_0}]$$

C'est à dire que  $[\gamma^{-1}]$  est l'inverse de  $[\gamma]$  dans  $\pi_1(M, p_0)$ . Muni de ce produit,  $\pi_1(M, p_0)$  est donc un groupe, le **groupe fondamental de l'espace  $M$  en  $p_0$** .

Nous remarquons que ce groupe dépend du point  $p_0$  choisi au départ. Il est cependant possible de montrer que si  $q_0$  est un autre point de  $M$ , quelconque, alors  $\pi_1(M, p_0)$  et  $\pi_1(M, q_0)$  sont des groupes isomorphes. Ceci signifie que la structure de ces groupes est toujours la même, quelque soit le point  $p_0$  choisi. Nous notons  $\pi_1(M)$  l'un de ses groupes sachant qu'il n'est défini qu'à un isomorphisme près. C'est le **groupe fondamental de l'espace  $M$** , appelé aussi **groupe d'homotopie d'ordre 1 de  $M$** . Nous dirons que  $M$  est **simplement connexe** si  $\pi_1(M) = \{1\}$ , c'est à dire s'il n'y a qu'une seule classe d'homotopie des lacets, celle du lacet constant.

Nous avons alors le résultat suivant : si  $M$  et  $M'$  sont deux espaces topologiques connexes par arcs homéomorphes, alors  $\pi_1(M)$  et  $\pi_1(M')$  sont isomorphes.

Cette propriété montre que le groupe fondamental ne retient de  $M$  que des caractéristiques topologiques. La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent.

### Exemples

- Le disque,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$  ont pour groupe fondamental l'ensemble  $\{1\}$  et sont donc simplement connexes.
- Le cercle et la couronne ont le même groupe fondamental,  $\mathbb{Z}$ . Chaque entier  $n \in \mathbb{Z}$  est le nombre de « vrais » tours (dans un sens ou dans l'autre, d'où le signe possible de  $n$ ) que fait le lacet autour du trou.
- Pour  $n > 1$ , si  $\mathbb{S}^n$  est la sphère dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , alors  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ . Ces sphères sont donc simplement connexes. Bien que  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n)$  pour  $n > 1$ , nous n'avons pas  $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^n$  !

### Remarque

Nous avons vu que  $M$  est connexe par arcs s'il est « composé d'un seul morceau ». De même,  $M$  est simplement connexe s'il « n'a pas de trou ».

### 1.5.3. Revêtement universel

Soit  $M$  un espace topologique connexe par arcs.

### Revêtement

Soit  $\widetilde{M}$  un espace topologique connexe par arcs, et une application  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ . Nous dirons que  $(\widetilde{M}, \pi)$  est un **revêtement de  $M$** , si pour tout  $p \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $p$  et des ouverts deux à deux disjoints  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $\widetilde{M}$ , où l'ensemble  $I$  est non vide (il peut être fini ou infini), tels que

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

et les  $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  sont des homéomorphismes. En particulier,  $\pi$  est surjective.

Un revêtement  $\widetilde{M}$  ressemble donc localement à  $M$  (chaque ouvert  $U_i$  est une copie de  $U$ ), mais  $\widetilde{M}$  est plus gros que  $M$ , puisque pour chaque  $p \in M$ , nous avons  $\text{Card} I$  points de  $\widetilde{M}$  qui s'envoient par  $\pi$  sur  $p$  ( $\text{Card} I$  est le cardinal de l'ensemble  $I$ , c'est à dire son nombre d'éléments, il peut éventuellement être infini). Il faut remarquer que  $I$  ne dépend pas de  $p$ , donc les  $\pi^{-1}(p)$  sont des ensembles en bijection entre eux, et en bijection avec  $I$ . L'ensemble  $\pi^{-1}(p)$  est la fibre de  $\widetilde{M}$  au dessus de  $p$ . Un revêtement ayant des fibres formées de  $n$  points est un **revêtement à  $n$  feuillets**.

### Revêtement universel

Sous certaines hypothèses très peu restrictives sur  $M$  (au moins dans la pratique), il existe un revêtement  $(\widetilde{M}, \pi)$  de  $M$  tel que :

- $\pi_1(\widetilde{M}) = \{1\}$ , c'est à dire que  $\widetilde{M}$  est simplement connexe ;
- Pour tout  $p \in M$ , l'ensemble  $\pi^{-1}(p) \subset \widetilde{M}$  est isomorphe à  $\pi_1(M)$ , c'est à dire  $I \simeq \pi_1(M)$ .

$(\widetilde{M}, \pi)$  est appelé le **revêtement universel** de  $M$ . Il est unique à un homéomorphisme près.

Si  $M$  est simplement connexe, alors nous pouvons prendre  $\widetilde{M} = M$ . Si  $M$  n'est pas simplement connexe, nous pouvons lui construire un espace topologique  $\widetilde{M}$  qui est simplement connexe, et qui ressemble localement à  $M$  (en tant que revêtement). Au dessus de chaque point  $p \in M$ , nous avons autant de point que dans  $\pi_1(M)$ . C'est à dire que  $\widetilde{M}$  est d'autant plus gros par rapport à  $M$ , que  $\pi_1(M)$  est gros, donc que  $M$  « n'est pas » simplement connexe.

L'adjectif universel vient de la propriété suivante : si  $(M_1, \pi_1)$  est un revêtement de  $M$ , alors il existe  $\widetilde{\pi}_1 : \widetilde{M} \rightarrow M_1$  telle que  $(\widetilde{M}, \widetilde{\pi}_1)$  soit un revêtement de  $M_1$ . C'est à dire que tout revêtement de  $M$  est « coincé » entre  $\widetilde{M}$  et  $M$ .

Prenons l'exemple de  $M = \mathbb{S}^1$ . Dans ce cas,  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ . Le revêtement universel du cercle est  $\mathbb{R}$ , et  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  est donnée par  $\pi(r) = e^{2\pi i r}$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

### Cas d'une variété différentiable

Si  $M$  est une variété différentiable, alors nous pouvons prendre pour le revêtement universel  $\widetilde{M}$  une variété différentiable, et toutes les applications sont des applications dif-

férentiables.

#### 1.5.4. Groupes d'homotopie d'ordres supérieurs

Revenons à la définition de  $\pi_1(M)$ . Nous avons considéré des lacets  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tels que  $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$ . Notons  $C^1 = [0, 1]$  le « cube » à une dimension et  $\partial C^1 = \{0\} \cup \{1\}$  son bord. Alors un lacet est une application  $\gamma : C^1 \rightarrow M$  telle que  $\gamma(\partial C^1) = p_0$ .

Pour définir les groupes d'homotopie d'ordres supérieurs, nous considérons  $C^n = [0, 1]^n$  le cube à  $n$  dimensions (cube plein de  $\mathbb{R}^n$ ) et  $\partial C^n$  son bord (réunion de cubes de dimension  $n - 1$ ). Nous posons  $\mathcal{C}^n(p_0)$  l'ensemble des applications continues  $\gamma : C^n \rightarrow M$  telles que  $\gamma(\partial C^n) = p_0$ .

Nous dirons alors que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont homotopes, s'il existe une application continue

$$F : [0, 1] \times C^n \rightarrow M$$

telle que

$$\begin{aligned} F(0, \cdot) &= \gamma_0 \\ F(1, \cdot) &= \gamma_1 \end{aligned}$$

et

$$F(u, \partial C^n) = p_0$$

pour tout  $u \in [0, 1]$ . La relation d'équivalence sur  $\mathcal{C}^n(p_0)$  qui en résulte permet de définir  $\pi_n(M, p_0)$  comme l'ensemble des classes d'homotopie de  $\mathcal{C}^n(p_0)$ .

Nous pouvons munir  $\pi_n(M, p_0)$  d'une structure de groupe. Pour cela, nous définissons sur  $\mathcal{C}^n(p_0)$  la composition suivante : pour  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}^n(p_0)$ , nous posons  $\gamma_1\gamma_0$  l'application

$$\begin{aligned} &\gamma_1\gamma_0 : C^n \rightarrow M \\ (\gamma_1\gamma_0)(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} \gamma_0(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

C'est à dire que nous collons le cube  $C^n$  de  $\gamma_0$  au cube  $C^n$  de  $\gamma_1$  et contractons le parallélépipède obtenu pour en faire de nouveau un cube  $C^n$ . Il est facile de vérifier que cette loi de composition définit un produit sur  $\pi_n(M, p_0)$ , qui fait de  $\pi_n(M, p_0)$  un groupe. C'est le **groupe d'homotopie d'ordre  $n$  de  $M$  en  $p_0$** .

Lorsque  $p_0$  varie dans  $M$ , les groupes  $\pi_n(M, p_0)$  sont isomorphes entre eux. Il est possible de définir le **groupe d'homotopie d'ordre  $n$  de  $M$** ,  $\pi_n(M)$ , à un isomorphisme près.

À l'exception de  $\pi_1(M, p_0)$ , tous les groupes d'homotopie sont abéliens. Il est possible d'établir des liens entre ces groupes d'homotopie et les groupes de cohomologie de de Rham, qui eux aussi contiennent de l'information topologique.

## Chapitre 2

# Groupes et algèbres de Lie, représentations

Nous abordons ici l'étude d'objets mathématiques très riches car à cheval sur deux piliers des mathématiques : la géométrie différentielle et l'algèbre. Nous n'aborderons que très peu d'algèbre, car d'épais traités seraient nécessaires pour parcourir les résultats, notamment de classification (l'algèbre essaie toujours de classer les objets qu'elle traite). Mentionnons seulement que ces résultats algébriques sont très utiles en physique. Ainsi en est-il par exemple de la classification des algèbres de Lie. Pour une approche algébrique, voir [10], [21], [23], [22], [24], [28].

### 2.1. Définitions

*Références* : [2], [8], [9], [10], [12], [14], [16], [17], [20], [21], [22], [24], [28], [30].

#### 2.1.1. Groupes topologiques et groupes de Lie

##### Groupes topologiques

Un **groupe topologique**  $G$  est un espace topologique séparé muni d'une structure de groupe telle que les applications

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

soient continues. Ces conditions expriment la compatibilité entre la structure de groupe et la structure topologique.

Un **homomorphisme de groupes topologiques** est un homomorphisme de groupes entre deux groupes topologiques qui est continu.

Un sous-groupe  $H$  de  $G$  peut être muni de la topologie induite par l'inclusion. Ceci fait de  $H$  un groupe topologique, **sous-groupe topologique** de  $G$ .

## Groupes de Lie

Maintenant que nous savons concilier structure de groupe et structure d'espace topologique, il est naturel de définir ce qu'est à la fois un groupe et une variété.

Un **groupe de Lie**  $G$  est une variété différentiable munie d'une structure de groupe (ou un groupe muni d'une structure de variété différentiable) telle que

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

soient des applications différentiables. Ces conditions expriment donc, comme dans le cas des groupes topologiques, la compatibilité entre la structure de groupe et la structure de variété différentiable. Tout groupe de Lie est en particulier un groupe topologique. La dimension de  $G$  sera sa dimension en tant que variété.

Un **homomorphisme de groupes de Lie** est un homomorphisme de groupes entre deux groupes de Lie qui est différentiable.

L'élément neutre  $e$  joue un rôle important dans ces groupes. Nous verrons plus tard comment il intervient. Cependant, il faut tout de suite remarquer que ce qui se passera au voisinage de ce point dans  $G$  se retrouvera au voisinage de tout autre point en s'y translatant par multiplication dans le groupe.

Un **sous-groupe de Lie**  $H$  de  $G$  est un sous-groupe de  $G$  qui possède une structure de groupe de Lie et qui est une sous-variété de  $G$ . On peut montrer que tout sous-groupe fermé de  $G$  est un sous-groupe de Lie.

## Exemples

Donnons quelques exemples de groupes de Lie (donc de groupes topologiques) :

- $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$ , noté aussi  $U(1)$ . C'est le **groupe du cercle**
- Les groupes matriciels réels :

**Groupe linéaire réel :**

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \det M \neq 0\}, \text{ dimension } n^2.$$

**Groupe spécial linéaire :**

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / \det M = 1\}, \text{ dimension } n^2 - 1.$$

**Groupe orthogonal :**

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / M^t M = 1\}, \text{ dimension } (n^2 - n)/2.$$

**Groupe spécial orthogonal :**

$$SO(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n), \text{ dimension } (n^2 - n)/2.$$

où  $M(n, \mathbb{R})$  est l'algèbre réelle des matrices  $n \times n$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Les groupes matriciels complexes pour lesquels on identifie  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  :

**Groupe linéaire complexe :**

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) / \det M \neq 0\}, \text{ dimension } 2n^2.$$

**Groupe spécial linéaire :**

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) / \det M = 1\}, \text{ dimension } 2n^2 - 2.$$

**Groupe unitaire :**

$$U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) / M^\dagger M = 1\}, \text{ dimension } n^2.$$

**Groupe spécial unitaire :**

$$SU(n) = SL(n, \mathbb{C}) \cap U(n), \text{ dimension } n^2 - 1$$

où  $M(n, \mathbb{C})$  est l'algèbre complexe des matrices  $n \times n$  sur  $\mathbb{C}$  et  $M^\dagger$  est la transconjuguée de  $M$ .

- Soit  $G$  un groupe topologique, et  $H$  un sous-groupe topologique fermé de  $G$ . Définissons la relation d'équivalence sur  $G$  :  $g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in H, g' = gh$ . Notons  $G/\sim = G/H$  l'ensemble des classes d'équivalence dans  $G$  pour cette relation.  $G/H$  peut être muni de la topologie induite par la projection  $G \rightarrow G/H$ . Alors  $G/H$  est un groupe topologique si et seulement si  $H$  est distingué dans  $G$ , c'est à dire  $\forall h \in H, \forall g \in G, ghg^{-1} \in H$ . Il est d'usage de noter la classe d'équivalence de  $g \in G$  par  $gH \in G/H$ .
- Si maintenant  $G$  est un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe de Lie fermé de  $G$ , alors  $G/H$  est une variété différentiable de dimension  $\dim G - \dim H$ . C'est un groupe de Lie si et seulement si  $H$  est distingué dans  $G$ .

Dans ce qui va suivre, il sera essentiellement question de groupes de Lie. Nous rencontrerons de nouveau les groupes topologiques lorsque nous définirons les représentations.

## 2.1.2. Algèbres de Lie

### Définition

Une **algèbre de Lie**  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel (de dimension finie dans ce qui suit) muni d'un produit interne noté  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$  appelé **crochet de Lie**, tel que

- $[X, Y] = -[Y, X]$ , antisymétrie ;
- $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ , **identité de Jacobi**.

Des exemples courants d'algèbres de Lie sont les algèbres matricielles, sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie  $M(n, \mathbb{R})$  munie du crochet  $[A, B] = AB - BA$  (commutateur des matrices). Nous en rencontrerons plus loin.

Un **homomorphisme d'algèbres de Lie** est une application linéaire entre deux algèbres de Lie  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  telle que

$$[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$$

(compatibilité avec les crochets de Lie).

Nous dirons qu'un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{h}$  est une **sous-algèbre de Lie** de  $\mathfrak{g}$ , si pour tous  $X, Y \in \mathfrak{h}$ , nous avons  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , ce que nous écrirons encore

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$$

### Somme directe d'algèbres de Lie

Si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont deux algèbres de Lie, alors l'espace vectoriel  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie pour le crochet

$$[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, X_2] \oplus [Y_1, Y_2]$$

C'est l'algèbre de Lie **somme directe** de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$ .

### Idéaux

Nous dirons que  $\mathfrak{h}$  est un **idéal** dans  $\mathfrak{g}$ , si  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que pour tous  $X \in \mathfrak{h}$  et  $Y \in \mathfrak{g}$ , nous ayons  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , ce que nous écrirons encore

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$$

Nous dirons que  $\mathfrak{h}$  est un **idéal propre** de  $\mathfrak{g}$  si  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  différent de  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\mathfrak{h}$  est un idéal dans  $\mathfrak{g}$ , alors l'espace vectoriel quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  est une algèbre de Lie. Son crochet de Lie est défini comme suit : si  $(X)$  et  $(Y)$  sont des éléments de  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , de représentants  $X$  et  $Y$  dans  $\mathfrak{g}$ , alors nous posons

$$[(X), (Y)] = ([X, Y])$$

Il est facile de montrer que ce crochet est bien défini lorsque  $\mathfrak{h}$  est un idéal dans  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont deux algèbres de Lie, alors  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des idéaux de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ , et les quotients respectifs sont isomorphes à  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{g}$ .

Les éléments  $Z$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  qui vérifient  $[Z, X] = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  forment un idéal de  $\mathfrak{g}$ , noté  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ . C'est le **centre de l'algèbre de Lie**  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{g} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ , l'algèbre de Lie est dite **abélienne**, c'est à dire que le crochet de Lie est nul sur  $\mathfrak{g}$ .

L'**algèbre de Lie dérivée**  $\mathfrak{g}'$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie engendrée par les éléments de la forme  $[X, Y]$  où  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathfrak{g}$ .  $\mathfrak{g}'$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

### 2.1.3. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Nous avons introduit précédemment la notion d'algèbre de Lie. En soi, cette notion a un grand intérêt, mais son importance va être renforcée par la construction qui va suivre : nous allons associer à tout groupe de Lie  $G$  une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , de façon canonique. Cette algèbre sera d'un grand intérêt pour l'étude du groupe lui-même.

### Translations à gauche et à droite

Pour introduire cette algèbre de Lie, il nous faut considérer deux applications particulières sur le groupe.

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

est la **translation à gauche** sur le groupe.

$$\begin{aligned} R_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto hg \end{aligned}$$

est la **translation à droite** sur le groupe. Ces deux applications sont des difféomorphismes du groupe<sup>1</sup>.

### Champs de vecteurs invariants

Si  $X$  est un champ de vecteur sur  $G$ , nous dirons que

- $X$  est **invariant à gauche** si  $\forall g \in G, \forall a \in G, T_a L_g X|_a = X|_{ga}$  où pour mémoire nous rappelons que nous avons  $T_a L_g : T_a G \rightarrow T_{ga} G$ . Nous pouvons encore écrire cette condition sous la forme

$$L_{g*} X = X$$

pour tout  $g \in G$ .

- $X$  est **invariant à droite** si  $\forall g \in G, \forall a \in G, T_a R_g X|_a = X|_{ag}$ .

La valeur en  $ga$  d'un champ de vecteurs  $X$  invariant à gauche est lié par la translation à gauche à sa valeur en  $a$ , en particulier pour  $a = e : X|_g = T_e L_g X|_e$ . Donc un champ de vecteur invariant à gauche est complètement déterminé par sa valeur en  $e$ . Il en est de même pour un champ invariant à droite.

### Structure d'algèbre de Lie

Sur les champs de vecteurs, nous avons un crochet de Lie. Il est possible de vérifier que si  $X$  et  $Y$  sont des champs invariants à gauche sur  $G$ , alors  $[X, Y]$  est aussi invariant à gauche.

Nous définissons alors **l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $G$ ,  $\mathfrak{g}$** , comme l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$  muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, qui est bien interne. C'est bien une algèbre de Lie (sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de dimension infinie des champs de vecteurs sur  $G$ ).

Il est légitime de se demander pourquoi avoir choisi les champs de vecteurs invariants à gauche. En fait, nous aurions pu prendre aussi bien les champs de vecteurs invariants

---

<sup>1</sup>Dans le cas où  $G$  serait seulement un groupe topologique, ces deux applications ne seraient que des homéomorphismes.

à droite. L'algèbre obtenue aurait été isomorphe (au sens des algèbres de Lie) à celle que nous avons construite. Il serait juste apparu que nous aurions dû faire un choix correct du crochet de Lie : un signe serait intervenu dans certaines formules.

Il est aussi légitime de se demander pourquoi se restreindre aux champs invariants à gauche, plutôt que de prendre tous les champs de vecteurs sur  $G$ . Ceci provient d'un fait très important : l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel), à l'espace tangent  $T_e G$ . En fait, elle est isomorphe à n'importe quel espace tangent de  $G$ . Le choix de  $e$  est fait par commodité. La dimension de l'algèbre de Lie de  $G$  (en tant qu'espace vectoriel) est donc la même que celle du groupe. En particulier,  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie.

Explicitons cet isomorphisme : soit  $X|_e \in T_e G$ . Nous lui associons un unique champ de vecteurs invariant à gauche,  $X^L$ , défini par  $X^L|_g = T_e L_g X|_e$ . En  $e$ , on a  $X^L|_e = X|_e$ . De la relation  $L_{g'} \circ L_g = L_{g'g}$  on tire  $T_g L_{g'} \circ T_e L_g = T_e L_{g'g}$ , ce qui permet de montrer que ce champ est invariant à gauche. Enfin, il est facile de voir que cette application de  $T_e G$  dans  $\mathfrak{g}$  admet un inverse : à un champ invariant à gauche  $X$  on associe sa valeur en  $e$ . Nous avons donc là un isomorphisme (c'est clairement linéaire) :

$$T_e G \simeq \mathfrak{g}$$

Nous venons de voir comment associer une algèbre de Lie à tout groupe de Lie. Il existe une réciproque, c'est le **troisième théorème de Lie** : si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie, alors il existe un groupe de Lie  $G$  simplement connexe dont  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie.

## Exemples

Pour les groupes donnés en exemples, nous donnons leur algèbre de Lie :

- $\mathbb{S}^1$  a pour algèbre de Lie  $\mathbb{R}$ , le crochet de deux réels étant toujours nul. C'est donc une algèbre de Lie abélienne.
- Nous donnons un tableau de correspondance pour les groupes matriciels :

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R}) \\ O(n) &\rightarrow \mathfrak{o}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / M^t + M = 0\} \\ SL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \text{Tr}M = 0\} \\ SO(n) &\rightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{o}(n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C}) \\ U(n) &\rightarrow \mathfrak{u}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) / M^\dagger + M = 0\} \\ SL(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) / \text{Tr}M = 0\} \\ SU(n) &\rightarrow \mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n) \end{aligned}$$

où le crochet est le commutateur des matrices. Il est habituel de noter un groupe de Lie avec des majuscules et son algèbre de Lie avec des minuscules<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Si possible gothiques, pour faire exotique...

- Le groupe  $G/H$ , si  $H$  est un sous-groupe de Lie distingué dans le groupe de Lie  $G$  : son algèbre de Lie est le quotient d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  si  $\mathfrak{h}$  est l'algèbre de Lie de  $H$ . Le fait que  $H$  soit distingué dans  $G$  se traduit au niveau des algèbres de Lie par le fait que  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

### 2.1.4. Application exponentielle

#### Définition

Nous allons maintenant construire une application entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ . Cette application est un pont entre les deux structures, et permet de trouver certaines propriétés de  $G$  connaissant  $\mathfrak{g}$ .

Pour cela, soit  $X \in \mathfrak{g}$  considéré comme champ de vecteurs invariant à gauche. Il définit donc une équation différentielle, dont le flot est noté  $\phi_X(t, g)$ . C'est à dire que :

$$\frac{d\phi_X(t, g)}{dt} = X|_{\phi_X(t, g)}$$

et

$$\phi_X(0, g) = g$$

En utilisant l'invariance à gauche de  $X$ , il est facile de montrer que

$$\phi_X(t, g) = L_g \phi_X(t, e)$$

Nous voyons ainsi que le flot est complètement déterminé par la solution de condition initiale  $e$ .

D'une manière générale, n'importe quel flot sur une variété différentiable (la structure de groupe n'est pas utile pour cette propriété), vérifie

$$\phi_{\lambda X} \left( \frac{t}{\lambda}, g \right) = \phi_X(t, g)$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Cette propriété se démontre par l'unicité du flot.

Nous sommes alors en mesure de définir l'**application exponentielle** par

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \phi_X(1, e) \end{aligned}$$

Par construction, cette application vérifie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \phi_X(t, e) \\ \phi_X(t, g) &= g \exp(tX) \\ \frac{d\exp(tX)}{dt} &= X|_{\exp(tX)} \\ \exp 0 &= e \end{aligned}$$

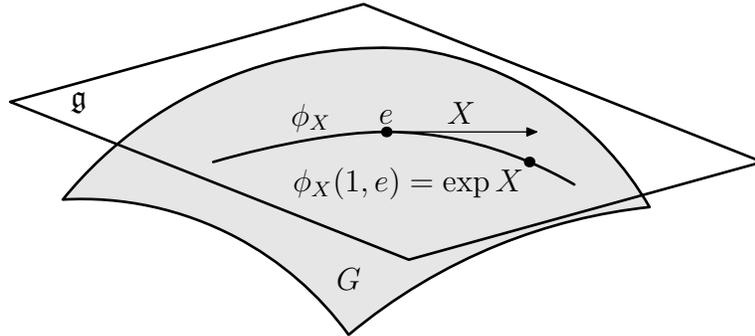


FIG. 2.1 – L'application exponentielle sur le groupe de Lie  $G$  est définie à partir du flot  $\phi_X$  d'un champ de vecteur invariant à gauche sur  $G$  (c'est à dire d'un élément de  $\mathfrak{g}$ ).

### Autres propriétés

L'application exponentielle a de nombreuses propriétés, dont voici quelques énoncés :

- $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  est un difféomorphisme local sur  $e \in G$  et

$$T_0 \exp : T_0 \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \simeq T_e G$$

est l'application identité. Ceci signifie que  $G$  ressemble fortement, autour de  $e$ , à  $\mathfrak{g}$ . Par translation sur le groupe, nous voyons que ceci est vrai aussi autour de n'importe quel point de  $G$ .

- Notons  $G^0$  la composante connexe de  $e$  dans  $G$  (c'est à dire l'ensemble des éléments de  $G$  qui peuvent être reliés à  $e$  par un chemin continu). Alors  $G^0$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ . De plus, tout élément  $g \in G^0$  peut être écrit sous la forme

$$g = \exp X_1 \exp X_2 \cdots \exp X_k$$

pour  $k$  éléments  $X_i$  de  $\mathfrak{g}$  ( $k$  dépend de  $g$ ).

- En général  $\exp(X + Y) \neq \exp X \exp Y$ . On peut montrer que

$$\exp X \exp Y = \exp \left( X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[[X, Y], Y] - \frac{1}{12}[[X, Y], X] + \dots \right)$$

C'est la **formule de Baker-Campbell-Hausdorff**. Dans cette formule, si nous prenons  $X$  et  $Y$  tels que  $[X, Y] = 0$ , alors  $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$ . C'est le cas par exemple si  $X = Y$  :  $\exp((t + s)X) = \exp(tX) \exp(sX)$ . L'ensemble des  $\exp(tX)$ , à  $X$  fixé et  $t$  variant dans  $\mathbb{R}$ , forme un sous groupe de Lie de  $G$ , appelé **sous-groupe à un paramètre**.

Dans le cas d'un groupe et d'une algèbre de Lie matriciels, nous avons les faits suivants, très utiles en pratique (car la physique n'utilise bien souvent que des groupes matriciels). Soient  $A \in G$  et  $M \in \mathfrak{g}$  :

- $TL_A M = AM$ , c'est à dire que la translation à gauche d'un vecteur revient à le multiplier à gauche. Cela simplifie nombre de formules !
- $\exp M = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} M^i$ , c'est à dire que nous retrouvons l'exponentielle des matrices.

## 2.2. Action d'un groupe de Lie

*Références* : [11], [12], [16], [17], [20], [22].

En mathématiques, un groupe sert à faire bouger les éléments d'un ensemble (par exemple, le groupe des permutations d'un ensemble fini, le groupe des rotations qui fait bouger les éléments de  $\mathbb{R}^3$ ...). Nous parlons alors d'action du groupe sur cet ensemble. En géométrie différentielle, les ensembles sur lesquels les groupes de Lie agiront seront des espaces vectoriels ou des variétés différentiables. Nous en comprendrons l'intérêt lors de l'étude des fibrés. Nous allons ici donner la définition générale de l'action d'un groupe sur un ensemble, de l'action d'un groupe de Lie sur une variété, et quelques propriétés.

### 2.2.1. Définitions

Soit  $E$  un ensemble. Une **action** à gauche (resp. à droite) d'un groupe  $G$  sur  $E$  est une application

$$\begin{aligned}\phi : G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\mapsto \phi(g, x)\end{aligned}$$

telle que  $\phi(e, x) = x$  pour tout  $x \in E$ , et

$$\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$$

(resp.  $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(hg, x)$ ). Dans ce chapitre, sauf mention contraire, nous ne prendrons que des actions à gauche, ce qui nous permettra de sous-entendre « à gauche ». Par contre, nous utiliserons des actions à droite plus loin, lors de l'étude des fibrés. Les résultats sont essentiellement les mêmes. Il est d'usage de noter une action (à gauche) par  $\phi(g, x) = g \cdot x$ .

Nous noterons, pour  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned}\phi_g : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto \phi(g, x)\end{aligned}$$

où donc  $\phi_g \in \text{Aut}(E)$ , groupe des automorphismes de  $E$ . Ainsi, chaque élément  $g$  de  $G$  fait « bouger » bijectivement les points de  $E$ . Sur cette application, les conditions pour que  $\phi$  soit une action sont  $\phi_e = \text{Id}_E$  et  $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$ . On peut aussi voir l'action de  $G$  sur  $E$  comme l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned}G &\rightarrow \text{Aut}(E) \\ g &\mapsto \phi_g\end{aligned}$$

Nous dirons que l'action de  $G$  sur  $E$  est **effective** si  $g \mapsto \phi_g$  est injective. L'action sera dite **libre** si les **stabilisateurs**  $G_x = \{g \in G \mid \phi_g(x) = x\}$  pour tout  $x \in E$  sont réduits à  $\{e\}$ . Les stabilisateurs  $G_x$  sont aussi appelés **groupe d'isotropie** de  $x$ .

Si le groupe  $G$  agit sur une variété topologique  $M$ , on supposera que  $\phi_g : M \rightarrow M$  est en plus continue pour tout  $g \in G$ , et si  $M$  est une variété différentiable, on supposera que  $\phi_g$  est différentiable. Dans ce cas, l'action réalise un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Diff}(M) \\ g &\mapsto \phi_g \end{aligned}$$

où  $\text{Diff}(M)$  est le groupe des difféomorphismes de  $M$ .

Dans le cas où  $G$  est un groupe topologique, on supposera que l'action de  $G$  sur une variété topologique  $M$  est en plus continue en  $g \in G$ . Donc  $\phi : G \times M \rightarrow M$  est une application continue. Dans ce cas, les sous-groupes  $G_x$  sont fermés dans  $G$  (car  $M$  est séparée). Si  $G$  est un groupe de Lie et  $M$  une variété différentiable, alors  $\phi : G \times M \rightarrow M$  est supposée différentiable.

Comme exemple d'action, nous pouvons voir que n'importe quel groupe  $G$  agit sur lui-même par la translation à gauche  $L_g$ . Il faut prendre garde au fait que  $R_g$  n'est pas une action à gauche, mais une action à droite. Si  $G$  est un groupe topologique ou un groupe de Lie, par les axiomes mêmes, les translations à gauche et à droite sont bien des actions au sens précédent.

## 2.2.2. Champ de vecteurs fondamental

### Définition

On suppose qu'un groupe de Lie  $G$  agit à gauche sur une variété différentiable  $M$ . Pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\exp(-tX)$  est une courbe dans  $G$ . Donc  $\phi(\exp(-tX), x)$  est une courbe dans  $M$  qui passe en  $x$  à  $t = 0$ . Si nous dérivons cette courbe, nous obtenons un vecteur tangent en  $x$ . Par définition, le **champ fondamental** associé à  $X$  sur  $M$  est le champ de vecteurs

$$X_{|x}^M = \left( \frac{d}{dt} \phi(\exp(-tX), x) \right)_{|t=0}$$

défini sur tout  $M$ . Une autre façon de voir cette application est la suivante : à  $x \in M$  fixé,  $\chi_x = \phi(\cdot, x) : G \rightarrow M$  est une application différentiable. Pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , nous avons

$$X_{|x}^M = -T_e \chi_x X$$

(le signe «  $-$  » provenant du «  $-$  » dans l'exponentielle).

On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow T_x M \\ X &\mapsto X_{|x}^M \end{aligned}$$

qui s'étend en

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \Gamma(M) \\ X &\mapsto X^M \end{aligned}$$

## Propriétés

Nous avons alors quelques propriétés élémentaires du champ de vecteurs fondamental :

- Le flot du champ  $X^M$  est par construction

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \psi(t, x) = \phi(\exp(-tX), x)\end{aligned}$$

- Si  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , alors  $[X^M, Y^M] = [X, Y]^M$ . Le premier membre utilise le crochet des champs de vecteurs sur  $M$ , le second le crochet de Lie dans  $\mathfrak{g}$ . En d'autres termes, l'application  $X \mapsto X^M$  est un morphisme d'algèbres de Lie.
- Si l'action de  $G$  sur  $M$  est effective, alors l'application  $\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(M)$  est injective. Si l'action est libre, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $X^M$  ne s'annule en aucun point de  $M$ .

Démontrons rapidement le second résultat. Nous rappelons que pour deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  de flots  $\psi_{X,t}$  et  $\psi_{Y,u}$ , nous avons

$$\begin{aligned}[X, Y]_x &= \left( \frac{d}{dt} \psi_{X,t}^* Y_{|\psi_{X,t}(x)} \right)_{|t=0} \quad \text{par définition de } L_X \\ &= \left( \frac{d^2}{dt du} \psi_X \left( -t, \psi_Y(u, \psi_{X,t}(x)) \right) \right)_{|t=u=0} \quad \text{par définition de } \psi_{X,t}^*\end{aligned}$$

Appliquons cette relation aux champs de vecteurs  $X^M$  et  $Y^M$ , de flots respectifs  $\psi_{X,t}(x) = \phi(\exp(-tX), x)$  et  $\psi_{Y,u}(x) = \phi(\exp(-uY), x)$ . Nous trouvons

$$\begin{aligned}[X^M, Y^M]_x &= \left\{ \frac{d^2}{dt du} \phi \left( \exp(tX), \phi \left( \exp(-uY), \phi(\exp(-tX), x) \right) \right) \right\}_{|t=u=0} \\ &= \left\{ \frac{d^2}{dt du} \phi \left( \exp(tX) \exp(-uY) \exp(-tX), x \right) \right\}_{|t=u=0}\end{aligned}$$

Par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, nous avons

$$\exp(tX) \exp(-uY) \exp(-tX) = \exp\left(u(-Y - t[X, Y] + o(u, t))\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}[X^M, Y^M]_x &= \left( \frac{d}{dt} T_{e\chi_x} \left( -Y - t[X, Y] + o(t) \right) \right)_{|t=0} \\ &= -T_{e\chi_x} [X, Y] \quad \text{car } T_{e\chi_x} \text{ est linéaire} \\ &= [X, Y]_x^M\end{aligned}$$

Il faut remarquer que le signe «  $-$  » est essentiel pour prouver cette relation. Il est lié au fait que nous avons pris une action à gauche. Lorsque nous étudierons les fibrés, nous prendrons des actions à droite, et la définition du champ fondamental ne fera pas intervenir ce signe, ce qui permettra de conserver cette relation.

### 2.2.3. Orbite d'une action, espaces quotients, espaces homogènes

#### Orbite

Soit  $G$  un groupe quelconque agissant sur un ensemble  $E$ , et soit  $x \in E$ . L'**orbite** de  $x$  dans  $E$  est l'ensemble des points atteints par  $x$  sous l'action de  $G$ . Nous la notons  $\mathcal{O}_x = \{\phi(g, x) \mid g \in G\}$ . Si  $\mathcal{O}_x = E$ , nous dirons que l'action est **transitive**. Dans ce cas, les groupes d'isotropie  $G_x$  sont tous conjugués. En effet, pour  $x, y \in E$ , il existe toujours un  $g \in G$  tel que  $y = g \cdot x$ . Alors il est facile de voir que  $G_y = gG_xg^{-1}$ .

Si  $G$  est un groupe de Lie agissant sur une variété différentiable  $M$ , l'orbite d'un point n'est pas nécessairement une sous-variété de  $M$ . Cependant, dans le cas où c'est effectivement une sous-variété de  $M$ , il est facile de voir que l'espace tangent en  $x$  à l'orbite de  $x$  est engendré par les  $X_{|x}^M$  avec  $X$  parcourant  $\mathfrak{g}$ .

#### Quotients

Comme nous le verrons par la suite, il est souvent commode de considérer l'espace de toutes les orbites de l'action d'un groupe  $G$  sur une variété  $M$ . Cet espace d'orbites, appelé **espace quotient** de  $M$  par  $G$ , n'est pas toujours une variété différentiable, ni même un espace topologique séparé.

Il existe des critères qui permettent pourtant de savoir si l'action considérée donnera un « bon » espace quotient. Nous dirons que l'action d'un groupe  $G$  sur une variété topologique  $M$  est **proprement discontinue** si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- Si  $x, x' \in M$  sont deux points non reliés par l'action de  $G$  (c'est à dire si  $x'$  n'est pas dans l'orbite de  $x$ ), alors  $x$  et  $x'$  admettent des voisinages respectifs  $U$  et  $U'$  tels que  $\phi_g(U) \cap U' = \emptyset$  pour tout  $g \in G$ ;
- Pour tout  $x \in M$ , le groupe d'isotropie  $G_x = \{g \in G \mid \phi_g(x) = x\}$  de  $x$  est fini;
- Tout  $x \in M$  admet un voisinage  $U$  stable par  $G_x$  tel que  $\phi_g(U) \cap U = \emptyset$  pour tout  $g \in G$  non élément de  $G_x$ .

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant que nous ne démontrerons pas : si  $G$  a une action proprement discontinue et libre sur une variété topologique  $M$ , alors l'espace quotient  $M/G$  admet une structure de variété topologique telle que la projection  $\pi : M \rightarrow M/G$  soit continue. Dans ce cas, il est facile de montrer que  $\pi : M \rightarrow M/G$  est un revêtement.

On a le même énoncé si on remplace « topologique » par « différentiable », et « continue » par « différentiable ».

On remarquera que dans la définition même d'une action proprement discontinue, la première condition implique que  $M/G$  soit un espace topologique séparé. Si l'action est libre, alors la seconde condition est trivialement satisfaite.

Soit maintenant  $G$  un groupe topologique qui agit continûment sur une variété topologique  $M$ . Alors on peut donner à l'ensemble des orbites  $M/G$  la topologie induite par la projection  $\pi : M \rightarrow M/G$ , où les ouverts de  $M/G$  sont par définition les parties  $U$  telles que  $\pi^{-1}(U)$  soit ouvert dans  $M$ . Cela fait de  $\pi$  une application continue. Pour que  $M/G$

soit séparé pour cette topologie, il faut et il suffit que dans  $M \times M$ , l'ensemble des couples  $(x, y)$  appartenant à une même orbite soit fermé. Si cette condition est remplie, alors  $M/G$  devient du coup une variété topologique.

Plaçons nous dans le cas où  $G$  est un groupe de Lie agissant différemmentiellement sur une variété différentiable  $M$ . Si la variété  $M/G$  existe au sens précédent, et si l'action est libre, alors  $(M, M/G, \pi)$  est un fibré principal (voir Chapitre 3 pour la définition de fibré principal).

Il est difficile d'utiliser le critère donné précédemment pour savoir si  $M/G$  existe. On a à notre disposition un résultat plus utile en pratique : si  $G$  est un groupe de Lie *compact* qui agit différemmentiellement et librement sur une variété différentiable  $M$ , alors  $(M, M/G, \pi)$  est un fibré principal.

### Espaces homogènes

Un **espace homogène** d'un groupe de Lie  $G$  est une variété différentiable  $M$  munie d'une action à gauche transitive (et différentiable) de  $G$ .

Dans ce cas, si  $x \in M$ , alors  $G_x$ , le sous-groupe d'isotropie de  $x$ , est fermé, et l'application  $f_x : G/G_x \rightarrow M$  définie par  $f_x(gG_x) = g \cdot x$  est un difféomorphisme. En d'autres termes, un espace homogène est l'espace quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé.

Il existe de nombreuses variétés différentiables qui sont des espaces homogènes, en particulier les sphères :

- Le groupe  $SO(n)$  agit transitivement sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Le groupe d'isotropie d'un point de la sphère est  $SO(n-1)$ . Donc

$$SO(n)/SO(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

On peut montrer que cela fait de  $SO(n)$  un fibré principal de groupe de structure  $SO(n-1)$  et de base  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

- Le groupe  $U(n)$  agit transitivement sur  $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  et on a

$$U(n)/U(n-1) \simeq \mathbb{S}^{2n-1}$$

## 2.3. Représentations de groupes

*Références* : [8], [10], [21], [22], [24], [25], [28].

La notion de représentation de groupe est un élément essentiel de la théorie des groupes. Nous n'en abordons ici qu'une petite partie.

### 2.3.1. Généralités sur les représentations

#### Représentations de groupes

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $G$  un groupe quelconque. Une **représentation** de  $G$  sur l'espace vectoriel  $V$  est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

où nous notons  $GL(V)$  le groupe des endomorphismes inversibles de  $V$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  fait bouger les éléments de  $V$  à travers une application *linéaire* inversible. *A priori*,  $\rho$  n'est ni injective ni surjective, donc en général  $\rho(G)$  est plus petit que  $GL(V)$ . Nous dirons que  $\rho$  est une **représentation fidèle** si  $\rho$  est injective.

Il faut maintenant remarquer que  $GL(V)$  est un groupe de Lie, car isomorphe à un groupe matriciel, puisque  $V$  est de dimension finie. En particulier, c'est un groupe topologique. Ceci nous amène aux définitions suivantes. Soit  $G$  un groupe topologique. Une **représentation du groupe topologique**  $G$  sur l'espace vectoriel  $V$  est un homomorphisme de groupes topologiques

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

Si maintenant  $G$  est un groupe de Lie, alors naturellement, une **représentation du groupe de Lie**  $G$  sur l'espace vectoriel  $V$  est un homomorphisme de groupes de Lie

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

Nous pouvons voir aussi une représentation d'un groupe  $G$  sur un espace vectoriel  $V$  comme une action de  $G$  sur  $V$ . Cette action est un peu particulière puisque  $G$  agit à travers  $GL(V) \subset \text{Aut}(V)$ .

#### Action avec point fixe

Soit  $G$  un groupe de Lie, et  $\phi$  une action de  $G$  sur une variété différentiable  $M$ . Si  $x$  est un point fixe de l'action de  $G$  sur  $M$  (c'est à dire  $\phi(g, x) = x$  pour tout  $g \in G$ ), alors

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(T_x M) \\ g &\mapsto T_x \phi_g \end{aligned}$$

est une représentation de  $G$ . Il est aisé de vérifier que  $T_x \phi_g : T_x M \rightarrow T_x M$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Nous donnerons le nom de **théorème du point fixe** à ce résultat. Cette représentation particulière est la linéarisée de l'action  $\phi$ .

#### Décomposition sur une base

Si  $\{e_i\}$  est une base de  $V$ , tout vecteur  $v \in V$  se décompose en  $v = v^i e_i$  sur cette base, et tout élément  $A \in GL(V)$  se représente par une matrice inversible  $(A_j^i)$ , où  $Av = A_j^i v^j e_i$ .

Pour  $g \in G$  un groupe quelconque,  $\rho(g)$  est donc une matrice inversible  $(\rho(g)_j^i)$ . Le fait que  $\rho$  soit une représentation implique que pour tous  $g, g' \in G$ ,

$$\rho(gg')_j^i = \rho(g)_k^i \rho(g')_j^k$$

et

$$\rho(g^{-1})_j^i = (\rho(g)^{-1})_j^i$$

Si  $G$  est un groupe topologique, alors  $g \mapsto \rho(g)_j^i$  est une fonction continue sur  $G$ , et si  $G$  est un groupe de Lie, cette fonction est différentiable.

### Dimension infinie

Dans le cas où l'on souhaite une représentation d'un groupe topologique sur un espace vectoriel de dimension infinie, il faut une condition supplémentaire sur l'espace vectoriel  $V$ . En effet, dans le cas de la dimension finie,  $GL(V)$  est un espace topologique, puisque  $V$  est lui-même un espace vectoriel topologique ( $v_1, v_2 \mapsto v_1 + v_2$  et  $\alpha, v \mapsto \alpha v$  sont des applications continues pour une topologie donnée par une norme sur  $V$ ). En dimension infinie, nous imposons que  $V$  soit un espace vectoriel topologique, et nous définissons une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  comme un homomorphisme de groupes tel que  $(g, v) \mapsto \rho(g)v$  soit une application continue de  $G \times V$  dans  $V$ .

### Représentation contragrédiente

Soit  $G$  un groupe quelconque. Si  $V^*$  est l'espace vectoriel dual de  $V$ , de base  $\{e^i\}$ , à toute représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$ , il est possible d'associer une représentation  $\rho^c$  de  $G$  sur  $V^*$ , appelée **représentation contragrédiente** de  $\rho$ . Pour cela, notons  $\langle v^*, v \rangle \in \mathbb{R}$  le couplage entre un élément  $v^* \in V^*$  et un élément  $v \in V$ .

Pour tous  $g \in G$ ,  $v \in V$  et  $v^* \in V^*$ , nous posons

$$\langle \rho^c(g)v^*, v \rangle = \langle v^*, \rho(g^{-1})v \rangle$$

Grâce à l'utilisation de  $g^{-1}$ ,  $\rho^c$  est une représentation de  $G$  sur  $V^*$ , comme il est facile de le constater.

Si  $v^* = v_i^* e^i$ , alors

$$\begin{aligned} \rho^c(g)v^* &= \rho(g^{-1})_j^i v_i^* e^j \\ &= (\rho(g)^{-1})_j^i v_i^* e^j \end{aligned}$$

### Somme et produit de représentations

Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations d'un groupe quelconque  $G$  sur les espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  respectivement.

Nous définissons la **représentation somme directe**  $\rho_1 \oplus \rho_2$  de  $G$  sur  $V_1 \oplus V_2$  par la formule

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1 + v_2) = \rho_1(g)v_1 + \rho_2(g)v_2$$

Nous définissons la **représentation produit tensoriel**  $\rho_1 \otimes \rho_2$  de  $G$  sur  $V_1 \otimes V_2$  par la formule

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$$

Si  $\{e_i^1\}$  et  $\{e_\alpha^2\}$  sont des bases respectives de  $V_1$  et  $V_2$ , alors dans la base  $\{e_i^1 \otimes e_\alpha^2\}_{i,\alpha}$  de  $V_1 \otimes V_2$ , la matrice de  $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)$  est

$$((\rho_1 \otimes \rho_2)(g))_{j,\beta}^{i,\alpha} = \rho_1(g)_j^i \rho_2(g)_\beta^\alpha$$

Nous disposons de deux façons de construire de nouvelles représentations à partir de représentations données.

Jusqu'à présent, nous avons surtout défini des façons de construire des représentations à partir d'autres représentations. Nous allons maintenant étudier comment réduire une représentation en briques élémentaires.

### Réductibilité et irréductibilité

Soit  $G$  un groupe quelconque et  $\rho$  une représentation de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$ . Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Nous dirons que  $W$  est un **sous-espace invariant** par rapport à la représentation  $\rho$  de  $G$  si pour tout  $g \in G$  et tout  $w \in W$ ,  $\rho(g)w \in W$ , ce que nous noterons encore

$$\rho(G)W \subset W$$

Si  $W$  est un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ , alors

$$\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$$

est une représentation de  $G$ . C'est une **sous-représentation** de  $\rho$ .

Par exemple, les vecteurs invariants  $v \in V$  tels que  $\rho(g)v = v$  pour tout  $g \in G$  forment un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ . De même, les éléments de la forme  $\rho(g)v$  engendrent un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ .

Nous dirons que la représentation  $\rho$  est **réductible** s'il existe au moins un sous-espace vectoriel invariant de  $V$  qui ne soit ni  $\{0\}$  ni  $V$  lui-même. Dans le cas contraire, la représentation sera dite **irréductible**.

Nous verrons que pour beaucoup de groupes, les représentations irréductibles sont les briques élémentaires à partir desquelles les autres représentations sont construites, par sommes directes. Ceci implique de connaître ces représentations irréductibles. Cela nous amène à poser la définition suivante. Nous dirons qu'une représentation est **complètement réductible** si elle se décompose comme somme directe de représentations irréductibles.

La notion d'irréductibilité implique de nombreuses propriétés, comme par exemple le résultat suivant.

Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Soit  $\varphi : V \rightarrow V$  un endomorphisme permutable avec tous les  $\rho(g)$ , c'est à dire

$$\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$$

pour tout  $g \in G$ . Alors  $\varphi$  est de la forme  $\varphi = \lambda \text{Id}$  pour un nombre  $\lambda$ .

En effet, soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$ . Posons  $W = \{v \in V / \varphi(v) = \lambda v\}$ . Comme  $\lambda$  est une valeur propre,  $W \neq \{0\}$ . Pour  $w \in W$ , nous avons  $\varphi(\rho(g)w) = \rho(g)\varphi(w) = \lambda\rho(g)w$ , donc  $\rho(g)w \in W$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi,  $W$  est un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ . Comme  $V$  est irréductible, nous devons avoir  $W = V$  (le cas  $W = \{0\}$  étant exclu). Donc  $\varphi = \lambda \text{Id}$ .

Si  $G$  est un groupe topologique, et  $\rho$  une représentation de  $G$  sur un espace vectoriel topologique  $V$ , alors par définition, un sous-espace vectoriel invariant de  $V$  est un sous-espace vectoriel invariant au sens précédent et fermé (pour la topologie sur  $V$ ).

### Équivalence de représentations

Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations d'un groupe quelconque  $G$  sur les espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  de dimensions finies. Nous dirons que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont **équivalentes** s'il existe un isomorphisme

$$\varphi : V_1 \rightarrow V_2$$

tel que, pour tout  $g \in G$ , nous ayons

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

En particulier,  $V_1$  et  $V_2$  sont de mêmes dimensions, et nous pouvons écrire

$$\rho_2(g) = \varphi \circ \rho_1(g) \circ \varphi^{-1}$$

Si  $\rho_1$  est une représentation irréductible, et si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont équivalentes, alors  $\rho_2$  est aussi une représentation irréductible.

Nous avons alors le résultat suivant, connu sous le nom de **Lemme de Schur**. Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations irréductibles de  $G$  sur les espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$ . Soit  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  une application linéaire telle que

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

pour tout  $g \in G$ . Alors ou bien  $\varphi$  est un isomorphisme et  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont équivalentes, ou bien  $\varphi = 0$ .

Démontrons ce lemme.  $\text{Im } \varphi = \varphi(V_1)$  est un sous-espace vectoriel de  $V_2$ . Pour tout  $v_2 = \varphi(v_1) \in \text{Im } \varphi$ , nous avons  $\rho_2(g)v_2 = \rho_2(g)\varphi(v_1) = \varphi(\rho_1(g)v_1)$ , donc  $\rho_2(g)v_2 \in \text{Im } \varphi$ . Ceci signifie que  $\text{Im } \varphi$  est un sous-espace vectoriel invariant de  $V_2$ . Comme  $V_2$  est irréductible,

ou bien  $\text{Im } \varphi = \{0\}$ , ou bien  $\text{Im } \varphi = V_2$ . Si  $\text{Im } \varphi = \{0\}$ , alors  $\varphi = 0$ . Regardons le cas  $\text{Im } \varphi = V_2$ . Pour tout  $v_1 \in \text{Ker } \varphi$ , nous avons  $\varphi(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)\varphi(v_1) = 0$ , donc  $\rho_1(g)v_1 \in \text{Ker } \varphi$ , c'est à dire encore que  $\text{Ker } \varphi$  est invariant dans  $V_1$ . Comme  $V_1$  est irréductible, ou bien  $\text{Ker } \varphi = V_1$ , et dans ce cas  $V_2 = \text{Im } \varphi = \{0\}$ , ce qui signifie que  $\varphi = 0$ , ou bien  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , et dans ce cas  $\varphi$  est un isomorphisme. Ceci conclut la démonstration.

### Représentations unitaires

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension quelconque, et soit  $(v, w)$  une forme hermitienne sur  $V$ , c'est à dire  $(v, w) \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{(v, w)} = (w, v)$ ,  $(v, v) > 0$  si  $v \neq 0$ ,  $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1(v_1, w) + \alpha_2(v_2, w)$ . Muni de la forme bilinéaire hermitienne  $(\ , \ )$ ,  $V$  est un **espace vectoriel préhilbertien**.

Un endomorphisme  $A : V \rightarrow V$  est dit **unitaire**, si

$$(Av, Aw) = (v, w)$$

pour tous  $v, w \in V$ .

Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , nous notons  $W^\perp$  le sous-espace vectoriel de  $V$  orthogonal à  $W$ ,

$$W^\perp = \{v \in V / (v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$$

Soit  $\rho$  une représentation d'un groupe quelconque  $G$  sur l'espace vectoriel préhilbertien  $V$ . Nous dirons que  $\rho$  est une **représentation unitaire** si, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  est unitaire. Ainsi, pour tout  $g \in G$ , et tous  $v, w \in V$ , nous avons

$$(\rho(g)v, \rho(g)w) = (v, w)$$

ou encore

$$(\rho(g^{-1})v, w) = (v, \rho(g)w)$$

Si  $W \subset V$  est un sous-espace vectoriel invariant, alors il est facile de vérifier que  $W^\perp$  est lui aussi un sous-espace vectoriel invariant.

Si  $(\rho(g)_j^i)$  est la matrice de la représentation unitaire  $\rho$  dans une base unitaire de  $V$ , alors cette matrice est unitaire (au sens des matrices :  $U^\dagger = U^{-1}$ ).

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ , et  $P$  un projecteur orthogonal de  $V$  sur  $W$ . Alors il est possible de montrer que  $P$  permute avec les  $\rho(g)$ , pour tout  $g \in G$ . Ceci conduit au résultat suivant : une représentation unitaire  $\rho$  d'un groupe  $G$  sur un espace préhilbertien  $V$  est irréductible si et seulement si tout endomorphisme  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  permutable avec les  $\rho(g)$  est un multiple de l'identité ( $\varphi = \lambda \text{Id}$ ).

Soient maintenant  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations unitaires de  $G$  sur les espaces vectoriels préhilbertiens  $V_1$  et  $V_2$ . Nous dirons que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont **unitairement équivalentes** s'il existe un isomorphisme

$$\varphi : V_1 \rightarrow V_2$$

tel que

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

pour tout  $g \in G$ , et

$$(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$$

pour tous  $v, w \in V_1$ . Ainsi,  $\varphi$  est une isométrie entre  $V_1$  et  $V_2$ .

Nous pouvons maintenant énoncer deux résultats :

- Si deux représentations unitaires sont équivalentes, alors elles sont unitairement équivalentes.
- Si une représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire, alors elle est complètement réductible. En particulier, toute représentation unitaire de dimension finie est complètement réductible.

Nous allons montrer ce deuxième résultat. Soit  $\rho$  une représentation de dimension finie sur un espace vectoriel  $V$ , équivalente à une représentation unitaire. Si la représentation unitaire est complètement réductible, alors il est immédiat que  $\rho$  l'est aussi. Il nous faut donc démontrer que toute représentation unitaire  $\rho$  de dimension finie est complètement réductible. Si  $\rho$  est irréductible, alors il n'y a plus rien à prouver. Sinon, il existe un sous-espace vectoriel invariant  $W_1 \subset V$ ,  $W_1 \neq \{0\}$  et  $W_1 \neq V$ . Considérons la restriction de  $\rho$  à  $W_1$ . C'est une représentation de  $G$ . Si elle est irréductible, posons  $V_1 = W_1$ . Sinon, il existe  $W_2 \subset W_1$  invariant par  $\rho$ ,  $W_2 \neq \{0\}$  et  $W_2 \neq W_1$ . Nous voyons que par itération, en un nombre fini d'étapes, car  $\dim V < +\infty$  et les dimensions décroissent strictement à chaque étape, nous arrivons à  $W_n \subset V$ , invariant par  $\rho$ , et  $\rho$  restreint à  $W_n$  est irréductible. Posons  $V_1 = W_n$ . Donc nous avons un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ , sur lequel la restriction de  $\rho$  est irréductible. Comme  $V_1 \neq V$ , nous avons  $V_1^\perp \neq \{0\}$ , et comme  $V_1 \neq \{0\}$ , nous avons  $V_1^\perp \neq V$ . Remarquons que  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ . Reprenons alors le début du raisonnement sur  $V_1^\perp$  : si  $\rho$  restreinte à  $V_1^\perp$  est irréductible, alors il n'y a plus rien à prouver, sinon il existe  $V_2 \subset V_1^\perp$ ,  $V_2 \neq \{0\}$ ,  $V_2 \neq V_1^\perp$  et  $\rho$  restreinte à  $V_2$  est une représentation irréductible. Alors  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_2^\perp$  où l'orthogonalité se fait dans  $V_1^\perp$ . En un nombre fini d'étapes, nous décomposons ainsi  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  où sur chaque  $V_i$   $\rho$  est irréductible.

### Caractère d'une représentation

Soit  $\rho$  une représentation d'un groupe quelconque  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Le **caractère** de la représentation  $\rho$  est la fonction

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$$

(ou à valeurs dans  $\mathbb{C}$  si  $V$  est un espace vectoriel complexe) définie par

$$\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g))$$

où la trace s'effectue sur l'espace vectoriel  $V$ , de dimension finie.

Il est alors aisé de montrer que nous avons les résultats suivants :

- Les caractères de représentations équivalentes coïncident ;

- Un caractère est constant sur chaque classe d'éléments conjugués de  $G$ , c'est à dire  $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$  ;
- Si la représentation est unitaire,  $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$  ;
- Le caractère d'une somme directe d'un nombre fini de représentations est la somme des caractères de ces représentations ;
- Le caractère d'un produit tensoriel d'un nombre fini de représentations est le produit des caractères de ces représentations ;
- Si  $G$  est un groupe topologique, alors un caractère de  $G$  est une fonction continue ;
- Si  $G$  est un groupe de Lie, un caractère est une fonction différentiable.

### 2.3.2. Représentations de groupes finis

Soit  $G$  un groupe fini. Nous allons donner quelques résultats sur les représentations de dimensions finies de ce groupe. Nous supposons que les représentations se font sur des espaces vectoriels complexes. Si tel n'est pas le cas, il suffit de complexifier l'espace vectoriel.

#### Moyenne invariante

Soit  $N$  le nombre d'éléments du groupe fini  $G$ . Une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  est donc donnée par  $N$  nombres  $(f(g))_{g \in G}$ .

La description des représentations d'un groupe fini va utiliser ce qu'on appelle la **moyenne invariante sur le groupe**, définie comme suit. Pour toute fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , nous posons

$$M(f) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f(g)$$

Cette moyenne a alors la propriété suivante : pour tout  $h \in G$ , si  $f^h$  désigne la fonction translatée à gauche de  $f$ ,  $f^h(g) = f(hg)$ , et si  $f_h$  désigne la fonction translatée à droite de  $f$ ,  $f_h(g) = f(gh)$ , alors

$$M(f^h) = M(f_h) = M(f)$$

Il est clair que cette moyenne est linéaire en  $f$ . C'est une intégration sur le groupe.

#### Réductibilité complète

Nous allons montrer le résultat suivant :

Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.

Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation de dimension finie de  $G$ . Prenons sur  $V$  un produit scalaire hermitien quelconque,  $(v, w)_1$ , obtenu par exemple en posant, pour une base  $\{e_i\}$  donnée,

$$(v, w)_1 = \sum_i v^i \overline{w^i}$$

où  $v = v^i e_i$  et  $w = w^i e_i$ . Posons alors la forme bilinéaire

$$(v, w) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_1$$

qui est la moyenne invariante de la fonction

$$g \mapsto (\rho(g)v, \rho(g)w)_1$$

Alors  $(\cdot, \cdot)$  définit un produit scalaire hermitien sur  $V$ , comme il est facile de le voir. De plus, il est aisé de montrer, par l'invariance de la moyenne, que

$$(\rho(h)v, \rho(h)w) = (v, w)$$

pour tout  $h \in G$ . Donc  $\rho$  est unitaire pour ce produit scalaire hermitien.

Maintenant, de ce résultat, nous déduisons que toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible, puisque nous savons que toute représentation unitaire de dimension finie est complètement réductible.

Ainsi, pour les groupes finis, la description des représentations de dimensions finies revient à d'une part décrire toutes les représentations irréductibles (les briques élémentaires), et à d'autre part savoir décomposer toute représentation de dimension finie en somme directe de représentations irréductibles.

Il n'y a pas de description générale des représentations irréductibles des groupes finis. Nous pouvons tout au plus donner des informations sur leur nombre. Cependant, si l'ensemble des représentations irréductibles est connu, alors il est possible de décomposer toute représentation de dimension finie en somme directe de ces représentations. Nous ne donnerons pas cette méthode ici, elle est largement détaillée dans divers ouvrages.

### Représentations régulières

Soit  $L^2(G)$  l'espace vectoriel (de dimension  $N$ ) de toutes les fonctions  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Nous définissons sur cet espace vectoriel un produit scalaire hermitien

$$\langle f_1, f_2 \rangle = M(f_1 \overline{f_2}) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

Soit maintenant, pour tout  $h \in G$ , les endomorphismes de  $L^2(G)$  :

$$\begin{aligned} R(h)f(g) &= f(gh) \\ L(h)f(g) &= f(h^{-1}g) \end{aligned}$$

$R$  et  $L$  définissent respectivement la **représentation régulière à droite** de  $G$  sur  $L^2(G)$ , et la **représentation régulière à gauche**. Ces deux représentations sont unitaires pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $L^2(G)$ . Elles sont unitairement équivalentes par l'isomorphisme  $\varphi(f)(g) = f(g^{-1})$ .

### Relations d'orthogonalités

Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie. Comme nous savons que  $\rho$  est équivalente à une représentation unitaire, nous supposons que  $\rho$  est déjà unitaire, pour un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  sur  $V$ . Soient  $\rho(g)_j^i$  les éléments matriciaux de cette représentation dans une base orthonormée de  $V$ . Alors ces éléments matriciaux sont des fonctions de  $L^2(G) : g \mapsto \rho(g)_j^i$ . La représentation  $\rho$  définit donc  $(\dim V)^2$  fonctions de  $L^2(G)$ .

Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux représentations irréductibles de  $G$  sur  $V_1$  et  $V_2$  respectivement. Notons  $\rho_1(g)_j^i$  et  $\rho_2(g)_\beta^\alpha$  les éléments matriciaux sur des bases orthonormées de  $V_1$  et  $V_2$ . Nous allons montrer les **relations d'orthogonalité** dans  $L^2(G)$  :

$$\begin{aligned} \langle \rho_{1j}^i, \rho_{2\beta}^\alpha \rangle &= 0 \text{ si } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ ne sont pas équivalentes} \\ \langle \rho_{1j}^i, \rho_{1\ell}^k \rangle &= \frac{1}{\dim V_1} \delta^{ik} \delta_{j\ell} \end{aligned}$$

Soit  $\varphi : V_2 \rightarrow V_1$  une application linéaire quelconque, et posons

$$\psi(g) = \rho_1(g) \circ \varphi \circ \rho_2(g)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$$

et

$$\phi = M(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \psi(g) : V_2 \rightarrow V_1$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho_1(h) \circ \phi &= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(h) \circ \psi(g) \\ &= \left( \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(hg) \circ \varphi \circ \rho_2(hg)^{-1} \right) \rho_2(h) \\ &= \phi \circ \rho_2(h) \end{aligned}$$

Donc  $\phi$  commute avec les représentations. Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas équivalentes, par le lemme de Schur, nous devons avoir  $\phi = 0$ , c'est à dire

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(g) \circ \varphi \circ \rho_2(g)^{-1} = 0$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varphi : V_2 \rightarrow V_1$ . Dans des bases de  $V_1$  et  $V_2$ , cette égalité s'écrit

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(g)_k^i \varphi_\gamma^k \rho_2(g^{-1})_\alpha^\gamma = 0$$

Prenons alors  $\varphi_\gamma^k = \delta^{kj} \delta_{\beta\gamma}$  pour  $j$  et  $\beta$  fixés. Alors

$$\langle \rho_{1j}^i, \rho_{2\beta}^\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(g)_j^i \rho_2(g^{-1})_\alpha^\beta = 0$$

puisque  $\rho_2(g^{-1})_\alpha^\beta = \overline{\rho_2(g)_\beta^\alpha}$ .

Maintenant, si  $\rho_1 = \rho_2$ , alors nous savons que  $\phi = \lambda \text{Id}$ . Nous remarquons que  $\text{Tr}\varphi = \text{Tr}\phi = \lambda \dim V_1$ , donc

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho_1(g) \circ \varphi \circ \rho_1(g^{-1}) = \frac{1}{\dim V_1} (\text{Tr}\varphi) \text{Id}$$

Pour  $\varphi_n^m = \delta^{mj} \delta_{\ell n}$ , nous avons  $\text{Tr}\varphi = \delta^{\ell j}$ , et ceci conduit à

$$\langle \rho_{1j}^i, \rho_{1\ell}^k \rangle = \frac{1}{\dim V_1} \delta^{ik} \delta_{j\ell}$$

Les relations d'orthogonalité sont ainsi démontrées.

Soient maintenant  $\rho_1, \dots, \rho_m$  des représentations irréductibles de dimensions finies deux à deux inéquivalentes de  $G$ . Notons  $n_1, \dots, n_m$  leurs dimensions. Les éléments matriciaux  $\rho_{\ell j}^i$  ( $\ell = 1, \dots, m$ ) sont donc linéairement indépendants dans  $L^2(G)$ , d'après ce que nous venons de voir. Donc ces fonctions sont en nombre inférieur à  $N$ , la dimension de  $L^2(G)$ , qui est aussi le nombre d'éléments de  $G$ . Ceci conduit alors à  $m \leq N$ . Donc nous avons le résultat suivant :

Le nombre de représentations irréductibles de dimensions finies, deux à deux inéquivalentes, d'un groupe fini est inférieur au nombre d'éléments du groupe.

Une famille  $\rho_1, \dots, \rho_m$  de représentations de dimensions finies du groupe  $G$  est un **système complet de représentations irréductibles** si

- Les représentations  $\rho_1, \dots, \rho_m$  sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes ;
- Toute représentation irréductible du groupe  $G$  est équivalente à une des représentations  $\rho_\ell$ .

Alors les éléments matriciaux  $(\rho_{\ell j}^i)_{\substack{\ell=1, \dots, m \\ i, j=1, \dots, n_\ell}}$  forment une base orthogonale de  $L^2(G)$ .

L'orthogonalité ayant été démontrée, il ne reste à prouver que la complétude de cette famille de fonctions. Soit  $R$  la représentation régulière à droite sur  $L^2(G)$ . Comme c'est une représentation de dimension finie, elle est complètement réductible. Donc  $L^2(G) = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$  où les  $W_i$  sont des sous-espaces vectoriels invariants de  $L^2(G)$ , sur lesquels chaque restriction  $R_i$  de  $R$  est irréductible.  $R_i$  est unitairement équivalente à un  $\rho_\ell$ , posons  $\varphi : \rho_\ell \rightarrow R_i$  cet isomorphisme d'équivalence. Prenons pour base orthonormée de  $R_i$  l'image par  $\varphi$  d'une base orthonormée de  $V_\ell$  (l'espace vectoriel de la représentation  $\rho_\ell$ ) dans laquelle  $\rho_\ell(g)$  a pour matrice  $\rho_\ell(g)_\beta^\alpha$ . Alors il est facile de voir que dans cette base, la matrice de  $R_i(g)$  est

$$R_i(g)_\beta^\alpha = \rho_\ell(g)_\beta^\alpha$$

Notons  $f_1, \dots, f_{n_i}$  cette base de  $W_i$ . Alors

$$R(h)f_\beta(g) = f_\beta(gh) = \rho_\ell(h)_\beta^\alpha f_\alpha(g)$$

Avec  $g = e$  et  $c_\alpha = f_\alpha(e)$ , nous avons

$$f_\beta(h) = c_\alpha \rho_\ell(h)_\beta^\alpha$$

Chaque fonction  $f_\beta$  est donc une combinaison linéaire des fonctions  $\rho_\ell^\alpha$ . Comme  $L^2(G) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_p$ , tout élément de  $L^2(G)$  s'écrit comme combinaison linéaire des  $(\rho_\ell^\alpha)_{\substack{\ell=1,\dots,m \\ \alpha,\beta=1,\dots,n_\ell}}$ . C'est à dire que ces fonctions forment une famille génératrice de  $L^2(G)$ . La liberté de cette famille étant une conséquence de son orthogonalité, c'est une base orthonormée de  $L^2(G)$ .

Ce résultat implique alors le **Théorème de Burnside** : Le nombre d'éléments d'un groupe fini est égal à la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un système complet de représentations de ce groupe :

$$N = n_1^2 + \cdots + n_m^2$$

En effet, chaque représentation irréductible d'un système complet contribue à  $n_\ell^2$  fonctions indépendantes dans  $L^2(G)$ .

### Décomposition d'une représentation régulière

La représentation régulière à droite de  $G$  se décompose en représentations irréductibles et toutes les représentations irréductibles  $\rho_\ell$  de  $G$  apparaissent exactement  $n_\ell$  fois (multiplicité  $n_\ell$ ),  $n_\ell$  étant la dimension de la représentation  $\rho_\ell$ . Ainsi, la représentation régulière à droite (et donc aussi à gauche) contient toutes les représentations irréductibles du groupe.

Démontrons ce résultat. Posons  $W_\ell^\alpha$  le sous-espace vectoriel de  $L^2(G)$  engendré par la famille de fonctions  $(\rho_\ell^\alpha)_{\beta=1,\dots,n_\ell}$ . De

$$R(h)\rho_\ell(g)_\beta^\alpha = \rho_\ell(gh)_\beta^\alpha = \rho_\ell(g)_\gamma^\alpha \rho_\ell(h)_\beta^\gamma = \rho_\ell(h)_\beta^\gamma \rho_\ell(g)_\gamma^\alpha$$

nous concluons que

$$R(G)W_\ell^\alpha \subset W_\ell^\alpha$$

Notons  $R_\ell^\alpha$  la restriction de  $R$  à  $W_\ell^\alpha$  et posons  $e_{\ell\beta}^\alpha = \sqrt{n_\ell} \rho_\ell^\alpha$ . Alors

$$R_\ell^\alpha(h)e_{\ell\beta}^\alpha = R(h)e_{\ell\beta}^\alpha = \rho_\ell(h)_\beta^\gamma e_{\ell\gamma}^\alpha$$

Ainsi, dans la base orthonormée  $\{e_{\ell\beta}^\alpha\}_{\beta=1,\dots,n_\ell}$ ,  $R_\ell^\alpha(h)$  a pour matrice  $\rho_\ell(h)_\beta^\gamma$ . Il est facile de voir que ceci signifie que  $R_\ell^\alpha$  et  $\rho_\ell$  sont unitairement équivalentes par l'isomorphisme  $\varphi : W_\ell^\alpha \rightarrow V_\ell$  qui envoie la base  $(e_{\ell\beta}^\alpha)_{\beta=1,\dots,n_\ell}$  sur la base de  $V_\ell$  dans laquelle  $\rho_\ell$  a les éléments matriciaux ci-dessus.

Nous avons vu que  $L^2(G)$  avait pour base  $\{\rho_\ell^\alpha\}_{\substack{\ell=1,\dots,m \\ \alpha,\beta=1,\dots,n_\ell}}$ , donc nous avons

$$L^2(G) = \bigoplus_{\ell=1}^m \bigoplus_{\alpha=1}^{n_\ell} W_\ell^\alpha$$

Comme nous venons de démontrer que  $R$  restreinte à  $W_\ell^\alpha$  était équivalente à  $\rho_\ell$ , ceci signifie que chaque représentations irréductible  $\rho_\ell$  apparaît exactement  $n_\ell$  fois dans la représentation régulière à droite  $R$  sur  $L^2(G)$ .

### Caractères

Posons  $\chi_1, \dots, \chi_m$  les caractères des représentations d'un système complet de représentations irréductibles de  $G$ . Ces caractères sont des éléments de  $L^2(G)$ . Nous avons les **relations d'orthogonalité pour les caractères** :

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$$

C'est une conséquence immédiate des relations d'orthogonalité sur les éléments de matrices. Les fonctions  $\chi_\ell$  sont donc linéairement indépendantes.

Toute représentation  $\rho$  de dimension finie de  $G$  se décompose selon

$$\rho = r_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus r_m \rho_m$$

où chaque entier  $r_\ell$  est le nombre de fois que la représentation irréductible  $\rho_\ell$  apparaît dans  $\rho$  (multiplicité de  $\rho_\ell$  dans  $\rho$ ). Si  $\chi$  est le caractère de  $\rho$ , alors

$$\chi = r_1 \chi_1 + \dots + r_m \chi_m$$

d'où

$$\langle \chi, \chi_\ell \rangle = r_\ell$$

par orthogonalité des  $\chi_\ell$ . Ainsi, à partir des caractères d'un système complet de représentations irréductibles de  $G$ , il est possible de savoir quelles représentations irréductibles apparaissent dans la décomposition d'une représentation donnée, et avec quelle multiplicité. Il est facile de voir que nous avons

$$\langle \chi, \chi \rangle = r_1^2 + \dots + r_m^2$$

Donc, si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ , alors un seul  $r_\ell$  vaut 1 et les autres sont nuls, c'est à dire que  $\rho$  est irréductible si et seulement si  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ .

Maintenant, il est aisé de voir que si deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$  ont mêmes caractères, alors elles sont équivalentes.

Nous savons que les caractères sont des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de  $G$ . Notons  $\mathcal{C}(G)$  l'espace vectoriel des fonctions de  $L^2(G)$  qui sont constantes sur les classes de conjugaison de  $G$ , ce sont les **fonctions centrales sur  $G$**  :  $f \in \mathcal{C}(G) \iff f(hgh^{-1}) = f(g)$  pour tous  $g, h \in G$ .

Alors les caractères  $(\chi_\ell)$  forment une base de  $\mathcal{C}(G)$ .

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Une conséquence importante de ce résultat est la suivante :  $\mathcal{C}(G)$  a pour dimension le nombre de classes d'équivalence pour la conjugaison dans  $G$ . Donc, comme la base  $(\chi_\ell)$  est formée de  $m$  éléments, qui est le nombre de représentations irréductibles de dimensions finies de  $G$  deux à deux inéquivalentes, nous savons que le nombre de représentations dans un système complet de représentations irréductibles de  $G$  est égal au nombre de classes d'équivalence dans  $G$  pour la conjugaison.

### 2.3.3. Représentations de groupes compacts

#### Définition

Un groupe topologique  $G$  est dit **compact** s'il est compact en tant qu'espace topologique. Par exemples, tout groupe fini muni de la topologie discrète est compact. Les groupes  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$  sont compacts.

En mathématiques, il est souvent constaté qu'un espace compact se comporte comme un ensemble fini. Nous allons voir qu'en ce qui concerne les représentations, les groupes compacts en sont une illustration. Ceci nous conduit à suivre le même plan d'exposition que dans le cas des groupes finis.

#### Mesure invariante et moyenne invariante

Dans l'étude des représentations des groupes finis, nous avons utilisé de façon indispensable la moyenne invariante sur le groupe. Une moyenne analogue peut être construite sur les groupes compacts, mais au lieu d'être une somme finie, ce sera une intégrale sur le groupe

$$M(f) = \int_G f(g) d\mu(g)$$

pour une certaine mesure  $\mu$  sur le groupe. On peut montrer qu'il existe une mesure, appelée **mesure de Haar**, sur tout groupe compact  $G$ , que nous notons  $\mu$ , telle que

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \int_G f(gh) d\mu(g) = \int_G f(hg) d\mu(g)$$

pour tout  $h \in G$ , c'est à dire que cette mesure est **invariante par translation** à droite et à gauche, et telle que

$$\int_G d\mu(g) = 1$$

c'est à dire que cette mesure est normalisée, de masse totale 1. Cette mesure est unique.

À partir de l'existence de cette mesure, il est possible de reprendre points par points les raisonnements qui nous ont permis d'étudier les représentations des groupes finis.

La **moyenne invariante sur le groupe**  $G$  d'une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  est  $M(f)$ , donnée ci-dessus pour la mesure de Haar. Cette moyenne vérifie  $M(f_h) = M(f^h) = M(f)$  comme pour les groupes finis.

#### Réductibilité complète

Soit  $\rho$  une représentation (continue, comme toutes les représentations que nous prendrons ici) de  $G$  sur un espace préhilbertien. Alors cette représentation est équivalente à une représentation unitaire.

La démonstration est essentiellement la même que pour les groupe finis. Il suffit de poser

$$(v, w) = \int_G (\rho(g)v, \rho(g)w)_1 d\mu(g)$$

pour n'importe quel produit scalaire hermitien  $(\cdot, \cdot)_1$  sur l'espace vectoriel préhilbertien de la représentation. Alors  $\rho$  est unitaire pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ .

Ici, nous avons un résultat supplémentaire. Si  $V$ , l'espace vectoriel de la représentation, est un espace de Hilbert pour  $(\cdot, \cdot)_1$ , alors  $(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot, \cdot)_1$  sont des produits scalaires équivalents.

De ce que nous savons sur les représentations unitaires de dimensions finies, nous concluons que toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.

### Représentation régulière

Soit  $L^2(G)$  l'espace vectoriel des fonctions mesurables  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$$

et où nous identifions les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle : si  $U = \{g \in G / f_1(g) \neq f_2(g)\}$  est tel que

$$\mu(U) = \int_U d\mu(g) = 0$$

alors nous identifions  $f_1$  et  $f_2$ . Nous définissons un produit scalaire sur  $L^2(G)$  :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G f_1(g) \overline{f_2(g)} d\mu(g)$$

Alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme hermitienne définie positive sur  $L^2(G)$ . Il est possible de montrer que  $L^2(G)$  muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Soient alors les représentations unitaires, unitairement équivalentes

$$\begin{aligned} R(h)f(g) &= f(gh) \\ L(h)f(g) &= f(h^{-1}g) \end{aligned}$$

Ce sont les représentations **régulières à droite et à gauche** de  $G$  sur  $L^2(G)$ .

### Relations d'orthogonalité

Soient  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$  un ensemble de représentations unitaires continues irréductibles de dimensions finies, deux à deux inéquivalentes, de  $G$ . L'ensemble  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$  est **complet** si toute représentation irréductible continue de dimension finie de  $G$  est équivalente à l'une de ces représentations.

Nous supposons que cet ensemble est complet. Nous notons  $n_\alpha$  les dimensions de ces représentations. Les éléments matriciaux de ces représentations dans des bases orthonormées,  $\rho_\alpha(g)_j^i$  définissent des fonctions de  $L^2(G)$ , et nous avons

$$\langle \rho_{\alpha j}^i, \rho_{\beta \ell}^k \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta^{ik} \delta_{j\ell}$$

Ce sont les **relations d'orthogonalité des éléments matriciaux**.

Posons  $e_{\alpha j}^i = \sqrt{n_\alpha} \rho_{\alpha j}^i$ . Alors les  $e_{\alpha j}^i$  forment une base hilbertienne orthonormée de  $L^2(G)$ .

Nous ne démontrerons pas ce résultat, plus laborieux à obtenir que dans le cas des groupes finis.

Toute fonction  $f \in L^2(G)$  s'écrit alors

$$f = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} \langle f, e_{\alpha j}^i \rangle e_{\alpha j}^i$$

où la série converge dans  $L^2(G)$ . C'est une **décomposition de Fourier** de  $f$ . On a alors

$$\langle f, f \rangle = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{n_\alpha} n_\alpha |\langle f, \rho_{\alpha j}^i \rangle|^2$$

C'est le **formule de Plancherel**. La décomposition de Fourier habituelle se fait pour le groupe compact  $\mathbb{S}^1$  des complexes de la forme  $e^{i\varphi}$  pour  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

### Décomposition de la représentation régulière

Notons  $H^\alpha$  le sous-espace vectoriel de dimension finie de  $L^2(G)$  engendré par les fonctions  $(\rho_{\alpha j}^i)_{i,j=1,\dots,n_\alpha}$ . Alors

$$L^2(G) = \bigoplus_{\alpha \in A} H^\alpha$$

Chaque espace  $H^\alpha$  est invariant par la représentation régulière à droite sur  $L^2(G)$ . La restriction de la représentation régulière à droite à  $H^\alpha$  est multiple de la représentation  $\rho_\alpha$ , de multiplicité  $n_\alpha$ .

Ce résultat peut se démontrer d'une façon tout à fait analogue au résultat équivalent sur les groupes finis.

### Caractères

Les caractères  $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$  des représentations irréductibles  $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$  vérifient les **relations d'orthogonalité des caractères** :

$$\langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle = \int_G \chi_\alpha(g) \overline{\chi_\beta(g)} d\mu(g) = \delta_{\alpha\beta}$$

Toute représentation unitaire continue de dimension finie  $\rho$  se décompose selon

$$\rho = r_1\rho_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus r_p\rho_{\alpha_p}$$

Le caractère  $\chi$  de  $\rho$  vaut alors

$$\chi = r_1\chi_{\alpha_1} + \cdots + r_p\chi_{\alpha_p}$$

et nous avons

$$\langle \chi, \chi_{\alpha_i} \rangle = r_i$$

Comme pour les groupes finis, les caractères donnent accès à la multiplicité des représentations irréductibles dans une représentation de dimension finie. Alors, deux représentations unitaires continues de dimension finies sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes caractères. Enfin, une représentation unitaire continue  $\rho$  de dimension finie est irréductible si et seulement si son caractère vérifie

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1$$

## 2.4. Développements sur les algèbres de Lie

*Références* : [2], [21], [22], [23], [24], [28].

### 2.4.1. Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

#### Algèbre de Lie d'une algèbre associative

Commençons par quelques rappels d'algèbre. On dira que  $\mathcal{A}$  est une **algèbre associative unitaire** si :

- $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel ;
- $\mathcal{A}$  est munie d'un produit distributif par rapport à l'addition

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$  si c'est une algèbre complexe)  $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$  et qui vérifie la formule d'associativité  $(ab)c = a(bc)$  pour tous  $a, b, c \in \mathcal{A}$  ;

- $\mathcal{A}$  admet un élément unité  $\mathbb{1}$  tel que  $\mathbb{1}a = a\mathbb{1} = a$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$ .

Nous pouvons alors munir  $\mathcal{A}$  d'une structure d'algèbre de Lie en définissant le crochet comme le commutateur :

$$[a, b] = ab - ba$$

On démontre très facilement, en utilisant l'associativité, que ce crochet vérifie l'identité de Jacobi. Nous noterons  $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$  cette algèbre de Lie, c'est à dire l'espace vectoriel sous-jacent à  $\mathcal{A}$  muni de ce crochet.

Comme exemple d'une telle algèbre, nous avons bien sûr  $\mathcal{A} = M(n, \mathbb{R})$ , à laquelle nous avons déjà donné cette structure d'algèbre de Lie.

### Algèbre enveloppante

Nous voyons donc que nous avons une « flèche » qui associe à toute algèbre associative  $\mathcal{A}$  une algèbre de Lie  $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ . Ce que nous allons construire est une flèche dans l'autre sens : associer à toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  une algèbre associative, que nous noterons  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et que nous appellerons **algèbre enveloppante universelle** de  $\mathfrak{g}$ , telle que  $\mathfrak{g}$  soit une sous algèbre de Lie de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\text{Lie}}$ .

Pour cela, considérons l'espace vectoriel

$$\mathcal{T}\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus \underbrace{(\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g})}_{p \text{ fois}} \oplus \cdots$$

somme directe infinie des espaces vectoriels produits tensoriels

$$\mathcal{T}^p \mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{p \text{ fois}}$$

avec  $\mathcal{T}^0 \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$  est une algèbre associative pour le produit tensoriel :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^p \mathfrak{g} \times \mathcal{T}^q \mathfrak{g} &\rightarrow \mathcal{T}^{p+q} \mathfrak{g} \\ (a_1 \otimes \cdots \otimes a_p, b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) &\mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \end{aligned}$$

C'est l'**algèbre tensorielle** associée à l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ . Cette construction est en effet valable pour tout espace vectoriel puisque nous n'avons pas utilisé la structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

Considérons alors dans  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$  l'espace vectoriel  $\mathcal{I}$  engendré par les éléments de la forme

$$T_1 \otimes \underbrace{(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y])}_{\in \mathfrak{g} \oplus \mathcal{T}^2 \mathfrak{g}} \otimes T_2$$

pour tous  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}\mathfrak{g}$  et  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Par construction,  $\mathcal{I}$  est un idéal dans  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ , c'est à dire :

$$\forall I \in \mathcal{I}, \quad \forall T \in \mathcal{T}\mathfrak{g}, \quad I \otimes T \in \mathcal{I} \quad \text{et} \quad T \otimes I \in \mathcal{I}$$

Posons  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}\mathfrak{g}/\mathcal{I}$  l'espace vectoriel quotient de  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$  par  $\mathcal{I}$ . Par définition,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$  pour la relation

$$T_1 \sim T_2 \iff T_1 - T_2 \in \mathcal{I}$$

C'est alors un exercice facile de montrer que  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est une algèbre associative, en utilisant le fait que  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ . Si  $U_1$  est la classe de l'élément  $T_1 \in \mathcal{T}\mathfrak{g}$ , ce que nous noterons  $U_1 = (T_1)$ , et si  $U_2 = (T_2)$ , alors nous notons  $U_1 U_2$  leur produit dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , défini par  $U_1 U_2 = (T_1 \otimes T_2)$ .

Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}$  et  $\mathfrak{g}$  sont inclus dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  sans aucune modification (l'inclusion est une injection). La classe de  $X \in \mathfrak{g}$  est l'ensemble des éléments  $X + I$  avec  $I \in \mathcal{I}$ . Nous identifions  $X$  à  $(X)$ . De même pour  $\mathbb{R}$ , nous identifions  $\lambda \in \mathbb{R}$  à  $(\lambda) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Puisque  $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \in \mathcal{I}$ , son image dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est nulle. Or, cette image vaut  $XY - YX - [X, Y]$ . Donc, dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , nous avons

$$XY - YX = [X, Y]$$

Ceci signifie que la structure d'algèbre de Lie donnée par le commutateur sur l'algèbre associative  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  se restreint sur  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  à la structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . L'inclusion  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\text{Lie}}$  est donc un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Nous pouvons voir l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  d'une autre façon. En effet,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est l'ensemble des sommes finies de produits symboliques (distributif par rapport à l'addition)  $\lambda X_1 X_2 \dots X_p$ , avec  $X_i \in \mathfrak{g}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $p$  entier (pour  $p = 0$ , il ne reste que  $\lambda$ ), où nous devons identifier dans ces sommes  $X_i X_j - X_j X_i$  à  $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}$ . Tout ce qui vient d'être dit sur l'inclusion  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{\text{Lie}}$  est alors immédiat.

La propriété la plus intéressante de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est la suivante. Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative unitaire. Si  $\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{Lie}}$  est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors il existe un homomorphisme d'algèbres associatives  $\xi' : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $\xi'_{|\mathfrak{g}} = \xi$ .

Ceci est facile à démontrer : pour  $X_1 \dots X_p \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  comme ci-dessus, posons

$$\xi'(X_1 \dots X_p) = \xi(X_1) \dots \xi(X_p) \in \mathcal{A},$$

et pour  $p = 0$ , posons  $\xi'(\lambda) = \lambda \mathbb{1} \in \mathcal{A}$ . Alors nous avons toutes les propriétés requises.

La propriété de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  énoncée ci-dessus s'appelle la **propriété universelle**. C'est pour cette propriété (qui la rend unique, à un isomorphisme près, pour  $\mathfrak{g}$  donnée) qu'on l'appelle algèbre enveloppante universelle.

Soit  $\{E_k\}$  une base ordonnée de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $I = (k_1, \dots, k_p)$  une suite d'indices, on note  $E_I$  l'élément  $E_I = E_{k_1} \dots E_{k_p}$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . On dira que la suite  $I$  est croissante si  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$ . Si  $I$  est vide, on pose  $E_I = \mathbb{1}$ . Alors les éléments  $E_I$ , pour  $I$  parcourant toutes les suites croissantes, forment une base de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . C'est le **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt**.

D'un point de vue plus géométrique, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$  est isomorphe, en tant qu'algèbre associative, à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur  $G$ .

## 2.4.2. Dualité sur une algèbre de Lie

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie  $n$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel, il admet un espace vectoriel dual, que nous notons  $\mathfrak{g}^*$ . Le fait que  $\mathfrak{g}$  soit en plus muni d'un crochet de Lie implique une structure sur  $\mathfrak{g}^*$ , duale du crochet. Nous allons étudier cette structure.

### Algèbre extérieure du dual

Nous rappelons que  $\mathfrak{g}^*$  est l'ensemble des formes linéaires  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , nous définissons

$$\alpha \wedge \beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

(c'est une antisymétrisation de  $\alpha \otimes \beta$ ).  $\alpha \wedge \beta$  est une forme bilinéaire antisymétrique sur  $\mathfrak{g}$ . Nous posons  $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$  l'espace vectoriel de ces formes bilinéaires antisymétriques sur  $\mathfrak{g}$ . De même, nous posons  $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$  l'espace vectoriel des formes  $p$ -linéaires antisymétriques sur  $\mathfrak{g}$ . Pour  $p = 1$ , nous avons  $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$  et pour  $p = 0$  nous prenons  $\bigwedge^0 \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}$ . Enfin, nous définissons

$$\bigwedge \mathfrak{g}^* = \bigwedge^0 \mathfrak{g}^* \oplus \bigwedge^1 \mathfrak{g}^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n \mathfrak{g}^*$$

( $\bigwedge^p \mathfrak{g}^* = \{0\}$  pour  $p > n$ ).  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  est une algèbre pour le produit

$$\begin{aligned} \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \times \bigwedge^q \mathfrak{g}^* &\rightarrow \bigwedge^{p+q} \mathfrak{g}^* \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

avec

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \beta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$$

pour tous  $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{g}$ . Ce produit est le prolongement de

$$\wedge : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$$

défini auparavant.  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  est l'**algèbre extérieure** sur  $\mathfrak{g}^*$  définie en 1.2.1. C'est une algèbre graduée commutative.

### Dual du crochet de Lie

Le crochet de Lie est une application antisymétrique

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Nous définissons alors une application

$$d_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$$

par la formule de dualité

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X, Y) = -\alpha([X, Y])$$

et nous prolongeons  $d_{\mathfrak{g}}$  en

$$d_{\mathfrak{g}} : \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}^*$$

par la formule

$$d_{\mathfrak{g}}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge d_{\mathfrak{g}}\alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{g}^*$ .  $d_{\mathfrak{g}}$  devient ainsi une dérivation de degré 1 de l'algèbre graduée commutative  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ , c'est à dire que pour tous  $\alpha_p \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$  et  $\beta \in \bigwedge \mathfrak{g}^*$ , on a

$$d_{\mathfrak{g}}(\alpha_p \wedge \beta) = (d_{\mathfrak{g}}\alpha_p) \wedge \beta + (-1)^p \alpha_p \wedge (d_{\mathfrak{g}}\beta)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

$$d_{\mathfrak{g}}^2 = 0 \text{ si et seulement si } [\cdot, \cdot] \text{ vérifie l'identité de Jacobi.}$$

Démontrons ce résultat. Si  $d_{\mathfrak{g}}^2 : \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^3 \mathfrak{g}^*$  est nulle, alors  $d_{\mathfrak{g}}^2 : \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge^{p+2} \mathfrak{g}^*$  est nulle pour tout  $p$  comme il est facile de le vérifier sur la définition de  $d_{\mathfrak{g}}$  sur  $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ . Nous pouvons donc nous contenter de démontrer  $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$  sur  $\mathfrak{g}^*$ . Calculons tout d'abord  $d_{\mathfrak{g}}$  sur  $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ . Pour cela, soient  $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{g}^*$  et  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ , alors un calcul simple donne

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{g}}(\beta_1 \wedge \beta_2)(X, Y, Z) &= (d_{\mathfrak{g}}\beta_1 \wedge \beta_2 - \beta_1 \wedge d_{\mathfrak{g}}\beta_2)(X, Y, Z) \\ &= -(\beta_1 \wedge \beta_2)([X, Y], Z) - (\beta_1 \wedge \beta_2)([Z, X], Y) - (\beta_1 \wedge \beta_2)([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Donc, pour  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ ,

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{g}}^2\alpha(X, Y, Z) &= d_{\mathfrak{g}}(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X, Y, Z) \\ &= -d_{\mathfrak{g}}\alpha([X, Y], Z) - d_{\mathfrak{g}}\alpha([Z, X], Y) - d_{\mathfrak{g}}\alpha([Y, Z], X) \\ &= \alpha([[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X]) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'équivalence.

Ainsi, par construction, l'application linéaire  $d_{\mathfrak{g}}$  est duale du crochet  $[\cdot, \cdot]$  et  $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$  est alors l'expression duale de l'identité de Jacobi.

### Formes invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe  $G$ . Alors, de la même façon que  $\mathfrak{g}$  est l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche,  $\mathfrak{g}^*$  est l'espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur  $G$ .

En effet, si  $\{E_i\}$  est une base de  $\mathfrak{g}$ , considérée comme l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche, alors tout vecteur  $Y|_h \in T_h G$  se décompose sur cette base au dessus de  $h$  en :  $Y|_h = Y|_h^i E_{i|h}$ , où  $Y|_h^i \in \mathbb{R}$ . Tout  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  définit alors une 1-forme différentielle sur  $G$  par la relation

$$\alpha|_h(Y|_h) = Y|_h^i \alpha|_h(E_{i|h}) = Y|_h^i \langle \alpha, E_i \rangle$$

où nous utilisons le crochet de dualité entre  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$ . Par linéarité de  $T_h L_g$ , nous avons  $T_h L_g Y|_h = Y|_h^i T_h L_g E_{i|h}$ , donc

$$(L_g^* \alpha|_{gh})(Y|_h) = Y|_h^i \alpha|_{gh}(T_h L_g E_{i|h})$$

Pour montrer l'invariance à gauche de cette 1-forme différentielle, il suffit donc de prouver que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$

$$\alpha_{|gh}(T_h L_g X|_h) = \alpha_{|h}(X|_h)$$

Or, la dualité entre  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  se fait sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que  $\langle \alpha, X \rangle$  est un réel et non un élément de  $\mathcal{F}(G)$ . Donc, pour tout  $h \in G$ ,  $\alpha_{|h}(X|_h)$  est indépendant de  $h$ . Ainsi

$$\alpha_{|h}(X|_h) = \alpha_{|gh}(X|_{gh}) = \alpha_{|gh}(T_h L_g X|_h)$$

puisque  $X$  est invariant à gauche. Ceci finit de prouver que

$$\alpha_{|h} = L_g^* \alpha_{|gh}$$

ou encore

$$\alpha = L_g^* \alpha$$

C'est la définition d'une **forme invariante à gauche**.

Il est de même aisé de montrer que  $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$  est l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles invariantes à gauche.  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  est donc une sous-algèbre de  $\Omega(G)$ , algèbre de toutes les formes différentielles sur  $G$ . Or, sur  $\Omega(G)$ , nous avons la différentielle habituelle de de Rham

$$d : \Omega^p(G) \rightarrow \Omega^{p+1}(G)$$

Donc, si  $\alpha \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \subset \Omega^p(G)$ , alors  $d\alpha \in \Omega^{p+1}(G)$ . Mais, pour tout  $g \in G$ , de  $\alpha = L_g^* \alpha$  et  $dL_g^* = L_g^* d$ , nous tirons  $L_g^*(d\alpha) = d\alpha$ , c'est à dire  $d\alpha \in \bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}^*$ . Nous pouvons donc restreindre  $d$  en une application

$$d_{|\mathfrak{g}^*} : \bigwedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \bigwedge \mathfrak{g}^*$$

Pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}$  et  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ , par définition de  $d$ , nous avons

$$(d\alpha)(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

Comme  $\alpha(X) \in \mathbb{R}$ , nous avons  $X \cdot \alpha(Y) = 0$ ; de même pour  $Y \cdot \alpha(X) = 0$ . Il reste donc

$$(d\alpha)(X, Y) = -\alpha([X, Y])$$

C'est la définition que nous avons prise pour  $d_{\mathfrak{g}}$ . Ainsi,  $d_{\mathfrak{g}}$  et  $d$  coïncident sur  $\mathfrak{g}^*$ . Or, ce sont toutes les deux des dérivations de degré 1 de l'algèbre  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ , donc elles coïncident sur  $\bigwedge \mathfrak{g}^*$  tout entier. Nous avons donc prouvé que

$$d_{\mathfrak{g}} = d_{|\mathfrak{g}^*}$$

Nous avons là encore un lien très fort entre la structure algébrique de  $\mathfrak{g}$  (donc de  $\mathfrak{g}^*$ ) qui permet de définir  $d_{\mathfrak{g}}$ , et la structure différentielle de  $G$ , qui permet de définir  $d$ .

### Formes de Maurer-Cartan, équations de structure

Nous prenons ici l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  d'un groupe de Lie  $G$ . Soient  $\{E_i\}$  une base de  $\mathfrak{g}$  et  $\{\theta^i\}$  sa base duale dans  $\mathfrak{g}^*$ . Les 1-formes différentielles invariantes à gauche  $\theta^i$  sont appelées les **formes de Maurer-Cartan** du groupe  $G$ . Le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  implique l'existence de constantes  $C_{ij}^k$ , appelées **constantes de structures** de  $\mathfrak{g}$  (ou du groupe  $G$ ), telles que

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^k E_k$$

L'antisymétrie du crochet impose  $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ , et l'identité de Jacobi donne

$$C_{ij}^\ell C_{\ell k}^m + C_{ki}^\ell C_{\ell j}^m + C_{jk}^\ell C_{\ell i}^m = 0$$

D'autre part, de  $d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y])$  pour tout  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  et tout  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , nous tirons  $d\theta^m(E_k, E_\ell) = -C_{k\ell}^m$ . Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C_{ij}^m(\theta^i \wedge \theta^j)(E_k, E_\ell) &= \frac{1}{2}C_{ij}^m(\theta^i(E_k)\theta^j(E_\ell) - \theta^i(E_\ell)\theta^j(E_k)) \\ &= \frac{1}{2}C_{ij}^m(\delta_k^i\delta_\ell^j - \delta_\ell^i\delta_k^j) \\ &= \frac{1}{2}C_{k\ell}^m - \frac{1}{2}C_{\ell k}^m \\ &= C_{k\ell}^m \end{aligned}$$

Ce calcul montre que

$$d\theta^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k\theta^i \wedge \theta^j$$

Ces relations sont les **équations de structure de Maurer-Cartan**. Remarquons que ces relations sont vraies pour une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  qui ne serait pas celle d'un groupe de Lie, en remplaçant  $d$  par  $d_{\mathfrak{g}}$  définie auparavant.

Nous avons déjà rencontré une expression analogue lors de l'étude des bases non-coordonnées (1.4.4). Les deux calculs sont bien sûr tout à fait similaires, et révèlent une même structure. Cependant, une différence importante est à noter : ici tout se passe globalement sur le groupe  $G$  et les  $C_{ij}^k$  sont des constantes, alors qu'en 1.4.4 nous avions des expressions locales et les  $C_{bc}^a$  étaient des fonctions.

Nous définissons maintenant sur  $G$  la 1-forme différentielle

$$\theta = E_i \otimes \theta^i$$

à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  (c'est un exemple de forme à valeurs vectorielles que nous définirons en 3.2.2). C'est la **forme de Maurer-Cartan** sur  $G$ . Nous constatons que par définition même de  $\theta$ , pour tout  $X|_e \in T_e G = \mathfrak{g}$ , nous avons

$$\theta|_e(X|_e) = X|_e$$

D'autre part, pour tout  $X|_g \in T_g G$ , nous avons  $\theta|_g(X|_g) = E_i \theta|_g^i(X|_g) \in \mathfrak{g}$ . Comme  $\theta|_g^i = L_{g^{-1}}^* \theta|_e^i$ , nous avons  $\theta|_g(X|_g) = E_i \theta|_e^i(L_{g^{-1}*} X|_g)$ . Or,  $L_{g^{-1}*} X|_g \in T_e G = \mathfrak{g}$ , donc

$$\theta|_g(X|_g) = L_{g^{-1}*} X|_g$$

La valeur  $\theta|_g(X|_g)$  est donc l'élément de  $\mathfrak{g} \simeq T_e G$  qui s'envoie par translation à gauche sur  $X|_g \in T_g G$ .

Il est facile de voir que  $\theta$  est invariante à gauche, puisque  $L_g^* \theta = E_i \otimes L_g^* \theta^i = E_i \otimes \theta^i$ . Par contre, par translation à droite, nous avons la relation

$$R_g^* \theta = Ad_{g^{-1}} \theta$$

où nous avons posé  $Ad_{g^{-1}} \theta = (Ad_{g^{-1}} E_i) \otimes \theta^i$ , avec par définition,

$$Ad_g = L_{g*} R_{g^{-1}*} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$Ad$  est la représentation adjointe définie plus bas en 2.4.4.

Il est aisé de montrer cette relation. Pour  $X|_e \in \mathfrak{g}$ , nous avons

$$\begin{aligned} (R_g^* \theta)|_e(X|_e) &= \theta|_g(R_{g*} X|_e) \\ &= \theta|_e(L_{g^{-1}*} R_{g*} X|_e) \\ &= (L_{g^{-1}*} R_{g*} E_i) \theta^i(X|_e) \end{aligned}$$

La relation est démontrée au dessus de  $e$ , mais comme  $R_g^*$  et  $L_h^*$  commutent, et comme  $\theta$  est invariante à gauche, elle est vraie partout.

Nous posons maintenant  $d\theta = E_k \otimes d\theta^k$  et  $[\theta, \theta] = [E_i, E_j] \otimes \theta^i \wedge \theta^j$ . Pour ces deux définitions, nous renvoyons à 3.2.2. Alors

$$d\theta = -\frac{1}{2} E_k \otimes C_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j = -\frac{1}{2} [E_i, E_j] \otimes \theta^i \wedge \theta^j$$

Nous venons donc de montrer que

$$d\theta + \frac{1}{2} [\theta, \theta] = 0$$

C'est l'équation de structure de Maurer-Cartan de la forme  $\theta$ .

### 2.4.3. Représentations d'algèbres de Lie

Nous allons définir les représentations d'algèbres de Lie, et nous ferons le lien avec celles de groupe de Lie. Ceci ouvre un immense chapitre des mathématiques, que nous continuerons d'explorer par la suite, mais que nous serons loin de couvrir entièrement.

### Représentations d'algèbres de Lie

Une **représentation d'une algèbre de Lie**  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $V$  est par définition un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\eta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

où  $\mathcal{L}(V)$  est l'algèbre de Lie des endomorphismes de  $V$  munis du crochet de Lie

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u$$

Nous avons donc :

$$\eta([X, Y]) = \eta(X) \circ \eta(Y) - \eta(Y) \circ \eta(X)$$

Avec les mêmes notations que dans le cas des représentations de groupes, pour  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\eta(X)$  s'écrit sous forme d'une matrice  $(\eta(X)_j^i)$  dans une base de  $V$ .

En réalité, nous avons

$$\eta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$$

Mais pour simplifier, nous avons utilisé les mêmes notations pour  $\mathcal{L}(V)$  et  $\mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$ . Par la propriété universelle de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , il existe donc

$$\eta' : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

telle que  $\eta'(XY) = \eta(X) \circ \eta(Y)$ .

Nous dirons que la représentation est **fidèle** si  $\eta$  est injective.

### Représentation induite

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Étant donnée une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$ , nous pouvons construire une représentation  $\eta$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V$ . En effet, nous avons une application  $T_e\rho : \mathfrak{g} \rightarrow T_eGL(V)$ . Or, comme pour les matrices, il est facile de vérifier que l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $GL(V)$  est  $\mathcal{L}(V)$ . L'application exponentielle est l'exponentielle bien connue des endomorphismes d'un espace vectoriel. Il est alors possible de montrer que

$$\eta = T_e\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

est une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur  $V$ . C'est la **représentation induite** par  $\rho$ . Nous avons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & GL(V) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_e\rho} & \mathcal{L}(V) \end{array}$$

### Représentation contragrédiente

Si  $\eta$  est une représentation d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $V$ , nous définissons sa **représentation contragrédiente**  $\eta^c$  sur le dual  $V^*$  de  $V$  par la formule

$$\langle \eta^c(X)v^*, v \rangle = -\langle v^*, \eta(X)v \rangle$$

Nous avons alors  $\eta^c(X)v^* = -\eta(X)_j^i v_i^* e^j$ .

Si  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$  et si  $\eta$  est la représentation induite par une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$ , alors  $\eta^c$  est la représentation induite par  $\rho^c$ .

### Somme et produit de représentations

Pour deux représentations  $\eta_1$  et  $\eta_2$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $V_1$  et  $V_2$  respectivement, nous définissons la **représentation somme directe**  $\eta_1 \oplus \eta_2$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V_1 \oplus V_2$  par

$$(\eta_1 \oplus \eta_2)(X)(v_1 + v_2) = \eta_1(X)v_1 + \eta_2(X)v_2$$

et la **représentation produit tensoriel**  $\eta_1 \otimes \eta_2$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V_1 \otimes V_2$  par

$$(\eta_1 \otimes \eta_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = \eta_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \eta_2(X)v_2$$

Il faut prendre garde à cette dernière formule qui diffère de celle prise pour des représentations de groupes.

La matrice de  $(\eta_1 \otimes \eta_2)(X)$  est  $(\eta_1(X)_j^i \delta_\beta^\alpha + \delta_j^i \eta_2(X)_\beta^\alpha)$ , c'est à dire

$$(\eta_1(X)_j^i) \otimes \mathbb{1}_{V_2} + \mathbb{1}_{V_1} \otimes (\eta_2(X)_\beta^\alpha)$$

où  $\mathbb{1}_{V_1}$  est la matrice unité sur  $V_1$  (de même pour  $\mathbb{1}_{V_2}$ ).

Dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$ , si  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont les représentations induites par des représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  respectivement, alors  $\eta_1 \oplus \eta_2$  et  $\eta_1 \otimes \eta_2$  sont les représentations induites par  $\rho_1 \oplus \rho_2$  et  $\rho_1 \otimes \rho_2$  respectivement.

### Réductibilité et irréductibilité

Soit  $\eta$  une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur l'espace vectoriel  $V$ . Comme pour les représentations de groupes, nous dirons qu'un sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$  est **invariant** par rapport à  $\eta$  si  $\eta(\mathfrak{g})W \subset W$ .

Notons  $\mathcal{I}(V)$  le sous espace vectoriel de  $V$  des éléments  $v \in V$  invariants par rapport à  $\eta$ , c'est à dire  $\eta(X)v = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . C'est un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ . Notons  $\eta(V)$  le sous espace vectoriel de  $V$  engendré par les éléments de la forme  $\eta(X)v$  pour tous  $X \in \mathfrak{g}$  et  $v \in V$ . C'est aussi un sous-espace vectoriel invariant de  $V$ .

Nous dirons que la représentation  $\eta$  est **réductible** s'il existe au moins un sous-espace vectoriel invariant de  $V$  autre que  $\{0\}$  et  $V$ . Dans le cas contraire, nous dirons que  $\eta$  est **irréductible**. Nous avons alors le même résultat que pour les représentations de groupes :

Soit  $\eta$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Soit  $\varphi : V \rightarrow V$  un endomorphisme permutable avec tous les  $\eta(X)$ , c'est à dire

$$\varphi \circ \eta(X) = \eta(X) \circ \varphi$$

pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . Alors  $\varphi$  est de la forme  $\varphi = \lambda \text{Id}$  pour un nombre  $\lambda$ .

La démonstration est la même que dans le cas des représentations de groupes.

### Équivalence de représentations

Deux représentations  $\eta_1$  et  $\eta_2$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V_1$  et  $V_2$  sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  tel que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  nous ayons  $\varphi \circ \eta_1(X) = \eta_2(X) \circ \varphi$ . Nous avons alors le résultat suivant, connu sous le nom de **Lemme de Schur** : Soient  $\eta_1$  et  $\eta_2$  deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  sur les espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$ . Soit  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  une application linéaire telle que

$$\varphi \circ \eta_1(X) = \eta_2(X) \circ \varphi$$

pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . Alors ou bien  $\varphi$  est un isomorphisme et  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont équivalentes, ou bien  $\varphi = 0$ .

#### 2.4.4. Représentations adjointe et coadjointe

Nous allons décrire des représentations particulières canoniquement associées à un groupe de Lie  $G$  et à son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

##### La représentation $Ad$

Pour  $g \in G$ , nous posons

$$\begin{aligned} \alpha_g : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

qui est un difféomorphisme de  $G$  ( $\alpha_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ ). On a  $\alpha_e = \text{Id}_G$  et  $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$ . Donc  $\alpha : G \rightarrow \text{Diff}(G)$  est une action de  $G$  (groupe) sur lui-même (variété).

Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Nous posons

$$\begin{aligned} Ad_g X &= \left( \frac{d}{dt} \alpha_g(\exp(tX)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} (g \exp(tX) g^{-1}) \right) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Alors  $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est linéaire,  $Ad_e = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ ,  $Ad_g \circ Ad_h = Ad_{gh}$ . Ainsi  $Ad$  réalise une représentation de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$ . C'est la **représentation adjointe** de  $G$ . Nous pouvons constater

facilement que  $Ad_g = L_{g*}R_{g^{-1}*}$ . C'est la formule que nous avons prise lors de l'étude des formes de Maurer-Cartan.

Nous remarquons maintenant que  $e$  est point fixe de l'action  $\alpha$  de  $G$  sur lui-même. Par le théorème du point fixe,  $T_e\alpha_g$  est une représentation de  $G$ . En fait, cette représentation est celle que nous venons de construire, comme il est facile de le voir.

On a l'importante formule

$$Ad_g[X, Y] = [Ad_gX, Ad_gY]$$

qui fait que  $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  a pour image un sous groupe des isomorphismes d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

On peut montrer, en utilisant l'unicité du flot, que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_g} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Si  $\phi$  est une action de  $G$  sur la variété  $M$ , alors

$$T\phi_g X^M = (Ad_g X)^M$$

En effet, par définition

$$T\phi_g X^M|_x = \left( \frac{d}{dt} \phi \left( g, \phi(\exp(-tX), x) \right) \right)_{|t=0}$$

puisque le flot de  $X^M$  est  $(t, x) \mapsto \phi(\exp(-tX), x)$ . Donc

$$T\phi_g X^M|_x = \left( \frac{d}{dt} \phi \left( g \exp(-tX), x \right) \right)_{|t=0}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (Ad_g X)^M|_y &= \left( \frac{d}{dt} \phi \left( \exp(-tAd_g X), y \right) \right)_{|t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \phi \left( g \exp(-tX) g^{-1}, y \right) \right)_{|t=0} \end{aligned}$$

Pour comparer  $T\phi_g X^M|_x$  à  $(Ad_g X)^M|_y$ , il faut prendre  $y = \phi(g, x)$ , puisque  $T\phi_g X^M|_x$  est au dessus de  $\phi(g, x)$ . Donc

$$\begin{aligned} (Ad_g X)^M|_{\phi(g, x)} &= \left( \frac{d}{dt} \phi \left( g \exp(-tX) g^{-1} g, x \right) \right)_{|t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \phi \left( g \exp(-tX), x \right) \right)_{|t=0} \end{aligned}$$

### La représentation $ad$

Nous allons considérer la représentation induite par  $Ad$  sur  $\mathfrak{g}$ . Pour cela, nous devons remplacer  $g$  par  $\exp(tX)$  et dériver en  $t$ . En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, il est possible de montrer que

$$\left( \frac{d}{dt} Ad_{\exp(tX)} Y \right)_{|t=t_0} = Ad_{\exp(t_0 X)} [X, Y]$$

et si nous prenons  $t_0 = 0$  nous obtenons

$$\left( \frac{d}{dt} Ad_{\exp(tX)} Y \right)_{|t=0} = [X, Y]$$

C'est la représentation induite par  $Ad$ . Nous noterons  $ad$  cette représentation induite par  $Ad$  sur  $\mathfrak{g}$ , et nous l'appellerons la **représentation adjointe** de  $\mathfrak{g}$ . C'est une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur elle-même dont l'expression est

$$ad_X Y = [X, Y]$$

L'égalité  $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$  (qui prouve que  $ad$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$ ) n'est autre que l'identité de Jacobi.

Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Nous pouvons remarquer que la représentation  $ad$  peut être définie sans avoir recours à  $G$ , en posant simplement  $ad_X Y = [X, Y]$ . Ceci fait de  $ad$  un objet purement algébrique sur n'importe quelle algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , associée ou non à un groupe.

### Cas des matrices

- Dans le cas des matrices, les représentations  $Ad$  et  $ad$  prennent la forme suivante :
- $Ad_A M = A M A^{-1}$  pour  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  et  $M \in M(n, \mathbb{R})$  ;
  - $ad_M N = M N - N M$  que l'on obtient facilement en dérivant  $e^{tM} N e^{-tM}$  en  $t = 0$ .

### Les représentations $Ad^*$ et $ad^*$

La **représentation coadjointe** de  $G$  est une représentation de  $G$  sur le dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$ . Elle est notée  $Ad^* : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$  et est définie par la formule de dualité :

$$\langle Ad_g^* \alpha, X \rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}} X \rangle$$

où  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ .  $Ad^*$  est donc la représentation contragrédiente de  $Ad$ .

Par dérivation de cette représentation, nous obtenons la **représentation coadjointe** de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{g}^*$ ,  $ad^*$ , définie par la formule :

$$\begin{aligned}\langle ad_X^* \alpha, Y \rangle &= -\langle \alpha, ad_X Y \rangle \\ &= -\langle \alpha, [X, Y] \rangle\end{aligned}$$

$ad^*$  est la représentation contragrédiente de  $ad$ . La représentation  $ad^*$  est en fait un objet purement algébrique sur  $\mathfrak{g}$ , donc sur  $\mathfrak{g}^*$ .

Si nous nous plaçons dans le point de vue des champs de vecteurs invariants à gauche et des formes différentielles invariants à gauche, nous pouvons remarquer que par définition

$$\langle ad_X^* \alpha, Y \rangle = -i_{[X, Y]} \alpha$$

Il est aisé de montrer que  $\langle L_X \alpha, Y \rangle = i_Y L_X \alpha = L_X i_Y \alpha - i_{[X, Y]} \alpha$ . Or,  $i_Y \alpha$  est une constante puisque c'est indépendant du point où l'on se trouve sur  $G$ , donc sa dérivée de Lie est nulle. Il reste

$$\langle ad_X^* \alpha, Y \rangle = \langle L_X \alpha, Y \rangle$$

valable pour tout  $Y$ . On a finalement la relation :

$$ad_X^* \alpha = L_X \alpha$$

où nous devons interpréter  $\alpha$  comme une 1-forme différentielle invariante à gauche sur  $G$ . Ainsi, sur  $\mathfrak{g}^*$ , pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$L_X = ad_X^*$$

Ceci fait encore une fois le lien entre l'aspect purement algébrique de  $\mathfrak{g}$  et l'aspect différentiel provenant de  $G$ .

### 2.4.5. Formes bilinéaires

#### Forme bilinéaire associée à une représentation

Soit  $\eta_W$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel  $W$  de dimension finie. Soit

$$B : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

une forme bilinéaire symétrique sur  $W$ . Nous dirons que  $B$  est **invariante relativement à  $\eta_W$**  si pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  et tous  $w_1, w_2 \in W$ ,

$$B(\eta_W(X)w_1, w_2) + B(w_1, \eta_W(X)w_2) = 0$$

Soit  $\eta$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Nous définissons sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  la **forme bilinéaire symétrique associée à la représentation  $\eta$**  par la relation

$$\begin{aligned}B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto B(X, Y) = \text{Tr}(\eta(X)\eta(Y))\end{aligned}$$

où  $\eta(X)\eta(Y) : V \rightarrow V$  est bien sûr un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie. Il est facile de démontrer, par propriété de la trace, que  $B$  est invariante relativement à la représentation  $ad$  :

$$B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0$$

### Élément de Casimir

Supposons que l'algèbre de Lie de dimension finie  $\mathfrak{g}$  soit munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante relativement à la représentation  $ad$  que nous notons  $B$ . Choisissons deux bases  $\{E_i\}$  et  $\{F_i\}$  de  $\mathfrak{g}$  telles que

$$B(E_i, F_j) = \delta_{ij}$$

Dans l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , définissons l'élément

$$C = \sum_i E_i F_i$$

C'est l'**élément de Casimir** associé à  $B$ . Nous avons alors le résultat suivant qui rend cet élément intéressant :

L'élément  $C$  est indépendant du choix des bases  $\{E_i\}$  et  $\{F_i\}$  et commute avec tous les éléments de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

En effet, nous pouvons voir cet élément  $C$  d'une autre façon. Soit

$$\phi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$$

l'application linéaire définie par

$$\phi(X \otimes Y)(Z) = B(Y, Z)X$$

pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . Cherchons le noyau de cette application  $\phi$ . Pour cela, soit  $X_i \otimes Y^i$  ( $i = 1$  à  $k$ , somme finie) un élément du noyau de  $\phi$ . Nous pouvons supposer que les  $X_1, \dots, X_k$  sont linéairement indépendants. Alors  $\phi(X_i \otimes Y^i) = 0$  équivaut à  $B(Y^i, Z)X_i = 0$  pour tout  $Z \in \mathfrak{g}$ . Or, par indépendance des  $X_i$ , ceci équivaut à  $B(Y^i, Z) = 0$  pour tout  $Z \in \mathfrak{g}$ . Comme  $B$  est non dégénérée, cela implique  $Y^i = 0$  pour tout  $i$ , d'où  $X_i \otimes Y^i = 0$ .  $\phi$  est donc une application injective. Compte tenu des dimensions finies de  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  et  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  qui sont les mêmes,  $\phi$  est en fait un isomorphisme.

Considérons maintenant l'endomorphisme de  $\mathfrak{g}$  défini par

$$\phi\left(\sum_i E_i \otimes F_i\right)$$

Nous avons

$$\phi\left(\sum_i E_i \otimes F_i\right)(Z) = \sum_i B(F_i, Z)E_i$$

Or,  $Z$  se décompose sur la base  $\{E_i\}$  en  $Z = Z^j E_j$ , d'où

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_i E_i \otimes F_i\right)(Z) &= \sum_i B(F_i, E_j) Z^j E_i \\ &= \sum_i \delta_{ij} Z^j E_i \\ &= Z\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\phi\left(\sum_i E_i \otimes F_i\right) = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$$

Ceci implique entre autre que  $\sum_i E_i \otimes F_i$  est un élément de  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  indépendant des bases  $\{E_i\}$  et  $\{F_i\}$  de  $\mathfrak{g}$ , puisque  $\phi$  est un isomorphisme indépendant de ces bases.

Maintenant, il est facile de montrer que

$$\phi(ad_Z X \otimes Y) + \phi(X \otimes ad_Z Y) = [ad_Z, \phi(X \otimes Y)]$$

où dans le second membre, il s'agit du commutateur dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ . Comme d'autre part  $[ad_Z, \phi(\sum_i E_i \otimes F_i)] = 0$  puisque  $\phi(\sum_i E_i \otimes F_i) = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ , nous avons

$$\sum_i (ad_Z E_i \otimes F_i + E_i \otimes ad_Z F_i) = 0$$

Remarquons alors que l'élément de Casimir associé à  $B$  est l'image de  $\sum_i E_i \otimes F_i$  par l'application canonique

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} &\rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ X \otimes Y &\mapsto XY\end{aligned}$$

Donc cet élément  $C$  est indépendant du choix des bases de  $\mathfrak{g}$ . Pour tout  $Z \in \mathfrak{g}$ , le commutateur  $[Z, C]$  dans  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  s'écrit

$$\sum_i Z E_i F_i - \sum_i E_i F_i Z = \sum_i (ad_Z E_i) F_i + \sum_i E_i (ad_Z F_i)$$

qui est l'image d'un élément nul de  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Donc  $C$  commute avec tous les éléments de  $\mathfrak{g}$ , donc avec tous les éléments de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

## La forme de Killing

La **forme de Killing** de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est la forme bilinéaire

$$\begin{aligned}K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto K(X, Y) = \text{Tr}(ad_X ad_Y)\end{aligned}$$

qui est invariante relativement à  $ad$ .

Dans le cas où la forme de Killing est non dégénérée, elle définit un élément de Casimir sur  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  est non dégénérée, alors elle définit sur  $G$  une métrique.

### 2.4.6. Algèbres de Lie et semi-simplicité

#### Représentations semi-simples

La notion de semi-simplicité est liée à la notion de décomposition d'espaces, comme le montre la définition suivante. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Une application linéaire  $\varphi : V \rightarrow V$  est dite **semi-simple** si pour tout sous-espace vectoriel stable  $W_1$  par  $\varphi$ , c'est à dire  $\varphi(W_1) \subset W_1$ , il existe un sous-espace vectoriel stable  $W_2$  par  $\varphi$  tel que  $V = W_1 \oplus W_2$ .

Une **représentation semi-simple**  $\eta$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel  $V$  est une représentation d'algèbre de Lie telle que tout sous-espace vectoriel invariant  $W_1$  par rapport à  $\eta$ , c'est à dire  $\eta(\mathfrak{g})W_1 \subset W_1$ , il existe un sous-espace vectoriel invariant  $W_2$  par rapport à  $\eta$  tel que  $V = W_1 \oplus W_2$ .

Nous avons alors les résultats suivants : si  $\eta$  est une représentation semi-simple de  $\mathfrak{g}$  sur  $V$ , alors

- $V = \mathcal{I}(V) \oplus \eta(V)$  où nous rappelons que  $\mathcal{I}(V)$  est l'ensemble des éléments invariants par rapport à  $\eta$  et  $\eta(V) = \eta(\mathfrak{g})V$  ;
- La représentation contragrédiente  $\eta^c$  de  $\mathfrak{g}$  sur  $V^*$  est semi-simple ;
- Si  $W$  est un sous-espace vectoriel invariant par rapport à  $\eta$ , alors la représentation  $\eta$  restreinte à  $W$  est semi-simple et nous avons  $\mathcal{I}(W) = W \cap \mathcal{I}(V)$  et  $\eta(W) = W \cap \eta(V)$ .

#### Algèbres de Lie semi-simples

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est **simple** lorsqu'elle n'est pas abélienne et ne contient aucun idéal propre. La simplicité est une notion algébrique, qui signifie en quelque sorte, comme nous le verrons plus loin, l'« élémentarité » de l'algèbre de Lie.

Grâce à cette définition, nous pouvons énoncer le résultat suivant, à la base de la définition des algèbres de Lie semi-simples : si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie, il y a équivalence entre :

- La forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  est non dégénérée ;
- $\mathfrak{g}$  admet une décomposition unique en somme directe d'algèbres de Lie simples ;
- Toute représentation de  $\mathfrak{g}$  sur un espace vectoriel de dimension finie est semi-simple.

Nous ne démontrerons pas ces équivalences, assez techniques à établir. Nous en déduisons néanmoins une définition. Une **algèbre de Lie semi-simple** est une algèbre de Lie qui vérifie ces trois énoncés.

Nous avons ainsi trois critères pour caractériser une algèbre de Lie semi-simple. Le premier critère est appelé **critère de Cartan**. Le second est celui utilisé habituellement comme définition, le troisième est dû à H. WEYL. Nous constatons que ces trois critères sont de nature assez différente. Par exemple, si l'algèbre de Lie est associée à un groupe de Lie, le premier est de nature géométrique, puisque la forme de Killing définit dans ce cas une métrique sur le groupe. Le second est de nature complètement algébrique, puisqu'il a recourt à des notions d'idéaux et de décompositions en somme directe.

Si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie semi-simple, alors son centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  est nul et son algèbre dérivée est elle-même :

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$$

Nous ne démontrerons pas ces résultats.

### Algèbres de Lie réductives

Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite **réductive** si elle se décompose comme

$$\mathfrak{g} = \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$$

En d'autres termes,  $\mathfrak{g}$  est somme directe d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple. Par exemple toute algèbre de Lie semi-simple est réductive. La notion de réductivité est donc moins contraignante que celle de semi-simplicité. Malgré cet affaiblissement, de nombreux résultats ont été obtenus sur les algèbres de Lie réductives.

Par exemple, pour  $\mathfrak{g}$  algèbre de Lie de dimension finie, il y a équivalence entre les énoncés suivants :

- $\mathfrak{g}$  est réductive ;
- $\mathfrak{g}$  admet une représentation fidèle de dimension finie et de forme bilinéaire associée non dégénérée ;
- $\mathfrak{g}$  admet une représentation semi-simple fidèle de dimension finie ;
- La représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.

Une algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$  est dite **compacte** si elle admet un produit scalaire défini négatif invariant relativement à la représentation *ad*. Par exemple, toute algèbre de Lie d'un groupe compact est compacte. On peut alors montrer que toute algèbre de Lie compacte est réductive. La réductivité est donc une généralisation algébrique de la condition géométrique de compacité.

Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{L}(V)$  a pour centre  $\mathcal{Z}(\mathcal{L}(V)) = \mathbb{R}\text{Id}$  et pour algèbre dérivée  $\mathcal{L}(V)' = \mathcal{L}_0(V)$  la sous algèbre de Lie des endomorphismes de trace nulle. Nous avons alors la décomposition  $\mathcal{L}(V) = \mathbb{R}\text{Id} \oplus \mathcal{L}_0(V)$  qui prouve que  $\mathcal{L}(V)$  est réductive.

Les algèbres de Lie réductives ne sont donc pas rares, et par conséquent leurs propriétés sont d'un grand intérêt. Par définition même de la notion de réductivité, pour étudier ces algèbres de Lie, il faut étudier les algèbres de Lie abéliennes (ce qui n'est pas très difficiles) et les algèbres de Lie semi-simples, ce qui ouvre un grand chapitre de l'algèbre, chapitre que nous n'aborderons pas ici.

Il faut mentionner que les algèbres de Lie simples ont été classées en quatre grandes familles et quelques exceptions. Ceci classifie bien sûr les algèbres de Lie semi-simples, puisqu'elles sont sommes directes d'algèbres de Lie simples. Quant aux algèbres de Lie réductives, elles se prêtent à des considérations cohomologiques.

## 2.5. Revêtements et groupes

Références : [10], [12], [22].

### 2.5.1. Généralités

Soit  $G$  un groupe topologique. Un **groupe de revêtement** de  $G$  est un groupe topologique  $\tilde{G}$  qui est un revêtement de  $G$  en tant qu'espace topologique et tel que l'application du revêtement  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  soit un homomorphisme de groupes.

On peut montrer que si  $\tilde{G}$  est un revêtement simplement connexe de  $G$ , alors on peut munir  $\tilde{G}$  d'une structure de groupe qui en fasse un groupe de revêtement de  $G$ .

Si maintenant  $G$  est un groupe de Lie *connexe*, alors on peut montrer qu'il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe  $\tilde{G}$  qui soit un groupe de revêtement de  $G$ . Dans ce cas, les algèbres de Lie de  $G$  et  $\tilde{G}$  sont isomorphes. En effet, localement ces groupes de Lie sont difféomorphes.  $\tilde{G}$  est appelé le **groupe de revêtement universel** de  $G$ . Il est unique à isomorphisme près. La connexité de  $G$  est essentielle pour prouver cette unicité. Le noyau du recouvrement  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  est un sous-groupe de  $\tilde{G}$ , qui n'est autre que  $\pi_1(G)$ .

Si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est une représentation de  $G$ , alors  $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi : \tilde{G} \rightarrow GL(V)$  est une représentation de  $\tilde{G}$ . Donc toute représentation de  $G$  est en particulier une représentation de  $\tilde{G}$ . La réciproque n'est pas vraie, et conduit à des considérations intéressantes en physique.

### 2.5.2. Les groupes Spin

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , et  $q$  une forme quadratique non dégénérée sur  $V$ . Le **groupe orthogonal**  $O(V, q)$  de  $(V, q)$  est le sous-groupe de  $GL(V)$  des éléments  $g$  tels que  $q(gv, gv) = q(v, v)$  pour tout  $v \in V$ . Les éléments de  $O(V, q)$  ont pour déterminant  $\pm 1$ . On note  $SO(V, q)$  le sous-groupe de  $O(V, q)$  des éléments de déterminant  $+1$ . C'est le **groupe spécial orthogonal**.

On peut toujours choisir une base  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  de  $V \simeq \mathbb{R}^n$  de telle sorte que

$$q(v, v) = v_1^2 + \dots + v_r^2 - v_{r+1}^2 - \dots - v_{r+s}^2$$

pour tout  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$  et où  $r + s = n$ . On note alors  $O(r, s) = O(V, q)$  et  $SO(r, s) = SO(V, q)$ .

L'**algèbre de Clifford**  $Cl(r, s)$  de  $V$  est définie comme l'algèbre engendrée par les  $n$  éléments  $e_1, \dots, e_n$  (de la base orthonormée de  $V$ ) et les relations

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= -2\delta_{ij} \text{ si } i \leq r \\ &= +2\delta_{ij} \text{ si } i > r \end{aligned}$$

Cette algèbre est  $\mathbb{Z}_2$  graduée. On note  $Cl^0(r, s)$  la sous-algèbre des éléments pairs, et  $Cl^1(r, s)$  le sous-espace vectoriel des éléments impairs. En particulier, on a  $V \subset Cl^1(r, s)$ .

Dans cette algèbre, on peut considérer les éléments inversibles. Ils forment un groupe, noté  $Cl^\times(r, s)$ . Tout élément  $\varphi$  de  $Cl^\times(r, s)$  définit un automorphisme  $Ad_\varphi$  de  $Cl(r, s)$

par la relation  $Ad_\varphi(a) = \varphi a \varphi^{-1}$ . Tout élément  $v \in V \subset Cl^1(r, s)$  tel que  $q(v, v) \neq 0$  est inversible, son inverse étant  $-\frac{1}{q(v, v)}v$ . On peut alors montrer que pour  $w \in V$ , on a

$$Ad_v(w) = -w + 2\frac{q(v, w)}{q(v, v)}v \in V$$

donc  $Ad_v \in GL(V)$ . De plus, il est facile de voir que  $q(Ad_v(w), Ad_v(w)) = q(w, w)$ , et donc  $Ad_v \in O(r, s)$ .

Soit alors  $Pin(r, s)$  le sous-groupe de  $Cl^\times(r, s)$  engendré par les  $v \in V$  tels que  $q(v, v) = \pm 1$ . Alors, d'après ce qu'on vient de voir, on a un morphisme de groupes

$$Ad : Pin(r, s) \rightarrow O(r, s)$$

$Pin(r, s)$  est appelé le **groupe Pin** de  $(V, q)$ . Le **groupe Spin** de  $(V, q)$  est le sous-groupe

$$Spin(r, s) = Pin(r, s) \cap Cl^0(r, s)$$

On peut montrer que  $Ad$  réalise un morphisme de groupes

$$Ad : Spin(r, s) \rightarrow SO(r, s)$$

Le morphisme  $Ad$  fait de  $Pin(r, s)$  un groupe de revêtement de  $O(r, s)$  et de  $Spin(r, s)$  un groupe de revêtement de  $SO(r, s)$ . Dans les deux cas, le noyau de  $Ad$  est le groupe discret  $\mathbb{Z}_2$ . Il s'agit donc de revêtements à deux feuilletés. Dans le cas  $s = 0$ ,  $r = n$ ,  $Spin(n) = Spin(n, 0)$  est le groupe de revêtement universel de  $SO(n) = SO(n, 0)$ . Dans le cas  $s = 1$ , notons  $Spin^0(r, 1)$  et  $SO^0(r, 1)$  les composantes connexes qui contiennent l'élément neutre. Alors  $Spin^0(r, 1)$  est le groupe de revêtement universel de  $SO^0(r, 1)$ .

### 2.5.3. Le groupe des rotations

#### Le groupe $SO(3)$

Considérons le cas du groupe  $SO(3)$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$ . Ce groupe est connexe mais n'est pas simplement connexe. Il admet pour groupe de revêtement universel le groupe  $SU(2) \simeq Spin(3)$ .

Une matrice  $R \in SO(3)$  est caractérisée par  ${}^t R R = \mathbb{1}$  et  $\det R = 1$ , et se décompose sous la forme  $R = R_z(\theta)R_y(\phi)R_x(\psi)$  avec

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Le groupe  $SO(3)$  est de dimension 3.

$\theta \mapsto R_z(\theta)$  est une courbe dans  $SO(3)$  passant en  $\mathbb{1}$  à  $\theta = 0$ . Son vecteur tangent en  $\mathbb{1}$  est

$$X_z = \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, les vecteurs en  $\mathbb{1}$  aux courbes  $\phi \mapsto R_y(\phi)$  et  $\psi \mapsto R_x(\psi)$  sont

$$X_y = \frac{dR_y(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_x = \frac{dR_x(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  admet donc pour base  $\{X_x, X_y, X_z\}$  et pour crochets :

$$[X_x, X_y] = X_z \quad [X_y, X_z] = X_x \quad [X_z, X_x] = X_y$$

En physique, on préfère travailler avec des matrices hermitiennes. On introduit donc les matrices

$$J_x = iX_x \quad J_y = iX_y \quad J_z = iX_z$$

qu'on doit interpréter comme des matrices dans l'algèbre de Lie complexifiée de  $\mathfrak{so}(3)$  que l'on note  $\mathfrak{so}(3)^{\mathbb{C}}$ . L'espace vectoriel sous-jacent à  $\mathfrak{so}(3)^{\mathbb{C}}$  est l'espace vectoriel complexifié de celui de  $\mathfrak{so}(3)$ , et le crochet de Lie est obtenu de celui sur  $\mathfrak{so}(3)$  par linéarité sur  $\mathbb{C}$ . Soit alors  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ . Alors on a  $(J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp}$  et les crochets valent  $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$  et  $[J_+, J_-] = 2J_z$ . L'élément  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  commute avec  $J_x, J_y, J_z$ . C'est l'élément de Casimir.

### Le groupe $SU(2)$

Une matrice  $U \in SU(2)$  est caractérisée par  $U^{\dagger}U = \mathbb{1}$  et  $\det U = 1$ . Elle peut s'écrire sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $\bar{a} = d$ ,  $\bar{c} = -b$ ,  $\bar{b} = -c$ ,  $\bar{d} = a$  et  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Il reste donc trois paramètres réels pour caractériser  $U$ . La courbe

$$\alpha \mapsto U_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

passé en  $\mathbb{1}$  pour  $\alpha = 0$  et y a pour vecteur tangent

$$\frac{i}{2}\sigma_z = \frac{dU_z(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

De même, les courbes

$$\beta \mapsto U_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma \mapsto U_x(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma/2 & i \sin \gamma/2 \\ i \sin \gamma/2 & \cos \gamma/2 \end{pmatrix}$$

ont pour vecteurs tangents en  $\mathbb{1}$

$$\frac{i}{2}\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{i}{2}\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tout élément de  $SU(2)$  est produit de  $U_x(\gamma)$ ,  $U_y(\beta)$  et  $U_z(\alpha)$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  admet donc pour base  $\{\frac{i}{2}\sigma_x, \frac{i}{2}\sigma_y, \frac{i}{2}\sigma_z\}$ . Les matrices  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sont les **matrices de Pauli** bien connues en mécanique quantique.

L'homomorphisme de revêtement  $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  est donné par  $U_x(\gamma) \mapsto R_x(-\gamma)$ ,  $U_y(\beta) \mapsto R_y(-\beta)$  et  $U_z(\alpha) \mapsto R_z(-\alpha)$ . On remarquera que les matrices  $\mathbb{1}$  et  $-\mathbb{1}$  de  $SU(2)$  s'envoie sur l'unique élément  $\mathbb{1}$  de  $SO(3)$ . On a donc un revêtement à deux feuillets. Au niveau des algèbres de Lie, on a l'isomorphisme  $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$  avec  $\frac{1}{2}\sigma_x \mapsto J_x$ ,  $\frac{1}{2}\sigma_y \mapsto J_y$  et  $\frac{1}{2}\sigma_z \mapsto J_z$ .

## Représentations irréductibles

Les représentations irréductibles unitaires de dimensions finies de  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$  sont caractérisées par un demi-entier positif  $j$ . Pour  $j$  donné, la dimension de la représentation correspondante est  $2j + 1$ . Une base de cette représentation est donnée par les vecteurs  $|j, m\rangle$  avec  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ . Sur cette base, on a

$$\begin{aligned} J^2|j, m\rangle &= j(j+1)|j, m\rangle \\ J_z|j, m\rangle &= m|j, m\rangle \\ J_{\pm}|j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \end{aligned}$$

En particulier,  $J_+|j, j\rangle = 0$  et  $J_-|j, -j\rangle = 0$ . Ce sont les représentations spinorielles bien connues en mécanique quantique. Les représentations irréductibles de dimensions finies de  $SU(2)$  sont obtenues par exponentiation de ces représentations. Une telle représentation est une représentation de  $SO(3)$  si et seulement si  $j$  est entier. Par exemple, dans le cas  $j = 1$ , la représentation de dimension 3 obtenue est la représentation fondamentale de  $SO(3)$  dans laquelle chaque élément est envoyé sur lui-même (en tant que matrice de  $M(3, \mathbb{R})$ ).

### 2.5.4. Le groupe de Lorentz

#### Le groupe $O(1, 3)$

Le **groupe de Lorentz** est le groupe  $L = O(1, 3)$ . C'est le groupe des transformations linéaires de l'espace de Minkowski qui préservent la métrique  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . C'est un groupe non compact. Le groupe de Lorentz a quatre composantes connexes.

De  ${}^t\Lambda g\Lambda = g$ , on tire  $(\det \Lambda)^2 = 1$ . On appelle  $L_+$  le sous-groupe invariant des éléments de  $L$  de déterminant  $+1$ , ce sont les **transformations de Lorentz propres**, et  $L_-$  le sous ensemble des éléments de déterminant  $-1$ , ce sont les **transformations de Lorentz impropres**. Par définition,  $L_+ = SO(1, 3)$ . On a  $L/L_+ = \mathbb{Z}_2$ .

On peut montrer que pour  $\Lambda \in L$ , on a  $(\Lambda_{00})^2 \geq 1$ . On note  $L^\uparrow$  le sous-groupe invariant des éléments tels que  $\Lambda_{00} \geq 1$ , ce sont les **transformations de Lorentz orthochrones**, et  $L^\downarrow$  le sous ensemble des éléments tels que  $\Lambda_{00} \leq -1$ , ce sont les **transformations de Lorentz non orthochrones**.

Les quatre composantes connexes de  $L$  sont alors  $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow$  et  $L_-^\downarrow$ .  $L_+^\uparrow = SO^0(1, 3)$  est la composante connexe contenant l'élément neutre. C'est le **groupe de Lorentz restreint**. Dans chacune des composantes connexes, il y a un élément particulier.  $L_+^\uparrow$  contient l'élément neutre,  $L_-^\uparrow$  contient l'inversion spatiale

$$I_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_-^\downarrow$  contient l'inversion temporelle

$$I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $L_+^\downarrow$  contient l'inversion spatio-temporelle

$$I_{st} = I_t I_s = I_s I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le groupe des rotations  $SO(3)$  est un sous-groupe du groupe de Lorentz restreint.

#### Le sous-groupe $SO^0(1, 3)$

Le groupe de revêtement universel du groupe de Lorentz restreint  $SO^0(1, 3)$  est le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Décrivons l'homomorphisme  $\pi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^0(1, 3)$  du revêtement. Pour cela,

posons  $\sigma_0 = \mathbb{1} \in SL(2, \mathbb{C})$ . Soit  $H_2$  l'espace des matrices  $2 \times 2$  complexes hermitiennes. Tout  $h \in H_2$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$h = x_0\sigma_0 - x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2 - x_3\sigma_3 = x^\mu\sigma_\mu$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les matrices de Pauli et  $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$  est un quadrivecteur de l'espace de Minkowski. On a alors  $\det h = x^\mu x_\mu$  et  $\text{Tr}h = 2x_0$ . Soit  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Alors  $A$  définit une application linéaire sur  $H_2$  par

$$h \mapsto AhA^\dagger$$

Il est facile de voir que  $\det(AhA^\dagger) = \det h = x^\mu x_\mu$ . Donc  $A$  définit une application linéaire  $\Lambda(A)$  sur les quadrivecteurs. Cette application linéaire préserve la norme minkowskienne. Donc  $\Lambda(A)$  est dans le groupe de Lorentz, et on peut montrer plus précisément que  $\Lambda(A) \in SO^0(1, 3)$ . L'application  $SL(2, \mathbb{C}) \ni A \mapsto \Lambda(A) \in SO^0(1, 3)$  est l'homomorphisme du revêtement. Le groupe  $SU(2)$  est un sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{C})$ . La restriction de cet homomorphisme à  $SU(2)$  donne l'homomorphisme du revêtement  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ .

L'algèbre de Lie (réelle) de  $SO^0(1, 3)$ ,  $\mathfrak{so}(1, 3) \subset \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ , admet pour base les six éléments donnés par

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & a_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & a_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & a_6 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3$  engendrent les rotations de  $\mathbb{R}^3$ , et  $a_4, a_5, a_6$  correspondent aux transformations de Lorentz habituelles (les « boosts »). La structure d'algèbre de Lie est donnée par les crochets

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= a_3 & [a_2, a_3] &= a_1 & [a_3, a_1] &= a_2 \\ [a_1, a_5] &= -a_6 & [a_2, a_4] &= a_6 & [a_3, a_4] &= -a_5 \\ [a_1, a_6] &= a_5 & [a_2, a_6] &= -a_4 & [a_3, a_5] &= a_4 \\ [a_4, a_5] &= a_3 & [a_5, a_6] &= a_1 & [a_6, a_4] &= a_2 \end{aligned}$$

et les autres sont nuls. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(1, 3)$  est simple et non compacte.

On va considérer des représentations de  $\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sur un espace vectoriel complexe. Dans ce cas, on peut prendre l'algèbre de Lie complexifiée de  $\mathfrak{so}(1, 3)$ . Une base sur  $\mathbb{C}$  plus commode pour cette algèbre de Lie est

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + ia_4) & a'_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + ia_5) & a'_3 &= \frac{1}{2}(a_3 + ia_6) \\ a'_4 &= \frac{1}{2}(a_1 - ia_4) & a'_5 &= \frac{1}{2}(a_2 - ia_5) & a'_6 &= \frac{1}{2}(a_3 - ia_6) \end{aligned}$$

Dans cette base, les crochets se découpent :

$$\begin{array}{lll} [a'_1, a'_2] = -a'_3 & [a'_2, a'_3] = -a'_1 & [a'_3, a'_1] = -a'_2 \\ [a'_4, a'_5] = -a'_6 & [a'_5, a'_6] = -a'_4 & [a'_6, a'_4] = -a'_5 \end{array}$$

et les autres sont nuls. On obtient ainsi deux algèbres de Lie  $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$  découplées :

$$\mathfrak{so}(1, 3)^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$$

Soit  $\{|j, m\rangle\}_{m=-j, \dots, j}$  et  $\{|j', m'\rangle\}_{m'=-j', \dots, j'}$  des bases de deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{su}(2)$ . En complexifiant ces représentations, on obtient des représentations irréductibles de  $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ . On représente  $J_x = -ia'_1$ ,  $J_y = -ia'_2$  et  $J_z = -ia'_3$  sur la base  $\{|j, m\rangle\}_{m=-j, \dots, j}$ , et  $J'_x = -ia'_4$ ,  $J'_y = -ia'_5$  et  $J'_z = -ia'_6$  sur la base  $\{|j', m'\rangle\}_{m'=-j', \dots, j'}$  comme on l'a fait auparavant. Alors les

$$\phi_{mm'}^{jj'} = |j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle$$

forment une base d'une représentation irréductible de  $\mathfrak{so}(1, 3)^{\mathbb{C}}$ , de dimension  $(2j+1)(2j'+1)$ . On note  $\Gamma^{jj'}$  cette représentation. Par exponentiation, elle donne une représentation irréductible de  $SL(2, \mathbb{C})$ , que l'on note de la même façon. Aucune de ces représentations ne donne une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(1, 3)$  par des matrices anti-hermitiennes. Par conséquent, toutes les représentations irréductibles de dimension finies de  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $L_+^{\uparrow}$  sont non unitaires. Une représentation  $\Gamma^{jj'}$  est une représentation du groupe de Lorentz restreint si et seulement si  $j + j'$  est entier.  $\Gamma^{0\frac{1}{2}}$  est la représentation de  $SL(2, \mathbb{C})$  dans laquelle chaque élément est envoyé sur lui-même.  $\Gamma^{\frac{1}{2}0}$  est sa représentation contragrédiente.  $\Gamma^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  est une représentation de dimension 4. C'est la représentation de  $L_+^{\uparrow} = SO^0(1, 3)$  qui envoie chaque élément sur lui-même.

### Les revêtements simplement connexes du groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz tout entier  $L$  admet plusieurs groupes de revêtements simplement connexes, car il n'est pas connexe. Nous allons décrire ces groupes.

Soit  $\pi : \tilde{L} \rightarrow L$  un tel groupe de revêtement. Le revêtement à deux feuillets  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^{\uparrow}$  est inclus dans ce revêtement. Donc  $\tilde{L} \rightarrow L$  est à deux feuillets. Cela signifie qu'au dessus de tout  $\Lambda \in L$ , on a deux éléments dans  $\tilde{L}$ , qu'on note  $[\Lambda]$  et  $[\bar{\Lambda}]$ , tels que  $\pi([\Lambda]) = \pi([\bar{\Lambda}]) = \Lambda$ . Pour fixer les notations, on prend  $[\mathbb{1}]$  et  $[\bar{\mathbb{1}}]$  les deux éléments de  $\tilde{L}$  au dessus de l'élément unité  $\mathbb{1} \in L$ . Ce sont des éléments de  $SL(2, \mathbb{C})$ . L'élément  $[\mathbb{1}]$  sera l'élément unité de  $\tilde{L}$ . Donc on a, pour tout  $\Lambda \in L$  :

$$[\bar{\mathbb{1}}][\Lambda] = [\Lambda][\bar{\mathbb{1}}] = [\bar{\Lambda}]$$

et

$$[\mathbb{1}][\bar{\Lambda}] = [\bar{\Lambda}][\mathbb{1}] = [\Lambda]$$

Les trois symétries  $I_s$ ,  $I_t$  et  $I_{st}$  admettent donc chacune deux éléments dans  $\tilde{L}$ . Pour décrire complètement  $\tilde{L}$ , il nous reste à donner la table de multiplication du groupe. Cela revient

à se donner la table de multiplication des éléments  $[\Lambda]$ ,  $[\bar{\Lambda}]$ ,  $[I_s]$ ,  $[\bar{I}_s]$ ,  $[I_t]$ ,  $[\bar{I}_t]$ ,  $[I_{st}]$  et  $[\bar{I}_{st}]$  pour  $\Lambda \in L_+^\dagger$ .

Nous pouvons définir  $[I_s][\Lambda]$  par

$$[I_s][\Lambda] = [I_s\Lambda]$$

L'autre solution serait  $[I_s][\Lambda] = [\bar{I}_s\bar{\Lambda}]$ , mais  $[I_s\Lambda]$  et  $[\bar{I}_s\bar{\Lambda}]$  sont complètement interchangeables. De même, on peut poser par définition

$$\begin{aligned} [\Lambda][I_s] &= [\Lambda I_s] \\ [I_t][\Lambda] &= [I_t\Lambda] \\ [\Lambda][I_t] &= [\Lambda I_t] \\ [I_{st}][\Lambda] &= [I_{st}\Lambda] \\ [\Lambda][I_{st}] &= [\Lambda I_{st}] \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons. Multiplions  $[I_s][\Lambda] = [I_s\Lambda]$  par  $[\bar{\mathbb{1}}]$ . On obtient alors  $[\bar{I}_s][\Lambda] = [\bar{I}_s\bar{\Lambda}] = [I_s][\bar{\Lambda}]$ . On a des relations analogues par les autres produits définis ci-dessus. Jusqu'à présent tous les choix effectués dans les définitions étaient sans conséquence. Par contre, les produits entre les relèvements des trois symétries ne peuvent pas être arbitraires. De  $I_s^2 = \mathbb{1}$ , on tire  $[I_s]^2 = [\mathbb{1}]$  ou  $[I_s]^2 = [\bar{\mathbb{1}}]$ . De même, on a  $[I_t]^2 = [\mathbb{1}]$  ou  $[I_t]^2 = [\bar{\mathbb{1}}]$  et  $[I_{st}]^2 = [\mathbb{1}]$  ou  $[I_{st}]^2 = [\bar{\mathbb{1}}]$  et de  $I_s I_t = I_{st} = I_t I_s$ , on déduit  $[I_s][I_t] = [I_{st}]$  ou  $[I_s][I_t] = [\bar{I}_{st}]$  et  $[I_t][I_s] = [I_{st}]$  ou  $[I_t][I_s] = [\bar{I}_{st}]$ . Toutes les combinaisons ne sont pas permises. Par exemple, prenons  $[I_s]^2 = [\mathbb{1}]$ ,  $[I_t]^2 = [\mathbb{1}]$ ,  $[I_{st}]^2 = [\bar{\mathbb{1}}]$  et  $[I_s][I_t] = [I_{st}]$ . Alors  $([I_s][I_t])([I_s][I_t]) = [I_{st}]^2 = [\bar{\mathbb{1}}]$ . Si  $[I_t][I_s] = [I_{st}]$ , alors  $[I_t][I_s] = [I_s][I_t]$ , et donc  $[I_s][I_t][I_s][I_t] = [I_s]^2[I_t]^2 = [\mathbb{1}]$ . Ce qui est contradictoire. Par conséquent, il faut prendre  $[I_t][I_s] = [\bar{I}_{st}]$ . En regardant toutes les possibilités, on se rend compte qu'il reste 8 combinaisons acceptables, qui donnent des groupes non isomorphes entre eux. Pour toutes ces combinaisons, on peut choisir  $[I_s][I_t] = [I_{st}]$  car l'autre solution conduit à des groupes isomorphes. Ces 8 groupes sont résumés dans le tableau suivant :

	$[I_s]^2$	$[I_t]^2$	$[I_{st}]^2$	$[I_t][I_s]$
$\tilde{L}_1$	$[\mathbb{1}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\mathbb{1}]$	$[I_{st}]$
$\tilde{L}_2$	$[\mathbb{1}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{I}_{st}]$
$\tilde{L}_3$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{I}_{st}]$
$\tilde{L}_4$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[I_{st}]$
$\tilde{L}_5$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{I}_{st}]$
$\tilde{L}_6$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\mathbb{1}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[I_{st}]$
$\tilde{L}_7$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\mathbb{1}]$	$[I_{st}]$
$\tilde{L}_8$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{\mathbb{1}}]$	$[\bar{I}_{st}]$

### Représentations irréductibles

Si  $\Gamma$  est une représentation irréductible d'un des  $\tilde{L}_a$ , alors sa réduction au sous-groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  est une représentation irréductible du type  $\Gamma^{jj'}$  pour  $j$  et  $j'$  entiers ou demi-

entiers. On peut alors montrer que le sous-espace vectoriel de la représentation  $\Gamma$  contient non seulement le sous-espace vectoriel de la représentation  $\Gamma^{jj'}$ , mais aussi celui de la représentation  $\Gamma^{j'j}$ . Si  $j = j'$ , l'espace vectoriel de la représentation  $\Gamma$  est celui de  $\Gamma^{jj}$ , et si  $j \neq j'$ , c'est la somme directe des espaces vectoriels de  $\Gamma^{jj'}$  et  $\Gamma^{j'j}$ .

On note  $\Gamma^{((j,j'),(j',j)),r}$  une telle représentation irréductible. Selon les valeurs de  $j$  et  $j'$ ,  $r$  peut prendre plusieurs valeurs ce qui signifie que la représentation irréductible n'est pas complètement fixée par le couple  $(j, j')$ . Pour  $j = j'$ ,  $r$  peut prendre 4 valeurs, pour  $j \neq j'$ , il peut prendre une ou deux valeurs.

On peut montrer que l'équation de Dirac correspond à une représentation irréductible de dimension 4 de la forme  $\Gamma^{((0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0))}$  ( $r$  n'admet qu'une seule valeur) de l'un des groupes de revêtement  $\tilde{L}_2, \tilde{L}_3, \tilde{L}_5, \tilde{L}_8$  (et pas des autres!). Si on impose que la fonction d'onde d'une antiparticule se transforme de la même façon par les inversions spatiales et temporelles que la fonction d'onde d'une particule, alors on ne peut prendre que le groupe de revêtement  $\tilde{L}_8$ .

## Chapitre 3

# Fibrés, connexions

Dans tout ce chapitre,  $G$  désigne un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Nous prendrons des variétés de classe  $C^\infty$ .

### 3.1. Notions de fibrés

*Références* : [2], [3], [4], [5], [9], [12], [14], [16], [18], [20].

Un fibré est une variété différentiable qui ressemble localement au produit cartésien d'un ouvert d'une variété et d'une « fibre ». C'est une généralisation du produit cartésien  $M \times F$  où  $M$  et  $F$  sont deux variétés,  $M$  étant la base et  $F$  la fibre. Cela signifie encore que dans un fibré, au-dessus de chacun des points de  $M$ , il y a une copie de  $F$ . Dans le cas du produit cartésien, ces copies sont « mises les unes à côté des autres », et on passe de l'une à l'autre en regardant toujours le même point de  $F$ . Dans le cas d'un fibré, le recollage des fibres ne se fait plus aussi trivialement. Mais pour s'en rendre compte, il ne faut pas regarder le fibré localement (c'est à dire à travers des ouverts de  $M$ , puisqu'on lui impose justement de ressembler sur ces ouverts à un produit cartésien), mais globalement : nous n'avons pas  $M \times F$ , mais une variété  $P$ , qui contient d'une certaine façon des copies de  $M$  et de  $F$ .

En fonction d'une éventuelle structure algébrique sur la variété fibre (espace vectoriel, groupe...), les fibrés pourront être classés grossièrement. Le premier exemple que nous allons donner représente le type de fibré le plus simple, et le plus important : le fibré principal, qui admet pour fibre un groupe de Lie. Nous définirons, en généralisant ce que nous aurons appris sur ce fibré, ce qu'est un fibré en général, avec une fibre quelconque. Enfin, nous verrons comment, à partir d'un fibré principal, nous pouvons construire d'autres fibrés qui lui sont associés.

### 3.1.1. Fibré principal

#### Généralités

Un fibré principal  $P$  est une variété différentiable. Localement, cette variété est difféomorphe à  $U \times G$  où  $U$  est un ouvert d'une variété  $M$  qui sera appelé la base de  $P$ .

Nous retrouvons là ce que nous voulions faire en introduisant la notion de variété : nous voulions que la variété ressemble localement à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas d'un fibré principal, le « modèle local » est le produit  $U \times G$ . Nous remarquons que  $G$  est pris en entier : c'est donc une localité sur  $M$  et non sur  $P$ . Cette analogie de construction doit toujours être présente à l'esprit, car nous verrons que nous serons confrontés à des problèmes du même genre que ceux rencontrés alors, notamment lors des raccordements d'ouverts de  $M$ .

La construction mathématique s'effectue comme suit.

#### Au dessus d'un point

Il existe une application différentiable surjective  $\pi : P \rightarrow M$ . En cela,  $P$  contient  $M$  (surjectivité). La **fibre** au dessus de  $x \in M$  sera par définition  $\pi^{-1}(x)$ , notée souvent  $P_x$ . Cette fibre est difféomorphe à  $G$ , et il existe une action à droite (attention!) de  $G$  sur  $P$ , notée  $\tilde{R}_g p = p \cdot g$  où  $p \in P$  et  $g \in G$  telle que :

- Pour  $g$  variant dans  $G$ ,  $p \cdot g$  reste toujours au dessus de  $\pi(p)$ , c'est à dire que  $p \cdot g$  reste dans la même fibre  $P_{\pi(p)}$ . Ceci s'exprime encore par l'égalité  $\pi(p) = \pi(p \cdot g)$ .
- Pour  $p$  fixé dans une fibre, chaque autre point de cette fibre est de la forme  $p \cdot g$ , pour un unique  $g$  dans  $G$ . En d'autres termes, la restriction de l'action à droite de  $G$  sur chaque fibre est transitive et libre.

La variété  $\pi^{-1}(x)$  est donc une copie de  $G$ , mais sans en avoir explicitement sa structure de groupe. Seules les structures de variétés différentiables sont communes.

#### Au dessus d'un ouvert

Pour l'instant, nous n'avons regardé que ce qui se passe au dessus d'un point de  $M$ . Regardons comment se rassemblent plusieurs de ces points, au dessus d'ouverts de  $M$ .

Le fibré  $P$  est **localement trivial**, c'est à dire que pour tout  $x \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x$  et un **difféomorphisme trivialisant**  $\phi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tel que

- $\pi(\phi(x, g)) = x$ , c'est à dire que  $(x, g) \in U \times G$  est envoyé dans la fibre  $\pi^{-1}(x)$ ;
- $\phi$  est compatible avec l'action de  $G$  sur  $P$  au sens suivant : si on note  $\phi_x : G \rightarrow \pi^{-1}(x)$ , pour  $x \in U$ , l'application  $\phi_x(g) = \phi(x, g)$ , alors on a  $\phi_x(ga) = \phi_x(g) \cdot a$  et  $\phi_x$  est le difféomorphisme qui identifie  $G$  à  $\pi^{-1}(x)$  (voir figure 3.1).

Cette définition donne un sens à « ressembler localement à  $U \times G$  ».

Un **système de trivialisations locales**  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  est un ensemble de couples  $(U_i, \phi_i)$  formés d'ouverts  $U_i$  constituant un recouvrement de  $M$ , et de difféomorphismes trivialisants  $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ . C'est la notion équivalente à celle d'atlas d'une variété.

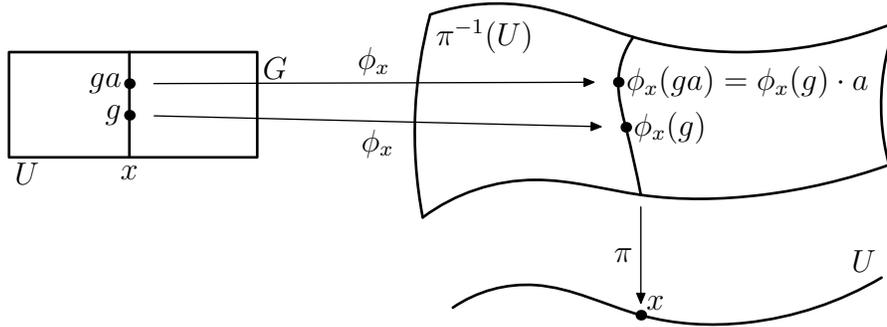


FIG. 3.1 – Trivialisation locale d'un fibré : au dessus de l'ouvert  $U$  de la variété de base, le fibré s'identifie à  $U \times G$ . Cette identification est compatible avec l'action à droite du groupe  $G$  sur chaque fibre.

### Fonctions de transition

Comme lors de la construction des variétés, nous devons faire face maintenant au problème des raccordements d'ouverts. Que se passe-t-il sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ? Comment se raccordent deux trivialisations ?

Pour cela, considérons  $x \in U_i \cap U_j$ , et  $p \in \pi^{-1}(x)$  fixés. Nous posons alors  $g_i = \phi_{i,x}^{-1}(p) \in G$  et  $g_j = \phi_{j,x}^{-1}(p) \in G$ . Ces deux éléments de  $G$  peuvent toujours être reliés par  $g_i = g_{ij}(x)g_j$  pour un  $g_{ij}(x) \in G$  (le fait de multiplier à gauche a son importance). *A priori*, cet élément de  $G$  dépend de  $p$  (voir figure 3.2). Examinons cette dépendance en  $p$  : prenons maintenant  $p \cdot g$  dans la même fibre. La condition de compatibilité avec l'action de  $G$  montre que  $g_i$  devient  $g_i g$  et  $g_j$  devient  $g_j g$ . La relation entre ces nouveaux éléments de  $G$  est donc obtenue avec le même  $g_{ij}(x)$  (puisque  $g_{ij}(x)$  multiplie à gauche). Nous voyons ainsi que  $g_{ij}(x)$  ne dépend pas de  $p \in \pi^{-1}(x)$ , mais seulement de  $x$ , comme nous l'avions anticipé dans la notation.

Nous remarquons alors que  $g_i = \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x}(g_j)$ . En y mettant  $g_j = e$ , et puisque  $g_{ij}(x)$  ne dépend pas de  $p$ , nous obtenons :

$$g_{ij}(x) = \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x}(e)$$

Les fonctions  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  sont appelées les **fonctions de transition** du fibré  $P$  (pour un système de trivialisations locales donné).

Il faut remarquer qu'une fonction de transition agit à gauche sur  $G$  (nous multiplions à gauche), et que l'action de  $G$  sur  $M$  se fait à droite. Ceci est important car nous avons utilisé le fait que ces deux actions commutent pour montrer l'indépendance de  $g_{ij}(x)$  par rapport à  $p$ .

Les fonctions de transitions ont des propriétés qui les caractérisent. Nous voyons facilement que

$$g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$$

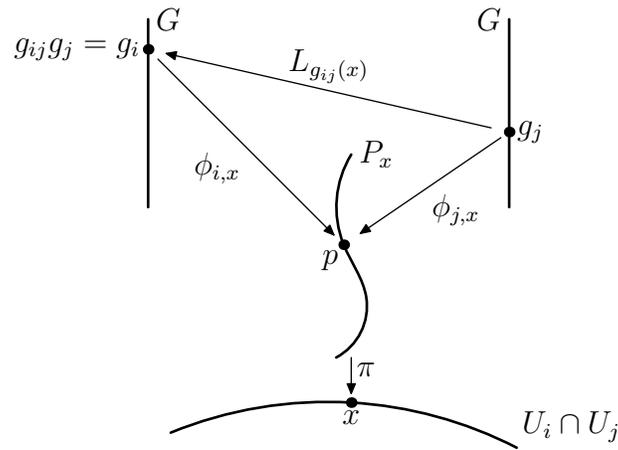


FIG. 3.2 – Le raccordement de deux trivialisations locales est obtenu par l'action à gauche du groupe  $G$  sur lui-même, et définit les fonctions de transition  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ .

et il est aisé de vérifier qu'au dessus de  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , nous avons

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = e$$

Enfin, nous avons

$$g_{ii}(x) = e$$

Les fonctions de transition sont donc les objets qui permettent de passer du local ( $U_i \times G$ ) au global ( $P$ ). Les trois relations ci-dessus sont des conditions nécessaires (et suffisantes) pour que ce passage soit possible, c'est-à-dire pour que la définition de  $P$  à partir des trivialisations locales soit cohérente.

### Vocabulaire

Il est temps maintenant de donner le vocabulaire :

- $P$  est l'**espace total** ;
- $M$  est la **variété base** ;
- $\pi$  est la **projection** ;
- $G$  est le **groupe de structure du fibré**. C'est lui en effet qui « gère » les transitions entre trivialisations. Il joue aussi ici le rôle de **fibre type**.

On note  $P(M, G)$  ce **fibré principal**.

En 2.2, nous avons vu que si un groupe de Lie  $G$  agit librement et différemment sur une variété différentiable  $P$ , et si la variété  $P/G = M$  existe, alors  $P(M, G)$  est un fibré principal. Nous avons aussi vu que si  $G$  est compact, alors  $M = P/G$  existe nécessairement dès que l'action est libre.

La notion de fibré principal que nous venons de donner se place dans le cadre différentiable. On peut introduire toutes ces notions dans le cadre topologique, où dans ce cas le groupe n'est que topologique.

### Morphismes de fibrés principaux

Considérons  $P(M, G)$  et  $Q(N, G)$  deux fibrés principaux de variétés bases *a priori* différentes, mais de même groupe de structure  $G$ . Une application différentiable  $\psi : P \rightarrow Q$  est un **morphisme de fibrés principaux** si  $\psi$  commute avec l'action à droite de  $G$  :

$$\psi(p \cdot g) = \psi(p) \cdot g$$

pour tous  $p \in P$  et  $g \in G$ . Ceci implique en particulier que  $\psi$  respecte les fibres :  $\psi(P_x)$  est inclus dans une fibre de  $Q$ . Donc  $\psi$  induit une application  $\tilde{\psi} : M \rightarrow N$  entre les variétés bases, telle que  $\psi(P_x) \subset Q_{\tilde{\psi}(x)}$ .

Cette notion de morphisme conduit tout naturellement à celle d'**isomorphisme de fibré principal**. Dans ce cas,  $\tilde{\psi}$  est un difféomorphisme entre les variétés bases. En général, on regroupe les fibrés principaux en classes d'isomorphie, car les objets que nous aurons l'occasion d'y introduire ne dépendent que de ces classes.

On dira qu'un fibré principal  $P(M, G)$  est **trivial** s'il est isomorphe au fibré  $M \times G$ .

### Changement de trivialisations locales

Soit  $(U, \phi)$  une trivialisations locale de  $P$ . Au dessus du même ouvert  $U$  de  $M$ , une autre trivialisations locale  $\phi' : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$  est nécessairement reliée à  $\phi$  par une application  $g : U \rightarrow G$  telle que

$$\phi'(x, h) = \phi(x, g(x)h)$$

pour tout  $x \in U$  et  $h \in G$ , puisqu'il suffit de poser  $g(x) = \phi_x^{-1} \circ \phi'_x(e)$ .

Si, au dessus de deux ouverts trivialisants  $U_i$  et  $U_j$  de  $M$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , on se donne deux trivialisations  $\phi_i, \phi_j$  et  $\phi'_i, \phi'_j$ , reliées entre elles par des applications  $g_i : U_i \rightarrow G$  et  $g_j : U_j \rightarrow G$ , alors les fonctions de transitions  $g_{ij}$  et  $g'_{ij}$  sur  $U_i \cap U_j$  reliant  $\phi_i$  à  $\phi_j$  d'une part et  $\phi'_i$  à  $\phi'_j$  d'autre part, satisfont à

$$g'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x)g_{ij}(x)g_j(x)$$

pour tout  $x \in U_i \cap U_j$ .

Ainsi, étant donné un système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $P$ , et un ensemble d'applications  $g_i : U_i \rightarrow G$ , on peut construire un nouveau système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi'_i)\}_{i \in I}$  de  $P$ , dans lequel les nouvelles fonctions de transitions sont reliées aux anciennes par l'expression ci-dessus.

En particulier, on peut montrer que les fonctions de transitions d'un fibré principal trivial peuvent toujours être mises sous la forme  $g_{ij}(x) = g_i^{-1}(x)g_j(x)$  pour des fonctions  $g_i : U_i \rightarrow G$ .

### Sections, trivialisations locales des sections

Nous avons déjà rencontré la notion de section lors de l'étude des champs de vecteurs, des formes différentielles et des champs de tenseurs. Une **section** sur  $P$  est une application  $S : M \rightarrow P$  telle que  $\pi \circ S = \text{Id}_M$ . C'est à dire que  $S(x) \in \pi^{-1}(x)$  pour tout  $x \in M$ . *A priori*, il n'est pas évident qu'une telle section existe (existence globale). Nous allons essayer de voir pourquoi.

Localement, au dessus de chaque ouvert  $U$  d'une trivialisatation locale  $(U, \phi)$  de  $P$ , nous avons des **sections locales trivialisantes** :

$$s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset P$$

définies par

$$s(x) = \phi(x, e)$$

Toute section locale  $S : U \rightarrow P$  s'écrit alors de façon unique  $S(x) = s(x) \cdot g(x)$  pour une application  $g : U \rightarrow G$ . Nous dirons que  $g$  est la **trivialisatation locale** de  $S$  pour la section locale trivialisante  $s$ . Remarquons que la donnée d'une section locale  $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  définit une trivialisatation locale  $(U, \phi)$  si nous posons  $\phi(x, g) = s(x) \cdot g \in \pi^{-1}(U)$  pour tous  $x \in U$  et  $g \in G$ . Se donner une section locale trivialisante d'un fibré principal ou une trivialisatation locale est donc équivalent. Dans le cas d'autres fibrés, cette remarque ne sera plus nécessairement vraie.

Soit donné maintenant un système de trivialisatations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ . Il est aisé de montrer que sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  les sections locales trivialisantes  $s_i$  associées sont reliées par les relations

$$s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$$

Une section globale  $S$  sur  $M$  peut se décomposer sur ces sections locales : sur chaque  $U_i$ , nous écrivons  $S(x) = s_i(x) \cdot S_i(x)$  où  $S_i(x) \in G$ . Les applications  $S_i$  forment un *système de trivialisatations locales* de  $S$ . Les sections locales  $s_i$  servent en quelque sorte de bases locales. La condition  $s_i(x) \cdot S_i(x) = s_j(x) \cdot S_j(x)$  sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  implique alors

$$S_i(x) = g_{ij}(x) S_j(x)$$

Ainsi, trivialisier la section globale  $S$  sur  $M$  consiste à associer à  $S : M \rightarrow P$  une collection d'applications (locales)  $S_i : U_i \rightarrow G$  qui vérifient des **formules de recollement**  $S_i = g_{ij} S_j$  sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Si maintenant nous voulons construire une section globale en la décomposant localement, ces relations doivent être satisfaites sur toute la variété  $M$ . Mais ceci n'est pas toujours possible, et nous avons le théorème important : *Un fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section globale.*

Nous voyons donc que l'existence d'une section globale sur un fibré principal est une condition très restrictive sur l'aspect global de ce fibré! Cet énoncé ne s'applique qu'aux fibrés principaux. Nous rencontrerons par la suite d'autres types de fibrés pour lesquels des sections globales existent toujours. On remarquera aussi que sur tout fibré principal il existe toujours des sections locales  $s : U \rightarrow P$  pour des ouverts assez petits  $U$  de  $M$ .

### Réduction du groupe de structure

Il peut arriver que les fonctions de transitions d'un fibré principal  $P$ , dont un système de trivialisations locales est  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , ne prennent pas leurs valeurs dans tout le groupe  $G$ , mais seulement dans un sous-groupe  $H$  de  $G$ , c'est à dire que pour tous  $i, j$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons,

$$\forall x \in U_i \cap U_j \quad g_{ij}(x) \in H$$

On peut alors considérer un sous-fibré de  $P$ , fibré principal de groupe de structure  $H$ , ayant ces fonctions de transitions. Chaque fibre de ce fibré est  $\phi_{i,x}(H)$  pour  $x \in M$ . Nous dirons que nous avons une **réduction du groupe de structure** si tel est le cas.

Dans certaines applications, il peut être souhaitable de réduire le groupe de structure, même si les  $g_{ij}(x)$  ne sont pas dans un sous-groupe  $H$  de  $G$ . Pour voir si cette réduction est possible, il faut essayer de changer le système de trivialisations locales pour que les fonctions de transitions soient à valeurs dans  $H$ . Pour changer de système de trivialisations locales, on se donne des applications

$$g_i : U_i \rightarrow G$$

Les nouvelles fonctions de transition sont alors

$$g'_{ij}(x) = g_i^{-1}(x)g_{ij}(x)g_j(x)$$

Nous pouvons donc réduire le groupe de structure si pour tout  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons

$$(g_i^{-1}g_{ij}g_j)(x) \in H$$

Mais le choix des applications  $g_i$  qui permettent de vérifier cette condition n'est pas toujours possible. C'est seulement lorsque ce choix est possible que nous pourrons réduire le groupe de structure du fibré. En général, lorsque cette réduction est possible, elle n'est pas unique, et on peut la caractériser par le choix d'une section (globale) d'un fibré associé à  $P$ , et que nous introduirons plus loin en 3.1.5.

### Exemple : le fibré des repères

Comme premier exemple, nous allons construire un fibré principal au dessus de toute variété  $M$ , le **fibré des repères**  $L(M)$ , de groupe de structure  $GL(n, \mathbb{R})$ . Au dessus de chaque point de  $M$ , la fibre de  $L(M)$  est l'ensemble des bases de l'espace tangent en ce point. Un point de  $L(M)$  est donc un repère, c'est à dire un point origine (un point de  $M$ ) et une base (de l'espace tangent au dessus de ce point). Considérons l'ensemble de toutes les bases au dessus de  $x \in M$  : nous le notons  $L_x(M)$ .  $GL(n, \mathbb{R})$  agit dessus à droite par la relation

$$\{e_{a|x}\} \mapsto \{e_{b|x}A_a^b\}$$

pour tous  $\{e_{a|x}\} \in L_x(M)$  et  $(A_a^b) \in GL(n, \mathbb{R})$ . Nous définissons alors la variété différentiable

$$L(M) = \bigcup_{x \in M} L_x(M)$$

Cette variété est un fibré principal de groupe de structure  $GL(n, \mathbb{R})$ . L'action de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $L(M)$  est donc donnée par  $(x, \{e_{a|x}\}) \mapsto (x, \{e_{b|x} A_a^b\})$ , avec  $(A_a^b) \in GL(n, \mathbb{R})$ .

Pour construire des trivialisations locales de  $L(M)$ , nous prenons un atlas de  $M$ . Nous savons alors qu'au dessus de chaque carte locale, les  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  fournissent un repère local. Un système de trivialisations locales de  $L(M)$  est alors donné par les ouverts  $U_i$  d'un atlas de  $M$  et les difféomorphismes

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ (x, (X^k_a)) &\mapsto e_{a|x} = X^k_a \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_x \end{aligned}$$

Il est aisé de montrer que ce sont bien des difféomorphismes.

Si nous changeons de carte locale, nous changeons de trivialisations. Nous savons que si  $e_a = X^k_a \frac{\partial}{\partial x^k} = Y^k_a \frac{\partial}{\partial y^k}$ , alors

$$X^k_a = \frac{\partial x^k}{\partial y^\ell} Y^\ell_a$$

La fonction de transition  $x \mapsto g_{xy}(x) = (\partial x^k / \partial y^\ell)|_x$  est bien un élément de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Exemple : quotient d'un groupe de Lie

Soit  $G$  un groupe de Lie, et  $H$  un sous-groupe de Lie de ce groupe. Nous posons  $G/H$  la variété quotient pour la relation d'équivalence sur  $G$  :  $g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in H, g = g'h$ . Alors  $G$  peut être considéré comme fibré principal, de groupe de structure  $H$ , de base  $G/H$ , et de projection  $\pi : G \rightarrow G/H$ , projection du quotient. L'action à droite de  $H$  sur  $G$  est simplement  $g \mapsto gh$  pour  $h \in H$ .

### 3.1.2. Fibré de fibre quelconque

#### Définition

Dans un fibré principal, la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est difféomorphe au groupe  $G$ . Nous allons généraliser cette structure en se donnant pour fibre un espace quelconque  $F$  (qui sera une variété afin que l'espace total soit une variété) sur lequel  $G$  agit à gauche par l'action  $\ell_g : F \rightarrow F$ . Pour remplacer la fibre  $G$  par la nouvelle fibre  $F$ , nous avons besoin de cette action : c'est à travers elle que les fonctions de transition joueront leur rôle de recollement sur les trivialisations de l'espace total.

Nous dirons que  $(E, \pi, M, F, G)$  est un **fibré localement trivial de groupe de structure  $G$**  (ou plus brièvement fibré) si

- $E$  est une variété différentiable, dite **espace total**.
- $M$  est une variété différentiable, dite **variété base**.
- $F$  est une variété différentiable, dite **fibre type**.
- $\pi : E \rightarrow M$  est une application surjective, différentiable, telle que  $\pi^{-1}(x) = E_x$  est difféomorphe à  $F$ .  $\pi$  est la **projection**.

- $G$  groupe de Lie, appelé **groupe de structure**, agit sur  $F$  à gauche par  $\ell_g : F \rightarrow F$ .
- Pour tout  $x \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x$  et un difféomorphisme  $\phi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$  vérifiant  $\pi \circ \phi(y, f) = y$  pour tout  $y \in U$  et  $f \in F$ . Le couple  $(U, \phi)$  est une **trivialisatation locale** de  $E$ .  $\phi_x : F \rightarrow \pi^{-1}(x)$  est donc un difféomorphisme. Un ensemble  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de trivialisations locales où les  $U_i$  forment un recouvrement de  $M$  est un **système de trivialisations locales** de  $E$ .
- Il existe un système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  tel que sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , la **fonction de transition**  $t_{ij}(x) = \phi_{i,x}^{-1} \circ \phi_{j,x} : F \rightarrow F$  soit de la forme  $t_{ij}(x) = \ell_{g_{ij}(x)}$ . Si nous avons  $p = \phi_{i,x}(f_i) = \phi_{j,x}(f_j)$ , alors nous avons  $f_i = t_{ij}(x)f_j = \ell_{g_{ij}(x)}f_j$ .

Les  $t_{ij}$  sont donc les fonctions de transition du fibré, pour le système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , et vérifient

$$t_{ii} = \text{Id}_F \quad t_{ij} = t_{ji}^{-1} \quad t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \text{Id}_F$$

comme dans le cas du fibré principal.

Toutes ces conditions sont bien sûr analogues à celles introduites dans la construction d'un fibré principal. La différence essentielle se situe au niveau des fonctions de transitions : dans un fibré principal, nous avons quelque chose de la forme  $g_{ij}(x)g$  où  $g \in G$ , c'est à dire que  $G$  agit à gauche sur lui-même par multiplication, alors qu'ici nous avons  $\ell_{g_{ij}(x)}f$  où  $f \in F$ , avec  $g_{ij}(x) \in G$ , c'est à dire que  $G$  agit sur  $F$  grâce à l'action  $\ell$ .

La dernière condition impose que les recollements des trivialisations locales se fassent grâce à des fonctions de transition à valeurs dans  $G$  (à travers l'action  $\ell$  sur  $F$ ). Sans cette condition, ces fonctions de transitions  $t_{ij}$  seraient en toute généralité à valeurs dans  $\text{Diff}(F)$ , le groupe des difféomorphismes de  $F$ , qui est *a priori* un groupe beaucoup plus grand que  $G$  ( $G$  est un groupe de Lie de dimension finie, ce qui n'est pas le cas de  $\text{Diff}(F)$ ).

## Sections, trivialisatation de sections

Une **section** du fibré  $E$  est une application différentiable  $S : M \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ S = \text{Id}_M$ . On peut parler des **sections locales** au dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$  ( $S : U \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ S = \text{Id}_U$ ). On note  $\Gamma(M, E)$  ou  $\Gamma(E)$  l'espace des sections de  $E$ ,  $\Gamma(U, E)$  l'espace des sections locales au dessus de  $U$ .

Soit  $(U, \phi)$  une trivialisatation locale de  $E$ . Une section  $S$  peut se trivialisier localement en une application  $f : U \rightarrow F$  en posant  $f(x) = \phi_x^{-1}(S(x))$ . En utilisant un système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $E$ , on construit un ensemble de trivialisations  $f_{i,S} : U_i \rightarrow F$  de  $S$ . Ces applications sont cependant reliées entre elles par la condition de cohérence

$$S(x) = \phi_{i,x}(f_{i,S}(x)) = \phi_{j,x}(f_{j,S}(x))$$

pour tout  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Les trivialisations locales de  $S$  sont donc reliées par la relation

$$f_{i,S}(x) = t_{ij}(x)f_{j,S}(x)$$

pour tout  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Réciproquement, si on se donne un ensemble d'applications  $f_{i,S}$  vérifiant ces relations, alors elles définissent une section  $S$  de  $E$ . Un tel ensemble de  $f_{i,S}$  est un **système de trivialisations locales de  $S$** .

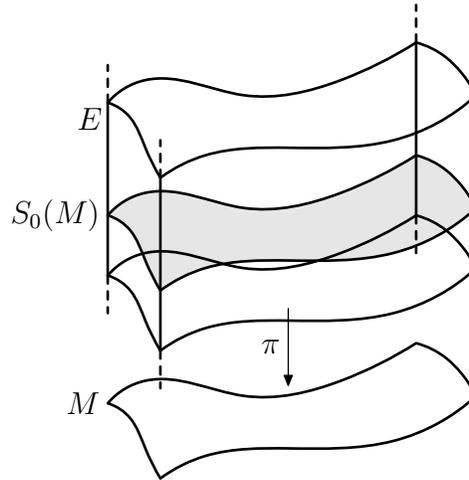


FIG. 3.3 – La section nulle  $S_0$  d'un fibré vectoriel  $E$  permet d'identifier  $M$  à une sous-variété de  $E$ .

### 3.1.3. Fibré vectoriel

#### Définitions

Un **fibré vectoriel** est un fibré dont la fibre type  $V$  est un espace vectoriel et dont chaque fibre  $E_x$  est aussi un espace vectoriel. Nous demandons donc naturellement que pour toute trivialisatation locale  $(U, \phi)$  de  $E$ ,  $\phi_x : V \rightarrow E_x$  soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, et nous prendrons comme action de  $G$  sur  $V$  une représentation linéaire. Le **rang d'un fibré vectoriel** est la dimension de sa fibre.

Les sections d'un fibré vectoriel héritent de la structure vectorielle : elle s'additionnent, se multiplient par des scalaires, et même par des fonctions de  $M$  vers  $\mathbb{R}$ . Ainsi, nous avons une application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (f, S) &\mapsto fS \end{aligned}$$

définie par  $(fS)(x) = f(x)S(x)$  pour tout  $x \in M$ . Cette application fait de  $\Gamma(E)$  un module sur  $\mathcal{F}(M)$ .

Un tel fibré admet toujours des sections globales, par exemple la section nulle, que nous noterons  $S_0$  : en chaque point nous prenons l'élément nul de l'espace vectoriel  $V$ , c'est à dire que localement nous avons  $S_0(x) = \phi_{i,x}(0)$ . Cela définit bien une section globale car sur tout  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons  $t_{ij}(x)0 = 0$  (puisque  $G$  se représente linéairement sur  $V$ ) donc le raccordement est assuré sur tout  $M$ . Il est facile de voir que  $S_0(M) \subset E$  s'identifie de façon canonique à  $M$  elle-même. On peut donc voir  $M$  comme une sous-variété de  $E$  (voir Figure 3.3).

Il peut arriver que l'espace vectoriel  $V$  soit un espace vectoriel complexe. Dans ce cas,

chaque fibre est un espace vectoriel complexe, la structure différentiable est obtenue en identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ , et la linéarité des applications se fait sur  $\mathbb{C}$ . Nous pouvons considérer l'ensemble des fonctions sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , noté  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(M)$ ; alors  $\Gamma(E)$  est un module sur  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(M)$ .

Puisque le groupe  $G$  se représente linéairement sur  $V$ , le groupe de structure est nécessairement un sous-groupe de  $GL(V)$ . On peut aussi le considérer comme un sous-groupe de  $GL(r, \mathbb{R})$  (ou  $GL(r, \mathbb{C})$  si  $V$  est complexe) où  $r$  est la dimension de  $V$  (et le rang de  $E$ ).

Nous avons déjà rencontré des fibrés vectoriels :  $TM$ ,  $T^*M$ ,  $T^{(s,r)}M$  sont des fibrés vectoriels dont le groupe de structure est  $GL(n, \mathbb{R})$ . Nous retrouverons ces fibrés en 3.5.1.

### Métriques de fibré

Plaçons nous dans le cas où  $E$  est un fibré vectoriel, de fibre type  $V$ . Sur chaque espace vectoriel  $E_x$ , nous pouvons supposer que nous avons une forme bilinéaire symétrique

$$h_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous dirons que  $h$  est de classe  $C^\infty$ , si, pour toutes sections locales  $S_1$  et  $S_2$  de classe  $C^\infty$  au dessus d'un ouvert  $U \subset M$ ,

$$h(S_1, S_2) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction  $C^\infty$ . Nous dirons que  $h$  est **non dégénérée**, si, pour tout  $x \in M$ , la condition  $h_x(S|_x, S'|_x) = 0$  pour tout  $S|_x \in E_x$  implique que  $S'|_x = 0$ . Une telle forme bilinéaire de classe  $C^\infty$  non dégénérée sur  $E$  sera appelée une **métrique de fibré vectoriel**.

Dans le cas où  $V$  est un espace vectoriel réel,  $h$  sera en général un produit scalaire. Mais si  $V$  est un espace vectoriel complexe, nous prendrons pour  $h$  un produit hermitien :

$$h_x(\lambda S|_x, \mu S'|_x) = \bar{\lambda} h_x(S|_x, S'|_x) \mu$$

pour tous  $x \in M$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $S|_x, S'|_x \in E_x$ .

Nous avons vu que l'espace  $\Gamma(E)$  des sections d'un fibré vectoriel est un module sur  $\mathcal{F}(M)$ . Une métrique de fibré  $h$  sur  $E$  définit alors un produit  $\mathcal{F}(M)$ -linéaire sur  $\Gamma(E)$  à valeurs dans  $\mathcal{F}(M)$  :

$$\Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

en posant

$$h(S, S')(x) = h_x(S(x), S'(x))$$

On peut montrer que tout fibré vectoriel dont la base est une « bonne » variété admet une métrique de fibré.

Sur le fibré vectoriel  $TM$ , une métrique de fibré est une métrique sur  $M$ , au sens défini en 1.4.1.

### Morphismes de fibrés vectoriels

Soient  $E$  et  $E'$  deux fibrés vectoriels au dessus de  $M$ . Une application  $\psi : E \rightarrow E'$  est un **morphisme de fibrés vectoriels** si  $\psi(E_x) \subset E'_x$  pour tout  $x \in M$  et si  $\psi$  restreinte à  $E_x$  est linéaire. La notion d'isomorphisme de fibrés vectoriels est alors immédiate. En général, les fibrés vectoriels sont regroupés en classes d'isomorphie. Dans la suite, on ne distinguera donc pas deux fibrés vectoriels isomorphes.

#### 3.1.4. Opérations sur les fibrés

Nous allons décrire ici quelques opérations simples qu'il est possible de réaliser sur des fibrés.

##### Quotient d'un fibré principal par un sous-groupe fermé

Soit  $P(M, G)$  un fibré principal de groupe de structure  $G$ . Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Alors on a vu que  $G/H$  est une variété différentiable. Chaque point de  $G/H$  est une classe d'équivalence qu'on note  $gH$  pour  $g \in G$ .  $G$  agit de façon évidente à gauche sur  $G/H$ .

Sur  $P$ , on peut considérer la relation d'équivalence  $p \sim p'$  si et seulement si il existe  $h \in H$  tel que  $p' = p \cdot h$ . Alors on note  $P/H$  l'espace quotient pour cette relation. La projection du fibré  $\pi : P \rightarrow M$  passe au quotient et donc définit une projection  $\pi' : P/H \rightarrow M$ . Cette projection fait de  $P/H$  un fibré au dessus de  $M$ , de fibre type  $G/H$  et de groupe de structure  $G$ . C'est le **fibré quotient de  $P$  par  $H$** .

L'importance de ce fibré réside dans le résultat suivant : la donnée d'une réduction du groupe de structure de  $P$  au sous-groupe  $H$  est équivalente à la donnée d'une section de  $P/H$ .

En effet, notons  $\pi_P : P \rightarrow P/H$  la projection quotient par  $H$ . Soit  $Q(M, H) \subset P(M, G)$  une réduction de  $P$  de groupe de structure  $H$ . Notons  $i : Q \hookrightarrow P$  l'inclusion. Alors l'application  $\pi_P \circ i : Q \rightarrow P/H$  satisfait à  $(\pi_P \circ i)(q \cdot h) = (\pi_P \circ i)(q)$  pour tout  $q \in Q$  et  $h \in H$ . Elle définit donc une section  $s : M \rightarrow P/H$  par  $s(x) = (\pi_P \circ i)(q)$  pour n'importe quel  $q \in \pi_Q^{-1}(x)$  où  $\pi_Q$  est la projection de  $Q$  sur  $M$ . Réciproquement, soit  $s : M \rightarrow P/H$  une section de  $P/H$ . Soit  $Q_x = \pi_P^{-1}(s(x)) \subset P_x$  une sous-fibre de  $P$ . Alors  $Q = \cup_{x \in M} Q_x$  est une réduction de  $P$  de groupe de structure  $H$ .

##### Somme directe de fibrés vectoriels

Soient  $(E, \pi, M, V, G)$  et  $(E', \pi', M, V', G')$  deux fibrés vectoriels au dessus de la même variété de base  $M$ . Nous allons définir un nouveau fibré vectoriel au dessus de  $M$ , noté  $E \oplus E'$ , appelé **somme directe de Whitney** de  $E$  et  $E'$ , dont la fibre type sera la somme directe  $V \oplus V'$ .

Par définition, nous posons

$$E \oplus E' = \{(k, k') \in E \times E' \mid \pi \times \pi'(k, k') = (x, x)\}$$

Ainsi, de la variété  $E \times E'$ , nous ne retenons que les couples dont les deux points sont au dessus du même point de  $M$ . Il est facile de voir que cette somme directe n'est autre que le fibré

$$E \oplus E' = \bigcup_{x \in M} E_x \oplus E'_x$$

Regardons ce fibré à travers un système de trivialisations locales. Pour cela, nous supposons, pour simplifier, que les ouverts de  $M$  qui forment les deux systèmes de trivialisations locales de  $E$  et  $E'$  sont les mêmes. Nous les notons  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  et  $\{(U_i, \phi'_i)\}_{i \in I}$ . Au dessus de  $U_i \subset M$ , nous avons alors la trivialisation suivante de  $E \oplus E'$  :

$$\begin{aligned} U_i \times (V \oplus V') &\rightarrow E \oplus E' \\ (x, v + v') &\mapsto \phi_i(x, v) + \phi'_i(x, v') = (\phi_i(x, v), \phi'_i(x, v')) \in E \times E' \end{aligned}$$

Nous rappelons qu'un élément de  $V \oplus V'$  peut aussi bien se noter  $v + v'$  que  $(v, v')$  avec  $\lambda(v, v') = \lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v' = (\lambda v, \lambda v')$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Il est clair que toutes ces applications forment un système de trivialisations locales de  $E \oplus E'$ .

Regardons maintenant les fonctions de transition de ce nouveau fibré. Si  $t_{ij}$  et  $t'_{ij}$  désignent les fonctions de transition de  $E$  et  $E'$  au dessus de  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors la fonction de transition de  $E \oplus E'$  au dessus de  $U_i \cap U_j$  est

$$t_{ij}^{\oplus} = \begin{pmatrix} t_{ij} & 0 \\ 0 & t'_{ij} \end{pmatrix} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(V \oplus V')$$

où donc, si  $x \in U_i \cap U_j$  et si  $v + v' \in V \oplus V'$ ,

$$t_{ij}^{\oplus}(x)(v + v') = t_{ij}(x)v + t'_{ij}(x)v'$$

Le groupe de structure de ce nouveau fibré est le groupe  $G \times G'$ , défini comme suit :

- La multiplication de  $(g_1, g'_1)$  par  $(g_2, g'_2)$  est le couple  $(g_1 g_2, g'_1 g'_2)$  ;
- L'unité est le couple  $(e, e')$  où  $e$  et  $e'$  sont les unités de  $G$  et  $G'$  ;
- L'inverse de  $(g, g')$  est  $(g^{-1}, g'^{-1})$ .

Notons  $\ell$  et  $\ell'$  les représentations de  $G$  et  $G'$  sur  $V$  et  $V'$  respectivement, qui apparaissent dans la définition des fibrés  $E$  et  $E'$ . Nous pouvons prolonger la représentation  $\ell$  en une représentation de  $G \times G'$  sur  $V$  par la formule

$$\ell_{(g, g')}v = \ell_g v$$

De même pour  $\ell'$ , qui devient une représentation de  $G \times G'$  sur  $V'$ . Alors la représentation de  $G \times G'$  qui définit le fibré  $E \oplus E'$  est la représentation somme directe de ces prolongement de  $\ell$  et  $\ell'$  à  $G \times G'$  :

$$t_{ij}^{\oplus} = (\ell \oplus \ell')_{(g_{ij}, g'_{ij})}$$

Cette somme directe se révèle importante dans l'étude des fibrés vectoriels car elle permet de « détordre » un fibré vectoriel au sens suivant :

**Théorème de Swan** : soit  $E$  un fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte  $M$ . Alors il existe un fibré vectoriel  $E'$  au-dessus de  $M$  tel que

$$E \oplus E' = M \times \mathbb{R}^m$$

pour un  $m \in \mathbb{N}$ .

### Produit tensoriel de fibrés vectoriels

Avec les mêmes notations que ci-dessus, nous allons définir un nouveau fibré vectoriel au dessus de  $M$ , noté  $E \otimes E'$ , appelé **produit tensoriel** de  $E$  et  $E'$ , dont la fibre type sera l'espace vectoriel  $V \otimes V'$ . Par définition, ce fibré vectoriel est

$$E \otimes E' = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes E'_x$$

Les trivialisations locales de ce fibré sont les applications

$$\begin{aligned} U_i \times (V \otimes V') &\rightarrow E \otimes E' \\ (x, v \otimes v') &\mapsto \phi_i(x, v) \otimes \phi'_i(x, v') \in E_x \otimes E'_x \end{aligned}$$

Les fonctions de transitions sont données par

$$t_{ij}^{\otimes} = t_{ij} \otimes t'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(V \otimes V')$$

avec  $t_{ij}^{\otimes}(x)(v \otimes v') = t_{ij}(x)v \otimes t'_{ij}(x)v'$ .

Il est facile de voir que le groupe de structure de  $E \otimes E'$  est  $G \times G'$ , et sa représentation sur  $V \otimes V'$  est la représentation produit tensoriel des prolongements des représentations  $\ell$  et  $\ell'$  à  $G \times G'$ . Dans le cas où  $E$  et  $E'$  ont même groupe de structure  $G$ , le groupe de structure de  $E \otimes E'$  est aussi  $G$  et la représentation est le produit tensoriel des représentations.

### Fibré dual, fibré des endomorphismes...

Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $M$ , de fibre type  $V$ . Nous définissons le **fibré dual** de  $E$ , noté  $E^*$ , par

$$E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$$

de fibre type  $V^*$ . La représentation de  $G$  qui intervient dans ce fibré est la représentation contragrédiente  $\ell^c$  de  $\ell$  sur  $V^*$ .

Il existe un couplage entre les sections des fibrés  $E$  et  $E^*$  à valeurs dans les fonctions sur  $M$  en posant

$$\langle S, \alpha \rangle(x) = \langle S(x), \alpha(x) \rangle$$

pour tout  $x \in M$ ,  $S \in \Gamma(E)$  et  $\alpha \in \Gamma(E^*)$ .

De la même façon, nous définissons le **fibré des endomorphismes** de  $E$  par

$$\text{End}(E) = \bigcup_{x \in M} \text{End}(E_x)$$

où  $\text{End}(E_x)$  est l'algèbre des endomorphismes de  $E_x$ . La fibre type de ce fibré est l'algèbre des endomorphismes de  $V$ , que l'on sait être isomorphe à  $V \otimes V^*$ , et la représentation de  $G$  est  $\ell \otimes \ell^c$  dans cet identification. On a bien sûr l'identification  $\text{End}(E) = E \otimes E^*$ .

Il est facile de voir que les sections de ce fibré forment une algèbre (pour le produit au dessus des points de  $M$ ) et que les sections de  $E$  forment un module à gauche sur cette algèbre.

Nous pouvons définir d'autres fibrés vectoriels en utilisant des produits tensoriels de  $E$  et  $E^*$ . Des exemples de tels fibrés sont  $TM$ ,  $T^*M$  et  $T^{(s,r)}M$ . Mais nous pouvons aussi utiliser le produit antisymétrisé, et construire des fibrés  $\bigwedge^r E$  dont la fibre type est  $\bigwedge^r V$ . Comme nous l'avons déjà vu, les  $r$ -formes différentielles sur une variété  $M$  sont les sections d'un fibré de ce type :  $\bigwedge^r T^*M$ .

Soit  $E$  un fibré vectoriel complexe en droites, c'est à dire de fibre  $\mathbb{C}$ , et soit  $\rho$  la représentation de  $G$  sur  $\mathbb{C}$  (c'est à dire  $\rho(g) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  pour tout  $g \in G$ ) qui lui est associée. En fait, nous pouvons toujours réduire le groupe de structure à  $U(1) = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ , et la représentation est la multiplication dans  $\mathbb{C}$  par l'élément du groupe.

Le fibré vectoriel dual  $E^*$  a pour fibre lui aussi  $\mathbb{C}$ , que l'on identifie à son dual pour le produit usuel, et pour représentation  $\rho^c$ , la représentation contragrédiente de  $\rho$ . La fibre de  $E^* \otimes E$  est alors  $\mathbb{C}$ , et la représentation est  $\rho^c \otimes \rho$ , chacune agissant par multiplication sur le même  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $g \in G$ , tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  et tout  $a \in \mathbb{C}$ , nous avons en effet  $(\rho^c \otimes \rho)(g)(\alpha \otimes a) = \rho^c(g)\alpha\rho(g)a$  (le produit tensoriel se fait sur  $\mathbb{C}$ ). Or, par définition, nous avons ici  $\rho^c(g) = \rho(g^{-1})$ . La représentation  $\rho^c \otimes \rho$  est donc triviale. Par conséquent, le fibré  $E^* \otimes E$  est un fibré trivial de fibre  $\mathbb{C}$ , et l'algèbre de ses sections n'est autre que l'algèbre des fonctions sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Ainsi, le produit tensoriel définit sur les classes d'isomorphie des fibrés complexes en droites sur une variété  $M$  une loi de composition interne, qui induit une structure de groupe, d'élément neutre la classe du fibré trivial  $M \times \mathbb{C}$ .

### Fibré des repères, fibré orientable

Comme ci-dessus, soit  $E$  un fibré vectoriel au dessus de  $M$ , de fibre type  $V$ , espace vectoriel réel de dimension  $r$ . Pour tout  $x \in M$ , notons  $L_x(E)$  l'ensemble des bases de l'espace vectoriel  $E_x$ . Alors

$$L(E) = \bigcup_{x \in M} L_x(E)$$

est un fibré principal de groupe de structure  $GL(V)$ . C'est le **fibré des repères de  $E$** . La démonstration est bien sûr essentiellement la même que dans le cas du fibré des repères de  $TM$  que nous avons déjà considéré.

Si  $h$  est une métrique de fibré sur  $E$ , définie positive, alors on peut considérer au dessus de  $x \in M$  l'ensemble  $O_x(E)$  des bases orthonormées de  $E_x$  pour le produit scalaire  $h_x$ . Le fibré

$$O(E) = \bigcup_{x \in M} O_x(E)$$

est un fibré principal de groupe de structure  $O(r)$ . C'est une réduction du fibré principal  $L(E)$ . Réciproquement, une réduction du fibré  $L(E)$  au sous-groupe  $O(r)$  définit une mé-

trique de fibré sur  $E$ , puisqu'on connaît alors les bases orthonormées pour cette métrique en chaque point de  $M$ .

Sur l'espace vectoriel  $V \simeq \mathbb{R}^r$ , la donnée d'un produit scalaire défini positif est équivalente à la donnée d'une classe d'équivalence dans  $GL(r, \mathbb{R})/O(r)$ . En effet, la donnée d'un tel produit scalaire équivaut à la donnée de l'espace de ses bases orthonormées.  $GL(r, \mathbb{R})$  agit à droite sur l'ensemble des bases de  $\mathbb{R}^n$ . Par cette action,  $O(r)$  préserve l'espace des bases orthonormées du produit scalaire, d'où l'équivalence. On remarquera alors que sur un fibré vectoriel  $E$  de fibre  $V \simeq \mathbb{R}^r$ , la donnée d'une métrique est équivalente à la donnée d'un élément de  $GL(r, \mathbb{R})/O(r)$  en tout point de  $M$ , c'est à dire d'une section du fibré  $L(E)/O(r)$ . Nous retrouvons ainsi que toute réduction du fibré  $L(E)$  au sous-groupe  $O(r)$  équivaut à la donnée d'une telle section.

Dans le cas où l'on peut réduire le groupe de structure à  $SO(r)$ , on dit que le fibré vectoriel  $E$  est **orientable**. Cette réduction n'est pas toujours possible, et dépend de la structure globale de  $E$ . En particulier, le fibré vectoriel  $TM$  est orientable si et seulement si  $M$  est une variété orientable.

Si  $E$  est un fibré vectoriel de fibre complexe, munie d'une métrique hermitienne, alors on peut réduire le fibré des repères à un fibré principal de groupe de structure  $U(r)$  en considérant les bases unitaires pour le produit hermitien. Dans le cas où ce groupe peut être réduit à  $SU(r)$ , on dira que  $E$  est orientable.

Il faut donc retenir de ces constructions deux choses : à tout fibré vectoriel on peut associer un fibré principal de façon canonique et si le fibré vectoriel est munie d'une métrique, alors on peut réduire le groupe de structure de ce fibré principal à un groupe du type  $O(r)$  ou  $U(r)$ . Comme les fonctions de transitions du fibré des repères et du fibré vectoriel sont les mêmes, cette réduction nous permet de considérer des fibrés vectoriels de groupe de structure  $O(r)$  ou  $U(r)$ .

### Image réciproque d'un fibré

Soit  $E$  un fibré de type quelconque au-dessus de  $M$ , de fibre type  $F$ , de projection  $\pi$ , et soit  $f : N \rightarrow M$  une application différentiable entre deux variétés  $N$  et  $M$ . On définit le **fibré image réciproque**  $f^*E$  de  $E$  par  $f$  sur  $N$  en posant

$$f^*E = \{(x, p) \in N \times E \mid f(x) = \pi(p)\}$$

En d'autres termes, la fibre au dessus de  $x \in N$  est  $E_{f(x)}$ .

On peut associer à toute trivialisations locale  $(U, \phi)$  de  $E$  la trivialisations locale de  $f^*E$  donnée par  $(f^{-1}(U), f^*\phi)$ , où  $f^*\phi(x, v) = \phi(f(x), v)$  pour tous  $x \in N$  et  $v \in F$ .

L'image réciproque commute avec la somme directe, le produit tensoriel et les autres opérations définies auparavant sur les fibrés vectoriels.

### Sous-fibré vectoriel, fibré quotient, fibré normal, fibré orthogonal

Soit  $E$  un fibré vectoriel au dessus de  $M$ . Un **sous-fibré vectoriel de  $E$**  est un fibré  $F$  au dessus de  $M$  tel que chaque fibre  $F_x$  soit un sous-espace vectoriel de la fibre  $E_x$  pour

tout  $x \in M$ . Dans cette situation, on peut considérer le **fibré vectoriel quotient**  $E/F$  dont la fibre au dessus de  $x \in M$  est l'espace vectoriel quotient  $E_x/F_x$ .

Soit maintenant  $N$  une sous-variété de  $M$  et  $i : N \hookrightarrow M$  l'inclusion. Au dessus de  $N$ , on peut considérer le fibré image réciproque par  $i$  du fibré vectoriel  $TM$ , que nous notons  $TM|_N$ . En effet, ce fibré n'est autre que la restriction du fibré  $TM$  à la variété de base  $N$ . Ce fibré vectoriel  $TM|_N$  admet pour sous-fibré vectoriel le fibré tangent à  $N$  :  $TN$ . Le fibré quotient

$$\nu(N) = TM|_N/TN$$

est appelé le **fibré normal à  $N$  dans  $M$** .

Dans le cas où  $M$  admet une métrique riemannienne, c'est-à-dire que  $TM$ , et donc  $TM|_N$ , admet une métrique de fibré vectoriel, on peut introduire dans chaque fibre  $T_xM$  au dessus de  $x \in N$  le complémentaire orthogonal de  $T_xN$ , que nous notons  $T_xN^\perp$ . Le fibré

$$TN^\perp = \bigcup_{x \in N} T_xN^\perp$$

est le **fibré vectoriel orthogonal à  $TN$  dans  $TM|_N$** . Il satisfait à

$$TM|_N = TN \oplus TN^\perp$$

Il est facile de voir que  $TN^\perp$  est isomorphe au fibré normal  $\nu(N)$ . Comme on peut toujours introduire sur  $M$  une métrique riemannienne, on réalise presque toujours concrètement  $\nu(N)$  de cette façon.

### 3.1.5. Fibrés associés

Dans les constructions précédentes, nous avons vu comment associer à un fibré vectoriel un fibré principal. Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer comment un fibré principal structure, en les « engendrant », les autres types de fibrés. Pour cela, nous allons montrer comment associer à un fibré principal d'autres fibrés.

#### Construction

Nous nous donnons un fibré principal  $P(M, G)$  et nous supposons que  $G$  agit à gauche sur une variété différentiable  $F$  par  $\ell_g : F \rightarrow F$ . Nous allons construire un fibré de fibre type  $F$  dont la trivialisatoin locale utilisera les mêmes ouverts qu'une trivialisatoin locale de  $P$ , et dont les fonctions de transition seront données par  $t_{ij} = \ell_{g_{ij}}$  où les  $g_{ij}$  sont les fonctions de transition de  $P$ . Ce fibré s'appellera un **fibré associé** à  $P$ . L'idée est de placer une copie de la fibre type  $F$  à la place des copies de  $G$  au-dessus des points de  $M$ , en utilisant l'action  $\ell$  pour faire agir  $G$ .

La construction que nous allons utiliser est globale et peut-être un peu obscure à première vue. En fait, il existe une construction possible par « reconstruction du fibré » qui consiste à se donner explicitement les fonctions de transition dès le début (sous la forme

donnée ci-dessus  $t_{ij} = \ell_{g_{ij}}$ ) et à construire le fibré par recollement des trivialisations. Cependant, la méthode exposée ici permettra de transporter des structures du fibré  $P(M, G)$  sur le fibré associé. Comprendre cette construction est un très bon exercice...

Nous commençons par considérer le produit cartésien  $P \times F$ , sur lequel nous définissons une action à droite de  $G$  en posant  $(p, f) \mapsto (p \cdot g, \ell_{g^{-1}}f)$ . L'ensemble des orbites de cette action est une variété différentiable que nous notons  $E = (P \times F)/G$  (nous quotientons  $P \times F$  par  $G$ ).  $E$  est alors un fibré de base  $M$ , de groupe de structure  $G$  et de fibre  $F$ , comme nous allons le montrer.

Nous avons tout d'abord le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{p_1} & P \\ p_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & M \end{array}$$

où :

- $p_1$  est la projection sur la première composante de  $P \times F$ .
- $p_E$  est la projection du quotient : si  $(p, f)$  est un élément de  $P \times F$ ,  $p_E(p, f)$  est l'orbite de  $(p, f)$ , que nous notons  $[p, f]$ . Nous avons donc

$$[p, f] = [p \cdot g, \ell_{g^{-1}}f] = \{(p \cdot g, \ell_{g^{-1}}f)/g \in G\}$$

- $\pi_E$  est la projection du fibré  $E$  définie par  $\pi_E[p, f] = \pi(p)$ . Il est facile de vérifier que c'est indépendant du choix du représentant  $(p, f)$  dans  $[p, f]$  puisque  $p \cdot g$  se projette aussi sur  $\pi(p)$ .

Afin de trivialisier localement le fibré  $E$  (pour montrer que c'est bien un fibré), nous introduisons les applications suivantes : pour  $p \in P$ , nous posons

$$\begin{aligned} \chi_p : F &\rightarrow E_{\pi(p)} \\ f &\mapsto p_E(p, f) \end{aligned}$$

Ces applications sont des difféomorphismes, comme il est facile de le vérifier : si  $k$  est un élément de  $E_{\pi(p)}$ ,  $k$  est une orbite, donc s'écrit  $[p', f']$ . Mais comme  $p$  est fixé, nous voyons que  $f$  est unique tel que  $[p', f'] = [p, f]$  (c'est à dire que dans l'ensemble  $\{(p' \cdot g, \ell_{g^{-1}}f')/g \in G\}$ , il existe un unique couple qui ait pour première composante  $p$ ). Ce  $f$  est l'élément de  $F$  qui s'envoie sur  $k$  par  $\chi_p$ . Donc  $\chi_p$  est bijective. La différentiabilité est induite par celle de  $p_E$ . Ces applications sont liées entre elles par la relation

$$\chi_{p \cdot g}(f) = \chi_p(\ell_g f)$$

pour tout  $g \in G$ .

Nous pouvons maintenant construire une trivialisiation locale de  $E$ . Pour cela, soit  $(U, \phi)$  une trivialisiation locale de  $P$ , à laquelle on associe sa section locale (trivialisante)  $s$

en posant  $s(x) = \phi(x, e)$ . Alors l'application

$$\begin{aligned}\chi_s : U \times F &\rightarrow \pi_E^{-1}(U) \\ (x, f) &\mapsto p_E(s(x), f) = \chi_{s(x)}(f)\end{aligned}$$

est une trivialisations locale de  $E$ .

Étant donné un système de trivialisations locales  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de  $P$  (dont les sections locales trivialisantes sont notées  $s_i$ ), pour  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons  $p_E(s_i(x), f_i) = p_E(s_j(x), f_j) = k \in E$ . Comme  $s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$ , nous avons  $f_i = \ell_{g_{ij}(x)} f_j$  (on le voit directement sur la formule reliant les  $\chi_p$ ). Ainsi les fonctions de transition du fibré  $E$  sont les  $\ell_{g_{ij}(x)}$ , c'est-à-dire que ce sont celles de  $P$  à travers la représentation de  $G$  sur  $F$ . C'est ce que nous cherchions à obtenir.

Nous avons ainsi construit un **fibré associé** à  $P(M, G)$  de fibre  $F$ , dont les fonctions de transition sont les mêmes que celle de  $P$ . C'est en quelque sorte une copie de  $P$ , où chaque fibre  $G$  serait remplacée par la fibre  $F$ . On note ce fibré  $E = P \times_{\ell} F$ .

### Les sections d'un fibré associé

L'un des points importants de la théorie des fibrés associés est contenu dans ce qui suit, et qui se généralisera lors de l'étude des structures différentiables construites sur ces fibrés.

Soit  $S \in \Gamma(E)$  une section de  $E$ . Grâce aux trivialisations locales  $\chi_{s_i}$  de  $E$  définies ci-dessus, nous allons trivialisier localement cette section  $S$ . Soit  $x \in U_i$ . Alors il existe  $f_i(x) \in F$  tel que  $S(x) = p_E(s_i(x), f_i(x))$ . Comme ceci est vrai pour tout  $x$ , nous obtenons, au dessus de chaque ouvert  $U_i$ , une application

$$f_i : U_i \rightarrow F$$

associée à  $S$  par la relation

$$S = p_E(s_i, f_i) = \chi_{s_i}(f_i)$$

L'ensemble des  $f_i$  ainsi définies forme un **système de trivialisations locales de la section**  $S$ . Ces applications sont reliées entre elles au dessus des intersections  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , puisque, pour  $x \in U_i \cap U_j$ , nous avons

$$S(x) = p_E(s_i(x), f_i(x)) = p_E(s_j(x), f_j(x))$$

Comme  $s_j(x) = s_i(x) \cdot g_{ij}(x)$ , nous devons avoir

$$f_i = \ell_{g_{ij}} f_j$$

au dessus de  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , où les  $g_{ij}$  sont les fonctions de transition du fibré principal  $P$ . Ces relations sont les **formules de recollement** des trivialisations locales  $f_i$ . Réciproquement, si on se donne un ensemble d'applications  $f_i : U_i \rightarrow F$  qui vérifient ces relations sur tous les  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors il existe une unique section  $S$  de  $E$  qui les admette pour système de trivialisations locales.

Soit maintenant  $\mathcal{F}_G(P, F)$  l'espace des **applications  $G$ -équivariantes** de  $P$  dans  $F$  : ce sont les applications  $f : P \rightarrow F$  telles que  $f(p \cdot g) = \ell_{g^{-1}}f(p)$  pour tous  $p \in P$  et  $g \in G$ . Nous avons alors le résultat important suivant : *les espaces  $\mathcal{F}_G(P, F)$  et  $\Gamma(E)$  sont isomorphes.*

Démontrons ce résultat.

- Pour  $f \in \mathcal{F}_G(P, F)$ , nous posons  $S_f(x) = [p, f(p)]$  pour n'importe quel  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Par l'équivariance de  $f$ , il est facile de montrer que c'est indépendant du choix de  $p$  dans  $\pi^{-1}(x)$ .  $S_f$  est donc une section de  $E$ .
- Pour  $S \in \Gamma(E)$ , nous posons  $f_S(p) = \chi_p^{-1}(S \circ \pi(p))$ . Il est facile de montrer que  $f_S$  est équivariante.

Ainsi nous avons

$$\{M \longrightarrow E = P \times_{\ell} F \text{ sections}\} \simeq \{P \longrightarrow F \text{ applications } G\text{-équivariantes}\}$$

Une section de  $E$  peut donc être considérée de trois façons différentes :

- Comme une section  $S \in \Gamma(E)$  ;
- Comme une application  $G$ -équivariante  $f \in \mathcal{F}_G(P, F)$  ;
- Comme un système de trivialisations locales

$$\{f_i : U_i \rightarrow F \mid f_i = \ell_{g_{ij}}f_j \text{ sur tout } U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$$

Nous généraliserons ce mécanisme un peu plus loin dans le contexte des formes différentielles.

### Exemples utiles

- Les fibrés vectoriels  $TM$ ,  $T^*M$  et  $T^{(s,r)}M$  sont associés au fibré principal  $L(M)$  (voir 3.5.1).
- Nous allons donner ici un exemple de fibré vectoriel associé très utile en pratique dans ce qui va suivre. Sa fibre est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe de structure  $G$ . Nous prenons la représentation adjointe  $Ad$  de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$ . Le fibré que nous obtenons, noté  $AdP$ , est appelé **fibré adjoint** de  $P$ . Il faut remarquer que si  $f_i$  et  $f_j$  sont des représentations locales d'une section  $S$  sur  $AdP$ , alors elles se raccordent par la formule

$$f_i = g_{ij}f_jg_{ij}^{-1} \quad (= Ad_{g_{ij}}f_j)$$

- Le fibré  $P/H$ , quotient d'un fibré principal  $P$  de groupe de structure  $G$  par un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$ , est identifiable au fibré associé  $P \times_{\ell} G/H$  où  $\ell_g(g'H) = gg'H$  pour tout  $g'H \in G/H$  et  $g \in G$ . L'identification se fait de la façon suivante : à tout  $(p, g'H) \in P \times G/H$  on associe la classe d'équivalence dans  $P/H$  du point  $p \cdot g \in P$ . Le fibré  $P/H$  peut donc être obtenu soit en quotientant directement le fibré  $P$  par la relation d'équivalence définie auparavant, soit en quotientant la fibre type  $G$  et en considérant le fibré associé correspondant.

## 3.2. Connexions sur un fibré principal

*Références* : [2], [3], [4], [5], [9], [12], [14], [16], [18], [20].

Nous abordons maintenant un élément central de la théorie des fibrés, qui en fait un outil mathématique de grande importance pour la physique théorique.

### 3.2.1. Connexions

#### Vecteurs verticaux

Soit  $P(M, G)$  un fibré principal. Sur la variété  $P$ , nous avons la notion canonique de **vecteur vertical** : un vecteur vertical est un vecteur tangent à la fibre. En utilisant l'application linéaire tangente  $T_p\pi : T_pP \rightarrow T_{\pi(p)}M$  de la projection  $\pi : P \rightarrow M$ , nous dirons que  $X \in T_pP$  est vertical si  $T_p\pi X = 0$ . On note  $V_p$  le sous espace vectoriel de  $T_pP$  des vecteurs verticaux.

Nous pouvons voir ce sous espace d'une autre façon :  $G$  agit sur la fibre par  $\tilde{R}_g : p \mapsto p \cdot g$ . Pour  $X \in \mathfrak{g}$ , nous avons alors une courbe  $p \cdot \exp(tX)$  dans la fibre. Sa dérivée en  $t = 0$  donne un vecteur tangent à  $P$  en  $p$ . Ce vecteur est clairement vertical, et tous les vecteurs verticaux sont de ce type :

$$V_p = \left\{ \left( \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{|t=0} / X \in \mathfrak{g} \right\}$$

C'est à dire que l'espace vertical est engendré par les vecteurs

$$X_{|p}^v = \left( \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right)_{|t=0}$$

pour  $X$  variant dans  $\mathfrak{g}$ . Il est facile de montrer que l'application  $\mathfrak{g} \rightarrow V_p$ ,  $X \mapsto X_{|p}^v$  est un isomorphisme entre  $\mathfrak{g}$  et  $V_p$  et les champs de vecteurs  $p \mapsto X_{|p}^v$  vérifient

$$[X^v, Y^v] = [X, Y]^v$$

En fait,  $X^v$  est tout simplement le champ de vecteurs fondamental associé à l'action à droite de  $G$  sur  $P$ . Comme nous l'avons déjà fait remarquer en 2.2, il n'y a pas ici le signe « - », afin de préserver la relation ci-dessus.

On pose alors

$$TVP = \bigcup_{p \in P} V_p$$

c'est un sous-fibré de  $TP$  (sous-variété et fibré), appelé **fibré des vecteurs verticaux** de  $P$ .

De l'action de  $G$  sur la fibre, nous déduisons l'application  $T_p\tilde{R}_g : T_pP \rightarrow T_{p \cdot g}P$ . Il est facile de vérifier que cette application envoie  $V_p$  sur  $V_{p \cdot g}$ . Ceci porte le nom de  **$G$ -équivariance** (ou simplement « équivariance ») de  $V_p$ .

### Vecteurs horizontaux

Il n'y a pas de notion canonique d'horizontalité sur un fibré principal. Nous venons de voir que les vecteurs verticaux sont tangents à la fibre. Nous voudrions que les vecteurs horizontaux soient « tangents » à la variété de base  $M$ . En fait, ceci n'est pas possible puisque  $M$  n'est pas une sous-variété de  $P$ . Nous pouvons cependant formaliser cela sous la forme d'une application qui remonte les vecteurs tangents de  $M$  en des vecteurs tangents sur  $P$ . En d'autres termes, nous allons définir une application de  $T_x M$  sur  $T_p P$ ,  $X_{|x} \mapsto X_{|p}^h$ , telle que  $T_p \pi X_{|p}^h = X_{|x}$ .

Nous devons pour cela introduire une nouvelle structure sur  $P$ . Pour tout  $p \in P$ , nous choisissons  $H_p \subset T_p P$ , sous-espace vectoriel, tel que  $H_p \oplus V_p = T_p P$ . Nous faisons donc un choix d'un supplémentaire de  $V_p$  dans  $T_p P$ . Nous voyons que ce choix n'est pas unique, ce que nous introduisons est donc bien un objet de plus sur  $P$ , qui n'a rien de canonique. Un vecteur  $X_{|p} \in H_p$  sera dit **vecteur horizontal**. Afin de rendre la notion d'horizontalité compatible avec les structures déjà existantes sur  $P$ , nous imposons une  $G$ -équivariance : pour tous  $g \in G$  et  $p \in P$ , nous imposons la relation

$$H_{p \cdot g} = T_p \tilde{R}_g H_p$$

Enfin, nous définissons un sous fibré de  $TP$  par

$$THP = \bigcup_{p \in P} H_p$$

et nous exigeons que ce sous fibré soit une variété différentiable, c'est-à-dire, que la dépendance en  $p$  de  $H_p$  soit différentiable. Ce fibré est le **fibré des vecteurs horizontaux** associé au choix des  $H_p$ .

### Connexion

Nous avons ainsi acquis sur  $P$  deux applications :

$$\begin{aligned} v : TP &\rightarrow TVP \\ h : TP &\rightarrow THP \end{aligned}$$

qui décomposent de manière unique tout vecteur tangent sous la forme  $X_{|p} = v(X_{|p}) + h(X_{|p})$  dans  $T_p P$ , selon les directions verticales et horizontales, et qui vérifient

$$\begin{aligned} v \circ T\tilde{R}_g &= T\tilde{R}_g \circ v \\ h \circ T\tilde{R}_g &= T\tilde{R}_g \circ h \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir l'application

$$\begin{aligned} T_x M &\rightarrow H_p \\ X_{|x} &\mapsto X_{|p}^h \end{aligned}$$

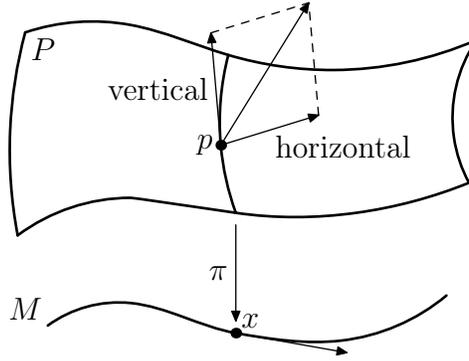


FIG. 3.4 – Tout vecteur du fibré  $P$  se décompose de façon unique en une somme directe d'un vecteur horizontal, correspondant au choix d'une connexion sur le fibré, et d'un vecteur vertical, tangent à la fibre.

pour tout  $x \in M$  et tout  $p \in \pi^{-1}(x)$ . C'est l'**application relèvement horizontal** des vecteurs de  $M$ .

Pour cela, remarquons que  $\pi$  est surjective, donc  $T_p\pi : T_pP \rightarrow T_{\pi(x)}M$  est aussi surjective. Comme  $V_p = \text{Ker } T_p\pi$ , il reste  $T_p\pi : H_p \rightarrow T_{\pi(x)}M$  surjective. Mais, par les dimensions de ces espaces vectoriels,  $T_p\pi$  est en fait un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour tout  $X|_x \in T_xM$ , et tout  $p \in \pi^{-1}(x)$ , posons alors  $X|_p^h$  l'unique élément de  $H_p$  tel que  $T_p\pi X|_p^h = X|_x$ .

Cette application permet d'associer à tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(M)$ , un champ de vecteurs  $X^h$  sur  $P$ , horizontal. Pour tout  $p \in P$  et tout  $g \in G$ , on a

$$\begin{aligned} (T_{p \cdot g}\pi)(T_p\tilde{R}_g)X|_p^h &= T_p(\pi \circ \tilde{R}_g)X|_p^h \\ &= T_p\pi X|_p^h \\ &= X|_x \end{aligned}$$

Par l'unicité de  $X|_{p \cdot g}^h$ , et puisque  $T_p\tilde{R}_g X|_p^h \in H_{p \cdot g}$ , nous avons

$$X|_{p \cdot g}^h = T_p\tilde{R}_g X|_p^h$$

Le champ de vecteurs  $X^h$  est donc  $G$ -équivariant. Il est facile de voir que l'application  $X \mapsto X^h$  vérifie encore

- $(X + Y)^h = X^h + Y^h$ ;
- $(f \circ \pi)X^h = (fX)^h$ , pour tout  $f \in \mathcal{F}(M)$ ;
- $h[X^h, Y^h] = [X, Y]^h$ , car en général  $[X^h, Y^h] \notin THP$ .

Si nous nous donnons un tel  $THP$  sur  $P$ , avec les applications définies ci-dessus, nous dirons que nous nous sommes donnés une **connexion** sur  $P$ .

Interprétons géométriquement cette définition. Soit  $\gamma$  une courbe (différentiable) dans  $M$  qui joint  $x$  à  $t = 0$  à  $y$  à  $t = 1$ . Un **relèvement horizontal** de  $\gamma$  dans  $P$  est une courbe

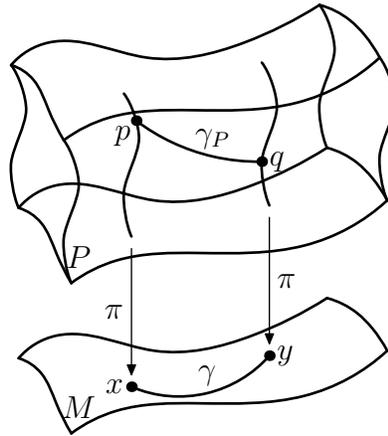


FIG. 3.5 – Toute courbe  $\gamma$  dans la variété de base  $M$  se relève de façon unique dans le fibré  $P$  en une courbe  $\gamma_P$  horizontale. Le point  $q$  est le transporté horizontal du point  $p$  le long du chemin  $\gamma$ .

$\gamma_P$  qui s'envoie sur  $\gamma$  par  $\pi$ , et dont chaque vecteur tangent est horizontal :  $\dot{\gamma}_P(t) \in H_{\gamma_P(t)}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Si nous imposons le point de départ  $\gamma_P(0) = p \in P_x$ , alors cette courbe est unique (nous verrons pourquoi plus loin). Nous dirons alors que le point  $q = \gamma_P(1) \in P_y$  est le **transporté horizontal de  $p$  le long de  $\gamma$**  (voir Figure 3.5). Cette définition du transport horizontal nous permet de comparer les points de fibres différentes dans  $P$ . Ce qui va nous intéresser par la suite est la version infinitésimale du transport horizontal. Or, infinitésimalement, une courbe est donnée par son vecteur tangent. Donc au relèvement horizontal d'une courbe correspond infinitésimalement l'application  $X \mapsto X^h$ .

### Formes horizontales et verticales

De la même façon que l'on décompose les vecteurs tangents à  $P$  en vecteurs verticaux et horizontaux, il est possible de décomposer les 1-formes différentielles en formes horizontales et verticales. Ceci nous conduit naturellement à considérer l'horizontalité et la verticalité des formes de degrés quelconques. Nous dirons qu'une forme différentielle sur  $P$  est une **forme horizontale** si elle s'annule dès que l'un des vecteurs sur lesquels on l'applique est vertical. Si  $P$  est muni d'une connexion, nous dirons qu'une forme sur  $P$  est une **forme verticale** si elle s'annule dès que l'un des vecteurs sur lesquels on l'applique est horizontal.

### 1-forme de connexion

Se donner une connexion par une distribution  $H_p$  de vecteurs dans  $T_pP$  en tout point de  $P$  n'est pas pratique. Ceci ne nous permet pas d'aller très loin dans certaines situations, et il est préférable, pour les « calculs », de se donner des outils algébriques équivalents. C'est ce que nous allons faire en définissant la **1-forme de connexion** sur  $P$ .

A partir de  $THP$ , nous définissons une 1-forme  $\omega$  sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  en posant, pour tout  $p \in P$  :

- $\omega|_p(X|_p) = 0$  pour  $X|_p \in H_p$  ;
- $\omega|_p(X|_p) = A$  pour  $X|_p \in V_p$ , écrit de façon unique  $X|_p = A|_p^v$  pour un  $A \in \mathfrak{g}$ .

Cette 1-forme différentielle est alors complètement définie par linéarité puisque  $TP = THP \oplus TVP$ . Il est alors facile de montrer que

$$\tilde{R}_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$$

c'est à dire

$$\omega|_{p \cdot g}(T_p \tilde{R}_g X|_p) = g^{-1} \omega|_p(X|_p)g$$

en notation matricielle. C'est une conséquence de l'équivariance des espaces  $V_p$  et  $H_p$ .

Réciproquement, si nous nous donnons une telle 1-forme sur  $P$ , alors elle définit une unique connexion par  $THP = \text{Ker } \omega$  (nous rappelons que  $TVP = \text{Ker } T\pi$ ).

Cette 1-forme de connexion est l'outil algébrique qui nous permettra de donner des expressions explicites d'objets que nous introduirons par la suite. Par définition, elle est verticale et à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , c'est à dire une algèbre de Lie. Ceci nous conduit à regarder de plus près la notion de formes différentielles à valeurs vectorielles.

### 3.2.2. Formes à valeurs vectorielles

Considérons sur  $P$  les  $r$ -formes différentielles à valeurs dans un espace vectoriel  $V$ . Nous notons cet ensemble  $\Omega^r(P, V)$ . Prenons pour base de  $V$  les vecteurs  $\{e_k\}$ . Alors toute forme différentielle  $\alpha \in \Omega^r(P, V)$  s'écrit  $\alpha = e_k \otimes \alpha^k$  où les  $\alpha^k$  sont des  $r$ -formes différentielles usuelles sur  $P$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Si nous couplons cette forme avec  $r$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_r$ , nous obtenons  $\alpha(X_1, \dots, X_r) = e_k \alpha^k(X_1, \dots, X_r)$ , fonction sur  $P$  à valeurs dans  $V$ .

Si  $V$  est en plus une algèbre de Lie, alors nous définissons le crochet de deux formes différentielles  $\alpha$  (d'ordre  $r$ ) et  $\beta$  (d'ordre  $s$ ) à valeurs dans  $V$  par :

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &= [e_k, e_\ell] \otimes \alpha^k \wedge \beta^\ell \\ &= \alpha \wedge \beta - (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \end{aligned}$$

où dans la première égalité nous sommions sur toutes les valeurs de  $k, \ell$  et dans la seconde égalité, nous posons, pour une algèbre de Lie matricielle (le plus courant) :  $\alpha \wedge \beta = e_k e_\ell \otimes \alpha^k \wedge \beta^\ell$ . En fait, cette relation est valable plus généralement dans le cas où  $V$  est une algèbre associative. En particulier, nous voyons que

$$\begin{aligned} [\alpha, \alpha] &= 2\alpha \wedge \alpha \text{ si } r = 2s + 1 \\ &= 0 \text{ si } r = 2s \end{aligned}$$

Notons  $d_P$  la différentielle sur  $P$ . Nous prolongeons  $d_P$  à  $\Omega^*(P, V)$  en posant  $d_P \alpha = e_k \otimes d_P \alpha^k$  avec les notations précédentes. De même, si  $L_X$  et  $i_X$  sont la dérivée de Lie et

le produit intérieur sur  $P$ , nous les prolongeons en posant  $L_X\alpha = e_k \otimes L_X\alpha^k$  et  $i_X\alpha = e_k \otimes i_X\alpha^k$ .

La forme de Maurer-Cartan  $\theta$  sur un groupe de Lie  $G$  introduite en 2.4.2 est un exemple de forme à valeurs vectorielles (dans une algèbre de Lie).

Si maintenant  $\ell_g : V \rightarrow V$  est une représentation de  $G$ , nous dirons que  $\alpha \in \Omega^*(P, V)$  est  **$G$ -équivariante de type  $(\ell, V)$**  si

$$\tilde{R}_g^*\alpha = \ell_{g^{-1}}\alpha$$

Dans cette expression, nous devons remarquer qu'à gauche l'opération se fait sur la partie forme différentielle, tandis qu'à droite elle se fait sur la partie vectorielle. La 1-forme de connexion  $\omega$  est  $G$ -équivariante de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ .

### 3.2.3. Formes tensorielles

Parmi les formes à valeurs vectorielles, les formes tensorielles jouent un rôle important.

#### Définition

Nous dirons qu'une forme différentielle dans  $\Omega^*(P, V)$  est **tensorielle de type  $(\ell, V)$**  si elle est horizontale et  $G$ -équivariante de type  $(\ell, V)$ .

Il faut remarquer que la notion de tensorialité ne fait pas intervenir la notion de connexion, puisque les vecteurs verticaux ont été définis sans avoir recours à la connexion, et la  $G$ -équivariance ne fait appel qu'à la représentation de  $G$  sur  $V$ .

La notion de tensorialité d'une forme est très importante. En effet, nous allons voir qu'une forme différentielle tensorielle sur  $P$  à valeurs dans  $V$  est aussi une forme différentielle sur  $M$  à valeurs dans le fibré associé  $E = P \times_{\ell} V$ . Grossièrement, nous savons que l'horizontalité permet de passer de  $THP \subset TP$  à  $TM$ , et donc de « redescendre » une forme sur  $M$ , et que la  $G$ -équivariance permet de passer d'une application de  $P$  dans  $V$  à une section de  $E$ .

#### Formes à valeurs dans un fibré vectoriel

Dans ce qui suit, nous allons mettre précisément en place ce mécanisme. Mais auparavant, nous devons définir de façon plus approfondie ce qu'est une **forme sur  $M$  à valeurs dans un fibré vectoriel**. Posons  $\Omega^r(M, E)$  l'espace des  $r$ -formes sur  $M$  à valeurs dans le fibré  $E$  défini de la façon suivante : si  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$  et si  $X_1, \dots, X_r \in \Gamma(M)$ , alors  $\Psi(X_1, \dots, X_r)$  est une section de  $E$  définie par  $x \mapsto \Psi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) \in E_x$ . En particulier nous avons  $\Omega^0(M, E) = \Gamma(E)$ . Pour le moment, nous ne définissons pas de « différentielle » sur cet espace. La différentielle habituelle  $d$  sur  $M$  n'y est pas définie.

Cherchons la structure locale de  $\Omega^r(M, E)$ . Pour cela, soit  $U \subset M$  un ouvert d'une carte locale de  $M$ , et soit  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$  une  $r$ -forme sur  $M$  à valeurs dans  $E$ . Notons  $\Psi|_U$  la restriction de  $\Psi$  à  $U$ , c'est à dire,  $\Psi|_U \in \Omega^r(U, E)$ . Comme  $\Omega^r(U)$  ( $r$ -formes différentielles sur  $M$  restreintes à  $U$ ) admet un nombre fini de générateurs sur  $\mathcal{F}(U)$ ,  $\Psi|_U$  se décompose

en  $\Psi|_U = \alpha_i \otimes S^i$  où  $\alpha_i \in \Omega^r(U)$  et  $S^i \in \Gamma(U, E)$ . Nous savons donc que  $\Psi|_U \in \Omega^r(U, E) \subset \Omega^r(U) \otimes \Gamma(U, E)$ . Soit maintenant  $f \in \mathcal{F}(U)$  une fonction sur  $U$ . Pour toute section  $S \in \Gamma(U, E)$ , nous avons  $fS \in \Gamma(U, E)$ , et de même, pour toute  $r$ -forme  $\alpha \in \Omega^r(U)$ , nous avons  $f\alpha \in \Omega^r(U)$ . Alors la  $r$ -forme sur  $U$  à valeurs dans  $\Gamma(U, E)$ ,  $\alpha \otimes fS$ , est égale à  $f\alpha \otimes S$ , comme il est facile de le vérifier en l'appliquant à  $r$  champs de vecteurs sur  $U$ . Toute fonction  $f \in \mathcal{F}(U)$  a donc la possibilité de « passer à travers » le produit tensoriel. Il faut remarquer que dans les produits tensoriels considérés jusqu'à présent, seul un scalaire avait cette possibilité. Nous n'avons donc pas le produit tensoriel usuel (transparent seulement pour  $\mathbb{R}$ ), mais un nouveau produit tensoriel, transparent pour  $\mathcal{F}(U)$ . Nous noterons ce dernier  $\otimes_{\mathcal{F}(U)}$ , ce qui signifie que tout élément de  $\mathcal{F}(U)$  peut être mis indifféremment à droite ou à gauche du signe  $\otimes$ . Nous dirons que nous **tensorialisons sur  $\mathcal{F}(U)$** . En langage plus algébrique, ce produit tensoriel est possible car  $\Omega^*(U)$  et  $\Gamma(U, E)$  sont tous les deux des modules sur  $\mathcal{F}(U)$ . Le précédent produit tensoriel aurait dû s'écrire  $\otimes_{\mathbb{R}}$ , mais il est d'usage d'oublier  $\mathbb{R}$  pour simplifier les notations. Il est de même courant d'oublier  $\mathcal{F}(U)$  lorsqu'on désigne un objet particulier de l'ensemble. Ainsi,  $\Psi|_U \in \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$  s'écrira simplement  $\Psi|_U = \alpha_i \otimes S^i$ . Mais il ne faudra pas oublier la propriété de transparence sur  $\mathcal{F}(U)$ . Localement, nous avons donc

$$\Omega^r(U, E) = \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$$

Si la variété  $M$  est compacte, il est facile d'en déduire que

$$\Omega^r(M, E) = \Omega^r(M) \otimes_{\mathcal{F}(M)} \Gamma(E)$$

Nous avons encore une autre façon de voir l'espace  $\Omega^r(M, E)$ , globalement cette fois. Nous savons que les  $r$ -formes différentielles sur  $M$  sont les sections du fibré vectoriel  $\bigwedge^r T^*M$ , c'est à dire

$$\Omega^r(M) = \Gamma(\bigwedge^r T^*M)$$

Alors il est facile de voir que

$$\Omega^r(M, E) = \Gamma(\bigwedge^r T^*M \otimes E)$$

où le produit tensoriel des fibrés vectoriels a été défini en 3.1.4.

### Forme tensorielle comme forme à valeurs dans un fibré vectoriel associé

Voyons maintenant comment associer à une forme tensorielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  une forme  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$ . Pour  $X_{1|x}, \dots, X_{r|x} \in T_x M$ , nous posons

$$\Psi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = p_E(p, \psi|_p(X_{1|p}^h, \dots, X_{r|p}^h))$$

pour n'importe quel  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Nous rappelons que  $(p, f) \mapsto p_E(p, f)$  est la projection quotient  $P \times V \rightarrow E$ . Ainsi, les vecteurs sont remontés horizontalement, tandis que les

valeurs de  $\psi$  sont envoyées dans  $E$ . Nous avons donc de manière schématique :

$$\begin{array}{ccc} THP & \xrightarrow{\psi} & V \\ \uparrow \cdot h & & \downarrow p_E(p, \cdot) \\ TM & \xrightarrow{\Psi} & E \end{array}$$

Montrons que cette définition à un sens, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du choix de  $p$  dans  $\pi^{-1}(x)$ . Pour simplifier, nous allons considérer une 1-forme  $\psi$ . Prenons  $p \cdot g \in \pi^{-1}(x)$  un autre point de la fibre  $P_x$ . Alors

$$\begin{aligned} p_E(p \cdot g, \psi|_{p \cdot g}(X_{|p \cdot g}^h)) &= p_E(p \cdot g, \psi|_{p \cdot g}(\tilde{R}_{g*} X_{|p}^h)) \\ &= p_E(p \cdot g, (\tilde{R}_g^* \psi|_{p \cdot g})(X_{|p}^h)) \\ &= p_E(p \cdot g, \ell_{g^{-1}} \psi|_p(X_{|p}^h)) \\ &= p_E(p, \psi|_p(X_{|p}^h)) \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\Psi$  est bien définie.

Nous avons donc associé à toute forme tensorielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  une  $r$ -forme  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$ .

### Trivialisations locales des formes tensorielles

Nous allons maintenant regarder les trivialisations locales d'une forme tensorielle sur  $P$  à valeurs dans  $V$ . Pour cela soit  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un système de trivialisations locales de  $P$ , et  $s_i : U_i \rightarrow P$  les sections locales trivialisantes correspondantes, qui se raccordent sur les  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  par  $s_i \cdot g_{ij} = s_j$ . Soit  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  une  $r$ -forme différentielle tensorielle. Définissons pour chaque  $i$  des  $r$ -formes  $\varphi_i \in \Omega^r(U_i, V)$  par la formule

$$\varphi_{i|x}(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = \psi|_{s_i(x)}(X_{1|s_i(x)}^h, \dots, X_{r|s_i(x)}^h)$$

Ce sont les **trivialisations locales de la forme tensorielle**  $\psi$ . Pour les calculs qui vont suivre, prenons le cas  $r = 1$ . Pour tout  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_{j|x}(X_{|x}) &= \psi|_{s_j(x)}(X_{|s_j(x)}^h) \\ &= \psi|_{s_i(x) \cdot g_{ij}(x)}(X_{|s_i(x) \cdot g_{ij}(x)}^h) \\ &= \psi|_{s_i(x) \cdot g_{ij}(x)}(\tilde{R}_{g_{ij}(x)*} X_{|s_i(x)}^h) \\ &= (\tilde{R}_{g_{ij}(x)}^* \psi|_{s_i(x) \cdot g_{ij}(x)})(X_{|s_i(x)}^h) \\ &= \ell_{g_{ij}^{-1}(x)} \psi|_{s_i(x)}(X_{|s_i(x)}^h) \\ &= \ell_{g_{ij}^{-1}(x)} \varphi_{i|x}(X_{|x}) \end{aligned}$$

Ainsi, sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons les formules de recollement des trivialisations locales de  $\psi$  :

$$\varphi_i = \ell_{g_{ij}} \varphi_j$$

Comme dans le cas des sections de  $E$ , nous dirons que les  $r$ -formes  $\varphi_i \in \Omega^r(U_i, V)$  fournissent un **système de trivialisations locales** de la  $r$ -forme tensorielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  ou de la  $r$ -forme  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$ . Les relations entre les  $\varphi_i$  sont les **formules de recollement** de ces trivialisations.

### Les trois façons de voir les formes tensorielles

Pour résumer ce que nous venons d'apprendre, pour  $E = P \times_{\ell} V$ , nous avons trois façons différentes de voir une  $r$ -forme tensorielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  :

- $\psi \in \Omega^r(P, V)$  tensorielle ;
- $\Psi \in \Omega^r(M, E)$  ;
- $\{\varphi_i \in \Omega^*(U_i, V) \mid \varphi_i = \ell_{g_{ij}} \varphi_j \text{ sur tout } U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ , système de trivialisations locales ;

reliées entre elles par les relations :

- $\Psi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = p_E(p, \psi|_p(X_{1|p}^h, \dots, X_{r|p}^h))$  pour tout  $p \in \pi^{-1}(x)$  ;
- $\varphi_i|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = \psi|_{s_i(x)}(X_{1|s_i(x)}^h, \dots, X_{r|s_i(x)}^h)$  ;
- $\Psi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = p_E(s_i(x), \varphi_i|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}))$ .

En particulier, pour  $r = 0$ , nous retrouvons l'équivalence entre les sections de  $E$  et les applications  $G$ -équivariantes de  $P$  dans  $V$ .

### 3.2.4. Différentielle covariante

#### Définition

Après ce que nous venons d'apprendre sur les formes différentielles à valeurs vectorielles, nous définissons une différentielle sur ces formes, la **différentielle covariante**  $D : \Omega^r(P, V) \rightarrow \Omega^{r+1}(P, V)$ , lorsque  $P$  est muni d'une connexion, par la formule :

$$D\alpha(X_1, \dots, X_{r+1}) = d_P\alpha(h(X_1), \dots, h(X_{r+1}))$$

pour tous  $X_1, \dots, X_{r+1} \in \Gamma(P)$  (nous rappelons que  $d_P$  est la différentielle ordinaire sur  $P$ ).  $D$  consiste donc à prendre la différentielle ordinaire sur  $P$  et à restreindre la forme aux parties horizontales des champs de vecteurs. On peut symboliser cela par

$$D\alpha = (d_P\alpha) \circ h$$

$D$  dépend, par définition, du choix de  $V$ , mais nous n'avons pas fait apparaître explicitement cette dépendance dans la notation pour ne pas charger les écritures.  $D$  dépend aussi du choix de la connexion sur  $P$ .

Par construction,  $D\alpha$  est horizontale. D'autre part,  $D$  préserve la  $G$ -équivariance de type  $(\ell, V)$  car  $h$  est  $G$ -équivariante,  $d_P$  commute avec  $\tilde{R}_g^*$  et  $d_P$  ne touche pas à la partie

vectorielle de la forme. Concrètement, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{R}_g^* D\alpha &= D\alpha \circ \tilde{R}_{g^*} = (d_P\alpha) \circ h \circ \tilde{R}_{g^*} = (d_P\alpha) \circ \tilde{R}_{g^*} \circ h \\ &= (\tilde{R}_g^* d_P\alpha) \circ h = d_P(\tilde{R}_g^* \alpha) \circ h = d_P(\ell_{g^{-1}}\alpha) \circ h = \ell_{g^{-1}}((d_P\alpha) \circ h) \\ &= \ell_{g^{-1}} D\alpha\end{aligned}$$

Donc si  $\alpha$  est  $G$ -équivariante de type  $(\ell, V)$ , alors  $D\alpha$  est tensorielle de type  $(\ell, V)$ . En particulier,  $D$  préserve la tensorialité des formes différentielles.

### Expression de $D$ sur les formes tensorielles

Comme nous allons le constater, l'expression de la différentielle covariante est très simple sur les formes tensorielles. Posons  $\eta$  la représentation de  $\mathfrak{g}$  induite par  $\ell$  sur  $V$ . Soit  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  une  $r$ -forme différentielle tensorielle de type  $(\ell, V)$ , alors, comme nous venons de le voir,  $D\psi$  est tensorielle et nous avons la relation

$$D\psi = d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi$$

où, si  $\psi = e_k \otimes \psi^k$  et si  $\omega = E_i \otimes \omega^i$  (avec  $\{e_k\}$  une base de  $V$  et  $\{E_i\}$  une base de  $\mathfrak{g}$ ), nous posons

$$\eta(\omega) \wedge \psi = \eta(E_i)e_k \otimes \omega^i \wedge \psi^k$$

Montrons cette relation dans le cas particulier  $\psi \in \Omega^1(P, V)$  d(tensorielle) :

- Premier cas :  $X, Y$  champs de vecteurs horizontaux. Alors  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$  et  $h(X) = X, h(Y) = Y$ , donc par définition

$$D\psi(X, Y) = d_P\psi(h(X), h(Y)) = d_P\psi(X, Y)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi)(X, Y) &= d_P\psi(X, Y) + \eta(\omega(X))\psi(Y) - \eta(\omega(Y))\psi(X) \\ &= d_P\psi(X, Y)\end{aligned}$$

d'où l'égalité dans ce cas.

- Second cas :  $X, Y$  champs de vecteurs verticaux. Alors  $\psi(X) = \psi(Y) = 0$ ,  $[X, Y]$  est vertical, donc  $\psi([X, Y]) = 0$ , et  $h(X) = h(Y) = 0$ . Par définition de  $d_P$

$$d_P\psi(X, Y) = X \cdot \psi(Y) - Y \cdot \psi(X) - \psi([X, Y])$$

donc  $(d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi)(X, Y) = 0$ . D'autre part

$$D\psi(X, Y) = d_P\psi(h(X), h(Y)) = 0$$

d'où l'égalité dans ce cas.

- Troisième cas :  $X$  champ de vecteurs vertical et  $Y$  champ de vecteurs horizontal. Alors  $X|_p = A(p)|_p^v$  pour une unique application  $A : P \rightarrow \mathfrak{g}$ , et  $\omega(X) = A, \omega(Y) = 0$ ,

$\psi(X) = 0$ ; d'où  $Y \cdot \psi(X) = 0$ ,  $(\eta(\omega) \wedge \psi)(X, Y) = \eta(A)\psi(Y)$  et  $X \cdot \psi(Y) = L_X\psi(Y)$ , car  $\psi(Y)$  est une fonction de  $P$  vers  $\mathfrak{g}$ . Or,  $L_X\psi(Y) = \langle L_X\psi, Y \rangle + \psi([X, Y])$ . Le flot de  $X$  est  $(t, p) \mapsto p \cdot \exp tA(p) = \tilde{R}_{\exp tA(p)}(p)$ , donc

$$\begin{aligned} L_X\psi &= \left( \frac{d}{dt} \tilde{R}_{\exp tA}^* \psi \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \ell_{\exp -tA} \psi \right) \Big|_{t=0} \quad \text{par l'équivariance de } \psi \\ &= -\eta(A)\psi \quad \text{par définition de } \eta \end{aligned}$$

donc  $X \cdot \psi(Y) = -\eta(A)\psi(Y) + \psi([X, Y])$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} (d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi)(X, Y) &= \underbrace{-\eta(A)\psi(Y) + \psi([X, Y]) - \psi([X, Y])}_{d_P\psi(X, Y)} + \underbrace{\eta(A)\psi(Y)}_{(\eta(\omega) \wedge \psi)(X, Y)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $h(X) = 0$ , nous avons  $D\psi(X, Y) = 0$ , d'où l'égalité dans ce cas.

• Par linéarité et antisymétrie, nous voyons que ces trois cas nous donnent toutes les possibilités. La formule est donc démontrée.

Dans le cas  $r \neq 1$ , la démonstration est analogue, bien que plus délicate à écrire.

Nous allons surtout, dans un premier temps, nous intéresser aux formes sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , algèbre de Lie de  $G$ . Nous reviendrons à l'étude de  $D$  pour  $V$  espace vectoriel quelconque lorsque nous discuterons des connexions sur un fibré vectoriel associé (3.3). Dans le cas de  $\psi \in \Omega^r(P, \mathfrak{g})$  tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ , la formule ci-dessus se particularise donc en

$$D\psi = d_P\psi + [\omega, \psi]$$

Comme toute forme différentielle tensorielle s'identifie à une forme différentielle sur  $M$  à valeurs dans un fibré vectoriel associé  $E$ , la différentielle covariante  $D$  induit une application  $\nabla : \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^{*+1}(M, E)$ . Nous étudierons cette application en 3.3.2.

### 3.2.5. Courbure

#### Définition

Nous associons à la 1-forme de connexion  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  une 2-forme, dite **2-forme de courbure** sur  $P$ , en posant :

$$\Omega = D\omega$$

Cette 2-forme est tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$  (puisque  $\omega$  est  $G$ -équivariante de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ ) :

$$\tilde{R}_g^* \Omega = Ad_{g^{-1}} \Omega$$

Ceci nous permet de lui associer une 2-forme sur  $M$  à valeurs dans  $AdP = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ , que nous notons  $\mathbb{F} \in \Omega^2(M, AdP)$ .

### Équation de structure de Cartan

Il est possible, par un raisonnement tout à fait analogue à celui prouvant  $D\psi = d_P\psi + [\omega, \psi]$ , de montrer que  $\Omega$  vérifie l'**équation de structure de Cartan** :

$$\begin{aligned}\Omega &= d_P\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \\ &= d_P\omega + \omega \wedge \omega\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\Omega(X, Y) = d_P\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

L'expression  $\omega \wedge \omega$  n'a de sens que si  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie matricielle.

### Identités de Bianchi

De plus,  $\Omega$  vérifie  $D\Omega = 0$ , c'est à dire, en utilisant l'expression de  $D$  sur les formes tensorielles de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ ,

$$d_P\Omega + [\omega, \Omega] = 0$$

C'est l'**identité de Bianchi**.

### Carré de la différentielle covariante

La courbure a une autre propriété essentielle, qui est parfois utilisée comme définition. Pour toute forme différentielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  tensorielle de type  $(\ell, V)$ , si  $\eta$  est la représentation de  $\mathfrak{g}$  induite par  $\ell$ , alors nous avons

$$D^2\psi = \eta(\Omega) \wedge \psi$$

Montrons ce résultat : écrivons  $\psi = e_k \otimes \psi^k$  et  $\omega = E_i \otimes \omega^i$ .

$$\begin{aligned}D^2\psi &= d_P(d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi) + \eta(\omega) \wedge (d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi) \\ &= \eta(d_P\omega) \wedge \psi - \eta(\omega) \wedge d_P\psi + \eta(\omega) \wedge d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \eta(\omega) \wedge \psi \\ &= \eta(d_P\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) \wedge \psi \\ &= \eta(\Omega) \wedge \psi\end{aligned}$$

puisqu'il est facile de voir que  $\eta(\omega) \wedge \eta(\omega) = \eta(\frac{1}{2}[\omega, \omega])$ .

Donc, nous avons symboliquement  $D^2 = \eta(\Omega)$ . Nous voyons ainsi que  $D^2$  n'est pas toujours nulle, contrairement à  $d_P^2$ . La courbure est l'obstruction à la nullité de  $D^2$ .

**Exemple  $P = G$** 

Nous pouvons considérer le cas extrême où la variété de base  $M$  est réduite à un point. Tout fibré principal sur cette variété est donc homéomorphe au groupe de structure  $G$ , et l'action à droite de  $G$  sur lui-même, dans cette identification, est la translation à droite  $R_g$ . Il n'y a pas de vecteurs horizontaux, et donc toute forme de connexion est de noyau nul. Nous avons déjà rencontré un bon candidat pour une telle forme de connexion, c'est la forme de Maurer-Cartan sur le groupe. Comme nous l'avons montré, elle a les bonnes propriétés de  $G$ -équivariance, puisqu'elle est  $G$ -équivariante de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ . L'équation de structure de Maurer-Cartan nous montre que sa courbure est nulle, ce qui est normal puisqu'il n'y a pas de vecteurs horizontaux.

**3.2.6. Le groupe de jauge et son action****Automorphismes verticaux de fibrés principaux**

L'automorphisme  $f : P \rightarrow P$  est un **automorphisme vertical du fibré principal**  $P$  si le difféomorphisme  $\tilde{f} : M \rightarrow M$  est l'identité. Dans ce cas, nous avons, pour tout  $p \in P$  et tout  $g \in G$ ,

- $f(p)$  est dans la même fibre que  $p$  ;
- $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$  (compatibilité avec l'action de  $G$  sur  $P$ ).

$f$  induit donc des automorphismes sur les fibres

$$f|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$$

qui commutent avec l'action de  $G$ .

Puisque  $f(p)$  est dans la même fibre que  $p$ , nous pouvons écrire

$$f(p) = p \cdot \psi(p)$$

avec  $\psi(p) \in G$ . La seconde relation implique alors

$$f(p \cdot g) = p \cdot g \psi(p \cdot g) = p \cdot \psi(p) g$$

d'où

$$\psi(p \cdot g) = g^{-1} \psi(p) g$$

Nous avons donc une application  $\psi : P \rightarrow G$  qui est  $G$ -équivariante pour l'action (à gauche)  $\alpha$  sur  $G$  (définie en 2.4.4). Or, des propriétés des fonctions  $G$ -équivariantes sur  $P$ , nous tirons que  $\psi$  est équivalente à la donnée d'une section du fibré  $P \times_{\alpha} G$  associé à  $P$ . Il faut noter que ce fibré a pour fibre  $G$  mais n'est pas un fibré principal. En effet, ce fibré possède toujours des sections globales, même s'il n'est pas trivial (par exemple la section qui dans n'importe quelle trivialisations locale envoie  $x \in M$  sur  $e \in G$ ).

### Le groupe de jauge

Ainsi, pour résumer, il y a équivalence entre la donnée :

- D'un automorphisme vertical  $f : P \rightarrow P$  ;
- D'une application différentiable  $G$ -équivariante pour  $\alpha$ ,  $\psi : P \rightarrow G$  ;
- D'une section (différentiable)  $S : M \rightarrow P \times_{\alpha} G$ .

On appelle **groupe de jauge** du fibré  $P$ , et on le notera  $\mathcal{G}$ , l'ensemble de ces automorphismes verticaux de  $P$ . Le groupe de jauge peut donc être décrit de trois façons équivalentes.

### Action sur une connexion

Si maintenant nous nous donnons une connexion  $\omega$  sur  $P$ , nous pouvons nous demander comment cette connexion est transformée par un élément du groupe de jauge  $f \in \mathcal{G}$ . Nous cherchons donc à calculer  $f^*\omega$ .

Soit  $X|_p \in T_p P$  avec  $X|_p = \dot{\gamma}(0)$  pour une courbe  $\gamma$  dans  $P$  ( $\gamma(0) = p$ ). Alors

$$\begin{aligned} f_*X|_p &= \left( \frac{d}{dt} \gamma(t) \cdot \psi(\gamma(t)) \right)_{|t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} \gamma(t) \right)_{|t=0} \cdot \psi(p) + p \cdot \left( \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t)) \right)_{|t=0} \\ &= X|_p \cdot \psi(p) + p \cdot \psi(p) \cdot \left( \frac{d}{dt} \psi^{-1}(p) \psi(\gamma(t)) \right)_{|t=0} \end{aligned}$$

si nous utilisons la formule de la dérivée d'un « produit ». Le premier terme est par définition la linéarisée de l'application  $\tilde{R}_{\psi(p)} : P \rightarrow P$ . Il vaut donc

$$X|_p \cdot \psi(p) = \tilde{R}_{\psi(p)*} X|_p$$

Dans le second terme, apparaît la dérivée en  $t = 0$  de  $t \mapsto \psi^{-1}(p) \psi(\gamma(t))$ , qui est une courbe dans  $G$  passant en  $e$  à  $t = 0$ , d'où

$$\left( \frac{d}{dt} \psi^{-1}(p) \psi(\gamma(t)) \right)_{|t=0} = A \in \mathfrak{g} = T_e G$$

Le second terme est donc l'action infinitésimale de  $G$  sur  $P$ . C'est la dérivée en 0 de  $p \cdot \psi(p) \cdot \exp(tA)$ , qui n'est autre que  $A|_{p \cdot \psi(p)}^v$ . Nous pouvons d'autre part écrire

$$A = \psi^{-1}(p)(d_P \psi)|_p(X|_p)$$

en interprétant  $(d_P \psi)|_p(X|_p)$  comme un élément de  $T_{\psi^{-1}(p)} G$ . L'action à gauche de  $\psi^{-1}(p)$  envoie ce vecteur sur  $T_e G = \mathfrak{g}$ .

Finalement, nous obtenons

$$f_*X|_p = \tilde{R}_{\psi(p)*} X|_p + (\psi^{-1}(p)(d_P \psi)|_p(X|_p))|_{p \cdot \psi(p)}^v$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)(X|_p) &= \omega_{p \cdot \psi(p)}(f_*X|_p) \\
&= \omega_{p \cdot \psi(p)}(\tilde{R}_{\psi(p)*}X|_p) + \omega_{p \cdot \psi(p)}\left(\left(\psi^{-1}(p)(d_P\psi)|_p(X|_p)\right)^v_{|p \cdot \psi(p)}\right) \\
&= (\psi^{-1}(p)\omega|_p\psi(p) + \psi^{-1}(p)(d_P\psi)|_p)(X|_p)
\end{aligned}$$

d'où

$$(f^*\omega)|_p = \psi^{-1}(p)\omega|_p\psi(p) + \psi^{-1}(p)(d_P\psi)|_p$$

c'est à dire encore

$$f^*\omega = \psi^{-1}\omega\psi + \psi^{-1}d_P\psi$$

Intéressons-nous au terme  $\psi^{-1}d_P\psi$ . Pour tout  $p \in P$  et tout  $X|_p \in T_pP$ , nous avons (par définition de la notation)

$$\psi^{-1}(p)(d_P\psi)|_p(X|_p) = L_{\psi^{-1}(p)*}T_p\psi(X|_p)$$

puisque  $T_p\psi(X|_p) \in T_{\psi(p)}G$ . Or,  $L_{\psi^{-1}(p)*}T_p\psi(X|_p)$  est l'élément de  $\mathfrak{g} = T_eG$  qui s'envoie par translation à gauche sur  $T_p\psi(X|_p) \in T_{\psi(p)}G$ . Nous pouvons alors utiliser la forme de Maurer-Cartan sur  $G$  :

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(p)(d_P\psi)|_p(X|_p) &= \theta_{|\psi(p)}(T_p\psi(X|_p)) \\
&= \theta_{|\psi(p)}(\psi_*X|_p) \\
&= (\psi^*\theta)|_p(X|_p)
\end{aligned}$$

d'où

$$\psi^{-1}d_P\psi = \psi^*\theta$$

Finalement nous pouvons écrire

$$f^*\omega = Ad_{\psi^{-1}}\omega + \psi^*\theta$$

Il est facile de voir que  $f^*\omega$  est une nouvelle connexion sur  $P$ . Évaluons la par exemple sur un vecteur vertical  $A|_p^v$  de  $P$ , avec  $A \in \mathfrak{g}$ . Nous avons

$$\langle \psi^{-1}(p)\omega|_p\psi(p), A|_p^v \rangle = \psi^{-1}(p)A\psi(p)$$

puisque  $\langle \omega|_p, A|_p^v \rangle = A$ . D'autre part

$$\begin{aligned}
\langle \psi^{-1}(p)d_P\psi|_p, A|_p^v \rangle &= \left( \frac{d}{dt} \psi^{-1}(p)\psi(p \cdot \exp tA) \right)_{|t=0} \\
&= \left( \frac{d}{dt} \psi^{-1}(p) \exp(-tA)\psi(p) \exp(tA) \right)_{|t=0} \\
&= -\psi^{-1}(p)A\psi(p) + \psi^{-1}(p)\psi(p)A
\end{aligned}$$

d'où en sommant ces deux expressions :

$$\langle (f^*\omega)|_p, A|_p^v \rangle = A$$

Il resterait à vérifier que  $f^*\omega$  est  $G$ -équivariante, ce qui n'est pas un calcul plus difficile que le précédent.

Il est facile de montrer que la courbure de  $f^*\omega$  est

$$f^*\Omega = Ad_{\psi^{-1}}\Omega$$

où  $\Omega$  est la courbure de  $\omega$ .

### L'algèbre de Lie du groupe de jauge

Le groupe de jauge  $\mathcal{G}$  est un groupe de Lie de dimension infinie (c'est à dire un groupe dont tout élément est repéré de façon « différentiable » par une « infinité » de paramètres réels). Il admet une algèbre de Lie  $\text{Lie}\mathcal{G}$  que nous allons décrire. C'est la version « infinitésimale » du groupe  $\mathcal{G}$ . Notons  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . Alors les éléments de  $\text{Lie}\mathcal{G}$  peuvent être considérés comme :

- Les applications différentiables  $G$ -équivariantes pour  $Ad$  de  $P$  dans  $\mathfrak{g}$  ;
- Les sections (différentiables) du fibré vectoriel  $P \times_{Ad}\mathfrak{g} = Ad\mathfrak{g}$ .

Il est facile, dans la première caractérisation, d'exponentier un élément  $\xi$  de  $\text{Lie}\mathcal{G}$  et obtenir ainsi un élément  $\exp \xi$  de  $\mathcal{G}$ . En utilisant cette application  $\exp$ , il est possible de montrer que l'action infinitésimale de  $\text{Lie}\mathcal{G}$  sur une connexion  $\omega$  est

$$\omega \mapsto d_P\xi + [\omega, \xi] = D\xi$$

où on considère  $\xi$  comme une application  $P \rightarrow \mathfrak{g}$   $G$ -équivariante. L'action sur la courbure est alors

$$\Omega \mapsto [\Omega, \xi]$$

### 3.2.7. Relèvement horizontal, groupe d'holonomie

Nous revenons ici à un point de vue un peu plus géométrique sur la connexion.

#### Transport horizontal

Soit  $\gamma$  une courbe dans  $M$  avec  $x = \gamma(0)$ . Nous avons déjà défini ce qu'est un relèvement horizontal de  $\gamma$  : c'est une courbe dans  $P$ , au dessus de  $\gamma$ , dont tout vecteur tangent est horizontal. Soit  $\gamma_P$  un tel relèvement horizontal de  $\gamma$ , que nous faisons commencer en  $\gamma_P(0) = p \in \pi^{-1}(x)$ . Nous montrerons plus loin que pour  $\gamma$  et  $p \in \pi^{-1}(x)$  donnés, cette courbe est unique.

Soit alors  $\gamma'_P(t) = \gamma_P(t) \cdot g$  une courbe dans  $P$  pour  $g \in G$  (constant). Il est facile de vérifier que  $\gamma'_P$  est un autre relèvement horizontal de  $\gamma$ , avec  $\gamma'_P(0) = \gamma_P(0) \cdot g = p \cdot g$ . Par

unicité, tout relèvement horizontal de  $\gamma$  commençant en  $q = p \cdot g$ , pour  $g \in G$ , s'écrit donc  $t \mapsto \gamma_P(t) \cdot g$ .

Pour  $h$  réel suffisamment petit, nous définissons

$$\begin{aligned} J_{\gamma,h} : \pi^{-1}(\gamma(0)) &\rightarrow \pi^{-1}(\gamma(h)) \\ p &\mapsto \gamma_P(h) \end{aligned}$$

où  $\gamma_P$  est l'unique relèvement horizontal de  $\gamma$  tel que  $\gamma_P(0) = p$ . Cette application est le **transport horizontal le long de  $\gamma$** . Par la propriété que nous venons de voir, elle vérifie

$$J_{\gamma,h} \circ \tilde{R}_g = \tilde{R}_g \circ J_{\gamma,h}$$

### Groupes d'holonomie

Considérons maintenant l'ensemble  $\mathcal{C}_x(M)$  des chemins dans  $M$  définis sur  $[0, 1]$ , commençant et finissant en  $x \in M$ . Alors  $J_{\gamma,1} = J_\gamma$  est un automorphisme de la fibre  $\pi^{-1}(x)$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{C}_x(M)$ . Il existe donc un  $g_\gamma(p) \in G$  tel que  $J_\gamma(p) = p \cdot g_\gamma(p)$  pour tout  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Un calcul simple montre alors que puisque  $J_\gamma$  commute avec l'action  $\tilde{R}$  de  $G$ , nous avons  $g_\gamma(p \cdot g) = g^{-1}g_\gamma(p)g$  pour tout  $g \in G$ .

Nous remarquons alors que  $H(p) = \{g_\gamma(p) \mid \gamma \in \mathcal{C}_x(M)\}$  est un sous-groupe de  $G$ , appelé **groupe d'holonomie** de  $p$ . Ces sous-groupes sont liés entre eux par conjugaison

$$H(p \cdot g) = g^{-1}H(p)g$$

Le **théorème d'Ambrose-Singer** relie ces groupes à la courbure de la connexion : l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}(p)$  de  $H(p)$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les éléments  $\Omega_{|p}(X_{|p}, Y_{|p})$  pour  $X_{|p}, Y_{|p} \in H_p \subset T_pP$ .

Ce résultat montre que la courbure est l'obstruction au retour sur lui-même d'un relèvement horizontal d'un chemin infinitésimal fermé de  $M$  (voir figure 3.6).

### Groupe d'holonomie et réduction

À partir de tout point  $p \in P$ , nous pouvons construire un sous-ensemble  $P(p)$  de  $P$  des points de  $P$  qui peuvent être joints à  $p$  par une courbe horizontale (différentiable par morceaux). Alors il est possible de montrer que  $P(p)$  est un fibré principal de groupe de structure  $H(p)$ . Ce fibré principal est donc une réduction du fibré principal  $P$ . De plus, il est facile de voir (géométriquement) que la connexion sur  $P$  qui y définit l'horizontalité se réduit à une connexion sur  $P(p)$ . Nous dirons que  $P(p)$  est le **fibré d'holonomie** de  $p$ .

Pour  $p$  et  $q$  dans  $P$ , nous n'avons que deux possibilités : ou bien  $P(p) = P(q)$ , ou bien  $P(p) \cap P(q)$  est vide. Donc  $P$  se décompose en une union disjointe de fibrés principaux sur chacun desquels la connexion se réduit. De plus, ces sous-fibrés d'holonomie sont isomorphes entre-eux.

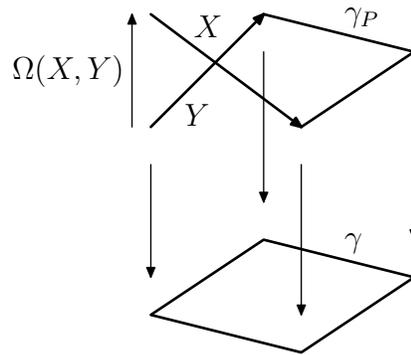


FIG. 3.6 – Un chemin  $\gamma_P$  horizontal commençant et finissant sur une même fibre ne boucle pas nécessairement. La courbure mesure exactement l'obstruction infinitésimale à sa fermeture.

### 3.3. Connexions sur un fibré vectoriel associé

*Références* : [3], [9], [12], [14], [16], [18], [20].

Nous allons transporter la notion de connexion définie sur un fibré principal  $P$  vers un fibré vectoriel associé, dans le but de construire la dérivation covariante des sections de ce fibré vectoriel, dont nous donnerons des expressions explicites. La notion de fibré vectoriel (associé) est essentielle en physique, puisque les champs physiques sont des sections de tels fibrés.

#### 3.3.1. Du fibré principal au fibré vectoriel associé

Comme nous allons le constater, une connexion sur un fibré principal définit canoniquement une connexion sur un fibré associé.

##### Vecteurs horizontaux

Soit  $E = P \times_{\ell} V$  un fibré vectoriel associé au fibré principal  $P(M, G)$ . Nous avons défini une application  $\chi_p : V \rightarrow E$ ,  $f \mapsto p_E(p, f)$ . Nous définissons maintenant une nouvelle application

$$\begin{aligned} \psi_f : P &\rightarrow E \\ p &\mapsto p_E(p, f) \end{aligned}$$

pour tout  $f \in V$ . Cette application vérifie  $\psi_{\ell_{g^{-1}}f} \circ \tilde{R}_g = \psi_f$ .

Lorsque  $P$  est muni d'une connexion, nous avons sur  $P$  la notion de vecteur horizontal. Grâce à cette application naturelle, nous allons pouvoir définir la notion de vecteur horizontal sur  $E$ . Pour cela, nous remarquons que l'application linéaire tangente  $T\psi_f : TP \rightarrow TE$

permet d'envoyer la distribution horizontale  $TH \subset TP$  en une distribution de vecteurs dans  $TE$ .

Soit  $v \in E$ , et  $p$  et  $f$  tels que  $v = p_E(p, f) = \psi_f(p)$ . Alors nous posons  $H_v E = \psi_{f*} H_p \subset T_v E$ .  $v \mapsto H_v E$  est une distribution sur  $E$ , c'est à dire définit un sous-espace tangent pour tout point de  $E$ . Cette distribution sera appelée **horizontale**. Nous avons donc transféré l'horizontalité de  $P$  sur  $E$ .

Il est aisé de voir que  $H_v E$  ne dépend pas du choix du couple  $(p, f)$  tel que  $v = \psi_f(p)$  : avec  $(p \cdot g, \ell_{g^{-1}} f)$ , nous aurions eu  $\psi_{\ell_{g^{-1}} f*} H_{p \cdot g} = \psi_{\ell_{g^{-1}} f*} \tilde{R}_{g*} H_p = \psi_{f*} H_p = H_v E$  par l'équivariance des  $H_p$  et par la propriété énoncée ci-dessus des applications  $\psi_f$ .

Nous dirons donc naturellement que  $X|_v \in T_v E$  est un **vecteur horizontal** si  $X|_v \in H_v E$ .

### Relèvement horizontal

Si  $\gamma$  est un chemin dans  $M$ , nous savons le relever horizontalement en un chemin  $\gamma_P$  dans  $P$ . Ce chemin définit alors un relèvement horizontal de  $\gamma$  dans  $E$ . En effet, si  $\gamma_P(0) = p$ , et si  $f = \chi_p^{-1}(v) \in V$ , alors le chemin  $t \mapsto p_E(\gamma_P(t), f) = \psi_f(\gamma_P(t))$  dans  $E$  passe en  $v$  à  $t = 0$  et est horizontal par définition même de la distribution horizontale  $H_v E$ . Donc

$$t \mapsto \gamma_E(t) = \psi_f(\gamma_P(t)) = p_E(\gamma_P(t), f)$$

est le **relèvement horizontal dans  $E$**  de  $\gamma(t)$ , qui passe en  $v = p_E(\gamma_P(0), f)$  à  $t = 0$ .

Si nous inversons cette relation, nous trouvons que  $f = \chi_{\gamma_P(t)}^{-1}(\gamma_E(t))$  est indépendant de  $t$ , c'est à dire que le relèvement horizontal dans  $E$  laisse fixe l'élément de  $V$  ainsi associé. C'est donc à travers cet élément fixe que l'on envoie le relèvement horizontal de  $P$  dans  $E$ .

### Transport horizontal

Cette notion de relèvement horizontal conduit à la notion de **transport horizontal** le long d'une courbe, que nous notons  $J_{\gamma, h}$  comme d'habitude. Ici, cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $E_{\gamma(0)}$  et  $E_{\gamma(h)}$ , qui envoie  $v = \gamma_E(0) \in E_{\gamma(0)}$  sur  $\gamma_E(h) \in E_{\gamma(h)}$ .

Nous avons une expression pour  $J_{\gamma, h}$  obtenue grâce au point fixe  $f \in V$  :  $J_{\gamma, h} = \chi_{\gamma_P(h)} \chi_p^{-1}$  pour n'importe quel  $\gamma_P(0) = p$ . Une écriture plus utile de cette relation est la suivante : si  $v = p_E(p, f)$  et si  $\gamma_P(0) = p$ , alors

$$J_{\gamma, h} v = p_E(\gamma_P(h), f)$$

c'est à dire encore

$$J_{\gamma, h} p_E(\gamma_P(0), f) = p_E(\gamma_P(h), f)$$

### 3.3.2. Dérivation covariante et connexion

La notion de dérivation covariante sur les sections du fibré vectoriel associé est équivalente à celle de différentielle covariante sur le fibré principal.

### La dérivation covariante sur les sections

Soit  $S \in \Gamma(E)$  une section de  $E$ . Nous savons lui associer une application  $G$ -équivariante  $f_S$  de  $P$  dans  $V$ . Cette application est identifiable à une 0-forme sur  $P$  à valeurs dans  $V$ , tensorielle de type  $(\ell, V)$ . Nous pouvons lui appliquer la différentielle covariante  $D$ , et obtenir ainsi  $Df_S \in \Omega^1(P, V)$ , tensorielle. À cette 1-forme tensorielle, nous associons par retour une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans  $E$ , que nous notons  $\nabla S \in \Omega^1(M, E)$ . C'est la **dérivation covariante de  $S$** . Schématiquement, nous avons :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_G(P, V) & \xrightarrow{D} & \Omega^1(P, V) \text{ tensorielles} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(M, E) \end{array}$$

Cherchons une expression de  $\nabla S$  grâce à cette définition. Soient  $x \in M$  et  $X_{|x} \in T_x M$ . Fixons un point  $p \in P$  au dessus de  $x$ ,  $\pi(p) = x$ . Prenons une courbe  $\gamma(t)$  dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\dot{\gamma}(0) = X_{|x}$ , et notons  $\gamma_P(t)$  le relèvement horizontal de  $\gamma(t)$  dans  $P$  qui passe en  $p$  à  $t = 0$ . Alors nous avons  $\dot{\gamma}_P(0) = X_{|p}^h$  où  $X_{|p}^h$  est le relèvement horizontal du vecteur  $X_{|x}$  dans  $T_p P$ .

À la section  $S$  de  $E$  est associée l'application  $G$ -équivariante  $f_S$  définie par la formule

$$f_S(q) = \chi_q^{-1} S(\pi(q))$$

pour tout  $q \in P$ . Nous rappelons que  $\chi_q = p_E(q, \cdot) : V \rightarrow E$ . Donc

$$S(\pi(q)) = p_E(q, f_S(q))$$

La différentielle covariante appliquée à  $f_S$  donne la 1-forme différentielle horizontale sur  $P$

$$Y_{|q} \in T_q P \mapsto Df_{S|q}(Y_{|q}) = d_P f_{S|q}(hY_{|q})$$

Nous associons alors à  $Df_S$  une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans  $E$ ,  $\nabla S$ . Nous notons  $\nabla_X S = (\nabla S)(X)$  le couplage avec un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ . Cette 1-forme est définie par la formule

$$\begin{aligned} \left( \nabla_{X_{|x}} S \right) (x) &= \chi_p Df_{S|p}(X_{|p}^h) \\ &= \chi_p d_P f_{S|p}(hX_{|p}^h) \\ &= p_E \left( p, d_P f_{S|p}(X_{|p}^h) \right) \text{ puisque } hX_{|p}^h = X_{|p}^h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} p_E \left( p, \frac{f_S \circ \gamma_P(h) - f_S \circ \gamma_P(0)}{h} \right) \text{ puisque } X_{|p}^h = \dot{\gamma}_P(0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [p_E(p, f_S \circ \gamma_P(h)) - p_E(p, f_S \circ \gamma_P(0))] \end{aligned}$$

Le second terme de cette dernière différence est  $S(x) = p_E(p, f_S(p))$ . Cherchons à interpréter le premier terme. Par propriété de  $J_{\gamma, t}$  et par le choix fait pour  $\gamma_P$ , nous avons

$$J_{\gamma, t} p_E(p, f_S \circ \gamma_P(h)) = p_E(\gamma_P(t), f_S \circ \gamma_P(h))$$

donc pour  $t = h$

$$\begin{aligned} J_{\gamma,h} p_E(p, f_S \circ \gamma_P(h)) &= p_E(\gamma_P(h), f_S \circ \gamma_P(h)) \\ &= S(\pi \circ \gamma_P(h)) \\ &= S(\gamma(h)) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $p_E(p, f_S \circ \gamma_P(h)) = J_{\gamma,h}^{-1} S(\gamma(h))$ . Tout ceci conduit finalement à l'expression

$$(\nabla_X S)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [J_{\gamma,h}^{-1} S(\gamma(h)) - S(\gamma(0))]$$

C'est la **dérivée covariante** de  $S$  dans la direction  $X|_x$ .

Cette formule nous est familière et admet une interprétation géométrique qui nous est connue : nous comparons, dans l'espace vectoriel  $E_x$ , les valeurs  $S(x) = S(\gamma(0))$  et  $J_{\gamma,h}^{-1} S(\gamma(h))$ , cette dernière étant la valeur de  $S$  au dessus de  $\gamma(h)$  ramenée horizontalement au dessus de  $x$ .

De ces calculs, il faut retenir les correspondances :

sections de $E$	$\Gamma(E)$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{F}_G(P, V)$	fonctions $G$ -équivariantes $P \rightarrow V$
section	$S$	$\longleftrightarrow$	$f_S$	fonction équivariante
champ de vecteur sur $M$	$X$	$\longleftrightarrow$	$X^h$	champ relevé horizontal dans $P$
dérivée covariante	$\nabla_X S$	$\longleftrightarrow$	$X^h \cdot f_S$	dérivation sur une fonction

qui fait de la dérivation covariante sur les sections de  $E$  une dérivation au sens des vecteurs sur les fonctions  $G$ -équivariantes de  $P$  dans  $V$ .

### Connexion

Si  $X \in \Gamma(M)$  est un champ de vecteur sur  $M$  et si  $f \in \mathcal{F}(M)$ , alors nous avons défini une application  $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  qui vérifie :

- $\nabla_{X+X'} S = \nabla_X S + \nabla_{X'} S$  ;
- $\nabla_{fX} S = f \nabla_X S$  ;
- $\nabla_X (S + S') = \nabla_X S + \nabla_X S'$  ;
- $\nabla_X f S = f \nabla_X S + (X \cdot f) S$ .

Nous pouvons donc identifier  $\nabla$  à une application

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

que nous appellerons une **connexion** sur  $E$ .

### Connexion compatible avec une métrique de fibré

Supposons que le fibré vectoriel  $E$  soit muni d'une métrique de fibré  $h$ . Nous dirons que la connexion  $\nabla$  est **compatible avec la métrique de fibré**, ou encore que c'est une

**connexion métrique** si, pour toutes sections  $S, S' \in \Gamma(E)$ , et tout champ de vecteurs  $X \in \Gamma(M)$ , nous avons

$$X \cdot h(S, S') = h(\nabla_X S, S') + h(S, \nabla_X S')$$

Si nous enlevons la dépendance en  $X$  dans cette formule, nous avons

$$dh(S, S') = h(\nabla S, S') + h(S, \nabla S')$$

où la définition de  $h$  sur  $\Omega^1(M, E) \times \Gamma(E)$  est évidente.

Si  $\nabla$  est une connexion compatible avec la métrique de fibré, et si  $\gamma$  est un chemin dans  $M$ , alors le transport horizontal  $J_{\gamma, t}$  est une isométrie entre  $(E_{\gamma(0)}, h_{\gamma(0)})$  et  $(E_{\gamma(t)}, h_{\gamma(t)})$ .

### La dérivation covariante sur les formes

Puisque nous avons  $\nabla : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ , il est souhaitable de l'étendre en

$$\nabla : \Omega^r(M, E) \rightarrow \Omega^{r+1}(M, E)$$

Pour cela, nous posons naturellement, comme pour les sections de  $E$ ,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(P, V) \text{ tensorielles} & \xrightarrow{D} & \Omega^{r+1}(P, V) \text{ tensorielles} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \Omega^r(M, E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^{r+1}(M, E) \end{array}$$

$\nabla$  est la **dérivation covariante sur**  $\Omega^r(M, E)$ .

Il est possible de calculer explicitement l'expression de cette dérivation. Pour cela, soit  $\Psi \in \Omega^r(M, E)$ . Associons lui la forme tensorielle  $\psi \in \Omega^r(P, V)$ , par la relation :  $\forall X_1, \dots, X_r \in \Gamma(M), \forall x \in M, \forall p \in P_x (\pi(p) = x)$ ,

$$\Psi(X_1, \dots, X_r)(x) = p_E(p, \psi(X_1^h, \dots, X_r^h)(p))$$

Par définition, nous avons

$$(\nabla \Psi)(X_0, \dots, X_r)(x) = p_E(p, (D\psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(p))$$

Or,

$$\begin{aligned} (D\psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(p) &= (d_P \psi)(hX_0^h, \dots, hX_r^h)(p) \\ &= (d_P \psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(p) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \left( X_i^h \cdot \psi(X_0^h, \dots, \overset{i}{\dot{\phantom{X}}}, \dots, X_r^h) \right) (p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X_i^h, X_j^h], \dots, \overset{i}{\dot{\phantom{X}}}, \dots, \overset{j}{\dot{\phantom{X}}}, \dots, X_r^h)(p) \end{aligned}$$

Comme  $\psi$  est horizontale, nous avons

$$\begin{aligned}\psi([X_i^h, X_j^h], \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r^h) &= \psi(h[X_i^h, X_j^h], \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r^h) \\ &= \psi([X_i, X_j]^h, \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r^h)\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons remarqué que

$$p_E \left( p, X_i^h \cdot \psi(X_0^h, \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r^h)(p) \right) = \nabla_{X_i} \Psi(X_0, \dots, X_r)(x)$$

En regroupant tout cela, nous avons donc une expression de  $\nabla$  :

$$\begin{aligned}(\nabla \Psi)(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \nabla_{X_i} \Psi(X_0, \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Psi([X_i, X_j], \dots \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r)\end{aligned}$$

Si  $V$  est une algèbre associative, alors  $\Omega^*(M, E)$  est une algèbre graduée. Dans ce cas, il est facile de montrer que nous avons la règle de dérivation suivante :

$$\nabla(\alpha \wedge \beta) = (\nabla \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \nabla \beta$$

pour deux formes  $\alpha \in \Omega^r(M, E)$  et  $\beta \in \Omega^*(M, E)$  (le produit  $\alpha \wedge \beta$  a été défini en 3.2.2).

### La courbure

Nous voyons que l'expression ci-dessus de  $\nabla \Psi$  est analogue à celle donnée pour la différentielle sur une variété, et le calcul nous montre pourquoi. Cependant, nous savons que la différentielle sur une variété est de carré nul. Cherchons ce qui se passe pour  $\nabla$ .

Nous avons  $\nabla^2 : \Omega^r(M, E) \rightarrow \Omega^{r+2}(M, E)$ . Nous n'allons pas calculer  $\nabla^2$  pour  $r$  quelconque, mais seulement pour  $r = 0$ , ce qui simplifie les calculs. Soient donc  $S \in \Gamma(E)$  et  $X, Y \in \Gamma(M)$ . Alors

$$\begin{aligned}\nabla^2 S(X, Y) &= \nabla_X \nabla S(Y) - \nabla_Y \nabla S(X) - \nabla S([X, Y]) \\ &= \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X, Y]} S \\ &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) S\end{aligned}$$

Nous voyons que  $\nabla^2$  n'est pas toujours nulle. Sa nullité équivaut à la nullité de la quantité

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(M)$ . Or, l'application linéaire  $R : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^2(M, E)$  n'est autre que la **courbure** de la connexion  $\nabla$ , ce que nous avons déjà rencontré pour  $D$  sous la forme  $D^2 = \eta(\Omega)$  en 3.2.5.

### Une autre expression de $\nabla$

Nous allons donner maintenant une expression utile de  $\nabla$  sur  $\Omega^*(U, E)$  pour  $U$  un ouvert d'une carte de  $M$ . En effet, nous pouvons constater sur l'expression précédente de  $\nabla$  que cet opérateur n'agit que localement. C'est à dire que pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , nous avons  $\nabla(\Psi|_U) = (\nabla\Psi)|_U$ . Il est donc légitime, pour certains calculs, d'utiliser une expression de  $\nabla$  sur  $\Omega^*(U, E)$ .

Nous nous plaçons dans l'identification locale  $\Omega^r(U, E) = \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$ . Dans ce langage, l'égalité  $\nabla_X fS = f\nabla_X S + (X \cdot f)S$  s'écrit

$$\nabla(fS) = f\nabla S + df \otimes S$$

et  $\nabla$  a été étendue en

$$\nabla : \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E) \rightarrow \Omega^{r+1}(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$$

Pour  $\alpha \otimes S \in \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$ , nous allons montrer que

$$\nabla(\alpha \otimes S) = d\alpha \otimes S + (-1)^r \alpha \wedge \nabla S$$

Dans le second terme du second membre, on effectue le produit extérieur de  $\alpha$  avec la 1-forme qui apparaît dans  $\nabla S \in \Omega^1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$ .

Soient  $X_0, \dots, X_r$   $r+1$  champs de vecteurs sur  $U$  (que l'on peut considérer comme des restrictions à  $U$  de champs de vecteurs sur  $M$ ). Alors au dessus de  $U$ , nous avons

$$\begin{aligned} (d\alpha \otimes S + (-1)^r \alpha \wedge \nabla S)(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \left( X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r) \right) S \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r) S \\ &+ (-1)^r \sum_{i=0}^r (-1)^r (-1)^i \alpha(X_0, \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r) \nabla_{X_i} S \end{aligned}$$

où le facteur  $(-1)^r (-1)^i$  dans la dernière somme est dû à la définition du produit extérieur. C'est le coefficient  $(-1)^{\text{sign}(\sigma)}$ . Nous n'avons pas sommé ici sur toutes les permutations car nous avons utilisé le fait que  $\alpha$  était antisymétrique. Il ne reste donc que les permutations qui prennent le  $i$ -ième vecteur et l'envoient après le  $r$ -ième. Nous remarquons que deux sommes peuvent se regrouper en utilisant la relation  $\nabla_X fS = f\nabla_X S + (X \cdot f)S$  avec  $f = \alpha(X_0, \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r)$  et  $X = X_i$ . Ceci donne finalement

$$\begin{aligned} (d\alpha \otimes S + (-1)^r \alpha \wedge \nabla S)(X_0, \dots, X_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \nabla_{X_i} \left( \alpha(X_0, \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots, X_r) S \right) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \overset{i}{\dot{\vee}} \dots \overset{j}{\dot{\vee}} \dots, X_r) S \end{aligned}$$

ce qui est l'expression donnée plus haut de  $\nabla\Psi$  pour  $\Psi = \alpha \otimes S$ .

Il faut remarquer que dans cette expression que nous donnons de  $\nabla$  sur  $\Omega^*(U, E)$ , il est supposé que nous connaissons  $\nabla$  sur  $\Gamma(U, E)$ , et uniquement sur  $\Gamma(U, E)$ .

Le fait que le produit tensoriel soit transparent sur  $\mathcal{F}(U)$  est une contrainte sur les objets que nous pouvons définir sur  $\Omega^*(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Gamma(U, E)$ . En effet, il faut vérifier ici, par exemple, que  $\nabla(\alpha \otimes fS) = \nabla(f\alpha \otimes S)$ . Or, c'est un exercice facile que de vérifier cela, mais le facteur  $(-1)^r$  est indispensable, tout comme il est indispensable pour retrouver la bonne expression de  $\nabla$ .

Dans le cas où  $M$  est une variété compacte, cette expression de  $\nabla$  est valable sur tout  $M$  puisque  $\Omega^*(M, E) = \Omega^*(M) \otimes_{\mathcal{F}(M)} \Gamma(E)$ .

### Remarque

On peut se donner un fibré vectoriel  $E$  sans le considérer comme associé à un fibré principal, et on peut définir la notion de connexion sur ce fibré vectoriel sans faire intervenir de différentielle covariante. Pour cela, on choisit une distribution horizontale  $H_v E \subset T_v E$  supplémentaire au sous-espace vectoriel des vecteurs verticaux (tangent à la fibre). La connexion  $\nabla$  est alors définie sur les sections de  $E$  par la formule géométrique faisant intervenir le transport horizontal. Ensuite, on peut étendre  $\nabla$  à tout  $\Omega^*(M, E)$  en prenant pour définition la formule donnant  $\nabla\Psi$  ou bien la formule donnant  $\nabla(\alpha \otimes S)$ . La donnée d'une telle connexion induit une connexion de fibré principal sur le fibré principal des repères de  $E$ . La description précédente est donc très générale.

## 3.4. Expressions locales

En physique, on utilise plus souvent les formes localement que globalement. C'est pourquoi nous voulons maintenant « redescendre » les divers objets définis sur un fibré principal  $P$  et sur un fibré vectoriel associé, en des objets définis localement sur  $M$ . En particulier, nous nous intéressons aux formes de connexion et de courbure, ainsi qu'aux formes différentielles tensorielles. Nous rappelons que ces formes tensorielles sur  $P$  sont aussi des formes sur  $M$  à valeurs dans un fibré associé, et que ces formes se trivialisent localement sur  $M$ . Dans ce qui suit, nous notons  $d$  la différentielle sur  $M$ .

### 3.4.1. Préliminaires

#### Un calcul essentiel

Le calcul que nous nous proposons de présenter ici est semblable à celui rencontré en 3.2.6 pour établir l'action du groupe de jauge sur une connexion. Soit  $g : M \rightarrow G$  une application différentiable. Soit  $X|_x \in T_x M$  et  $\gamma(t)$  une courbe dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\dot{\gamma}(0) = X|_x$ . Alors  $g(\gamma(t))$  est une courbe dans  $G$ , qui donne par dérivation en 0 un vecteur de  $T_{g(x)}G$ . Par translation à gauche, nous ramenons ce vecteur en  $T_e G \simeq \mathfrak{g}$ . Nous avons

ainsi

$$g^{-1}(x) \left( \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} \in \mathfrak{g}$$

Nous adoptons ici une notation multiplicative (nous identifions  $L_{g^*}$  avec le produit à gauche par  $g$ ), qui est pleinement justifiée pour une algèbre de Lie matricielle, et qui est parfaitement correcte, moyennant les bonnes identifications, pour n'importe quelle algèbre de Lie. Nous avons alors

$$\left( \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} = (\partial_\mu g)_{|x} X_{|x}^\mu = dg_{|x}(X_{|x})$$

où  $dg = \partial_\mu g dx^\mu$  est une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans  $T_{g(x)}G$ . Nous avons pris des indices grecs ( $\mu$ ) pour les coordonnées sur  $M$  afin d'éviter par la suite les interférences avec les indices des ouverts qui sont latins. Nous voyons ainsi que  $g^{-1}(x)dg_{|x}(X_{|x}) \in \mathfrak{g}$  pour tout  $X_{|x} \in T_x M$ . C'est à dire que  $g^{-1}dg$  est une 1-forme différentielle sur  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . On peut montrer facilement que cette 1-forme n'est autre que  $g^*\theta$  où  $\theta$  est la forme de Maurer-Cartan sur  $G$ .

Soit maintenant  $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  une trivialisatation locale du fibré principal  $P$ , associée à une trivialisatation locale  $(U, \phi)$  de  $P$ . Toute autre trivialisatation locale  $s' : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  au dessus de  $U$  se relie à la précédente par une relation du type

$$s'(x) = s(x) \cdot g(x)$$

où  $g : U \rightarrow G$  est une application différentiable (nous supposons toujours que nos sections sont différentiables).

Soient  $X_{|x} \in T_x M$  et  $\gamma$  comme précédemment. Alors

$$\begin{aligned} s'_* X_{|x} &= \left( \frac{d}{dt} s' \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} [s \circ \gamma(t) \cdot g \circ \gamma(t)] \right)_{|t=0} \\ &= \left[ \left( \frac{d}{dt} s \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} \right] \cdot g(x) + s(x) \cdot \left[ \left( \frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} \right] \end{aligned}$$

où nous avons utilisé « naïvement » la notation multiplicative et la formule de la dérivée d'un produit. Nous réécrivons cette expression sous la forme

$$\begin{aligned} s'_* X_{|x} &= \left[ \left( \frac{d}{dt} s \circ \gamma(t) \right)_{|t=0} \right] \cdot g(x) + s(x) \cdot g(x) \left[ \left( \frac{d}{dt} (g^{-1}(x)g \circ \gamma(t)) \right)_{|t=0} \right] \\ &= (s_* X_{|x}) \cdot g(x) + s'(x) \cdot g^{-1}(x) dg_{|x}(X_{|x}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le résultat préliminaire sur la signification de  $g^{-1}dg$ . Interprétons les deux termes cette somme :

- Le premier est la « multiplication » à droite d'un vecteur de  $\pi^{-1}(U)$  par un élément de  $G$  : en fait, ce terme vient de l'action à droite de  $G$  sur  $P$  et vaut donc

$$T_{s(x)}\tilde{R}_{g(x)}(s_*X|_x)$$

- Le second terme est la « multiplication » d'un point de  $P$  par un vecteur de  $\mathfrak{g}$  : c'est l'action infinitésimale à droite de  $G$  sur  $P$ . C'est donc la dérivée en 0 de  $p \cdot \exp(tY)$  où  $Y = g^{-1}(x)dg|_x(X|_x) \in \mathfrak{g}$  et  $p = s'(x)$ . C'est donc  $Y|_p^v$ , c'est à dire

$$[g^{-1}(x)dg|_x(X|_x)]|_{s'(x)}^v$$

Nous avons donc finalement la relation suivante :

$$s'_*X|_x = \tilde{R}_{g(x)*} \circ s_*X|_x + [g^{-1}(x)dg|_x(X|_x)]|_{s'(x)}^v$$

pour  $s'(x) = s(x) \cdot g(x)$  au dessus de  $U$ .

### L'application relèvement horizontal

Comme première application de cette relation, nous pouvons donner une expression explicite de l'application relèvement horizontal

$$\begin{aligned} T_x M &\rightarrow H_p \\ X|_x &\mapsto X|_p^h \end{aligned}$$

que nous avons définie auparavant. En effet, il est facile, grâce au calcul précédent, de montrer que

$$X|_p^h = h \circ s_*X|_x$$

pour n'importe quelle section locale  $s$  telle que  $s(x) = p$ .

En effet, cette expression est indépendante du choix de la section locale, car si  $s'$  est une autre telle section, avec  $s'(x) = p$ , alors  $h$  appliquée à la relation que nous venons de montrer donne

$$h \circ s'_*X|_x = h \circ \tilde{R}_{g(x)*} \circ s_*X|_x$$

puisque l'autre terme est vertical. Nous avons de plus  $g(x) = e$ , donc il reste

$$h \circ s'_*X|_x = h \circ s_*X|_x$$

Si maintenant  $q = p \cdot g$  est un autre point de  $P_x$ , et si  $s'$  est une autre section telle que  $s'(x) = q$ , alors notre définition donne, avec les notations ci-dessus,

$$\begin{aligned} X|_q^h &= h \circ s'_*X|_x \\ &= h \left( \tilde{R}_{g(x)*} s_*X|_x + [g^{-1}(x)dg|_x(X|_x)]|_{s'(x)}^v \right) \\ &= h \circ \tilde{R}_{g(x)*} \circ s_*X|_x \\ &= \tilde{R}_{g(x)*} \circ h \circ s_*X|_x \\ &= \tilde{R}_{g(x)*} X|_p^h \end{aligned}$$

puisque  $g(x) = g$  et  $h \circ \tilde{R}_{g^*} = \tilde{R}_{g^*} \circ h$ . Ceci prouve que nous avons bien l'application  $X \mapsto X^h$  qui a été définie en 3.2.1.

### Trivialisation locale d'une forme tensorielle

Soit  $\psi \in \Omega^r(P, V)$  une forme tensorielle de type  $(\ell, V)$  sur  $P$ . Nous lui avons associé des formes locales  $\varphi$  à valeurs dans  $V$ , par la relation

$$\varphi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = \psi|_{s(x)}(X_{1|s(x)}^h, \dots, X_{r|s(x)}^h)$$

pour  $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  section locale trivialisante de  $P$ . Avec l'expression précédente de  $X^h$ , cette formule devient

$$\varphi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = \psi|_{s(x)}(h \circ s_* X_{1|x}, \dots, h \circ s_* X_{r|x})$$

Or,  $\psi$  est horizontale, donc il n'est pas nécessaire de faire apparaître l'application  $h$  :

$$\varphi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = \psi|_{s(x)}(s_* X_{1|x}, \dots, s_* X_{r|x})$$

ou encore

$$\varphi|_x(X_{1|x}, \dots, X_{r|x}) = (s^* \psi|_{s(x)})(X_{1|x}, \dots, X_{r|x})$$

c'est à dire finalement, et tout simplement,

$$\varphi = s^* \psi$$

C'est un résultat que nous utiliserons par la suite.

### Relèvement horizontal de chemins

Soit  $\gamma$  un chemin dans  $M$ , avec  $\gamma(0) = x$ , et soit  $U$  un ouvert de  $M$  contenant  $x$ . Notons  $\gamma_P$  un relèvement horizontal de  $\gamma$  dans  $P$ , avec  $\gamma_P(0) = p$ . Nous allons montrer l'existence et l'unicité de ce  $\gamma_P$ . Soit  $s : U \rightarrow P$  une section locale trivialisante de  $P$ , avec  $s(x) = p$ . Le chemin  $\gamma_P$  peut alors s'écrire, au dessus de  $U$  :  $\gamma_P(t) = s \circ \gamma(t) \cdot g(t)$  avec  $g(t) \in G$  et  $g(0) = e$ .

Nous nous donnons maintenant sur un voisinage de  $\gamma$  dans  $U$ , une section qui prolonge  $\gamma_P$ , que nous notons  $s_P : U \rightarrow P$ , telle que  $s_P(\gamma(t)) = \gamma_P(t)$ . Nous prolongeons de même  $g : U \rightarrow G$  afin que  $s_P = s \cdot g$  sur  $U$ . Tout ceci est fait dans le but de pouvoir différentier  $s_P$  et  $g$  sur  $U$ . Mais le résultat final ne dépendra pas de ces prolongements car ces différentielles ne seront prises que le long de la courbe  $\gamma$ .

Soit  $X|_{\gamma(t)}$  un vecteur tangent à  $\gamma$  en  $\gamma(t)$ . Alors il est facile de voir que  $\hat{X}|_{s_P(\gamma(t))} = s_{P*} X|_{\gamma(t)}$  est le vecteur tangent à  $\gamma_P$  en  $\gamma_P(t)$ . Le calcul ci-dessus donne alors

$$s_{P*} X|_{\gamma(t)} = \tilde{R}_{g^*} s_* X|_{\gamma(t)} + [g^{-1}(\gamma(t)) dg|_{\gamma(t)}(X|_{\gamma(t)})]_{|s_P(\gamma(t))}^v$$

où  $dg_{|\gamma(t)}(X_{|\gamma(t)}) = dg(t)/dt$  puisque nous sommes au dessus de  $\gamma$ . En appliquant sur chaque membre la 1-forme de connexion  $\omega$ , en restant au dessus de  $\gamma$ , et en utilisant l'équivariance de  $\omega$ , nous obtenons

$$0 = g^{-1}(t)\omega(s_*X_{|\gamma(t)})g(t) + g^{-1}(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

c'est à dire

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\omega(s_*X_{|\gamma(t)})g(t)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, dont l'inconnue est l'application  $g$ , qui admet donc une unique solution lorsque  $g(0)$  est donné. C'est à dire que le relèvement horizontal de  $\gamma$  dans  $P$  existe et est unique pour une condition initiale fixée.

### 3.4.2. La 1-forme de connexion et la courbure

Nous allons utiliser le calcul précédent pour trouver l'expression du recollement des formes locales de la 1-forme de connexion, ainsi que des formes locales de la courbure.

#### La connexion

Considérons un système de trivialisations locales de  $P$  à travers les sections locales  $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  où comme d'habitude  $s_i(x) = \phi_i(x, e)$ . Nous pouvons redescendre localement la 1-forme de connexion  $\omega$  sur  $P$  sur chacun des ouverts  $U_i$  en posant

$$A_i = s_i^*\omega$$

qui est une 1-forme sur  $U_i$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . Nous dirons que les  $A_i$  sont les **1-formes de connexion locales**. Attention, la forme de connexion  $\omega$  n'étant pas horizontale, les  $A_i$  ne sont pas les trivialisations locales que nous avons définies pour les formes tensorielles, même si l'expression utilisée pour les définir est la même. Dans ce qui suit, nous allons établir les relations entre ces 1-formes locales de connexion.

Sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons  $s_i \cdot g_{ij} = s_j$ . Soient  $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$  et  $X_{|x} \in T_x M$ . La relation que nous avons établie donne, dans ce contexte,

$$s_{j*}X_{|x} = \tilde{R}_{g_{ij}(x)*}s_{i*}X_{|x} + \left[ g_{ij}^{-1}(x)dg_{ij}|_x(X_{|x}) \right]_{|s_j(x)}^v$$

Appliquons alors  $\omega$  aux deux membres de cette expression :

$$A_{j|_x}(X_{|x}) = \left( \tilde{R}_{g_{ij}(x)*} \omega \right)_{|s_i(x)}(s_{i*}X_{|x}) + g_{ij}^{-1}(x)dg_{ij}|_x(X_{|x})$$

En utilisant l'équivariance de  $\omega$ , nous trouvons :

$$A_j = g_{ij}^{-1}A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}$$

Ce sont les **formules de recollement** des 1-formes de connexion locales  $A_i$  sur les ouverts  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

Réciproquement, si nous nous donnons, sur un système de trivialisations locales, de telles 1-formes locales, qui se raccordent selon ces formules, alors il existe une unique 1-forme de connexion sur  $P$  qui les redonne par ces trivialisations. Il est donc équivalent de se donner cette famille de 1-forme sur des ouverts de  $M$  ou de se donner la 1-forme de connexion sur  $P$ .

### La courbure

Pour la courbure, nous posons, de la même façon

$$F_i = s_i^* \Omega$$

qui sont les **2-formes de courbure locales**. Ici, il s'agit bien des trivialisations locales au sens des formes tensorielles, puisque  $\Omega$  est tensorielle. En utilisant les équations de structure de Cartan, il est facile d'établir que

$$\begin{aligned} F_i &= dA_i + A_i \wedge A_i \\ &= dA_i + \frac{1}{2}[A_i, A_i] \end{aligned}$$

Ces identités porteront encore le nom d'**équations de structure de Cartan**. Ces 2-formes de courbure locales se recollent selon les **formules de recollement**

$$F_j = g_{ij}^{-1} F_i g_{ij}$$

sur tout  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Ces relations sont des conséquences directes du fait que  $\Omega$  est une forme tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$  sur  $P$  et que les  $F_i$  en sont les formes locales sur  $M$ . Elles sont bien sûr compatibles avec les formules de recollement trouvée pour les  $A_i$  et les équations de structure de Cartan ci-dessus.

De part sa nature tensorielle, la courbure peut donc être vue de trois façons différentes :  $\Omega$  forme tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$  sur  $P$ ,  $\mathbb{F}$  forme sur  $M$  à valeurs dans le fibré vectoriel associé  $AdP$ ,  $\{F_i\}_{i \in I}$  formes locales sur  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  se recollant par les formules ci-dessus. Par contre, la connexion n'admet que deux interprétations :  $\omega$  forme sur  $P$  ou  $\{A_i\}_{i \in I}$  formes locales sur  $M$  avec les formules de recollement établies auparavant. La connexion ne peut donc jamais être considérée comme une forme globale sur  $M$ . Comme nous le verrons par la suite, ceci a des conséquences en physique des théories de jauge.

Cependant, si  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux 1-formes de connexion sur le fibré principal  $P$ , d'expressions locales  $A_i$  et  $A'_i$ , alors  $\omega - \omega'$  est une 1-forme sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , dont l'expression locale est  $A_i - A'_i$ . On remarque alors que ces 1-formes locales sur les ouverts  $U_i$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  ont de bonnes propriétés de recollement. Donc les  $A_i - A'_i$  sont les expressions locales d'une 1-forme sur  $M$  à valeurs dans  $AdP$ ; c'est à dire encore que  $\omega - \omega'$  est tensorielle, comme il est facile de le vérifier directement. Ceci donne à l'ensemble des connexions sur  $P$  une structure d'espace affine, dont l'espace vectoriel associé est  $\Omega^1(M, AdP)$ .

### 3.4.3. La différentielle covariante

De la même façon que nous venons de descendre sur  $M$  (localement) la connexion et la courbure, nous allons y descendre la différentielle covariante, dont nous donnerons l'expression sur les trivialisations locales de formes tensorielles.

#### Expressions locales de la dérivée covariante

Afin d'alléger les écritures, nous oublions les indices de l'ouvert  $U$  de trivialisations : nous notons  $A = s^*\omega$  et  $F = s^*\Omega$ . Pour  $\psi$  forme quelconque sur  $P$  à valeurs dans  $V$  espace vectoriel munie d'une représentation  $\ell$  de  $G$ , nous définissons de même  $\varphi = s^*\psi$ . Sur  $U$ , nous définissons la **dérivée covariante locale** sur  $\varphi$  :

$$\nabla^U \varphi = s^* D\psi$$

où  $D$  est la différentielle covariante définie auparavant.

Si  $\psi$  est tensorielle de type  $(\ell, V)$  sur  $P$ , alors nous savons que  $D\psi = d_P\psi + \eta(\omega) \wedge \psi$  où  $\eta$  est la représentation de  $\mathfrak{g}$  induite par  $\ell$  sur  $V$ . Pour  $\varphi = s^*\psi$ , nous avons donc l'importante formule

$$\nabla^U \varphi = d\varphi + \eta(A) \wedge \varphi$$

Cette expression de  $\nabla^U$  n'est valable que pour  $\varphi$  expression locale sur  $M$  d'une forme tensorielle sur  $P$ . En particulier, pour la forme de courbure  $\Omega$ , tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ , nous avons

$$\nabla^U F = dF + [A, F]$$

Nous ne pouvons pas appliquer cette expression à  $A$  lui-même (dans ce cas,  $F = \nabla^U A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$  est donnée par les équations de structure de Cartan).

D'autre part, de  $D\Omega = 0$  nous tirons l'**identité de Bianchi locale** :

$$dF + [A, F] = 0$$

Il est aussi facile d'établir que

$$\nabla^U \nabla^U \varphi = \eta(F) \wedge \varphi$$

en utilisant la relation  $D^2\psi = \Omega \wedge \psi$ .

#### Lien avec la physique des champs de jauge

Il est temps maintenant de faire le lien avec la physique. Nous supposons que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie matricielle. Posons  $\{E_i\}$  une base de  $\mathfrak{g}$  (ce sont des matrices). Alors nous avons  $A = A_\mu dx^\mu$ , où  $A_\mu = E_i \otimes A_\mu^i$ , et de même,  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  (sommation sur tous les indices  $\mu, \nu$ ), avec  $F_{\mu\nu} = E_i \otimes F_{\mu\nu}^i$ .

Nous voyons pleinement ici le rôle des indices : comme les  $E_i$  sont des matrices dans  $\mathfrak{g}$ ,  $A_\mu$  est elle-même une matrice dans  $\mathfrak{g}$ , que l'on écrit  $A_{\mu b}^a$ . Nous avons donc deux sortes d'indices très différents :  $\mu$  se réfère aux coordonnées sur  $M$ , alors que  $a, b$  sont les indices

d'une matrice. C'est ce que nous avons déjà rencontré avec la connexion  $\Gamma_{ij}^k$ . Nous avons la même distinction pour  $F_{\mu\nu}^a$ , comme nous l'avons vu sur  $R^k_{\ell ij}$  (nous réexaminons en détail plus loin le cas des connexions linéaires à la lumière de ce qui vient d'être fait).

Les **équations de structure de Cartan** donnent alors

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + C_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k \end{aligned}$$

En physique, les  $A_\mu^i$  sont les champs de jauge ( $A_\mu$  est le potentiel de jauge), et les  $F_{\mu\nu}^i$  sont les champs « physiques » associées. Ces champs physiques sont, comme nous l'avons vu plusieurs fois, l'expression locale d'un objet mathématique défini sur la variété de base à valeurs dans un fibré. Ce n'est pas le cas pour les potentiels, qui ne sont que l'expression locale d'un objet défini sur le fibré principal.

Dans ce contexte, ce que les physiciens appellent une transformation de jauge peut s'interpréter de deux façons différentes. La première consiste à dire que l'on fait un choix différent de la section trivialisante  $s$ . Si nous prenons une autre section  $s'$  sur le même ouvert  $U$ , et notons  $A'$  et  $F'$  les champs correspondants, alors nous savons qu'il existe  $g : U \rightarrow G$  telle que  $s'(x) = s(x) \cdot g(x)$ . Les calculs effectués jusqu'ici montrent alors que

$$\begin{aligned} A' &= g^{-1} A g + g^{-1} d g \\ F' &= g^{-1} F g \end{aligned}$$

C'est bien ce que les physiciens ont l'habitude d'appeler une transformation de jauge. Mathématiquement, il ne s'agit que de prendre une « base » différente pour repérer les objets (la section locale trivialisante), c'est pourquoi nous dirons qu'il s'agit d'une **transformation de jauge passive**. En d'autres termes, il s'agit de changer la façon dont nous décrivons localement le système, et non pas le système lui-même. L'autre interprétation consiste à changer de connexion sur le fibré  $P$  par action d'un élément du groupe de jauge du fibré, comme nous l'avons vu en 3.2.6. Dans ce cas, en utilisant la même trivialisante locale, les nouvelles formes de connexion ou de courbure locales se relient aux précédentes par les formules ci-dessus, où  $g$  doit être interprété comme l'expression locale d'un élément du groupe de jauge. Dans ce cas, nous dirons qu'il s'agit d'une **transformation de jauge active**. Dans ce cas en effet, les points du fibré principal bougent sous l'action du groupe de jauge. Dans une théorie de jauge, c'est cette dernière transformation que nous devons considérer comme une vraie symétrie. Il faut noter que compte-tenu de la topologie globale du fibré principal, cette dernière symétrie est plus contraignante que la précédente.

Si  $\psi$  est un champ tensoriel de type  $(V, \ell)$  sur  $P$ , trivialisé par  $s$  en  $\varphi = s^* \psi$ , alors il est facile de montrer que la nouvelle trivialisante locale de  $\psi$  par  $s'$  vaut

$$\varphi' = \ell_{g^{-1}} \varphi$$

C'est ce que les physiciens appellent une transformation de jauge sur un champ de matière. Il faut noter que là encore, il est utile de distinguer les transformations passives et actives.

Nous avons défini  $\nabla^U$  en partant de  $D$  sur  $P$ . Nous aurions pu aussi partir de  $\nabla$  sur  $\Omega^*(M, E)$  pour  $E = P \times_\ell V$  (avec les notations précédentes), puisque nous savons passer d'une forme sur  $M$  à valeur dans  $E$  à son expression locale à valeurs dans  $V$ . En général, en physique, la variété de base  $M$  est l'espace-temps. Les champs sont donc définis dessus, et non sur  $P$ . Donc tout champ physique  $\varphi : U \rightarrow V$  défini localement doit être considéré comme l'expression locale d'un champ  $\Psi$  défini sur  $M$  tout entier à valeurs dans le fibré vectoriel  $E$ . La dérivée covariante locale de  $\varphi$  est l'expression usuellement prise par les physiciens pour exprimer le couplage (dit « minimal ») entre un champ de matière  $\varphi$  et un champ de jauge  $A$ . Nous voyons que l'expression  $\nabla^U \varphi$  donnée ci-dessus n'est que l'expression locale d'un objet définie globalement sur  $M : \nabla \Psi$  (ou sur  $P : D\psi$ ). Il faut noter que ce couplage a été défini à l'origine par les physiciens pour être compatible avec les transformations de jauge données ci-dessus sur  $A$  et  $\varphi$ .

### 3.5. Le fibré principal $L(M)$

À la lumière de tout ce qui vient d'être introduit, il est possible de reconsidérer les fibrés naturels introduits jusqu'ici sur une variété (fibré tangent, cotangent, des tenseurs...) et d'introduire d'autres fibrés. Le fibré principal commun à tous ces fibrés vectoriels est le fibré des repères  $L(M)$ .

#### 3.5.1. Le fibré principal $L(M)$

##### Rappels

Le **fibré des repères**  $L(M)$  a été introduit en 3.1.1. Au dessus de chaque point de  $M$ , la fibre est l'ensemble des bases de l'espace tangent en ce point. Chaque point de  $L(M)$  représente donc un repère, au sens où il contient un point de la variété  $M$  et une base de l'espace tangent en ce point. Le groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  agit à droite transitivement sur chacun des ensembles de bases.  $L(M)$  est ainsi un fibré principal de groupe de structure  $GL(n, \mathbb{R})$ . Nous rappelons que l'action de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $L(M)$  est donnée par  $(x, \{e_{a|x}\}) \mapsto (x, \{e_{b|x} G_a^b\})$ , avec  $(G_a^b) \in GL(n, \mathbb{R})$  et  $\{e_{a|x}\}$  un élément de  $L_x(M)$ . Il est toujours possible de réduire le groupe de structure de  $L(M)$  à  $O(n, \mathbb{R})$  en introduisant une métrique riemannienne (quelconque) sur  $M$ , puis en considérant le sous-fibré de  $L(M)$  constitué des bases orthonormales pour cette métrique. Le fibré obtenu est le **fibré orthogonal** sur  $M$ , noté  $O(M)$ . Dans le cas où  $M$  est orientable, il est possible de réduire le groupe de structure à  $SO(n, \mathbb{R})$ , et de définir le fibré  $SO(M)$  des bases orthonormales orientées au dessus de  $M$ .

Nous allons maintenant décrire quelques fibrés associés à  $L(M)$ .

Le **fibré tangent**  $TM$ , de fibre  $\mathbb{R}^n$ , est associé à la représentation  $\ell$  définie par  $(X^a) \in \mathbb{R}^n \mapsto (G_b^a X^b)$  où  $(G_b^a) \in GL(n, \mathbb{R})$ .

Le **fibré cotangent**  $T^*M$ , de fibre  $\mathbb{R}^n$ , est associé à la représentation contragrédiente  $\ell^c$  de la précédente. Elle est donnée par  $(\alpha_a) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\alpha_b (G^{-1})_a^b)$ . Ici, on identifie  $\mathbb{R}^n$  à son

propre dual. De façon évidente,  $T^*M$  est aussi le fibré dual du fibré  $TM$ .

Le **fibré de tenseurs**  $T^{r,s}M$ , de fibre

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_s \otimes \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_r$$

est associé à la représentation produit tensoriel

$$\ell^{s,r} = \underbrace{\ell \otimes \cdots \otimes \ell}_s \otimes \underbrace{\ell^c \otimes \cdots \otimes \ell^c}_r$$

des représentations précédentes, et prend donc la forme

$$(T^{a_1 \dots a_s}{}_{b_1 \dots b_r}) \mapsto (G_{c_1}^{a_1} \cdots G_{c_s}^{a_s} T^{c_1 \dots c_s}{}_{d_1 \dots d_r} (G^{-1})_{b_1}^{d_1} \cdots (G^{-1})_{b_r}^{d_r})$$

Le fibré de tenseurs  $T^{r,s}M$  peut aussi être considéré comme le fibré produit tensoriel

$$T^{r,s}M = \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_s \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_r$$

Comme il a déjà été vu, le **fibré des formes différentielles**  $\wedge T^*M$  est obtenu comme une somme directe de produits antisymétriques du fibré  $T^*M$ .

Le **fibré adjoint**  $AdL(M)$ , de fibre l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  de  $GL(n, \mathbb{R})$ , n'est autre que le fibré  $T^{1,1}M$ . En effet, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  s'identifie à  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Or, nous avons vu, lors des rappels sur les tenseurs, que  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  s'identifie à  $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ , où le dual de  $\mathbb{R}^n$  est identifié à lui-même. La représentation  $Ad$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  n'est autre, dans cette identification, que la représentation  $\ell^{1,1} = \ell \otimes \ell^c$ . Le fibré  $AdL(M)$  s'identifie aussi au fibré  $\text{End}(TM)$  des endomorphismes de  $TM$ . En particulier, les sections de ce fibré forment une algèbre associative.

Par la suite, nous noterons  $\eta$ ,  $\eta^c$  et  $\eta^{s,r}$  les représentations induites de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  des représentations  $\ell$ ,  $\ell^c$  et  $\ell^{s,r}$  de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Trivialisations locales

Étant donnée une carte locale  $(U, \phi)$  de  $M$ , il est possible de lui associer une section locale trivialisante  $s_U$  de  $L(M)$ , en prenant  $s_U(p) = \{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$  pour tout  $p \in U$ , où les  $x^i$  sont les coordonnées locales de la carte  $(U, \phi)$ .

Maintenant, il est naturel de reconsidérer les **repères non holonomes** sur  $M$  comme des trivialisations locales du fibré principal  $L(M)$ . En effet, si  $\{e_a\}$  est un tel repère non holonome au dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$ , alors  $s_U(p) = \{e_a(p)\}$  est une section locale trivialisante de  $L(M)$ . Notons  $\{\theta^a\}$  le repère dual de  $\{e_a\}$  au dessus de  $U$ , et posons enfin  $[e_a, e_b] = C_{ab}^c e_c$  les crochets de Lie des champs de vecteurs de ce repère. Nous rappelons que nous avons alors<sup>1</sup>

$$d\theta^a = -\frac{1}{2}C_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$$

<sup>1</sup>Dans toutes les formules qui seront écrites ici, nous sommerons systématiquement sur toutes les valeurs des indices répétés.

Dans le cas où  $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ , la base duale n'est autre que  $\theta^a = dx^a$ .

Ces trivialisations locales du fibré  $L(M)$  induisent des trivialisations locales des différents fibrés vectoriels associés mentionnés auparavant. Dans le cas du fibré  $TM$ , cette trivialisations permet d'écrire tout vecteur  $X|_p \in T_pM$ , avec  $p \in U$ , comme  $X|_p = X|_p^a e_a(p)$ . De même, pour  $T^*M$ , on décompose toute forme  $\alpha(p) \in T_p^*M$  en  $\alpha_a(p)\theta^a(p)$ . Les tenseurs se décomposent quant à eux sur des bases du type

$$e_{a_1}(p) \otimes \cdots \otimes e_{a_s}(p) \otimes \theta^{b_1}(p) \otimes \cdots \otimes \theta^{b_r}(p)$$

sous la forme

$$T(p) = T^{a_1 \dots a_s}_{b_1 \dots b_r}(p) e_{a_1}(p) \otimes \cdots \otimes e_{a_s}(p) \otimes \theta^{b_1}(p) \otimes \cdots \otimes \theta^{b_r}(p)$$

### 3.5.2. Connexions linéaires

Considérons maintenant une connexion  $\omega$  sur  $L(M)$ . Cette connexion définit sur les sections des fibrés vectoriels associés  $TM$ ,  $T^*M$  et  $T^{s,r}M$  une dérivation covariante  $\nabla$ , qui n'est autre qu'une **connexion linéaire** au sens défini en 1.3.1. Sa courbure  $R = \nabla^2$  est la courbure de Riemann et elle est donnée par la formule

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

$R$  est un élément de  $\Omega^2(M, AdL(M))$ .

Soit  $(U, \phi)$  une carte locale de  $M$ , dont le système de coordonnées est  $(x^i)$ . On peut utiliser cette carte comme trivialisations locale de  $L(M)$ , et chercher la 1-forme locale de connexion  $A$  associée à  $\omega$  sur  $U$ .  $A$  est une 1-forme sur  $U$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . En réalité, compte-tenu des relations obtenues en 3.4.3, il nous suffit de trouver les expressions des quantités  $\eta(A)$ ,  $\eta^c(A)$  et  $\eta^{s,r}(A)$  pour connaître les expressions locales de la dérivée covariante sur les champs de vecteurs, les formes, et les tenseurs. Les trivialisations locales des fibrés considérés se font grâce au système de coordonnées locales  $(x^i)$ , et il est ainsi facile de voir que dans ces trivialisations, on a les expressions

$$\begin{aligned} (\eta(A)X)^i &= \Gamma_{kj}^i X^j dx^k \\ (\eta^c(A)\alpha)_i &= -\Gamma_{ki}^j \alpha_j dx^k \\ (\eta^{s,r}(A)T)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} &= \left( \sum_{p=1}^s \Gamma_{k\ell}^{i_p} T^{i_1 \dots i_{p-1} \ell i_{p+1} \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} - \sum_{p=1}^r \Gamma_{kj_p}^\ell T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_{p-1} \ell j_{p+1} \dots j_r} \right) dx^k \end{aligned}$$

où les  $\Gamma_{kj}^i$  ne sont autres que les **symboles de Christoffel** associés à la connexion linéaire définie par  $\omega$ . Ces relations donnent alors directement les expressions de  $\nabla^U$  sur les champs de vecteurs, les formes et les tenseurs : ce sont les expressions données en 1.3.1.

Il est facile de généraliser ces expressions au cas où la trivialisations locale de  $L(M)$  est donnée par un repère non holonome. Dans ce cas, avec les notations introduites jusqu'ici,

il est naturel d'introduire la 1-forme de connexion locale sous la forme d'une matrice  $A = (\omega^a_b)$  avec

$$\omega^a_b = \Gamma_{cb}^a \theta^c$$

et

$$\Gamma_{cb}^a = (\nabla_{e_c}^U e_b)^a$$

La 1-forme de connexion locale  $A$  correspond donc à la matrice  $(\omega)$  définie en 1.4.4. Avec cette nouvelle notation, on obtient les expressions

$$\begin{aligned} (\nabla^U X)^a &= dX^a + \omega^a_b X^b \\ (\nabla^U \alpha)_a &= d\alpha_a - \omega^b_a \alpha_b \\ (\nabla^U T)^{a_1 \dots a_s}_{b_1 \dots b_r} &= dT^{a_1 \dots a_s}_{b_1 \dots b_r} + \sum_{p=1}^s \omega^a_p_c T^{a_1 \dots a_{p-1} c a_{p+1} \dots a_s}_{b_1 \dots b_r} \\ &\quad - \sum_{p=1}^r \omega^c_{b_p} T^{a_1 \dots a_s}_{b_1 \dots b_{p-1} c b_{p+1} \dots b_r} \end{aligned}$$

Maintenant, la courbure se trivialisait sous la forme d'une matrice de 2-formes (locales)  $F = (R^a_b) = (R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d)$ .  $F$  correspond à la matrice  $(R)$  introduite en 1.4.4. Comme  $R = \nabla \omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ , on obtient

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$$

C'est la seconde **équation de structure de Cartan** écrite en 1.4.4. La différentielle covariante de  $R$  est nulle :  $\nabla R = 0$ . Ceci se traduit localement par

$$dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - \omega^c_b \wedge R^a_c = 0$$

C'est la seconde **identité de Bianchi** écrite en 1.4.4.

Nous avons donc les correspondances suivantes entre les objets introduits en 1.4.4 et ceux introduits dans le cadre général de la théorie des fibrés :

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= R \in \Omega^2(M, AdL(M)) \\ A &= (\omega) \in \Omega^1(U, M(n, \mathbb{R})) \\ F &= (R) \in \Omega^2(U, M(n, \mathbb{R})) \end{aligned}$$

Nous constatons ainsi qu'à aucun moment nous n'avons introduit de formes tensorielles sur  $L(M)$ , et que les espaces dans lesquels vivent les objets introduits sont du type  $\Omega^*(M, E)$  ou  $\Omega^*(U, V)$ .

Maintenant, les relations

$$\begin{aligned} (\omega)' &= G(\omega)G^{-1} + GdG^{-1} \\ (R)' &= G(R)G^{-1} \end{aligned}$$

introduites en 1.4.4 sont les formules de recollement des formes locales  $A = (\omega)$  et  $F = (R)$  lors d'un changement de repère non holonome sur un ouvert  $U$  de  $M$ , avec  $G : U \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ .

D'un point de vue purement géométrique, si  $\gamma$  est une courbe dans  $M$ , nous avons défini ce qu'est un relèvement horizontal de  $\gamma$  dans le fibré vectoriel  $TM$ . C'est une courbe  $\gamma_{TM}$  dans  $TM$  qui se projette sur  $\gamma$  par  $\pi$ , et telle que chacun de ses vecteurs tangents soit horizontal pour la connexion introduite. Or, une courbe dans  $TM$  au dessus de  $\gamma$  est tout simplement un champ de vecteurs  $Y(t)$  le long de  $\gamma$ , notion introduite en 1.3.1. Comme il est alors facile de le constater, une telle courbe est horizontale si et seulement si elle est parallèle le long de  $\gamma$  ( $\frac{DY}{dt}(t) = 0$ ). Nous retrouvons ainsi l'interprétation géométrique de la connexion donnée en 1.3.1.

Nous avons pu justifier des relations introduites en 1.4.4 (la seconde équation de structure de Cartan et la seconde identité de Bianchi) dans un cadre plus général que celui des connexions linéaires. Cependant, il reste deux relations à démontrer, celles impliquant la torsion. Pour cela, il faut introduire un nouvel objet sur le fibré  $L(M)$ .

### 3.5.3. La torsion revisitée

Nous allons voir, dans les constructions qui vont suivre, que la torsion est une notion spécifique au fibré principal des repères  $L(M)$  et que la notion de torsion n'est pas généralisable aux autres fibrés principaux.

#### La forme de soudure

Nous allons introduire une 1-forme différentielle canonique

$$\theta \in \Omega^1(M, TM)$$

en posant, pour tout  $X|_x \in T_x M$ ,

$$\theta|_x(X|_x) = X|_x$$

C'est la **1-forme de soudure** sur  $M$ . Comme on peut le voir sur cette définition, la forme de soudure, sous cette forme, n'est autre que l'application identité  $TM \rightarrow TM$ . Cependant, nous allons constater qu'il est possible d'en extraire la torsion !

À cette 1-forme de soudure est associée une 1-forme sur  $L(M)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , tensorielle de type  $(\ell, \mathbb{R}^n)$ . Décrivons cette 1-forme. Un point  $p \in L(M)$  se décrit comme  $p = (x, \{\bar{e}_{a|x}\})$  où  $x \in M$  et les  $\bar{e}_{a|x}$  sont  $n$  vecteurs indépendants de  $T_x M$  (nous avons placé une barre sur ces vecteurs pour ne pas les confondre avec les vecteurs de la trivialisatation locale de  $L(M)$ ). Soit  $\{\bar{\theta}_{|x}^a\}$  la base duale de  $\{\bar{e}_{a|x}\}$  dans  $T_x^* M$ . Enfin, soit  $\pi : L(M) \rightarrow M$  la projection du fibré principal,  $\pi(p) = x$ . Pour tout  $X|_p \in T_p L(M)$ , considérons les  $n$  réels  $\bar{\theta}_{|x}^a \circ T_p \pi(X|_p)$ . Nous définissons

$$\theta_{L(M)|p}(X|_p) = (\bar{\theta}_{|x}^a \circ T_p \pi(X|_p)) \in \mathbb{R}^n$$

c'est à dire

$$\theta_{L(M)|p} = (\bar{\theta}_{|x}^a \circ T_p\pi)$$

Alors  $\theta_{L(M)}$  est la 1-forme tensorielle sur  $L(M)$  qui est associée à  $\theta$ .

Géométriquement, sa valeur est construite de la façon suivante. Tout  $X_{|p} \in T_pL(M)$  se projette en un vecteur  $X_{|x} = T_p\pi(X_{|p})$  de  $T_xM$ . Ce vecteur peut à son tour être décomposé sur la base  $\{\bar{e}_{a|x}\}$  de  $T_xM$  donnée par  $p : X_{|x} = X_{|x}^a \bar{e}_{a|x}$ .  $\theta_{L(M)}$  associe à  $X_{|p}$  les  $n$  coordonnées  $X_{|x}^a$ .

Par construction,  $\theta_{L(M)}$  est horizontale. Vérifions qu'elle est équivariante de type  $(\ell, \mathbb{R}^n)$ . Pour  $G = (G^a_b) \in GL(n, \mathbb{R})$ , notons  $\tilde{R}_G(p) = p \cdot G$  l'action à droite de  $G$  sur  $L(M)$ . Nous avons, par définition de cette action

$$p \cdot G = (x, \{\bar{e}_{b|x} G^b_a\})$$

La base duale est alors  $\{(G^{-1})^a_b \bar{\theta}_{|x}^b\}$ . D'autre part, nous avons  $T_{p \cdot G}\pi \circ T_p\tilde{R}_G = T_p(\pi \circ \tilde{R}_G) = T_p\pi$  puisque  $\pi \circ \tilde{R}_G = \pi$ . Donc, pour tout  $X_{|p} \in T_pL(M)$ , nous avons  $T_{p \cdot G}\pi(\tilde{R}_{G*}X_{|p}) = T_p\pi(X_{|p})$ . Ceci conduit à

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_G^* \theta_{L(M)|p \cdot G})(X_{|p}) &= \theta_{L(M)|p \cdot G}(\tilde{R}_{G*}X_{|p}) \\ &= (((G^{-1})^a_b \bar{\theta}_{|x}^b) \circ T_p\pi(X_{|p})) \\ &= \ell(G^{-1})\theta_{L(M)|p}(X_{|p}) \end{aligned}$$

Finalement, nous avons bien l'expression de l'équivariance :

$$\tilde{R}_G^* \theta_{L(M)} = \ell(G^{-1})\theta_{L(M)}$$

Cherchons maintenant l'expression locale de la 1-forme de soudure. Cette expression locale est un vecteur à  $n$  composantes dont les entrées sont des 1-formes locales. Nous remarquons que pour tout  $X \in \Gamma(M)$

$$(\theta^a \otimes e_a)(X) = \theta^a(X)e_a = X$$

Donc localement, au dessus de l'ouvert  $U$  sur lequel sont définis le repère non holonome  $\{e_a\}$  et sa base duale  $\{\theta^a\}$ ,  $\theta$  peut s'écrire  $\theta(X) = (\theta^a \otimes e_a)(X) = X$ . L'expression locale de  $\theta$  dans cette trivialisatation est donc constitué des  $n$  1-formes locales  $\theta^a$ . Grâce à cette trivialisatation, il est possible de calculer  $\nabla\theta$ . En effet, localement on a :

$$(\nabla^U\theta)^a = d\theta^a + \omega^a_c \wedge \theta^c$$

donc

$$\begin{aligned} \nabla\theta &= (d\theta^a + \omega^a_c \wedge \theta^c) \otimes e_a \\ &= \left( -\frac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c + \Gamma^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \right) \otimes e_a \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} - C^a_{bc})\theta^b \wedge \theta^c \otimes e_a \\ &= T^a \otimes e_a \end{aligned}$$

où les  $T^a = \frac{1}{2} (\Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a - C_{bc}^a) \theta^b \wedge \theta^c$  sont les **1-formes de torsion** de la connexion  $\nabla$  introduites en 1.4.4. Nous avons donc montré que

$$\nabla\theta = T$$

où  $\theta \in \Omega^1(M, TM)$  est la 1-forme de soudure sur  $M$ , et  $T \in \Omega^2(M, TM)$  est la **2-forme de torsion** de la connexion. En particulier, nous avons

$$T^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b$$

C'est la **première équation de structure de Cartan** écrite en 1.4.4.

Maintenant, nous avons  $\nabla T = \nabla^2\theta$ . Or, nous savons que  $\nabla^2 = R$ , donc  $\nabla T = R \wedge \theta$ . Ceci s'écrit encore, localement,

$$dT^a + \omega^a_c \wedge \theta^c = R^a_b \wedge \theta^b$$

C'est la **première identité de Bianchi** écrite en 1.4.4. On remarquera que dans l'expression  $R \wedge \theta$ , il faut considérer  $R$  comme une forme différentielle à valeurs dans le fibré des endomorphismes de  $TM$ .

### Une autre façon de voir la torsion

La 1-forme de soudure est donc génératrice de la 2-forme de torsion. Ceci permet de comprendre un peu mieux l'origine de la torsion, et en particulier, de la possibilité de la définir seulement pour des connexions linéaires (puisque la forme de soudure n'est définie que pour le fibré vectoriel  $TM$ ). Nous allons voir maintenant une autre façon de retrouver la forme de torsion, en se plaçant cette fois sur le fibré cotangent.

Considérons donc le fibré vectoriel  $T^*M$ . Alors il est facile de voir qu'au dessus d'un ouvert  $U$  d'une carte de  $M$  nous avons  $\Omega^r(U, T^*M) = \Omega^r(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U)$ . Pour  $r = 0$ , nous avons  $\Omega^0(U) = \mathcal{F}(U)$ , et alors nous pouvons identifier

$$\Omega^0(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U) = \Omega^1(U)$$

de façon naturelle. De même, nous identifions

$$\Omega^1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U) = \Gamma(U, T^{(0,2)}M)$$

Grâce à ce qui été vu de façon générale sur les dérivées covariantes, on peut considérer que la connexion linéaire réalise une application

$$\nabla : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U)$$

Nous avons une projection naturelle

$$p_A : \Omega^1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

qui consiste à antisymétriser, c'est à dire à effectuer le produit de deux 1-formes dans  $\Omega^*(U)$ . Nous posons, pour  $S_{ab}\theta^a \otimes \theta^b \in \Omega^1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \Omega^1(U) = \Gamma(U, T^{(0,2)}M)$

$$p_A(S_{ab}\theta^a \otimes \theta^b) = \frac{1}{2}(S_{ab} - S_{ba})\theta^a \wedge \theta^b$$

Cette projection permet de construire l'application

$$p_A \circ \nabla : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

D'autre part, la différentielle ordinaire sur  $M$  réalise une application

$$d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$$

Il est naturel de vouloir comparer ces deux applications. Pour cela, soit  $\alpha \in \Omega^1(U)$ ,

$$\begin{aligned} (d - p_A \circ \nabla) \alpha &= d\alpha - p_A (d\alpha_b \otimes \theta^b - \Gamma_{ab}^c \alpha_c \theta^a \otimes \theta^b) \\ &= (e_a \cdot \alpha_b) \theta^a \wedge \theta^b + \alpha_c d\theta^c - p_A ((e_a \cdot \alpha_b) \theta^a \otimes \theta^b - \Gamma_{ab}^c \alpha_c \theta^a \otimes \theta^b) \\ &= \left( \frac{1}{2} [e_a \cdot \alpha_b - e_b \cdot \alpha_a] - \frac{1}{2} C_{ab}^c \alpha_c - \frac{1}{2} [e_a \cdot \alpha_b - e_b \cdot \alpha_a] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c] \alpha_c \right) \theta^a \wedge \theta^b \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c - C_{ab}^c) \alpha_c \theta^a \wedge \theta^b \\ &= \frac{1}{2} T_{ab}^c \alpha_c \theta^a \wedge \theta^b \\ &= T^a \alpha_a \\ &= \alpha(T) \end{aligned}$$

où les  $T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$  sont les 2-formes de torsion et  $\alpha(T)$  signifie que l'on prend pour argument de  $\alpha$  la partie vecteur de  $T$ .  $\alpha(T)$  est alors une 2-forme. Nous concluons de ce calcul que  $d - p_A \circ \nabla$  mesure la torsion de la connexion linéaire  $\nabla$ .

### 3.6. Classes caractéristiques

*Références* : [2], [3], [5], [6], [12], [16], [18], [20], [26].

La théorie des classes caractéristiques est un ingrédient essentiel de la classification des fibrés. Il n'est pas surprenant que les objets introduits dans ce contexte soient d'une grande importance en physique théorique, compte-tenu de l'utilité des fibrés. Les classes caractéristiques sont des classes de cohomologie dans la cohomologie de de Rham de la variété de base. Deux fibrés isomorphes ont mêmes classes caractéristiques. Dans ce qui suit, ces classes sont construites à partir des structures différentielles introduites auparavant sur

les fibrés (connexion et courbure). Il existe une autre méthode, plus topologique pour les définir, qu'il serait trop long d'exposer ici. L'idée est de construire des formes différentielles fermées sur la variété de base à partir de la forme de courbure d'une connexion sur le fibré considéré. On réalise cela grâce à des polynômes spéciaux, les polynômes invariants.

### 3.6.1. Polynômes invariants

Soient  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Notons  $S^p \mathfrak{g}^*$  l'espace vectoriel des applications  $p$ -linéaires symétriques sur  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  (ou dans  $\mathbb{R}$  selon la nature de l'algèbre de Lie). L'espace vectoriel

$$S\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{p \geq 0} S^p \mathfrak{g}^*$$

peut être muni d'un produit qui en fait une algèbre : pour tous  $P \in S^p \mathfrak{g}^*$ ,  $Q \in S^q \mathfrak{g}^*$  et  $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{g}$ , nous posons

$$(PQ)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) Q(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$$

Nous dirons que  $P \in S^p \mathfrak{g}^*$  est  $G$ -invariant si pour tout  $g \in G$  et tous  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{g}$ , nous avons

$$P(Ad_g X_1, \dots, Ad_g X_p) = P(X_1, \dots, X_p)$$

En écrivant cette relation pour  $g = \exp tX$  avec  $X \in \mathfrak{g}$ , et en dérivant par rapport à  $t$ , nous obtenons en  $t = 0$  :

$$\sum_{i=1}^p P(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_p) = 0$$

Nous notons  $\mathcal{P}_I^p(\mathfrak{g}^*)$  le sous espace vectoriel de  $S^p \mathfrak{g}^*$  des éléments  $G$ -invariants. Il est facile de voir que

$$\mathcal{P}_I(\mathfrak{g}^*) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{P}_I^p(\mathfrak{g}^*)$$

est une sous-algèbre de  $S\mathfrak{g}^*$ . C'est la sous-algèbre des **polynômes invariants sur  $\mathfrak{g}$** .

Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}_I^p(\mathfrak{g}^*)$ , nous notons  $P(X) = P(X, \dots, X)$ . Avec cette notation, nous avons donc

$$P(Ad_g X) = P(X)$$

### 3.6.2. L'homomorphisme de Weil

#### Polynômes de formes différentielles

Pour  $1 \leq k \leq p$ , soient  $\alpha_k \in \Omega^{r_k}(U, \mathfrak{g})$   $p$  formes différentielles sur un ouvert  $U$  de  $M$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , et soit  $P \in \mathcal{P}_I^p(\mathfrak{g}^*)$ . Nous pouvons écrire, pour tout

$1 \leq k \leq p$ ,  $\alpha_k = \alpha_k^i \otimes E_i$  où  $\alpha_k^i \in \Omega^{r_k}(U)$  et  $\{E_i\}$  est une base de  $\mathfrak{g}$ . Nous définissons alors

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Omega^{r_1 + \dots + r_p}(U)$$

en posant

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \alpha_1^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_p^{i_p} P(E_{i_1}, \dots, E_{i_p})$$

Pour tout  $\alpha \in \Omega^r(U, \mathfrak{g})$ , nous notons plus simplement

$$P(\alpha) = P(\alpha, \dots, \alpha) \in \Omega^{pr}(U)$$

### Recollement

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas utilisé l'invariance de  $P$ . C'est dans ce qui suit que se révèle l'importance de cette propriété.

Soit  $P(M, G)$  un fibré principal muni d'une 1-forme de connexion  $\omega$ , et soit  $\{(U_i, s_i)\}$  un système de trivialisations locales du fibré principal  $P(M, G)$ , où les  $s_i$  sont des sections locales. Notons  $A_i = s_i^* \omega$  et  $F_i = s_i^* \Omega$  les trivialisations locales des formes de connexion et de courbure.

Soit  $P$  un polynôme invariant sur  $\mathfrak{g}$ , homogène de degré  $p$ . Localement, nous pouvons considérer les formes différentielles  $P(F_i) \in \Omega^{2p}(U_i)$ . Sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , nous avons  $F_i = Ad_{g_{ij}} F_j$ , donc

$$P(F_i) = P(Ad_{g_{ij}} F_j) = P(F_j)$$

par invariance de  $P$ . Ainsi, les formes  $P(F_i)$  se recollent sur  $M$  et définissent une  $2p$ -forme différentielle sur  $M$  tout entier. Nous la notons  $P(\Omega) \in \Omega^{2p}(M)$ , bien que  $\Omega$  soit une 2-forme tensorielle définie sur  $P$  et non sur  $M$ . La courbure  $\Omega$  permet donc d'associer à tout polynôme invariant sur  $\mathfrak{g}$  une forme différentielle sur  $M$ . Plus généralement, remarquons que nous pouvons recoller des  $P(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{p,i})$  sur  $M$  tout entier si les  $\alpha_{k,i}$  sont les expressions locales des formes  $\alpha_k$  tensorielles de type  $(Ad, \mathfrak{g})$  sur  $P(M, G)$ . Nous utiliserons par exemple par la suite des formes  $\omega - \omega'$  où  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux 1-formes de connexion sur  $P(M, G)$ . On sait que cette différence est tensorielle de type  $(Ad, \mathfrak{g})$ .

### Propriétés

Étudions les propriétés de cette forme différentielle. Pour cela, nous nous plaçons localement au dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$  et nous utilisons une trivialisations locale  $s$  du fibré principal. Nous notons  $A = s^* \omega$  et  $F = s^* \Omega$  comme d'habitude.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 dP(F) &= dP(F, \dots, F) \\
 &= d(F^{i_1} \wedge \dots \wedge F^{i_p})P(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}) \\
 &= \sum_{j=1}^p (F^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_j} \wedge \dots \wedge F^{i_p})P(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}) \\
 &= \sum_{j=1}^p P(F, \dots, dF, \dots, F)
 \end{aligned}$$

Ajoutons à cette somme la quantité

$$\sum_{j=1}^p P(F, \dots, [A, F], \dots, F) = 0$$

qui est nulle puisque  $P$  est invariant et  $F$  est une 2-forme. Nous obtenons alors, par linéarité,

$$dP(F) = \sum_{j=1}^p P(F, \dots, dF + [A, F], \dots, F)$$

Alors, grâce à l'identité de Bianchi  $dF + [A, F] = 0$ , nous avons

$$dP(F) = 0$$

La forme différentielle  $P(\Omega)$  est donc *fermée*.

Soit maintenant  $\omega'$  une autre connexion sur le fibré principal  $P(M, G)$ , de courbure  $\Omega'$ . Posons, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\omega_t = \omega + t(\omega' - \omega)$$

Il est facile de voir que les  $\omega_t$  sont des connexions, avec  $\omega_0 = \omega$  et  $\omega_1 = \omega'$ . Nous notons  $\Omega_t$  leur courbure. Alors, avec des notations évidentes, nous avons

$$P(F') - P(F) = \int_0^1 \frac{dP(F_t)}{dt} dt$$

Or, comme  $F_t = dA_t + \frac{1}{2}[A_t, A_t]$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_t}{dt} &= d(A' - A) + \frac{1}{2}[A' - A, A_t] + \frac{1}{2}[A_t, A' - A] \\
 &= d(A' - A) + [A_t, A' - A]
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{dP(F_t)}{dt} &= \frac{d}{dt}P(F_t, \dots, F_t) \\
&= \sum_{j=1}^p P\left(F_t, \dots, \frac{dF_t}{dt}, \dots, F_t\right) \\
&= \sum_{j=1}^p P(F_t, \dots, d(A' - A) + [A_t, A' - A], \dots, F_t) \\
&= pP(d(A' - A) + [A_t, A' - A], F_t, \dots, F_t)
\end{aligned}$$

puisque  $P$  est symétrique et les 2-formes commutent entre elles. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
dP(A' - A, F_t, \dots, F_t) &= P(d(A' - A), F_t, \dots, F_t) - P(A' - A, dF_t, \dots, F_t) \\
&\quad - \dots - P(A' - A, F_t, \dots, dF_t)
\end{aligned}$$

Ajoutons à cette somme la quantité nulle (car  $P$  est invariant)

$$\begin{aligned}
P([A_t, A' - A], F_t, \dots, F_t) - P(A' - A, [A_t, F_t], \dots, F_t) \\
- \dots - P(A' - A, F_t, \dots, [A_t, F_t]) = 0
\end{aligned}$$

En utilisant alors l'identité de Bianchi, il reste

$$\begin{aligned}
dP(A' - A, F_t, \dots, F_t) &= P(d(A' - A) + [A_t, A' - A], F_t, \dots, F_t) \\
&= \frac{1}{p} \frac{dP(F_t)}{dt}
\end{aligned}$$

d'où

$$P(F') - P(F) = d \int_0^1 pP(A' - A, F_t, \dots, F_t) dt$$

La forme  $P(A' - A, F_t, \dots, F_t)$  est la restriction à  $U$  d'une forme globalement définie sur  $M$  que nous notons  $P(\omega' - \omega, \Omega_t, \dots, \Omega_t)$ . La forme  $P(F') - P(F) = P(\Omega') - P(\Omega)$  est donc exacte. Ceci signifie que la classe de cohomologie de de Rham de  $P(\Omega)$  ne dépend pas du choix de la connexion, mais seulement du fibré principal  $P(M, G)$  et du polynôme invariant  $P \in \mathcal{P}_I(\mathfrak{g})$ . La relation  $P(\Omega') - P(\Omega) = dQ(\omega, \omega')$  est une **formule de transgression**.

### Homomorphisme de Weil

Nous avons donc construit une application linéaire

$$\chi_{P(M,G)} : \mathcal{P}_I(\mathfrak{g}) \rightarrow H(M, \mathbb{C})$$

C'est l'**homomorphisme de Weil**.  $\chi_{P(M,G)}(P)$  est appelée la **classe caractéristique associée au polynôme invariant  $P$** .

Remarquons qu'au lieu de prendre un fibré principal  $P(M, G)$ , il est possible de considérer directement un fibré vectoriel associé. C'est ce que nous ferons souvent par la suite.

Nous allons maintenant présenter des exemples de classes caractéristiques, chacune étant caractérisée par un choix particulier du polynôme invariant.

### 3.6.3. Classes et caractères de Chern

#### Classes de Chern

Les classes de Chern permettent de traiter les fibrés dont le groupe de structure est  $GL(n, \mathbb{C})$ , comme par exemple les fibrés vectoriels de fibre type  $\mathbb{C}^n$ .

La **classe de Chern totale** est par définition

$$c(\Omega) = \det \left( 1 + \frac{i\Omega}{2\pi} \right)$$

Par propriété du déterminant, le polynôme  $\det \left( 1 + \frac{iX}{2\pi} \right)$  est invariant. La classe de Chern totale est une somme directe de formes de degrés pairs, puisque le déterminant se développe selon

$$c(\Omega) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots$$

où les  $c_j(\Omega) \in \Omega^{2j}(M)$  sont les  **$j$ -ièmes classes de Chern**. La série s'arrête à

$$c_n(\Omega) = \det \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right)$$

Pour calculer chaque  $c_j(\Omega)$ , on peut diagonaliser localement  $\Omega$ . En effet, localement, il existe des applications  $g : U \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ , telles que

$$g^{-1} \frac{iF}{2\pi} g = \text{diag}(f_1, \dots, f_n) = D_F$$

où les  $f_j$  sont des 2-formes sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \det(1 + D_F) &= \prod_{j=1}^n (1 + f_j) \\ &= 1 + (f_1 + \dots + f_n) + (f_1 f_2 + \dots + f_{n-1} f_n) + \dots + (f_1 \dots f_n) \\ &= 1 + \text{Tr} D_F + \frac{1}{2} ((\text{Tr} D_F)^2 - \text{Tr} D_F^2) + \dots + \det D_F \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 c_0(\Omega) &= 1 \\
 c_1(\Omega) &= \frac{i}{2\pi} \text{Tr} F \\
 c_2(\Omega) &= \frac{1}{2} \left( \frac{i}{2\pi} \right)^2 (\text{Tr} F \wedge \text{Tr} F - \text{Tr}(F \wedge F)) \\
 &\vdots \\
 c_n(\Omega) &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \det F
 \end{aligned}$$

### Décomposition sur une somme directe

Si  $E$  est un fibré vectoriel de variété base  $M$ , de groupe de structure  $GL(n, \mathbb{C})$  et de fibre type  $\mathbb{C}^n$ , nous notons  $c(E)$  sa classe de Chern totale. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux fibrés vectoriels de même variété base  $M$ , et de groupes de structure  $GL(n_1, \mathbb{C})$  et  $GL(n_2, \mathbb{C})$  et de fibres types  $\mathbb{C}^{n_1}$  et  $\mathbb{C}^{n_2}$ , alors nous avons

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \wedge c(E_2)$$

où  $E_1 \oplus E_2$  est la somme de Whitney des deux fibrés vectoriels.

### Caractères de Chern

Le **caractère de Chern total** est défini par

$$\begin{aligned}
 \text{Ch}(\Omega) &= \text{Tr} \exp \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \text{Tr} \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right)^j
 \end{aligned}$$

Le  $j$ -ième caractère de Chern est la quantité

$$\text{Ch}_j(\Omega) = \text{Tr} \left( \frac{i\Omega}{2\pi} \right)^j$$

Puisque nous sommes sur une variété de dimension finie, cette série est en fait une somme finie, et seul un nombre fini de caractères de Chern sont non nuls.

En utilisant la même astuce que pour les classes de Chern, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}
 \text{Ch}_0(\Omega) &= 0 \\
 \text{Ch}_1(\Omega) &= c_1(\Omega) \\
 \text{Ch}_2(\Omega) &= \frac{1}{2}(c_1(\Omega)^2 - 2c_2(\Omega)) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Les caractères de Chern s'expriment donc en fonction des classes de Chern.

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux fibrés vectoriels comme ci-dessus, nous avons les formules de décomposition

$$\begin{aligned}\text{Ch}(E_1 \otimes E_2) &= \text{Ch}(E_1) \wedge \text{Ch}(E_2) \\ \text{Ch}(E_1 \oplus E_2) &= \text{Ch}(E_1) + \text{Ch}(E_2)\end{aligned}$$

### 3.6.4. Classes de Pontrjagin

Les classes de Pontrjagin sont définies sur les fibrés dont le groupe de structure est  $O(n, \mathbb{R})$ , le groupe orthogonal. Elles s'appliquent donc à des fibrés vectoriels de fibre type  $\mathbb{R}^n$  munis d'une métrique de fibré (définie positive). L'algèbre de Lie de  $O(n, \mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Nous définissons la **classe de Pontrjagin totale**

$$p(\Omega) = \det \left( 1 + \frac{\Omega}{2\pi} \right)$$

Puisque sur ces fibrés nous avons  $\Omega^t = -\Omega$ , nécessairement  $p(\Omega) = p(-\Omega)$ , donc  $p$  est un polynôme pair. Ce polynôme se développe selon

$$p(\Omega) = 1 + p_1(\Omega) + p_2(\Omega) + \dots$$

où les  $p_j(\Omega) \in \Omega^{4j}(M)$  sont les  **$j$ -ièmes classes de Pontrjagin**.

Il est aussi possible d'exprimer ces classes en fonction des quantités  $\text{Tr}(\Omega^k)$ , ce que nous ne ferons pas ici.

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux fibrés vectoriels de même variété base  $M$ , de groupes de structure  $O(n_1, \mathbb{R})$  et  $O(n_2, \mathbb{R})$  et de fibres types  $\mathbb{R}^{n_1}$  et  $\mathbb{R}^{n_2}$ , alors

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1) \wedge p(E_2)$$

### 3.6.5. Classe d'Euler

Dans le cas des fibrés dont le groupe de structure est  $SO(n)$ , et si  $n$  est pair, il existe un autre polynôme invariant que ceux définissant les classes de Pontrjagin. Ce polynôme est le **Pfaffian**, défini de la façon suivante.

Si  $A$  est une matrice antisymétrique de taille  $2p \times 2p$  où  $2p = n$ , alors

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{p!2^p} \sum_{\sigma \in S_{2p}} (-1)^{|\sigma|} A_{\sigma(1)\sigma(2)} \dots A_{\sigma(2p-1)\sigma(2p)}$$

On peut montrer que  $\text{Pf}(A)^2 = \det A$ .

La **classe d'Euler** d'un fibré principal de groupe de structure  $SO(2p)$  est la classe de cohomologie de  $\text{Pf}(\Omega)$  où  $\Omega$  est la courbure d'une connexion quelconque sur ce fibré. La classe d'Euler d'un fibré vectoriel orientable de rang pair est la classe d'Euler du fibré principal associé. Cette classe a de nombreuses propriétés géométriques et analytiques que nous n'aborderons pas ici.

# Bibliographie

- [1] V. ARNOLD : *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, GTM 60, Springer-Verlag, 1989.
- [2] J. A. DE AZCÁRRAGA, J. M. IZQUIERRO : *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1995.
- [3] N. BERLINE, E. GETZLER, M. VERGNE : *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer-Verlag, 1992.
- [4] R. BERTLMANN : *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford Science Publications, 1996.
- [5] B. BOOSS, D. D. BLEECKER : *Topology and Analysis, The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics*, Universitext, Springer-Verlag, 1985.
- [6] R. BOTT, L. W. TU : *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer-Verlag, 1982.
- [7] G. E. BREDON : *Topology and Geometry*, GTM 139, Springer-Verlag, 1993.
- [8] T. BRÖCKER, T. DIECK : *Representations of Compact Lie Groups*, GTM 98, Springer-Verlag, 1995.
- [9] Y. CHOQUET-BRUHAT, C. DEWITT-MORETTE : *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, 1982.
- [10] J.F. CORNWELL : *Group Theory in Physics*, Techniques in Physics, Vol 1 & 2, Academic Press, 1989.
- [11] J. DIEUDONNÉ : *Éléments d'analyse*, 9 tomes, Gauthier-Villars, 1970.
- [12] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV, A. FOMENKO : *Géométrie contemporaine, Méthodes et applications*, 3 tomes, Mir, 1982.
- [13] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.
- [14] M. GÖCKELER, T. SCHÜCKER : *Differential geometry, gauge theories, and gravity*, Cambridge University Press, 1989.
- [15] S.W. HAWKING, G.F. ELLIS : *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

- [16] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU : *Foundations of differential geometry*, Tomes I & II, Interscience Publishers, 1963.
- [17] P. LIBERMANN, C.-M. MARLE : *Géométrie symplectique, Bases théoriques de la mécanique*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII.
- [18] H. B. LAWSON, M.-L. MICHELSON : *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.
- [19] C.W. MISNER, K.S. THORNE, J.A. WHEELER : *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, 1973.
- [20] M. NAKAHARA : *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, 1990.
- [21] M. NAÏMARK, A. STERN : *Théorie des Représentations des Groupes*, Mir, 1979.
- [22] M. POSTNIKOV : *Leçons de géométrie, Groupes et algèbres de Lie*, Mir, 1985.
- [23] H. SAMELSON : *Notes on Lie Algebras*, Universitext, Springer-Verlag, 1990.
- [24] D.H. SATTINGER, O.L. WEAVER : *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, 1986
- [25] J.-P. SERRE : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [26] A. S. SCHWARZ : *Topology for Physicists*, Springer-Verlag, 1996.
- [27] S. STERNBERG : *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall.
- [28] V.S. VARADARAJAN : *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, GTM 102, Springer-Verlag, 1984.
- [29] A. H. WALLACE : *Introduction à la topologie algébrique*, Gauthier-Villars, 1973.
- [30] F.W. WARNER : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag.
- [31] S. WEINBERG : *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, 1972.

# Index

- action, 71
  - effective, 71
  - libre, 71
  - proprement discontinue, 74
  - transitive, 74
- algèbre
  - associative, 91
  - de Clifford, 109
  - de Lie, 17, 65
    - abélienne, 66
    - compacte, 108
    - d'un groupe de Lie, 67
    - dérivée, 66
    - du groupe de jauge, 154
    - réductive, 108
    - semi-simple, 107
    - simple, 107
  - enveloppante, 92
  - extérieure, 24, 93
  - tensorielle, 92
- application
  - de Hodge, 51
  - différentiable, 19
  - équivariante, 138
  - exponentielle, 46, 69
  - linéaire tangente, 19
  - pull-back, 20, 25, 26
- atlas, 8, 11
- automorphisme de fibré principal, 151
- base
  - de l'espace cotangent, 18
  - de l'espace tangent, 14
  - non coordonnée, 48
- bord, 11
- caractère d'une représentation, 81
- caractère de Chern, 184
  - total, 184
- carte locale, 8, 11
- Casimir, 105
- centre d'une algèbre de Lie, 66
- champ
  - de tenseurs, 24
  - de vecteurs, 15
    - de Killing, 43
    - fondamental, 72
    - invariant, 67
    - parallèle, 36
- changement de trivialisations locales, 123
- classe caractéristique, 182
  - d'Euler, 185
  - de Chern, 183
    - totale, 183
  - de Pontrjagin, 185
    - totale, 185
- codifférentielle, 52
- cohomologie
  - de de Rham, 28, 52
- connexe par arc, 58
- connexion, 141, 159
  - de Lévi-Civita, 45
  - linéaire, 35, 173
    - compatible avec une métrique, 44
  - métrique, 44, 160
- constantes de structure, 97
- coordonnées, 10
  - cartésiennes, 54
  - changement de  $-$ , 10
  - cylindriques, 55

- normales, 46
  - riemanniennes, 47
  - sphériques, 56
- courbe autoparallèle, 37
- courbure, 161
  - de Riemann, 45, 173
  - scalaire, 46
  - tenseur de  $-$ , 38
- critère de Cartan, 107
- crochet de Lie, 16, 48, 65
- d'Alembertien, 54
- décomposition
  - de Fourier, 90
  - de Hodge, 52
- dérivation, 13, 16
  - covariante, 36, 158, 160
  - expression explicite, 162
- dérivée
  - covariante, 35, 159
  - expression explicite, 161
  - locale, 169
  - de Lie, 28
- différentielle
  - covariante, 147
  - d'une fonction, 18
  - d'une forme, 27
  - dans un repère non holonome, 50
- dimension, 8
- distance riemannienne, 45
- divergence, 33, 53
- élément de volume riemannien, 44
- endomorphisme unitaire, 80
- équation de structure
  - de Cartan, 49, 150, 168, 170, 174, 177
  - de Maurer-Cartan, 97
- équivariance, 139
- espace
  - cotangent, 17
  - homogène, 75
  - quotient, 74
  - tangent, 12
  - total, 122, 126
- espace vectoriel préhilbertien, 80
- fibre, 120
  - type, 122, 126
- fibré, 119
  - adjoint, 138, 172
  - associé, 135
  - cotangent, 18, 171
  - d'holonomie, 155
  - de tenseurs, 24, 172
  - des endomorphismes, 132
  - des formes différentielles, 26, 172
  - des repères, 125, 133, 171
  - des vecteurs
    - horizontaux, 140
    - verticaux, 139
  - dual, 132
  - en droites complexes, 133
  - image réciproque, 134
  - localement trivial, 120, 126
  - normal, 135
  - orthogonal, 171
  - principal, 120
  - tangent, 15, 171
  - trivial, 123
  - vectoriel, 128
    - orientable, 134
    - orthogonal, 135
    - quotient, 135
    - rang d'un  $-$ , 128
- flot, 17, 73
- fonction
  - de transition, 121, 127
  - différentiable, 10
- forme
  - à valeurs dans un fibré vectoriel, 144
  - à valeurs vectorielles, 143
  - coexacte, 52
  - cofermée, 52
  - de connexion, 48, 142
    - locale, 167
  - de courbure, 48, 149

- locale, 168
- de Killing, 106
- de Maurer-Cartan, 97, 144
- de soudure, 175
- de torsion, 48, 177
- différentielle, 18, 25
- équivariante, 144
- exacte, 28
- fermée, 28
- harmonique, 52
- horizontale, 142
- invariante à gauche, 96
- tensorielle, 144
- verticale, 142
- volume, 33
- forme bilinéaire
  - associée à une représentation, 104
  - invariante, 104
- formule
  - de Baker-Campbell-Hausdorff, 70
  - de Plancherel, 90
  - de recollement, 124, 137, 147, 167, 168, 175
  - de transgression, 182
- géodésique, 45
  - minimalisante, 45
- $GL(n, \mathbb{C})$ , 65
- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , 68
- $GL(n, \mathbb{R})$ , 64
- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , 68
- gradient, 53
- groupe
  - compact, 88
  - d'holonomie, 155
  - d'homotopie, 60, 62
  - d'isotropie, 71
  - de jauge, 152
  - de Lie, 64
  - de Lorentz, 113
    - représentations du  $-$ , 116
    - revêtements du  $-$ , 115
  - de revêtement, 109
  - universel, 109
  - de structure, 122, 127
    - réduction du  $-$ , 125
  - des rotations de  $\mathbb{R}^3$ , 110
    - représentations du  $-$ , 112
    - revêtements du  $-$ , 111
  - du cercle, 64
  - fondamental, 60
  - linéaire, 64
  - orthogonal, 65, 109
  - pin, 110
  - spécial linéaire, 64
  - spécial orthogonal, 42, 65, 109
  - spécial unitaire, 65
  - spin, 110
  - topologique, 63
  - unitaire, 65
- homomorphisme
  - d'algèbres de Lie, 66
  - de groupes de Lie, 64
  - de groupes topologiques, 64
  - de Weil, 182
- homotope, 58
- idéal
  - d'algèbre de Lie, 66
  - propre, 66
- identité
  - de Bianchi, 38, 49, 150, 174, 177
    - locale, 169
  - de Jacobi, 16, 65
- immersion, 21
- indice
  - contravariant, 22
  - covariant, 22
- intégrale de Lebesgue, 43
- intégration, 31
- isométrie, 43
- isomorphisme
  - de fibrés, 123
  - de Hodge, 51
- lacet, 58

- laplacien, 52
- lemme
  - de Poincaré, 28
  - de Schur, 79, 101
- longueur d'une courbe, 45
- mesure de Haar, 88
- métrique, 42
  - de fibré vectoriel, 129
  - lorentzienne, 43
  - riemannienne, 43
- morphisme
  - de fibrés, 123
  - vectoriels, 130
- moyenne invariante, 82, 88
- $O(1, 3)$ , 113
- $O(n)$ , 65
- $\mathfrak{o}(n)$ , 68
- $O(V, q)$ , 109
- orbite, 74
- orientation, 14
- parallélogramme, 38
- paramètre canonique, 45
- partition de l'unité, 32
- pfaffian, 185
- $Pin(r, s)$ , 110
- plongement, 21
- polynôme invariant, 179
- produit
  - extérieur, 24, 26
  - intérieur, 29
  - tensoriel, 22
    - de fibrés vectoriels, 132, 185
- projection, 15, 122, 126
- pseudo
  - scalaire, 53
  - vecteur, 53
- quotient d'un fibré principal, 130
- recouvrement, 8
- réduction du groupe de structure, 125
- relation de Leibniz, 13, 16
- relations d'orthogonalité, 84, 87, 90
- relèvement horizontal, 154, 165
  - d'une courbe, 175
  - de courbes, 141, 157, 167
  - de vecteurs, 141
- repère
  - holonome, 48
  - local, 48
    - orthonormé, 48
  - non holonome, 48, 172
- représentation, 76
  - adjointe, 101, 103
  - coadjointe, 103
  - complètement réductible, 78
  - contragrédiente, 77, 100
  - d'algèbre de Lie, 99
  - de groupe compact, 88
  - de groupe fini, 82
  - équivalente, 79
  - fidèle, 76, 99
  - induite, 99
  - irréductible, 78, 100
  - produit tensoriel, 78, 100
  - réductible, 78, 100
  - régulière, 83, 89
  - semi-simple, 107
  - somme directe, 78, 100
  - unitaire, 80
  - unitairement équivalente, 80
- revêtement, 61
  - de groupe, 109
  - universel, 61
- rotationnel, 54
- $\mathbb{S}^1$ , 64
- scalaire, 22
- section, 16, 124, 127
  - locale, 127
    - trivialisante, 124, 172
- signature, 42
- simplement connexe, 60
- $SL(n, \mathbb{C})$ , 65

- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , 68
- $SL(n, \mathbb{R})$ , 64
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , 68
- $SO(3)$ , 110
- $\mathfrak{so}(n)$ , 68
- $SO(n, \mathbb{R})$ , 65
- $SO(p, q)$ , 42
- $SO(V, q)$ , 109
- somme de Whitney, 130, 184
- somme directe
  - d'algèbres de Lie, 66
  - de fibrés vectoriels, 130, 184, 185
- sous-algèbre de Lie, 66
- sous-espace invariant, 78, 100
- sous-fibré vectoriel, 134
- sous-groupe
  - à un paramètre, 70
  - de Lie, 64
  - topologique, 64
- sous-représentation, 78
- sous-variété, 10, 21
  - différentiable, 11
- $Spin(r, s)$ , 110
- stabilisateur, 71
- structure différentiable, 9
- $SU(2)$ , 111
- $SU(n)$ , 65
- $\mathfrak{su}(n)$ , 68
- submersion, 21
- symboles de Christoffel, 35, 173
- système complet de représentations irréductibles, 85
- système de trivialisations locales
  - d'un fibré, 120, 127
  - d'une forme tensorielle, 147
  - d'une section, 124, 127, 137
- tenseur, 22
  - antisymétrique, 22
  - contraction d'un  $-$ , 23
  - de Ricci, 46
  - de type  $(s, r)$ , 22
  - symétrique, 22
- théorème
  - d'Ambrose-Singer, 155
  - de Burnside, 86
  - de Hodge, 52
  - de Poincaré-Birkhoff-Witt, 93
  - de Stokes, 34
  - de Swan, 131
  - du point fixe, 76
- torsion, 37, 48
- transformation de jauge, 49
  - active, 170
  - passive, 170
- transformations de Lorentz, 113
- translation
  - à droite, 67
  - à gauche, 67
- transport
  - horizontal, 142, 155, 157
  - parallèle, 36
- trivialisation locale
  - d'un fibré, 127, 172
  - d'une forme tensorielle, 146, 166
  - d'une section, 124
- $U(1)$ , 64
- $U(n)$ , 65
- $u(n)$ , 68
- variété
  - à bord, 11
  - base, 122, 126
  - connexe, 8
  - différentiable, 9
  - orientable, 14
  - topologique, 7
- vecteur
  - horizontal, 140, 157
  - tangent, 12
  - vertical, 139