دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی محض

عنوان

نقش هموستار در بررسی مسائل نظریه کنترل برای سیستم‌های مکانیکی

استاد راهنما

دکتر سید رضا مقدسی

نگارش

مهران امینیان شاهرخ‌آبادی

دی ۱۳۸۶

فهرست مندرجات

چکیده فارسی ii

۱ هموستارهای آفین و توزیع‌ها ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ هموستارهای خطی و آفین ۲

۳.۱ هموستارهای آفین تحدید شونده به یک توزیع ۸

۴.۱ ژئودزیک ناوردایی ۱۷

۵.۱ تحدید هموستارهای آفین به توزیع‌ها ۲۴

۲ سیستم‌های کنترلی هموستار آفین ۴۱

۱.۲ مقدمه ۴۱

۲.۲ تعاریف و علامت‌گذاری ۴۱

۳.۲ هندسه کلاف مماس ۴۴

۴.۲ مطالبی از هندسه دیفرانسیل آفینی ۵۱

۵.۲ هموستار اِرسمن القاء شده توسط یک هموستار آفین ۵۶

۶.۲ اصل ماکسیمم برای سیستم‌های آفین کنترلی روی خمینه‌ها ۷۵

۷.۲ اصل ماکسیمم روی خمینه‌های با هموستار آفین ۷۹

۸.۲ کنترل‌های مینیمم کننده نیرو ۹۱

۹.۲ کنترل‌پذیری برای سیستم‌های کنترلی آفین ۱۰۱

مراجع ۱۰۵

فصل ۱

هموستارهای آفین و توزیع‌ها

۱. مقدمه

در این فصل جنبه‌های مختلف برهم کنش یک هموستار آفین با یک توزیع را بررسی می‌کنیم. وقتی که هموستار آفین به یک توزیع تحدید می‌شود، در مورد تاب، انحناء و هولونومی آن بحث می‌کنیم. همچنین تبدیلاتی را بررسی می‌کنیم که هر دوی هموستار آفین و توزیع را در نظر می‌گیرند. یک مفهوم قویتر از تحدید به یک توزیع، ژئودزیک ناوردایی است. این یک تعمیم طبیعی به یک توزیع از ایدهٔ یک زیرخمینه بطور کامل ژئودزیک است. همچنین یک ضرب برای میدان‌های برداری ایجاد می‌کنیم که یک محک برای ژئودزیک ناوردایی می‌دهد بهمان طریقی که کروشه لی یک محک برای انتگرال‌پذیری است. اگر هموستار آفین به یک توزیع تحدید نشود، می‌توانیم تحدیدش را تعریف کنیم و در این فرایند مفهوم فرم اساسی دوم برای زیرخمینه‌ها را تعمیم می‌دهیم. برخی تبدیلات از این هموستارهای تحدید شده مشخص می‌کنیم و قوانین بقاء را در حالتی که هموستار اصلی، هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده به یک متریک ریمانی است، بدست می‌آوریم.

علامتگذاری:

$\mathfrak{D}$: مجموعه مقطع‌های هموار از یک مقطع D.

F, E : فضاهای باناخ.

$GL(E)$: گروه لیِ یکریختی‌های پیوسته E.

$\mathfrak{g}l(E)$: جبر لیِ درون‌ریختی‌های پیوسته E.

$L(E,F)$: مجموعه نگاشت‌های خطی پیوسته از E به F.

$L^k(E,F)$: مجموعه نگاشت‌های k خطی از $E \times E \times \cdots \times E$ به F.

$\mathfrak{L}_X$: مشتق لی نسبت به X ($X \in \mathfrak{I}(M)$).

$\mathfrak{I}(M)$: مجموعه میدان‌های برداری هموار روی M.

$\mathring{\cup}_{x\in X}$: اجتماع مجزا روی xهای متعلق به X.

$U \subset X$: U زیرمجموعه بازی از X.

۲. هموستارهای خطی و آفین

در این متن، رسته خمینه‌های باناخ بازتابی $\mathbb{C}^\infty$ در نظر گرفته می‌شود. برخی علامتگذاری‌ها و مفاهیم پایه‌ای از هموستارهای خطی و آفین در این بخش آورده می‌شود. برای هموستارهای آفین روی خمینه‌های باناخ کتاب [۱۰] و برای هموستارهای خطی کتاب [۸] مفید می‌باشند.

هموستارهای آفین. گیریم ∇ یک هموستار آفین روی خمینه M باشد. اگر (U,ϕ)، $\phi : U \to E$، یک نقشه برای M باشد، نمادهای کریستفل برای هموستار آفین در این نقشه با $\Gamma : \phi(U) \to L^2(E,E)$ نشان داده می‌شود. بنابراین در این نقشه

$$\nabla_X Y(u) = (u, DY(u).X(u) + \Gamma(u)\left(X(u), Y(u)\right))$$

گیریم Z_g فشانه ژئودزیک [۱] هموستار ∇ باشد که یک میدان برداری مرتبه دوم روی TM است و منحنی‌های انتگرالش به ژئودزیک‌های ∇ تصویر می‌شوند. در یک نقشه طبیعی $(TU, T\phi)$ برای TM داریم

$$Z_g(u,e) = \left((u,e), (e, -\Gamma(u)(e,e))\right)$$

[۱] geodesic spray

تاب و تانسور خمیدگی هموستار ∇ را با T و R نشان می‌دهیم لذا

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

بنابراین $R(X,Y)$ را بعنوان $(۱,۱)$ میدان تانسوری برای هر جفت از میدان‌های برداری X و Y در نظر می‌گیریم. اگر M، متریک ریمانی g داشته باشد آنگاه هموستار آفین یکتایی ∇ وجود دارد که بدون تاب $(T = ۰)$ است و $\nabla_X g = ۰$ برای هر $X \in \Im(M)$. این هموستار آفین، هموستار لوی—چویتا نامیده می‌شود.

همـوسـتـارهـای خـطـی. بـدقـت مـرتـبـط بـا هـمـوسـتـارهـای آفـیـن، هـمـوسـتـارهـای خـطـی هـسـتـنـد که از هموستارهای اصلی [۲] روی کلاف کنج‌های خطی [۳] بدست می‌آیند. فرض کنیم M روی فضای باناخ E مدل‌پذیر شده باشد و برای $x \in M$، $L_x(M)$ مجموعه یکریختی‌های $p : E \to T_x M$ را نشان می‌دهد. می‌نویسیم

$$L(M) = \overset{\circ}{\bigcup}_{x\in M} L_x(M)$$

که کلاف کنج‌های خطی M می‌نامیم. گروه $GL(E)$ از راست روی $L(M)$ با $(p,a) \to p \circ a$ عمل می‌کند که $p \in L_x(M)$ برای یک $u \in M$، $a \in GL(E)$. گیریم (U,ϕ) نقشه‌ای برای M باشد و $x \in U$. نقشه طبیعی کلاف مماس $(TU, T\phi)$ برای TM یک یکریختی از E با $T_x M$ از طریق $(T_x\phi)^{-۱}$ تولید می‌کند. $p \in L_x(M)$ داده شده، $a \in GL(E)$ یکتا وجود دارد طوری که $p = (T_x\phi)^{-۱} \circ a$ و این بدیهی‌سازی $L(U) \cong U \times GL(E)$ را ثابت می‌کند. چون واضح است که $M \cong \frac{L(M)}{GL(E)}$، در گفتن $(M$ و $GL(E))$ و $L(M)$ و π) یک کلاف تاری اصلی است توجیه می‌شدیم که $L(M)$ فضای کل، M فضای پایه، $GL(E)$ گروه ساختاری و $\pi : L(M) \to M$ افکنش کلاف می‌باشد. یک هموستار خطی تصریحی از متمم $GL(E)$—ناوردا، $H(L(M))$، به زیرکلاف $V(L(M)) \overset{\triangle}{=} \ker(T\pi)$ می‌باشد. اگر $X \in T_p(L(M))$ آنگاه می‌نویسیم $X = \mathrm{hor(X)} + \mathrm{ver(X)}$ که $\mathrm{hor(X)} \in \mathrm{H_p(L(M))}$ و $\mathrm{ver(X)} \in \mathrm{V_p(L(M))}$. یک فرم هموستار ω با $\omega_p(X) = A$ که $A \in \mathfrak{gl}(E)$ و $A^*(p) = \mathrm{ver(X)}$ تعریف می‌شود. $A^*(P)$ مولد بینهایت کوچک است

---

[۲] principal connection

[۳] Bundle of linear frames

که با رابطه

$$A^*(p) = \frac{d}{dt}|_{t=\circ}(p \circ \exp(tA))$$

تعریف می‌شود. ω یک فرم $\mathfrak{gl}(E)$—مقدار روی $L(M)$ می‌باشد. چون $GL(E)$ آزادانه روی $L(M)$ عمل می‌کند، ω خوش‌تعریف است. همچنین روی $L(M)$ یک فرم E—مقدار متعارف وجود دارد که توسط $\theta_p(X) = p^{-۱}(T_p\pi(X))$ تعریف می‌شود.

اگر $c : [a,b] \to M$ یک منحنی باشد و اگر $p \in \pi^{-۱}(c(a))$، منحنی $\sigma : [a,b] \to L(M)$ با ترفیع افقی c از p تعریف می‌کنیم. لذا $c = \pi \circ \sigma$ و $T\pi(\dot{\sigma}(t)) = \dot{c}(t)$ برای $t \in [a,b]$. انتقال موازی از p در طول c را با مقطع $t \to \sigma(t)$ از $L(M)$ روی c تعریف می‌کنیم.

$GL(E)$ روی E از چپ بروش طبیعی عمل می‌کند و بنابراین عمل چپ $GL(E)$ روی $L(M) \times E$ را با رابطه $(a,(p,e)) \to (p \circ a^{-۱}, a(e))$ داریم. خارج‌قسمت $\frac{L(M)\times E}{GL(E)}$ یک کلاف برداری تخصیص داده شده به $L(M)$ [۱] می‌باشد و بطور طبیعی با TM یکریخت است. انتقال موازی در $L(M)$، انتقال موازی در $T(M)$ را بروش زیر موجب می‌شود. گیریم $c : [a,b] \to M$ یک منحنی با $v \in T_{c(a)}M$ باشد. گیریم $e \in E$ و تعریف می‌کنیم $p \in \pi^{-۱}(c(a))$ طوری‌که $pe = v$. اگر σ ترفیع افقی c از p باشد آنگاه $t \mapsto \sigma(t)$ انتقال موازی از p در طول c است. انتقال موازی از v در طول c را با میدان برداری در طول c، $X(t) = \sigma(t)e$ تعریف می‌کنیم. می‌توان نشان داد این ساختار به $e \in E$ بستگی ندارد. نسبت به این عمل انتقال موازی، هموستار آفینی σ روی M با رابطه

$$(\nabla_X Y)(x) = p\left(\mathrm{hlft_p(X)}(\theta(\mathrm{hlft_p(Y)}))\right)$$

داده می‌شود جایی که $p \in \pi^{-۱}(x)$ می‌باشد (لم صفحه ۱۳۳ از کتاب [۸]). اینجا

$$\mathrm{hlft_p} : \mathrm{T_xM} \to \mathrm{H_p(L(M))}$$

ترفیع افقی طبیعی داده شده توسط هموستار است.

اگر $e \in E$، گیریم $\Sigma(e)$ میدان برداری افقی روی $L(M)$ تعریف شده با $T_p\pi(\Sigma(e)(p)) = pe \in T_{\pi(p)}M$ باشد. یعنی $\Sigma(e)(p)$ ترفیع افقی از pe است. ثابت می‌شود اگر $\sigma : [a,b] \to L(M)$ یک منحنی

[۱] vector bundle associated with L(M)

انتگرال برای $\Sigma(e)$ است آنگاه $\pi \circ \sigma$ یک ژئودزیک برای هموستار آفین مربوطه است. برعکس، اگر $c : [a,b] \to M$ یک ژئودزیک برای ∇ با شرط اولیه $\dot{c} = v_x \in T_xM$ باشد آنگاه ترفیع افقی از $p \in L_x(M)$ یک انتگرال برای $\Sigma(p^{-1}v_x)$ است.

تبدیلاتی برای هموستارهای آفین. برای جزئیات این بخش می‌توان به فصل VI از کتاب [۸] مراجعه کرد. یک دیفیومورفیسم $\phi : M \to M$ یک تبدیل آفین از ∇ نامیده می‌شود اگر هر یک از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

AT۱. $T\phi$ با انتقال موازی جابه‌جا می‌شود.

AT۲. $\phi \circ \exp_x = \exp_{\phi(x)} \circ T_x\phi$ برای هر $x \in M$.

AT۳. $\phi^*(\nabla_X Y) = \nabla_{\phi^*X}\phi^*Y$ برای میدان‌های برداری X و Y روی M.

اگر ∇ هموستار لوی–چویتا نسبت به متریک ریمانی g روی M باشد، آنگاه شرایط بالا ایجاب می‌شوند توسط:

AT۴. $\phi^*g = g$

در این حالت می‌گوییم ϕ یک ایزومتری از متریک ریمانی g است. ملاحظه می‌کنیم که مجموعه تبدیلات آفین از ∇ به تشکیل زیرگروهی از گروه دیفیومورفیسم M می‌دهد که با $\mathrm{Aff}(\nabla)$ نشان می‌دهیم.

یک میدان برداری X یک تبدیل آفین بینهایت کوچک نامیده می‌شود اگر در هر یک از شرایط معادل زیر صدق کند:

IAT۱. شار X از خانواده یک پارامتری تبدیلات آفین تشکیل شده است.

IAT۲. $\mathfrak{L}_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \mathfrak{L}_X = \nabla_{[X,Y]}$ برای هر میدان برداری Y.

اگر ∇ هموستار لوی–چویتا نسبت به متریک ریمانی g باشد آنگاه شرایط بالا ایجاب می‌شوند توسط:

IAT۳. $\mathfrak{L}_X g = 0$.

IAT۴. $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = ۰$ برای هر میدان برداری Y و Z روی M.

در این حالت گاهی اوقات X را یک ایزومتری بینهایت کوچک از g یا یک میدان برداری کیلینگ می‌نامیم. می‌توان نشان داد که مجموعه تبدیلات آفین بینهایت کوچک از ∇ یک زیرجبر لی از $\mathfrak{I}(M)$ است که با $\mathrm{aff}(\nabla)$ نشان می‌دهیم. در اینجا برهان IAT۴ به همراه یک محک مفید اضافی از میدان‌های برداری کیلینگ ارائه می‌شود.

لم ۲.۱ گیریم g یک متریک ریمانی روی M، ∇ هموستار لوی–چویتا مربوطه و X یک میدان برداری روی M باشد. شرایط زیر معادلند:

(i) X یک ایزومتری بی‌نهایت کوچک برای g است.

(ii) $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = ۰$ برای هر دو میدان برداری Y و Z.

(iii) $g(\nabla_Y X, Y) = ۰$ برای هر میدان برداری Y.

برهان. بدلیل پیوستگی، لم را در نقاط $x \in M$ که $X(x) \neq ۰$ ثابت می‌کنیم. گیریم x یک چنین نقطه‌ای باشد و گیریم (U, ϕ) یک نقشه حول x باشد که X را اُطو می‌کند. بنابراین برای $x' \in U$، $\phi(x') = (t, u) \in V \times U'$ با $V \subset \mathbb{R}$ و $U' \subset E$. در این نقشه نمایش موضعی برای X، $X(t, u) = ((t, u), (۱, ۰))$ می‌باشد. با $\Gamma : V \times U' \to L^۲(\mathbb{R} \times E, \mathbb{R} \times E)$ نمادهای کریستفل در این نقشه را نشان می‌دهیم. گیریم $X_۱, X_۲ \in \mathbb{R} \times E$ و بعنوان میدان‌های برداری ثابت روی $V \times U'$ در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که X، $X_۱$ و $X_۲$ ثابت هستند محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(\nabla_{X_۱} X, X_۲) &+ g(X_۱, \nabla_{X_۲} X) \\ &= g(DX.X_۱ + \Gamma(X_۱, X), X_۲) + g(X_۱, DX.X_۲ + \Gamma(X_۲, X)) \\ &= g(DX_۱.X + \Gamma(X, X_۱), X_۲ + g(X_۱, DX_۲.X + \Gamma(X, X_۲)) \\ &= g(\nabla_X X_۱, X_۲) + g(X_۱, \nabla_X X_۲). \qquad (۲.۲) \end{aligned}$$

در اینجا از حقیقت اینکه هموستار لوی–چویتا تاب صفر دارد و لذا Γ متقارن است، استفاده کرده‌ایم.

(ii) $\Leftarrow$ (i) اکنون محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_X(g(X_1,X_2)) &= (\mathfrak{T}_X g)(X_1,X_2) + g(\mathfrak{T}_X X_1, X_2) + g(X_1, \mathfrak{T}_X X_2)\\ &= (\mathfrak{T}_X g)(X_1,X_2)\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_X(g(X_1,X_2)) &= (\nabla_X g)(X_1,X_2) + g(\nabla_X X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_X X_2)\\ &= g(\nabla_X X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_X X_2)\end{aligned}$$

چون هموستار لوی—چویتا دارای خاصیت $\nabla_Z g = 0$ برای هر میدان برداری Z می‌باشد. بنابراین، با (۲.۲)

$$g(\nabla_{X_1} X, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_2} X) = g(\nabla_X X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_X X_2) = (\mathfrak{T}_X g)(X_1, X_2)$$

لذا می‌بینیم که X یک تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای ∇ است اگروتنهااگر $g(\nabla_{X_1} X, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_2} X) = 0$ برای هر $X_1, X_2 \in \mathbb{R}\times E$. چون این عبارت نسبت به ضرب توابع در X_1 و X_2 خطی است و چون X_1 و X_2 دلخواه هستند، می‌بینیم که (i) و (ii) معادلند.

(iii) $\Leftarrow$ (i) ادعا می‌کنیم برای هر میدان برداری X، $\mathfrak{T}_X g$ یک $(0,2)$ میدان تانسوری متقارن است. داریم

$$(\mathfrak{T}_X g)(Y,Z) = \mathfrak{T}_X(g(Y,Z)) - g(\mathfrak{T}_X Y, Z) - g(Y, \mathfrak{T}_X Z)$$

که بوضوح در Y و Z متقارن است. بنابراین، $\mathfrak{T}_X g = 0$ اگروتنهااگر $\mathfrak{T}_X g(Y,Y) = 0$ برای هر میدان برداری Y. گیریم $Y \in \mathbb{R}\times E$، از (۲.۲) داریم

$$(\mathfrak{T}_X g)(Y,Y) = 2g(\nabla_X Y, Y) = 2g(\nabla_Y X, Y).$$

بنابراین می‌بینیم X یک میدان برداری کیلینگ است اگروتنهااگر $g(\nabla_Y X, Y) = 0$ برای هر $Y \in \mathbb{R}\times E$. دوباره، این عبارت نسبت به ضرب تابع در Y خطی است لذا X یک میدان برداری کیلینگ است اگروتنهااگر (iii) برقرار بماند.

■

با انگیزه خاصیت IAT۲ از تبدیلات آفین بی‌نهایت کوچک، تعریف می‌کنیم.

$$B_X(Y,Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X,Z] - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

ادعا می‌کنیم B_X یک میدان تانسوری از نوع $(1,2)$ برای هر $X \in \mathfrak{I}(M)$ است. برای دیدن این، گیریم f و g توابعی روی M باشند و محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
B_X(fY, gZ) &= [X, \nabla_{fY} gZ] - \nabla_{fY}[X, gZ] - \nabla_{[X,fY]}(gZ) \\
&= [X, fg\nabla_Y Z + f(\mathfrak{T}_Y g)Z] - f\nabla_Y \left(g[X,Z] + (\mathfrak{T}_X g)Z\right) - \\
&\quad g\nabla_{f[X,Y]+(\mathfrak{T}_X f)Y} Z - \left(\mathfrak{T}_{f[X,Y]+(\mathfrak{T}_X f)Y}\, g\right) Z \\
&= fg[X, \nabla_Y Z] + (\mathfrak{T}_X fg)\nabla_Y Z + f(\mathfrak{T}_Y g)[X,Z] + \mathfrak{T}_X\left(f(\mathfrak{T}_Y g)\right) Z - \\
&\quad fg\nabla_Y[X,Z] - f(\mathfrak{T}_Y g)[X,Z] - f(\mathfrak{T}_X g)\nabla_Y Z - f\mathfrak{T}_Y(\mathfrak{T}_X g)Z - \\
&\quad fg\nabla_{[X,Y]}Z - g(\mathfrak{T}_X f)\nabla_Y Z - f(\mathfrak{T}_{[X,Y]} g)Z - (\mathfrak{T}_X f)(\mathfrak{T}_Y g)Z \\
&= fg[X, \nabla_Y Z] - fg\nabla_Y[X,Z] - fg\nabla_{[X,Y]}Z = fgB_X(Y,Z)
\end{aligned}$$

این اثبات می‌کند که B_X یک میدان تانسوری است. لم زیر از تعریف B_X نتیجه می‌شود.

لم ۲.۲ یک میدان برداری X یک تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای ∇ است اگروتنهااگر $B_X = 0$.

۳. هموستارهای آفین تحدید شونده به یک توزیع

یک هموستار آفین ∇ روی M گفته می‌شود به یک توزیع D تحدید می‌شود اگر $\nabla_X Y \in \mathfrak{D}$ برای هر $Y \in \mathfrak{D}$. گیریم $v \in T_xM$ و $c : [0,T] \to M$ یک منحنی با $c(0) = x$ باشد. بیاد آوریم که انتقال موازی از v در طول c، میدان برداری X در طول c است که در معادله دیفرانسیل $\nabla_{\dot{c}(t)} X(t) = 0$ با شرط اولیه $X(0) = v$ صدق می‌کند. بنابراین می‌بینیم که اگر ∇ به D تحدید شود آنگاه انتقال موازی D را ناوردا باقی می‌گذارد. در این بخش برخی خواص عمومی هموستارهای آفین که به یک توزیع تحدید می‌شود مطالعه می‌شود.

مگر آنکه بیان شود والاّ، سراسر این بخش فرض می‌کنیم ∇ هموستار آفین است که به D تحدید می‌شود.

۳.۱. تاب، انحناء و هولونومی. گیریم T و R بترتیب نشان‌دهنده تانسوری‌های تاب و

انحناء باشند.

گزاره ۳.۱ D انتگرال‌پذیر است اگروتنهااگر $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ برای هر $X, Y \in \mathfrak{D}$. بویژه اگر $T = 0$ آنگاه D انتگرال‌پذیر است.

برهان. این از تعریف T و فرض ما که ∇ به D تحدید می‌شود، نتیجه می‌شود.

■

راه دیگر بیان این نتیجه این است که D انتگرال‌پذیر است اگروتنهااگر تاب ∇ به D تحدید شود. نتیجه بالا، نتیجه جذاب زیر را در پی دارد.

نتیجه ۳.۲ گیریم (M,g) یک خمینه ریمانی و ∇ هموستار آفین لوی–چویتا مربوطه باشد. اگر ∇ به یک توزیع D تحدید شود آنگاه D انتگرال‌پذیر است.

جهت عکس، عموماً درست نمی‌باشد.

گزاره ۳.۳ گیریم $x \in M$ و $u, v \in T_xM$. آنگاه درون‌ریختی $R(u,v)$ از T_xM، زیرفضای D_x را ناوردا باقی می‌گذارد.

برهان. این از تعریف R و فرض ∇ به D تحدید می‌شود، نتیجه می‌شود.

■

با روشی مرتبط، یک مشاهده مهم در مورد گروه‌های هولونومی از ∇ می‌سازیم. برای بحثی از گروه‌های هولونومی برای هموستارهای خطی به بخش ۹، فصل ۱۳ از [۸] می‌توان مراجعه کرد. بویژه، بیاد آوریم که گروه هولونومی در $x \in M$ بعنوان زیرگروهی از گروه خودریختی‌های T_xM در نظر گرفته می‌شود. جبر لی این گروه، یک زیرجبر از جبر لیِ درون‌ریختی‌های T_xM می‌باشد که به کروشه جابه‌جاگر [۱] مجهز شده است.

---

[۱] commutative bracket

گزاره ۳.۴ فرض کنید ∇ به D تحدید شود و گیریم $x \in M$. عبارات زیر برقرار می‌ماند.

(i) D_x یک زیرفضای ناوردا از گروه هولونومی از ∇ در x است.

(ii) جبر لی از گروه هولونومی بی‌نهایت کوچک از ∇ در x، D_x را بعنوان یک زیرفضای ناوردا دارد.

برهان. (i) گروه هولونومی از ∇ در x با خودریختی‌های

$$w \in T_xM \mapsto \tau_c^{-1} \circ R(\tau_c(u), \tau_c(v)) \circ \tau_c(w)$$

تولید می‌شود که $c : [0, 1] \to M$ یک منحنی با $c(0) = x$، τ_c انتقال موازی در طول c و $u, v \in T_xM$ می‌باشند. چون ∇ به D تحدید می‌شود، D تحت انتقال موازی ناورداست. طبق گزاره (۳.۳)، $R\left(\tau_c(u), \tau_c(v)\right) \circ \tau_c(w) \in D_{c(1)}$. این، (i) را ثابت می‌کند.

(ii) جبر لی از گروه هولونومی بی‌نهایت کوچک در x با درون‌ریختی‌هایی از T_xM از شکل

$$v \mapsto \left(\nabla^k R\right)(u, v; w_1; \dots; w_k)(v)$$

تولید می‌شود جایی‌که $u, v, w_1, \dots, w_k \in T_xM$ و $k \in \mathbb{N}$. با استقراء روی k نشان می‌دهیم که هر درون‌ریختی در این مجموعه مولد، D_X را ناوردا باقی می‌گذارد. این برای $k = 0$ با گزاره ۳.۳ درست است. اکنون فرض کنید برای $k = l > 0$ درست باشد. بنابراین برای میدان‌های برداری $V_l, \dots, V_1, Y, X$ روی M و هر مقطع Z از D،

$$\left(\nabla^l R\right)(X, Y, Z; V_1; \dots; V_l) \triangleq \left(\nabla^l R\right)(X, Y; V_1; \dots; V_l)(Z) \in D$$

اگر V_{l+1} یک میدان برداری روی M باشد محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla^{l+1} R\right)(X, Y, Z; V_1; \dots; V_l; V_{l+1}) = \left(\nabla_{V_{l+1}}(\nabla^l R)\right)(X, Y, Z; V_1; \dots; V_l) \\
&= \nabla_{V_{l+1}}\left(\left(\nabla^l R\right)(X, Y, Z; V_1; \dots; V_l)\right) - \left(\nabla^l R\right)\left(\nabla_{V_{l+1}} X, Y, Z; V_1; \dots; V_l\right) \\
&\quad - \left(\nabla^l R\right)\left(X, \nabla_{V_{l+1}} Y, Z; V_1; \dots; V_l\right) - \left(\nabla^l R\right)\left(X, Y, \nabla_{V_{l+1}} Z; V_1; \dots; V_l\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{l} \left(\nabla^l R\right)\left(X, Y, Z; V_1; \dots; \nabla_{V_{l+1}} V_i; \dots; V_l\right)
\end{aligned}$$

با فرض استقراء و چون فرض کردیم ∇ به D تحدید می‌شود، هر یک از جمله‌های سمت راست عبارت پایانی یک مقطع از D است. این برهان (ii) را کامل می‌کند.

■

۳.۲. تبدیلات. در این بخش، تبدیلاتی از هموستارهای آفین که به یک توزیع تحدید می‌شوند، بحث می‌کنیم. در پی تبدیلاتی که به هموستار آفین و توزیع ..... می‌گذارند، هستیم. یک نگاشت $\phi : M \to M$ را سازگار با D می‌نامیم اگر $T_x\phi(D_x) = D_{\phi(x)}$ برای $x \in M$. یک میدان برداری X، سازگار با D است اگر $[X, Y] \in \mathfrak{D}$ برای هر $Y \in \mathfrak{D}$. معمول است به بیان D' تحت X ناورداست′ اگر X با D سازگار باشد.

با فرض تمام بودن میدان‌های برداری، لم زیر را داریم.

لم ۳.۵ میدان برداری X سازگار با D است اگروتنهااگر شار آن با D سازگار باشد.

برهان. شار X را با F_t نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم F_t با D سازگار است. اگر $Y \in \mathfrak{D}$ داریم

$$\mathfrak{T}_X Y(x) = \lim_{x \to \circ} \left(T_{F_t(x)} F_{-t} \left(Y \left(F_t(x) \right) \right) - Y(x) \right)$$

چون F_t با D سازگار است، $T_{F_t(x)} F_{-t} \left(Y \left(F_t(x) \right) \right) \in D_x$ و بنابراین $\mathfrak{T}_X Y(x) \in D_x$ و لذا X با D سازگار است. برای اثبات عکس، مشاهده زیر را انجام می‌دهیم. گیریم X^T ترفیع مماس X به TM باشد. لذا X^T یک میدان برداری روی TM است که شار آن یک خانواده یک پارامتری از دیفیومورفیسم‌های $t \mapsto F_t$ است. ادعا می‌کنیم F_t با D سازگار است اگروتنهااگر $D \subset TM$ تحت شار X^T ناوردا باشد. به راستی، F_t با D سازگار است اگروتنهااگر $T_x F_t(D_x) = D_{F_t(x)}$ برای هر $x \in M$ که این ادعای ما را ثابت می‌کند. لذا ثابت می‌کنیم که X^T مماس به D است اگروتنهااگر X با D سازگار باشد و این برهان لم را کامل می‌کند. از مختصاتی برای TM استفاده می‌کنیم که نسبت به توزیع سازگار باشند. نقشه (U, ϕ) را برای M انتخاب می‌کنیم. پس $(TU, T\phi)$ نقشه طبیعی القائی برای TM است. چون D زیرکلانی از TM است، نقشه (TU, ψ) وجود دارد طوری که

۱. ψ یک نگاشت دوسوئی پوشا به $U' \times F_۱ \times F_۲$ است که $U' = \phi(U) \subset E$ و $F_۱$ و $F_۲$ فضاهای باناخ هستند.

۲. $\psi\left(D_{\phi^{-1}(u)}\right) = \{u\} \times F_1 \times \{0\}$

۳. نگاشت گذر از $T\phi(TU)$ به $\psi(TU)$ دارای شکل

$$h : (u,e) \mapsto (u, A_1(u).e, A_2(u).e)$$

است برای نگاشت‌های هموار $A_i : U' \to L(E, F_i)$، $i = 1, 2$.

معکوس h را با

$$h^{-1} : (u, f_1, f_2) \mapsto (u, B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2)$$

نشان می‌دهیم که نگاشت‌های هموار $B_2 : U' \to L(F_i, E)$، $i = 1, 2$ را تعریف می‌کند.

گیریم $(u,e) \in U' \times E$ و گیریم $(u, f_1, f_2) = h(u,e) \in U' \times F_1 \times F_2$. محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
Dh(u,e).X^T(u,e) &= Dh(u,e).\left(X(u), DX(u).e\right) \\
&= (X(u), DA_1(u)\left(X(u), e\right) + A_1(u).\left(DX(u).e\right), \\
&\quad DA_2(u)\left(X(u), e\right) + A_2(u).\left(DX(u).e\right)) \\
&= (X(u), DA_1(u)\left(X(u), B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2\right) + \\
&\quad A_1(u).\left(DX(u).\left(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2\right)\right), \\
&\quad DA_2(u)\left(X(u), B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2\right) + \\
&\quad A_2(u).\left(DX(u).\left(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2\right)\right)).
\end{aligned}$$

اگر نمایش X^T را به $D \subset TM$ تحدید کنیم با قرار دادن $f_2 = 0$ بدست می آوریم.

$$\begin{aligned}
T\psi\left(X^T|D\right) = (X(u), &DA_1(u)\left(X(u), B_1(u).f_1\right) + A_1(u).\left(DX(u).\left(B_1(u).f_1\right)\right), \\
&DA_2(u)\left(X(u), B_1(u).f_1\right) + A_2(u).\left(DX(u).\left(B_1(u).f_1\right)\right)) \qquad (۳.۱)
\end{aligned}$$

حال گیریم $f_1 \in F_1$ و میدان برداری $Y : u \to (u, B_1(u).f_1)$ روی U' که نمایش از یک مقطع از D است. محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned}
h\left([X,Y](u)\right) &= h\left(u, DB_1(u)\left(X(u), f_1\right) - DX(u).\left(B_1(u).f_1\right)\right) \\
&= (u, A_1(u).\left(DB_1(u)\left(X(u), f_1\right) - DX(u).\left(B_1(u).f_1\right)\right), \\
&\quad A_2(u).\left(DB_1(u)\left(X(u), f_1\right) - DX(u).\left(B_1(u).f_1\right)\right)). \qquad (۳.۲)
\end{aligned}$$

با تعریف A_2 و B_1 داریم $A_2(u).(B_1(u).f_1) = 0$ برای هر $f_1 \in F_1$. با مشتق‌گیری از این عبارت در جهت $X(u)$ بدست می‌آوریم.

$$DA_2(u)\left(X(u), B_1(u).f_1\right) + A_2(u).\left(DB_1\left(X(u), f_1\right)\right) = 0 \qquad (۳.۳)$$

با ترکیب (۳.۱)، (۳.۲) و (۳.۳) لم بدست می‌آید.

■

لم ۳.۶ گیریم X میدان برداری سازگار با D و هموستار ∇ به D تحدید شود. آنگاه $B_X(Y,Z) \in \mathfrak{D}$ برای هر $Y, Z \in \mathfrak{D}$.

برهان. گیریم $Y, Z \in \mathfrak{D}$. داریم

$$.B_X(Y,Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X,Z] - \nabla_{[X,Y]} Z$$

چون ∇ به D تحدید می‌شود، $\nabla_Y Z \in \mathfrak{D}$ و چون X با D سازگار است، $[X, \nabla_Y Z] \in \mathfrak{D}$. به روشی مشابه، $\nabla_Y [X,Z] \in \mathfrak{D}$ و $\nabla_{[X,Y]} Z \in \mathfrak{D}$ که لم ثابت می‌شود.

■

این لم، تعریف زیر را منجر می‌شود.

تعریف ۳.۷ گیریم $\phi : M \to M$ یک دیفیومورفیسم سازگار با D باشد، X یک میدان برداری سازگار با D و هموستار ∇ به D تحدید شود. می‌گوییم ϕ یک $D-$تبدیل آفین است اگر $T\phi$ با انتقال موازی در D جابه‌جا شود و می‌گوییم X یک $D-$تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک است اگر شار آن، یک خانواده یک پارامتری از $D-$تبدیلات آفین باشد.

چون ∇ به D تحدید می‌شود، تعریف فوق بامعنی است. نتیجه زیر با تحدید ... برای هموستار آفین عمومی به توزیع D ثابت می‌شود چون فرض می‌کنیم ∇، D را ناوردا باقی می‌گذارد.

گزاره ۳.۸ فرض کنید ∇ به D تحدید می‌شود و گیریم ϕ یک دیفیومورفیسم سازگار با D است. عبارات زیر معادلند:

(i) ϕ یک D—تبدیل آفین است.

(ii) $\phi \circ (\exp_x |D_x) = \exp_{\phi(x)} \circ (T_x\phi|D_x)$

(iii) اگر $Y \in \mathfrak{D}$، $\phi^* (\nabla_X Y) = \nabla_{\phi^* X} \phi^* Y$

اگر ∇ هموستار لوی—چویتا مربوط به متریک ریمانی g باشد، آنگاه شرایط بالا ایجاب می‌شود توسط:

(iv) $(\phi^* g)(X, Y) = g(X, Y)$ برای $X, Y \in \mathfrak{D}$.

گیریم X یک میدان برداری سازگار با D باشد. عبارات زیر معادلند:

(v) X یک D—تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک است.

(vi) $B_X(Y, Z) = \circ$ برای $Y, Z \in \mathfrak{D}$.

اگر ∇ هموستار لوی—چویتا مربوط به متریک ریمانی g باشد، آنگاه شرایط بالا ایجاب می‌شوند توسط:

(vii) $(\mathfrak{L}_X g)(Y, Z) = \circ$ برای $Y, Z \in \mathfrak{D}$.

(viii) $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = \circ$ برای $Y, Z \in \mathfrak{D}$.

(ix) $g(\nabla_Y X, Y) = \circ$ برای $Y \in \mathfrak{D}$.

اکنون خواصی از D—تبدیلات آفین تحت ترکیب و D—تبدیلات آفین بی‌نهایت کوچک تحت کروشه لی را بررسی می‌کنیم. با $\mathrm{Diff}(M)$ گروه دیفیومورفیسم‌های M و با $\mathrm{Aff}(\nabla|D)$ مجموعه D—تبدیلات آفین و $\mathrm{aff}(\nabla|D)$ مجموعه D—تبدیلات آفین بی‌نهایت کوچک را نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۹ فرض کنید ∇ به D تحدید می‌شود. آنگاه

(i) $\mathrm{Aff}(\nabla|D)$ زیرگروهی از $\mathrm{Diff}(M)$ است.

(ii) $\mathrm{aff}(\nabla|D)$ یک زیرجبر لی از $\mathfrak{I}(M)$ است.

برهان. (i) در ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر دیفیومورفیسم‌های $\phi_{\text{۱}}$ و $\phi_{\text{۲}}$ با D سازگار باشند آنگاه $\phi_{\text{۱}} \circ \phi_{\text{۲}}$ با D سازگار است. اگر $Y \in \mathfrak{D}$ و $\phi_{\text{۱}}$ و $\phi_{\text{۲}}$، D-تبدیل آفین باشند، محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}(\phi_{\text{۱}} \circ \phi_{\text{۲}})^* (\nabla_X Y) &= \phi_{\text{۲}}^* \left(\phi_{\text{۱}}^* \nabla_X Y\right) \\ &= \phi_{\text{۲}}^* \nabla_{\phi_{\text{۱}}^* X} \phi_{\text{۱}}^* Y \\ &= \nabla_{\left(\phi_{\text{۱}} \circ \phi_{\text{۲}}\right)^* X} (\phi_{\text{۱}} \circ \phi_{\text{۲}})^* Y\end{aligned}$$

با استفاده از گزاره ۳.۸ قسمت، (iii). لذا $\phi_{\text{۱}} \circ \phi_{\text{۲}} \in \operatorname{Aff}(\nabla|D)$. همچنین ملاحظه می‌کنیم که $\mathrm{id}_M \in \operatorname{Aff}(\nabla|D)$ که نشان می‌دهد $\operatorname{Aff}(\nabla|D)$ زیرگروهی از $\operatorname{Diff}(M)$ است.

(ii) در ابتدا ادعا می‌کنیم که اگر $X, Y \in \mathfrak{I}(M)$ با D سازگار باشند آنگاه $[X, Y]$ با D سازگار است. براستی، برای $Z \in \mathfrak{D}$ داریم

$$[[X, Y], Z] = -[[Z, X], Y] - [[Y, Z], X]$$

بوسیله تساوی ژاکوبی. از این ادعای ما نتیجه می‌شود. اکنون گیریم $X, Y \in \operatorname{aff}(\nabla|D)$. آنگاه داریم

$$(\mathfrak{T}_X \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_X) W = \left(\nabla_{[X,Z]}\right) W, (\mathfrak{T}_Y \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_Y) W = \left(\nabla_{[Y,Z]}\right) W$$

برای هر $Z, W \in \mathfrak{D}$ از گزاره ۳.۸. اکنون محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}&\left(\mathfrak{T}_{[X,Y]} \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_{[X,Y]}\right) W = \\ &\qquad (\mathfrak{T}_X \circ \mathfrak{T}_Y \circ \nabla_Z - \mathfrak{T}_Y \circ \mathfrak{T}_X \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_X \circ \mathfrak{T}_Y + \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_Y \circ \mathfrak{T}_X) W \\ &= (\mathfrak{T}_X \circ (\mathfrak{T}_Y \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_Y) + (\mathfrak{T}_X \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_X) \circ \mathfrak{T}_Y - \\ &\qquad \mathfrak{T}_Y \circ (\mathfrak{T}_X \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_X) - (\mathfrak{T}_Y \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{T}_Y) \circ \mathfrak{T}_X) W \\ &= \left(\mathfrak{T}_X \circ \nabla_{[Y,Z]} - \nabla_{[Y,Z]} \circ \mathfrak{T}_X - \mathfrak{T}_Y \circ \nabla_{[X,Z]} + \nabla_{[X,Z]} \circ \mathfrak{T}_Y\right) W \\ &= \left(\nabla_{[X,[Y,Z]]} - \nabla_{[Y,[X,Z]]}\right) W \\ &= \left(\nabla_{[[X,Y],Z]}\right) W\end{aligned}$$

نامساوی ماقبل آخر از گزاره ۳.۸ قسمت (vi) می‌آید (ملاحظه می‌کنیم که $[X, Z], [Y, Z] \in \mathfrak{D}$) و نامساوی آخر از تساوی ژاکوبی نتیجه می‌شود. بنابراین می‌بینیم که $B_{[X,Y]}(Z, W) = \text{۰}$ برای هر

$Z, W \in \mathfrak{D}$ و لذا $[X,Y] \in \mathrm{aff}(\nabla|D)$.

■

روی هم رفته واضح نیست چه ارتباطی بین $\mathrm{Aff}(\nabla)$ و $\mathrm{Aff}(\nabla|D)$ وجود دارد (یا بترتیب جبر لی‌شان). در بخش ۵ (گزاره ۵.۷) می‌بینیم که حداقل یک حالت آنها تبدیلات مشترکی را دارند. همچنین، حداقل در حالت متناهی بعد، ثابت می‌شود که $\mathrm{Aff}(\nabla|D)$، گروه لی متناهی بعد با جبر لی $\mathrm{aff}(\nabla|D)$ است.

در خاتمه حالتی را بررسی می‌کنیم که D دارای متمم D' است. می‌گوییم یک دیفیومورفیسم $\phi : M \to M$ سازگار است اگر ϕ با D و D' سازگار (بترتیب. یک میدان برداری X روی M) با (D, D') سازگار باشد (بترتیب. X با D و D' سازگار باشد). این در یک حالت مهم رخ می‌دهد که لم بعدی آن را شرح می‌دهد. در این لم فرض نمی‌کنیم که ∇ به D تحدید می‌شود.

لم ۳.۱۰ فرض کنید M یک متریک ریمانی g مجهز باشد و D یک توزیع بهمراه $D^\perp$ متمم متعامدش باشد. آنگاه

(i) یک ایزومتری، ϕ، برای هموستار لوی—چویتا با D سازگار است اگروتنهااگر با $(D, D^\perp)$ سازگار باشد.

(ii) یک ایزومتری بی‌نهایت کوچک، X، برای هموستار لوی—چویتا با D سازگار است اگروتنهااگر با $(D, D^\perp)$ سازگار باشد.

برهان. (i) واضح است اگر ϕ با $(D, D^\perp)$ سازگار باشد آنگاه با D سازگار است. اکنون فرض کنیم، ϕ با D سازگار است و $Y \in \mathfrak{D}$ و $Z \in \mathfrak{D}^\perp$. چون ϕ با D سازگار است، $\phi_* Y \in \mathfrak{D}$. بنابراین

$$
\begin{aligned}
& g\left(\phi_* Y, Z\right) = \circ \\
& \Rightarrow \phi^*\left(g\left(\phi_* Y, Z\right)\right) = \circ \\
& \Rightarrow \left(\phi^* g\right)\left(Y, \phi^* Z\right) = \circ \\
& \Rightarrow g(Y, \phi^* Z) = \circ
\end{aligned}
$$

اینجا از حقیقت اینکه ϕ یک ایزومتری است استفاده کرده‌ایم. چون Y دلخواه است، $\phi^* Z \in \mathfrak{D}^\perp$، که ثابت می‌کند ϕ با $D^\perp$ سازگار است.

(ii) واضح است اگر X با $(D, D^{\perp})$ سازگار باشد آنگاه با D سازگار است. لذا فقط معکوس را نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $Y \in \mathfrak{D}$ و $Z \in \mathfrak{D}^{\perp}$ و X با D سازگار است. آنگاه

$$
\begin{aligned}
g(Y,Z) = 0 \\
&\Rightarrow \mathfrak{T}_X\left(g\left(Y,Z\right)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(\mathfrak{T}_X g\right)\left(Y,Z\right) + g\left(\mathfrak{T}_X Y, Z\right) + g\left(Y, \mathfrak{T}_X Z\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(Y, \mathfrak{T}_X Z\right) = 0
\end{aligned}
$$

اینجا از حقیقت اینکه X با D سازگار است و X یک تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای هموستار لوی—چویتا است استفاده کرده‌ایم. لذا می‌بینیم که $\mathfrak{T}_X Z \in \mathfrak{D}^{\perp}$ چون Y دلخواه است.

■

۴. ژئودزیک ناوردایی

در این بخش مفهوم زیر خمینه بطور کامل ژئودزیک [۱] را تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ یک توزیع D روی خمینه M بهمراه یک هموستار آفین ∇ بطور ژئودزیک ناوردا [۲] است اگر برای هر ژئودزیک $c : [a,b] \to M$ از ∇، $\dot{c}(a) \in D_{c(a)}$ ایجاب کند که $\dot{c}(t) \in D_{c(t)}$ برای هر $t \in [a,b]$.

بنابراین D ژئودزیک ناورداست اگروتنهااگر Z_g مماس به $D \subset TM$ باشد. ملاحظه می‌کنیم که اگر D یک توزیع انتگرال‌پذیر منظم باشد که ناوردای ژئودزیک است آنگاه هر یک از خمینه‌های انتگرال ماکزیمالش بطور کامل ژئودزیک است.

۴.۱. توصیف توزیع‌های ناوردای ژئودزیک. برای مشخص‌سازی توزیع‌های ناوردای ژئودزیک از حاصلضرب متقارن استفاده می‌کنیم که یک ضرب روی $\mathfrak{I}(M)$ است. برای $X, Y \in \mathfrak{I}(M)$

---
[۱] totally geodesic
[۲] geodesically invariant

حاصلضرب متقارنشان را با میدان برداری

$$< X : Y >= \nabla_X Y + \nabla_Y X$$

تعریف می‌کنیم.

میدان برداری X روی M داده شده، می‌توان X را به میدان برداری $\mathrm{vlft}(X)$ روی TM ترفیع داد که بر تارها مماس می‌باشد. میدان برداری $\mathrm{vlft}(X)$ تعریف شده توسط

$$\mathrm{vlft}(X)(v_x) = \frac{d}{dt}|_{t=\circ}(v_x + tX(x))$$

برای $v_x \in T_xM$. اگر (U, ϕ) یک نقشه برای M باشد و $(TU, T\phi)$ نقشه طبیعی مربوطه داده شده برای TM باشد آنگاه $\mathrm{vlft}(X)(u, e) = ((u, e), (\circ, X(u)))$. بوسیله ترفیع عمودی نتیجه زیر را داریم.

لم ۴.۲ گیریم D یک توزیع روی M. میدان برداری X روی M یک مقطع از D است اگروتنهااگر $\mathrm{vlft}(X)$ مماس به توزیع D بعنوان یک زیرخمینه از TM باشد.

فرمول زیر برای ترفیع عمودی از حاصلضرب متقارن مفید می‌باشد.

لم ۴.۳ گیریم X و Y میدان‌های برداری روی M باشند. آنگاه

$$\mathrm{vlft}\left(\langle X : Y\rangle\right) = [\mathrm{vlft}(X), [Z_g, \mathrm{vlft}(Y)]].$$

برهان. نقشه (U, ϕ) برای M بهمراه $(TU, T\phi)$ نقشه طبیعی مربوطه برای TM را استفاده می‌کنیم. محاسبه می‌شود که

$$\begin{aligned}&[\mathrm{vlft}(X), [Z_g, \mathrm{vlft}(Y)]](u, e)\\ &= ((u, e), (\circ, DX(u).Y(u) + DY(u).X(u) + \Gamma(u)(X(u), Y(u)) + \Gamma(u)(Y(u), X(u))))\end{aligned}$$

که بعنوان نمایش ترفیع عمودی از $\langle X : Y\rangle$ می‌شناسیم.

■

نتیجه زیر محک‌هایی برای ناوردای ژئودزیک می‌دهد و معنی هندسی حاصلضرب متقارن را ارائه می‌دهد.

قضیه ۴.۴ گیریم D یک توزیع روی خمینه M بهمراه هموستار آفین ∇ باشد. عبارت‌های زیر معادلند:

(i) D ناوردای ژئودزیک است.

(ii) $\langle X : Y\rangle \in \mathfrak{D}$ برای هر $X, Y \in \mathfrak{D}$.

(iii) $\nabla_X X \in \mathfrak{D}$ برای هر $X \in \mathfrak{D}$.

ملاحظه می‌کنیم که برای توزیع‌های ناوردای ژئودزیک حاصلضرب متقارن نقشی را بازی می‌کند که کروشه لی برای توزیع‌های انتگرال‌پذیر ایفا می‌کند.

برهان. (i) $\Leftarrow$ (ii) ابتدا فرض می‌کنیم که D ناوردای ژئودزیک است. لذا Z_g مماس به $D \subset TM$ است. حال می‌گیریم $X, Y \in \mathfrak{D}$. از لم ۴.۲، $\mathrm{vlft}(X)$ و $\mathrm{vlft}(Y)$ مماس به D هستند. بنابراین $[\mathrm{vlft}(X), [Z_g, \mathrm{vlft}(Y)]]$ همچنین به D مماس است. از لم‌های ۴.۲ و ۴.۳ می‌بینیم که $\langle X : Y\rangle \in \mathfrak{D}$.

آنکه (ii) ایجاب می‌کند (iii) را از تعریف حاصلضرب متقارن نتیجه می‌شود.

(iii) $\Leftarrow$ (i) بطور موضعی کار می‌کنیم. گیریم (U, ϕ) یک نقشه برای M باشد که مقادیرش را در E می‌گیرد و با $(TU, T\phi)$ نقشه طبیعی مربوطه برای TM را نشان می‌دهیم. چون D زیرکلافی از TM است می‌توانیم یک نقشه (TU, ψ) را انتخاب می‌کنیم که خواص بحث شده در لم ۳.۵ را داراست. علامت‌گذاری بکار برده شده در آن برهان را استفاده می‌کنیم. گیریم $f_1 \in F_1$ و میدان برداری روی U' را با $X(u) = (u, B_1(u).f_1)$ تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که X نمایشی از یک میدان برداری است که مقدارش را در D می‌گیرد. داریم

$$\begin{aligned} h\left(\nabla_X X(u)\right) &= h\left(u, DB_i(u)\left(B_1(u).f_1, f_1\right) + \Gamma(u)\left(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1\right)\right) \\ &= \left(u, A_1(u).\left(DB_1(u).f_1, f_1\right) + \Gamma(u)\left(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1\right)\right), \\ &\qquad A_2(u).\left(DB_1(u)\left(B_1(u).f_1, f_1\right) + \Gamma(u)\left(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1\right)\right)) \end{aligned}$$

چون (iii) را فرض می‌کنیم داریم

$$A_2(u).\left(DB_1(u)\left(B_1(u).f_1, f_1\right) + \Gamma(u)\left(B_1(u).f_1, B_1(u)f_1\right)\right) = 0 \tag{۴.۱}$$

برای هر $f_1 \in F_1$. اکنون فشانه ژئودزیک در نقشه (TU, ψ) را محاسبه می‌کنیم. گیریم $(u, e) \in U' \times E$ و گیریم $(u, f_1, f_2) = h(u, e)$. داریم

$$
\begin{aligned}
Dh(u,e).\,(e,\Gamma(u)(e,e)) &= (e, DA_1(u)(e,e) - A_1(u).\Gamma(u)(e,e))\,, \\
&\qquad DA_2(u)(e,e) - A_2(u).\Gamma(u)(e,e)) \\
&= (B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2, \\
&\qquad DA_1(u)\,(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2, B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2) - \\
&\qquad A_1(u).\Gamma(u)\,(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2, B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2)\,, \\
&\qquad DA_2(u)\,(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2, B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2) - \\
&\qquad A_2(u).\Gamma(u)\,(B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2, B_1(u).f_1 + B_2(u).f_2))
\end{aligned}
$$

اگر این را به D محدود کنیم با قرار دادن $f_2 = 0$ بدست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
T\psi\,(Z_g|D) = (B_1(u).f_1, & \\
& DA_1(u)\,(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1) - A_1(u).\Gamma(u)\,(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1)\,, \\
& DA_2(u)\,(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1) - A_2(u).\Gamma(u)\,(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1))
\end{aligned}
\tag{۴.۲}
$$

ملاحظه می‌کنیم که با تعریف A_2 و B_1 داریم $A_2(u)(B_1(u).f_1) = 0$ برای هر $f_1 \in F_1$. اگر این را در جهت $B_1(u).f_1$ مشتق بگیریم، بدست می‌آوریم

$$DA_2(u)\,(B_1(u).f_1, B_1(u).f_1) + A_2(u).\,(DB_1(u)(B_1(u).f_1, f_1)) = 0$$

با ترکیب این رابطه با (۴.۱) می‌بینیم که آخرین مؤلفه (۴.۲) صفر می‌شود و لذا این نشان می‌دهد که $Z_g|D$ مماس به D است. پس D ناوردای ژئودزیک است.

■

ملاحظه می‌کنیم اگر ∇ به D تحدید شود آنگاه D با (iii) از قضیه ناوردای ژئودزیک است. برعکس لزوماً درست نیست.

۴.۲. ژئودزیک ناوردایی و هموستارهای آفین تحدید شده. دیده‌ایم که مفهوم ژئودزیک ناوردایی از یک توزیع قوی‌تر از تحدید یک هموستار آفین به یک توزیع است. در این بخش شرایطی ارائه می‌شود که توزیع ناوردای ژئودزیک همچنین این خاصیت را دارد که هموستار آفین به توزیع تحدید

می‌شود.

گیریم D یک توزیع روی M باشد و M روی فضای باناخ E مدل‌پذیر باشد. می‌گوییم که $p \in L_x(M)$، D—تعدیل است اگر موجود باشد یک شکافتنی $E = E_۱ \oplus E_۲$ طوری‌که $p|E_۱$ یک یکریختی پوشا به D_x باشد. اگر شکافتنی $E = E_۱ \oplus E_۲$ را تثبیت کنیم با $L(M, D)$ گردایه تخصیص داده شده از کنج‌های خطی D—تعدیل را نشان می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که $L(M, D)$ ناورداست تحت عمل زیرگروه $GL(E; E_۱)$ از $GL(E)$ که از یکریختی‌هایی که $E_۱$ را ناوردا می‌گذارند تشکیل می‌شود. یک عنصر نوعی از $GL(E; E_۱)$ به شکل

$$\begin{pmatrix} a & c \\ ۰ & b \end{pmatrix}$$

می‌باشد که $a \in GL(E_۱)$، $b \in GL(E_۲)$ و $c \in L(E_۲, E_۱)$. اگر D' یک توزیع متمم به D باشد می‌گوییم که $p \in L_x(M)$، (D, D')—تعدیل است اگر موجود باشد یک شکافتنی $E = E_۱ \oplus E_۲$ و $p|E_۱$ یک یکریختی پوشا به D_x و $p|E_۲$ یک یکریختی پوشا به D'_x باشد. مثال بالا، شکافتنی $E = E_۱ \oplus E_۲$ را تثبیت می‌کنیم و با $L(M, D, D')$، مجموعه کنج‌های خطی (D, D')—تعدیل را نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که $L(M, D, D')$ ناورداست تحت عملِ $GL(E_۱) \times GL(E_۲)$ که بعنوان زیرگروه قطری از $GL(E)$ در نظر می‌گیریم. در اصطلاح عمومی، $L(M, D)$ و $L(M, D, D')$ زیرکلاف‌هایی از $L(M)$ هستند. خواننده را به بخش II.۶ از [۸] برای ..... از زیرکلاف‌های، کلاف‌های اصلی ارجاع می‌دهیم. می‌گوییم که یک هموستار خطی روی $L(M)$ به $L(M, D)$ تحدید می‌شود اگر زیرفضاهای افقی‌اش مماس بر $L(M, D)$ باشند.

گزاره ۴.۶ گیریم D یک توزیع روی خمینه M بهمراه هموستار آفین ∇ باشد و با $H(L(M))$ هموستار خطی تخصیص داده شده را نشان می‌دهیم. اگر $H(L(M))$ به $L(M, D)$ تحدید شود آنگاه ∇ به D تحدید می‌شود.

برهان. گیریم $E = E_۱ \oplus E_۲$ شکافتن تخصیص داده شده به ساختار $L(M, D)$ باشد. ملاحظه می‌کنیم که تابع

$$\phi_{_Y} : L(M) \to E$$

$$p \mapsto \theta(\mathrm{hlft_p(Y)}) = \mathrm{p^{-1}(Y(\pi(p)))}$$

وقتی به $L(M,D)$ تحدید می‌شود مقادیرش را در E_1 می‌گیرد اگر $Y \in \mathfrak{D}$. اگر $H(L(M))$ به $L(M,D)$ تحدید شود آنگاه $(\mathrm{hlft}X(\phi_Y))(p) \in E_1$ و لذا ∇ از (۲.۱) به D تحدید می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم که ∇ به D تحدید می‌شود. کافی است نشان دهیم که هر میدان برداری افقی استاندارد $\sum(e)$، مماس بر $L(M,D)$ است. لذا گیریم $e \in E$ و $p \in L(M,D)$ و با $\sigma : [0,T] \to L(M)$ منحنی انتگرال از $\sum(e)$ بهمراه $\sigma(0) = p$ را نشان می‌دهیم. گیریم $t \in [0,T]$ و $v \in D_{c(t)}$. با انتقال موازی v به عقب در طول c به $x = c(0)$ بدست می‌آوریم $u \in T_xM$. چون ∇ به D تحدید می‌شود، $u \in D_x$. حال می‌گیریم $e' = p^{-1}u$. چون $p \in L(M,D)$، $e' \in E_1$. بعلاوه، چون $\sigma(t)e' = v$ و چون $v \in D_{c(t)}$، $\sigma(t)$ باید در $L(M,D)$ قرار گیرد. بنابراین $\sum(e)$ مماس بر $L(M,D)$ است و این برهان را کامل می‌کند.

■

حال نتیجه اصلی در این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۷ گیریم M یک خمینه مدل شده روی یک فضای باناخ E باشد و گیریم D یک توزیع روی M با متمم D' باشد و ∇ یک هموستار آفین روی M باشد. با $H(L(M))$ هموستار خطی تخصیص داده شده به ∇ را نشان می‌دهیم و گیریم ω فرم هموستار باشد. عبارت‌های زیر معادلند:

(i) $H(L(M))$ به $L(M,D,D')$ تحدید می‌شود.

(ii) هر دو D و D' ناوردای ژئودزیک هستند.

(iii) یک شکافتنی $E = E_1 \oplus E_2$ وجود دارد طوری که اگر ω به $L(M,D,D')$ تحدید شود، مقادیرش را در $gl(E_1) \oplus gl(E_2)$ می‌گیرد.

برهان. در برهان گیریم $E = E_1 \oplus E_2$ شکافتنی باشد که اگر $p \in L_x(M,D,D')$ آنگاه $p|E_1$ یک یکریختی پوشا به D_x و $p|E_2$ یک یکریختی به D'_x باشد.

(i) $\Rightarrow$ (ii) اگر $H_p(L(M)) \subset T_p(L(M,D,D'))$ آنگاه $L(M,D,D')$ باید تحت شار هر میدان بردار

افقی ناوردا باشد. گیریم $v \in D_x$ و $p \in L_x(M,D,D')$. لذا می‌بینیم که $e = p^{-1}v \in E_1$. گیریم $\sigma : [0,T] \to L(M)$ منحنی انتگرال از $\sum(e)$ با شرط اولیه p و گیریم $c = \pi \circ \sigma$ ژئودزیک تخصیص داده شده باشد. چون $\sum(e)$ افقی است، $\sigma(t) \in L(M,D,D')$ برای $t \in [0,T]$. از تعریف $\sum(e)$، $c(t) = \sigma(t)e$. بنابراین $\dot{c}(t) \in D_{c(t)}$ و لذا D ناوردای ژئودزیک است. یک بحث مشابه نشان می‌دهد که D' ناوردای ژئودزیک است.

(i) $\Rightarrow$ (ii) نشان می‌دهیم که هر میدان برداری افقی استاندارد، $L(M,D,D')$ را ناوردا باقی می‌گذارد و این کفایت می‌کند که $H_p(L(M)) \subset T_p(L(m,D,D'))$. گیریم $e \in E_1$ و $\sum(e)$ میدان برداری افقی استاندارد تخصیص داده شده باشد. گیریم $p \in L_x(M,D,D')$ و نشان می‌دهیم $v = pe \in D_x$. قرار می‌دهیم $c : [0,T] \to M$ ژئودزیک با سرعت اولیه v و σ ترفیع افقی c از p باشد که بنابراین منحنی انتگرال $\sum(e)$ از p است. چون D ناوردای ژئودزیک است، $\dot{c}(t) \in D_{c(t)}$ برای هر $t \in [0,T]$. بنابراین $\sigma(t)e \in D_{c(t)}$ چون $\sum(e)$ یک میدان برداری افقی استاندارد است. پس $\sigma(t) \in L_{c(t)}(M,D,D')$ و لذا $L(M,D,D')$ تحت شار $\sum(e)$ ناورداست. یک بحث مشابه برای $e \in E_2$ با استفاده از ژئودزیک ناوردایی D' نتیجه مطلوب را می‌دهد.

(iii) $\Rightarrow$ (i) گزاره ۶.۱ در فصل ۲ از [۸] بیان می‌کند که فرم هموستار تحدید شده به یک زیرکلاف، مقادیرش را در جبر لی از گروه ساختاری تحویل شده [۱] می‌گیرد. این دقیقاً هست آنچه که بیان کرده‌ایم اینجا در حالت خاصی که بررسی می‌کنیم.

(i) $\Rightarrow$ (iii) از گزاره ۶.۴ فصل ۲ در [۸] کافی است مشخص کنیم یک زیرفضا از $gl(E)$ که متمم به $gl(E_1) \oplus gl(E_2)$ هست و تحت عمل الحاقی $GL(E_1) \times GL(E_2)$ ناورداست. ادعا می‌کنیم که زیرفضا $\mathfrak{m}$ تولید شده با درون‌ریختی‌هایی از شکل

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

برای $A \in L(E_2, E_1)$ و $B \in L(E_1, E_2)$ محک را برآورده می‌کند. بوضوح

$$gl(E) = gl(E_1) \oplus gl(E_2) \oplus \mathfrak{m}.$$

[۱] reduced structure group

همچنین اگر

$$a \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in GL(E_1) \times GL(E_2)$$

آنگاه محاسبه می‌کنیم

$$Ad_a(C) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 A a_2^{-1} \\ a_2 B a_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}$$

■

تبصره ۴.۸ بویژه ملاحظه می‌کنیم که یک شرط کافی برای ∇ به توزیع ناوردای ژئودزیک D تحدید شود، وجود یک متمم ناوردای ژئودزیک به D است. این شرط لازم نیست.

۵. تحدید هموستارهای آفین به توزیع‌ها

۵.۱. انگیزش از مکانیک. ساختار پایه‌ای که در این بخش انجام می‌شود از دینامیک یک دسته از سیستم‌های مکانیکی با قیدهای غیر هولونومیک می‌آید. گیریم (M, g) خمینه ریمانی بهمراه ∇ هموستار لوی—چویتا باشد. بعلاوه D یک توزیع (منظم) روی M باشد. هدف، مشخص کردن ژئودزیک‌های هموستار ∇ است که در معرض قیدی هستند که بردارهای مماسشان در D واقع‌اند. اصل ...[1] بیان می‌کند که حل‌های مقید منحنی‌های c هستند که ایفا می‌کنند

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)\, D^{\perp}_{c(t)} \quad , \quad \dot{c}(t) \in D_{c(t)}$$

جایی که $D^{\perp}$ متمم g—متعامد به D است. معادلاً، یک مقطع λ از $D^{\perp}$ در طول c وجود دارد طوری که

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = \lambda(t) \qquad (5.1a)$$

$$P'(\dot{c}(t)) = 0 \qquad (5.1b)$$

که $P' : TM \to TM$ افکنش متعامد پوشا به $D^{\perp}$ است. با مشتق‌گیری از معادله مقید $(5.1.b)$ بدست می‌آوریم

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \left(P'(\dot{c}(t))\right) = \left(\nabla_{\dot{c}(t)} P'\right)\left(\dot{c}(t)\right) + P'\left(\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)\right) = 0$$

[1] lagrange d' Alembert

با اعمال P' به معادلات حرکت ($۵.۱a$) بدست می‌آوریم

$$P'\left(\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)\right) = \lambda(t)$$

چون $\lambda(t) \in D^{\perp}_{c(t)}$. با ترکیب این دو معادله می‌بینیم که c باید یک ژئودزیک از هموستار آفین $\overline{\nabla}$ باشد که تعریف شده توسط

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \left(\nabla_X P'\right)(Y)$$

برعکس، اگر $c : [a, b] \to M$ یک ژئودزیک برای $\overline{\nabla}$ با $\dot{c}(t) \in D_{c(a)}$ آنگاه c در (۵.۱) صدق می‌کند.

بقیه این بخش را به تعمیم این ساختار و فهمیدن خواص هموستار آفین جدید ∇ اختصاص می‌دهیم.

۵.۲. تعمیم فرم اساسی دوم. فرم اساسی دوم برای زیرخمینه‌ها وقتی رخ می‌دهد که هموستار آفین داده شده‌ای تحدید می‌شود. برای تحدید یک هموستار آفین به یک توزیع راهی را مشخص خواهیم کرد و در این فرآیند بنابراین، فرم اساسی دوم را معین می‌کنیم.

یک توزیع D روی M تثبیت می‌کنیم. بیاد آوریم که وقتی فرم اساسی دوم در هندسه زیرخمینه ریمانی محاسبه می‌شود، از متریک ریمانی برای معین کردن جهت‌های عمود استفاده می‌شود. فرم اساسی دوم برای زیرخمینه‌ها در وضعی که هموستار آفین، هموستار لوی—چویتا نیست بگونه‌ای دیگر است. در چنین حالاتی، ساختار به انتخاب فضای عمود وابسته است. بنابراین یک متمم D' به D را تثبیت می‌کنیم. اجازه دهید با $P : TM \to TM$، افکنش پوشا به D و با $P' : TM \to TM$ افکنش پوشا به D' را نشان دهیم. همچنین به P و P' بعنوان $(۱, ۱)$ میدان‌های تانسوری روی M فکر می‌کنیم. فرض می‌کنیم M به هموستار آفین ∇ مجهز باشد که لازم نیست لوی—چویتا باشد. لذا تعریف می‌کنیم یک هموستار آفین جدید $\overline{\nabla}$ روی M با

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \left(\nabla_X P'\right)(Y)$$

که این براستی یک هموستار آفین است زیرا $(X, Y) \to \left(\nabla_X P'\right)(Y)$، $C^{\infty}(M)$—دوخطی است.

برخی خواص مهم از $\overline{\nabla}$ را داریم.

گزاره ۵.۱

(i) $\overline{\nabla}_X Y \in \overline{\mathfrak{D}}$ برای هر $X \in \mathfrak{I}(M)$ و $Y \in \mathfrak{D}$.

(ii) $(\nabla_X P')(Y) \in \mathfrak{D}'$ برای $X \in \mathfrak{I}(M)$ و $Y \in \mathfrak{D}$.

(iii) $(\nabla_X P')(Y) \in \mathfrak{D}$ برای $X \in \mathfrak{I}(M)$ و $Y \in \mathfrak{D}'$.

برهان. (i) گیریم X و Y میدان‌های برداری روی M باشند. آنگاه

$$P'\left(\overline{\nabla}_X Y\right) = P'\left(\nabla_X Y\right) + P'\left(\nabla_X P'\right)(Y) \tag{۵.۲}$$

اگر $Y \in \mathfrak{D}$ آنگاه

$$\begin{aligned} &P'(Y) = \circ \\ &\Rightarrow \left(\nabla_X P'\right)(Y) + P'\left(\nabla_X Y\right) = \circ && (۵.۳) \\ &\Rightarrow P'\left(\nabla_X P'\right)(Y) + P'\left(\nabla_X Y\right) = \circ && (۵.۴) \end{aligned}$$

چون $P' \circ P' = P'$. با جایگزینی (۵.۴) در (۵.۲) می‌بینیم که $P'\left(\overline{\nabla}_X Y\right) = \circ$ برای $X \in \mathfrak{I}(M)$ و $Y \in \mathfrak{D}$. بنابراین، $\overline{\nabla}_X Y \in \mathfrak{D}$.

(ii) گیریم $Y \in \mathfrak{D}$. از (۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_X P'\right)(Y) + P'\left(\nabla_X Y\right) = \circ \\ &\Rightarrow P\left(\nabla_X P'\right)(Y) = \circ \end{aligned}$$

چون $P' \circ P' = P'$. لذا $\left(\nabla_X P'\right)(Y) \in \mathfrak{D}'$ برای $Y \in \mathfrak{D}$.

(iii) گیریم $Y \in \mathfrak{D}'$. پس

$$\begin{aligned} &P'(Y) = Y \\ &\Rightarrow \left(\nabla_X P'\right)(Y) + P'\left(\nabla_X Y\right) = \nabla_X Y \\ &\Rightarrow P'\left(\nabla_X P'\right)(Y) + P'\left(\nabla_X Y\right) = P'\left(\nabla_X Y\right) \\ &\Rightarrow P'\left(\nabla_X P'\right)(Y) = \circ \end{aligned}$$

اینجا از حقیقت آنکه $P' \circ P' = P'$ استفاده کرده‌ایم. این نشان می دهد که $(\nabla_X P')(Y) \in \mathfrak{D}$ اگر $Y \in \mathfrak{D}'$.

■

ملاحظه می‌کنیم که (i) ایجاب می‌کند $\overline{\nabla}$ به D تحدید می‌شود. بویژه می‌بینیم که D ناوردای ژئودزیک نسبت به $\overline{\nabla}$ با قضیه ۴.۴، قسمت (iii) است. در زیر خواهیم دید که خواص (i) و (ii) جذابترند.

گزاره بالا، یک نتیجه مهم دارد. برای $Y \in \mathfrak{D}$ ملاحظه می‌کنیم که عبارت $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_X P')(Y)$ بطور ساده تجزیه $\nabla_X Y$ به مؤلفه‌های D و D'اش می‌باشد. مؤلفه D را می‌توان بعنوان تحدید ∇ به D در نظر گرفت. بدنبال آنچه در حالت زیرخمینه انجام می‌شود، باقی‌مانده (یعنی مؤلفه D') باید فرم اساسی دوم باشد. تعریف زیر را می‌سازیم.

تعریف ۵.۲ گیریم D یک توزیع روی خمینه M بهمراه هموستار آفین ∇ و D' توزیع متمم به D باشد، مقطع S از $L^2(D, D')$ تعریف شده توسط

$$S(u,v) = -(\nabla_u P')(v)$$

فرم اساسی دوم برای (∇, D, D') است.

این تعریف به انتخاب متمم D' به D وابسته است لذا این باید در تعریف فرم اساسی دوم گنجانده شود. در دنباله پیدا می‌کنیم که راحت است یک علامت‌گذاری برای جمله $(\nabla_X P')(Y)$ وقتی X و Y مقاطعی از D نیستند، داشته باشیم. لذا تعریف می‌کنیم $(1,2)$ تانسور

$$Q : (X,Y) \mapsto (\nabla_X P')(Y)$$

نتیجه بعدی، یک نتیجه کلاسیک از هندسه زیرخمینه را تعمیم می‌دهد.

نتیجه ۵.۳ D ناوردای ژئودزیک تحت ∇ است اگروتنهااگر S پادمتقارن باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که D ناوردای ژئودزیک است و $X, Y \in \mathfrak{D}$. می‌نویسیم

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = \overline{\nabla}_X Y + S(X,Y) + \overline{\nabla}_Y X + S(Y,X)$$

از قضیه ۴.۴، قسمت (ii) $\nabla_X Y + \nabla_Y X \in \mathfrak{D}$. از گزاره ۵.۱، قسمت (i) و (ii)، بترتیب،

$$\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Y X \in \mathfrak{D} \quad , \quad S(X,Y), S(Y,X) \in \mathfrak{D}'$$

بنابراین $S(X,Y) + S(Y,X) = 0$ برای هر $X, Y \in \mathfrak{D}$. حال فرض کنیم S پادمتقارن باشد. برای $X \in \mathfrak{D}$، لذا داریم

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + S(X,Y) = \overline{\nabla}_X X$$

از قضیه ۵.۱، قسمت (i) داریم $\nabla_X X \in \mathfrak{D}$. این با قضیه ۴.۴، قسمت (iii) ایجاب می‌کند که $\mathfrak{D}$ ناوردای ژئودزیک است.

■

تبصره ۵.۴ ۱. بویژه ملاحظه می‌کنیم که اگر $S = 0$ آنگاه D ناوردای ژئودزیک است. معکوس این عموماً درست نیست. نیاز است به اضافه کردن فرض‌هایی که D انتگرال‌پذیر است و ∇ بی‌تاب است. در زیر خواهیم دید چگونه این در حالت لوی—چویتا کار می‌کند (ارجاع نتیجه ۵.٦).

۲. مفهوم ناوردای ژئودزیک بودن D به انتخاب متمم D' مربوط نیست. بهرحال، فرم اساسی دوم که تعریف کرده‌ایم به D' بستگی دارد. نتیجه بالا می‌توان بنابراین تعبیر شود به گفتن آنکه D ناوردای ژئودزیک است اگروتنهااگر S پادمتقارن باشد برای هر انتخاب متمم D'.

سپس نشان می‌دهیم که $\overline{\nabla}$ در حقیقت تعمیم می‌دهد آنچه معمولاً در حالت لوی—چویتا انجام می‌شود وقتی هموستار به یک زیرخمینه تحدید می‌شود. چون تعاریف فقطبرای توزیع‌ها بامعنی است، ساختار کلاسیک را با کار کردن با توزیع‌های منظم انتگرال‌پذیر بیشتر از زیرخمینه‌ها توسعه می‌دهیم. در این حالت، D' را $D^\perp$، متمم متعامد از D، انتخاب می‌کنیم. لذا S مقادیرش را در $D^\perp$ می‌گیرد.

گزاره ۵.۵ فرض کنیم D انتگرال‌پذیر و Λ یک زیرخمینه انتگرال ماکزیمال باشد که فرض می‌کنیم یک زیرخمینه نشانده شده از M باشد. با g_Λ متریک ریمانی روی Λ القاء شده توسط g و با $\overset{\Lambda}{\nabla}$ هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده روی Λ را نشان می‌دهیم. آنگاه $\overline{\nabla}_X Y = \overset{\Lambda}{\nabla}_X Y$ برای $X, Y \in \mathfrak{I}(\Lambda)$.

برهان. در برهان، وقتی میدان‌های برداری روی Λ را می‌نویسیم، فرض می‌کنیم آنها به M گسترش می‌یابند اگر لازم باشد. می‌توان نشان داد که نتایج به نوع گسترش وابسته نیست.

باید نشان دهیم که $\overline{\nabla}$ تحدید شده به $\mathfrak{I}(\Lambda)$، بی‌تاب است و متر g_{Λ} را حفظ می‌کند. در ابتدا نشان می‌دهیم که $\overline{\nabla}$ بی‌تاب است. گیریم $X, Y \in \mathfrak{I}(\Lambda)$. داریم

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = \nabla_X X - \nabla_Y X - S(X,Y) + S(Y,X)$$

با گزاره ۵.۱، قسمت (ii) می‌بینیم که $S(X,Y)$ و $S(Y,X)$ بر Λ عمود هستند و با گزاره ۵.۱، قسمت (i) می‌بینیم که $\overline{\nabla}_X Y, \overline{\nabla}_Y X \in \mathfrak{I}(\Lambda)$. همچنین، چون ∇ بدون تاب است و D انتگرال‌پذیر است،

$$\nabla_X X - \nabla_Y X = [X,Y] \in \mathfrak{I}(\Lambda)$$

لذا بدست می آوریم

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y] \quad , \quad S(X,Y) = S(Y,X)$$

بویژه نشان می‌دهد $\overline{\nabla}$ بدون تاب است.

اکنون نشان می‌دهیم $\overline{\nabla}$، g_{Λ} را حفظ می‌کند. گیریم $X, Y, Z \in \mathfrak{I}(\Lambda)$. چون ∇ هموستار لوی—چویتا است،

$$\mathfrak{L}_X \left(g(Y,Z)\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$

حال داریم

$$g\left(\nabla_X Y, Z\right) = g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(S(X,Y), Z\right) = g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right)$$

چون $S(X,Y)$ عمود بر Λ است. بطور مشابه نشان داده می‌شود که

$$g\left(Y, \nabla_X Z\right) = g\left(Y, \overline{\nabla}_X Z\right)$$

بنابراین

$$\mathfrak{L}_X \left(g(Y,Z)\right) = g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(Y, \overline{\nabla}_X Z\right)$$

■

در برهان گزاره، همچنین نتیجه زیر بدست آمده است.

نتیجه ۵.۶ با فرض‌های گزاره ۵.۵، داریم $S(X,Y)=S(Y,X)$ برای $X,Y\in\mathfrak{I}(\Lambda)$.

در هندسه ریمانی این یک بیان کلاسیک است که فرم اساسی دوم متقارن است.

۵.۳. تبدیلات آفین برای $\overline{\nabla}$. اکنون تبدیلات آفین معینی از $\overline{\nabla}$ را بررسی می‌کنیم. علاقه‌مند هستیم چه وقتی یک تبدیل آفین برای ∇، یک $D-$تبدیل آفین برای $\overline{\nabla}$ است.

گزاره ۵.۷ گیریم یک تبدیل آفین برای ∇ باشد که با (D,D') سازگار است و گیریم X تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای ∇ باشد که با (D,D') سازگار است. آنگاه

(i) ϕ یک $D-$تبدیل آفین برای $\overline{\nabla}$ است.

(ii) X یک $D-$تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای $\overline{\nabla}$ است.

برهان. (i) گیریم $Y\in\mathfrak{D}$. داریم

$$\begin{aligned}\phi^*\left(\overline{\nabla}_XY\right)&=\phi^*\left(\nabla_XY+Q(X,Y)\right)\\&=\nabla_{\phi^*X}\phi^*Y+\phi^*\left(Q(X,Y)\right)\qquad(۵.۶)\end{aligned}$$

چون ϕ یک تبدیل آفین برای ∇ است. با گزاره ۵.۱، قسمت (i) و چون ϕ با D سازگار است داریم $\phi^*\left(\overline{\nabla}_XY\right)\in\mathfrak{D}$. با گزاره ۵.۱، قسمت (ii) و چون ϕ با D' سازگار است داریم $\phi^*(Q(X,Y))\in\mathfrak{D}'$. بنابراین (۵.۶) بطور ساده تجزیه $\nabla_{\phi^*X}\phi^*Y$ به مؤلفه‌های D و D'اش است. بنابراین از گزاره ۵.۱، باید داشته باشیم

$$\phi^*\left(\overline{\nabla}_XY\right)=\overline{\nabla}_{\phi^*X}\phi^*Y\qquad,\qquad\phi^*\left(Q(X,Y)\right)=Q\left(\phi^*X,\phi^*Y\right)$$

بویژه، ϕ یک $D-$تبدیل آفین برای $\overline{\nabla}$، از گزاره ۳.۸، قسمت (iii) است.

(ii) گیریم $\overline{B}_X$، $(۱,۲)$ میدان تانسوری تخصیص داده شده به $\overline{\nabla}$ باشد (ارجاع معادله (۲.۳)). محاسبه

می‌کنیم

$$\overline{B}_X(Y,Z) = [X, \nabla_Y Z] + [X, Q(Y,Z)] - \nabla_Y [X,Z] - Q(Y,[X,Z]) - \nabla_{[X,Y]} Z - Q([X,Y],Z).$$

اگر X یک تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک برای ∇ باشد آنگاه

$$[X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X,Z] - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$$

بنابراین

$$\overline{B}_X(Y,Z) = [X, Q(Y,Z)] - Q(Y,[X,Z]) - Q([X,Y],Z)$$

اکنون فرض کنیم $Y, Z \in \mathfrak{D}$. از گزاره ۵.۱، قسمت (ii) $Q(Y,Z) \in \mathfrak{D}'$ و چون X با D' سازگار است، $[X, Q(Y,Z)] \in \mathfrak{D}'$. بحث‌های مشابه با استفاده از گزاره ۵.۱، قسمت (ii) و حقیقتی که X با D سازگار است نشان می‌دهد که

$$Q(Y,[X,Z]), Q([X,Y],Z) \in \mathfrak{D}'$$

بنابراین $\overline{B}_X(Y,Z) \in \mathfrak{D}'$. بهرحال، از لم ۳.۶، می‌دانیم که $\overline{B}_X(Y,Z) \in \mathfrak{D}$. بنابراین $\overline{B}_X(Y,Z) = 0$ و لذا X یک $D-$تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک، از گزاره ۳.۸، قسمت (vi) است.

■

با $\mathrm{Aff}_0(\overline{\nabla})$ مجموعه $D-$تبدیلات آفین از $\overline{\nabla}$ بدست آمده در گزاره ۵.۷، قسمت (i) و با $\mathrm{aff}_0(\overline{\nabla})$ مجموعه $D-$تبدیلات آفین بی‌نهایت کوچک از $\overline{\nabla}$ بدست آمده در گزاره ۵.۷، قسمت (ii) را نشان می‌دهیم. نتیجه زیر، $\mathrm{Aff}_0(\overline{\nabla})$ را در مکانش نسبت به $\mathrm{Aff}(\nabla)$ و $\mathrm{Aff}(\overline{\nabla})$ و $\mathrm{Aff}(\overline{\nabla}|\mathrm{D})$ قرار می‌دهد (و بطور مشابه برای $\mathrm{aff}_0(\overline{\nabla})$).

گزاره ۵.۸

(i) $\mathrm{Aff}_0(\overline{\nabla})$ یک زیرگروه از $\mathrm{Aff}(\nabla)$ و $\mathrm{Aff}(\overline{\nabla})$ و $\mathrm{Aff}_0(\overline{\nabla}|\mathrm{D})$ است.

(ii) $\mathrm{aff}_0(\overline{\nabla})$ یک زیرجبر لی از $\mathrm{aff}(\nabla)$ و $\mathrm{aff}(\overline{\nabla})$ و $\mathrm{aff}_0(\overline{\nabla}|\mathrm{D})$ است.

برهان. آنکه $\mathrm{Aff}_0(\overline{\nabla})$ یک زیرگروه از $\mathrm{Diff(M)}$ (بترتیب $\mathrm{aff}_0(\overline{\nabla})$ یک زیرجبر از $\Im(M)$) است از حقیقت آنکه دیفیومورفیسم‌های سازگار با D، یک زیرگروه از $\mathrm{Diff(M)}$ (بترتیب یک زیرجبر لی از $\Im(M)$) هستند که در برهان گزاره ۳.۹ نشان داده شد. گزاره اکنون بدست می آید چون شمول‌ها بعنوان مجموعه‌ها واضح هستند.

■

۵.۴. قوانین بقاء برای ژئودزیک‌های لوی—چویتا تحدید شده. در این بخش نتایج بخش ۵.۳ را بررسی می‌کنیم وقتی که ∇ هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده به متریک ریمانی g روی M باشد. در ابتدا قوانین بقاء برای سیستم تحدید شده را نگاه می‌کنیم. قادر هستیم به دادن شرایطی که تحت آن یک کمیت پایدار برای سیستم غیر تحدید شده، برای سیستم تحدید شده پافشاری کند. سپس معادله تکانه را توصیف می‌کنیم.

مگر اینکه بیان شود والا، در این بخش ∇ هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده به متر ریمانی g خواهد بود.

کمیت‌های پایدار. به‌واسطه لم ۳.۱۰، نتایج گزاره ۵.۷ همیشه در این حالت اعمال می‌شوند. یعنی، هر تبدیل (بترتیب آفین بی‌نهایت کوچک) آفین از ∇ که با D سازگار است، یک D—تبدیل (بترتیب آفین بی‌نهایت کوچک) آفین از $\overline{\nabla}$ است. بهرحال، در حالتی که M متریک ریمانی دارد، تبدیل‌های آفین بی‌نهایت کوچک از هموستار لوی—چویتا منجر به کمیت‌های پایدار برای شار ژئودزیک می‌شوند.

گزاره ۵.۹ گیریم ∇ هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده به متریک ریمانی g روی M باشد و X یک میدان برداری روی M باشد. آنگاه X یک ایزومتری بی‌نهایت کوچک تخصیص داده شده به g است اگروتنهااگر تابع

$$J_X(v_x) = g\left(X(x), v_x\right)$$

روی TM در طول منحنی‌های انتگرال فشانه ژئودزیک ثابت باشد. J_X را تکانه تخصیص داده شده به

X می‌نامیم.

برهان. گیریم c ژئودزیکی از ∇ باشد. محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_X\left(\dot{c}(t)\right) &= \left(\nabla_{\dot{c}(t)}g\right)\left(X\left(c(t)\right),\dot{c}(t)\right)+g\left(\nabla_{\dot{c}(t)}X\left(c(t)\right),\dot{c}(t)\right)+g\left(X(c(t)),\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)\right)\\ &= g\left(\nabla_{\dot{c}(t)}X\left(c(t)\right),\dot{c}(t)\right).\end{aligned}$$

بنابراین، J_X در طول هر ژئودزیک ثابت است اگروتنهااگر

$$g\left(\nabla_{\dot{c}(t)}X\left(c(t)\right),\dot{c}(t)\right)=0$$

برای هر ژئودزیک c از ∇. گزاره اکنون از لم ۲.۱، قسمت (iii) نتیجه می‌شود.

■

ملاحظه می‌کنیم که می‌توانیم برای هر میدان برداری Y تکانه را با $J_Y(v_x)=g(Y(x),v_x)$ تعریف کنیم. بهرحال، تنها تکانه تخصیص داده شده به میدان‌های برداری کیلینگ منجر کمیت‌های پایدار می‌شوند.

ممکن است به تعیین شرایطی که تحت آن یک ایزومتری بی‌نهایت کوچک برای g منجر به یک کمیت پایدار در طول ژئودزیک‌های $\overline{\nabla}$ شود که سرعت‌های اولیه در D واقع‌اند. در ابتدا دو لم محاسباتی را بیان می‌کنیم.

لم ۵.۱۰ گیریم X، Y و Z میدان‌های برداری روی M باشند. آنگاه

$$\left(\overline{\nabla}_X g\right)(Y,Z)=-g\left(Q(X,Y),Z\right)-g\left(Y,Q(X,Z)\right).$$

برهان. محاسبه می‌کنیم

$$\mathfrak{L}_X\left(g(Y,Z)\right)=\left(\nabla_X g\right)(Y,Z)+g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right) \tag{۵.۷}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_X\left(g(Y,Z)\right) &= \left(\overline{\nabla}_X g\right)(Y,Z)+g\left(\overline{\nabla}_X Y,Z\right)+g\left(Y,\overline{\nabla}_X Z\right)\\ &= \left(\overline{\nabla}_X g\right)(Y,Z)+g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right)+\\ &\qquad g\left(Q(X,Y),Z\right)+g\left(Y,Q(X,Z)\right)\end{aligned} \tag{۵.۸}$$

با کم کردن (۵.۷) از (۵.۸) و استفاده از حقیقت آنکه $(\nabla_X g) = 0$ ، نتیجه مطلوب بدست می آید.

■

لم ۵.۱۱ گیریم X یک تبدیل بی‌نهایت کوچک برای ∇ باشد. آنگاه

$$\frac{d}{dt}J_X\left(\dot{c}(t)\right) = g\left(X(c(t)), S\left(\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right)\right)$$

برای هر ژئودزیک c از $\overline{\nabla}$ که سرعت اولیه در D واقع می‌شود.

برهان. گیریم c یک ژئودزیک از $\overline{\nabla}$ باشد که سرعت اولیه در D واقع است. محاسبه می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}J_X\left(\dot{c}(t)\right) = \left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} g\right)\left(X\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} X\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(X(c(t)), \overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)\right)$$

$$= \left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} g\right)\left(X\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(\nabla_{\dot{c}(t)} X\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(Q\left(\dot{c}(t), X\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right)$$

$$= \left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} g\right)\left(X\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(Q\left(\dot{c}(t), X\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right)$$

$$= g\left(Q\left(\dot{c}(t), X\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right) - g\left(Q\left(\dot{c}(t), X\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right) - g\left(X\left(c(t)\right), Q\left(\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right)\right)$$

$$= -g\left(X\left(c(t)\right), Q\left(\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right)\right).$$

اینجا از حقیقت اینکه X یک تبدیل آفین بی‌نهایت کوچک از ∇، c یک ژئودزیک از $\overline{\nabla}$ و لم ۵.۱۰ استفاده کرده‌ایم. چون $Q|D = -S$ لم نتیجه می‌شود.

■

بعنوان یک نتیجه از این محاسبات، گزاره زیررا داریم.

لم ۵.۱۲ گیریم X یک تبدیل بی‌نهایت کوچک برای ∇ باشد و فرض کنیم $X \in \mathfrak{D}$. آنگاه J_X در طول ژئودزیک‌های $\overline{\nabla}$ ثابت است که سرعت‌های اولیه در D واقع است.

برهان. با اعمال گزاره ۵.۱، قسمت (ii) و لم ۵.۱۱، حکم ثابت می‌شود.

■

معادله تکانه. اکنون معادله تکانه را ارائه می‌دهیم. معادله تکانه فرض می‌شود بعنوان توصیف کننده تغییر تکانه از یک سیستم نامحدود وقتی به یک توزیع D تحدید می‌شود. نتیجه زیر این را دقیق می‌سازد.

گزاره ۵.۱۳ گیریم $X_1, \dots, X_m$ میدان‌های برداری کیلینگ برای g باشند. فرض کنیم توابع $\gamma^1, \dots, \gamma^m$ روی M وجود دارد طوری که میدان برداری

$$Y = \gamma^1 X_1 + \cdots + \gamma^m X_m$$

یک مقطع از D باشد. آنگاه تکانه تخصیص داده شده به Y ایجاب می‌کند معادله

$$\frac{d}{dt} J_Y\left(\dot{c}(t)\right) = g\left(\dot{\gamma}^a X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) \tag{۵,۹}$$

در طول ژئودزیک‌های c از $\overline{\nabla}$ با سرعت‌های اولیه در D.

برهان. محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} J_Y\left(c(t)\right) &= \left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} g\right)\left(Y\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} Y\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + g\left(Y(c(t)), \overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)\right) \\
&= \left(\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)} g\right)\left(Y(c(t)), \dot{c}(t)\right) + \gamma^a\left(c(t)\right) g\left(\nabla_{\dot{c}(t)} X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) + \\
&\quad g\left(Q\left(\dot{c}(t), Y\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right) + \dot{\gamma}^a\left(c(t)\right) g\left(X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) \\
&= -g\left(Q\left(\dot{c}(t), Y\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right) - g\left(Y\left(c(t)\right), Q\left(\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right)\right) + \\
&\quad g\left(Q\left(\dot{c}(t), Y\left(c(t)\right)\right), \dot{c}(t)\right) + \dot{\gamma}^a\left(c(t)\right) g\left(X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) \\
&= -g\left(Y\left(c(t)\right), Q\left(\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right)\right) + \dot{\gamma}^a\left(c(t)\right) g\left(X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right) \\
&= \dot{\gamma}^a\left(c(t)\right) g\left(X_a\left(c(t)\right), \dot{c}(t)\right)
\end{aligned}$$

اینجا از حقیقت اینکه، X_a، $a = ۱, \dots, m$ میدان‌های برداری کیلینگ، c یک ژئودزیک از $\overline{\nabla}$، $Y \in \mathfrak{D}$ و گزاره ۵.۱، قسمت (ii) و لم ۵.۱۰ استفاده کرده‌ایم.

■

معادله (۵.۹)، معادله تکانه نامیده می‌شود. جالب است که هر چند خواص $\overline{\nabla}$ در حصول معادله تکانه استفاده شد، اما $\overline{\nabla}$ در جمله نهایی ظاهر نمی‌شود.

۵.۵. توسیع هموستارها از D به TM.

در این بخش، $\overline{\nabla}|D$ را بعنوان یک شیء داده شده در نظر می‌گیریم و مشخص می‌کنیم هموستار آفین روی تمام TM که با $\overline{\nabla}$ برابرند وقتی که به D تحدید

می‌شوند.

گزاره ۵.۱۴ گیریم D یک توزیع روی خمینه M باشد و فرض می‌کنیم D' متمم D باشد. گیریم ∇ هموستار آفین روی M و فرض می‌کنیم $\tilde{\nabla}$ هموستار آفین دیگری باشد که دارای خواص

(i) $\tilde{\nabla}_X Y \in \mathfrak{D}$ برای هر $Y \in \mathfrak{D}$.

(ii) $\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \in \mathfrak{D}'$ برای هر $Y \in \mathfrak{D}$.

آنگاه $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\nabla_X P')(Y) + S(X,Y)$ برای یک $(۱,۲)$ میدان تانسوری S طوری که $S(X,Y) = ۰$ برای $Y \in \mathfrak{D}$. برعکس، اگر $\tilde{\nabla}$ به این شکل باشد، آنگاه آن (i) و (ii) را ایجاب می‌کند.

برهان. هر هموستار روی M را می‌توان نوشت بصورت

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$$

برای یک $(۱,۲)$ میدان تانسوری B. بویژه، یک هموستار آفین که در شرایط (i) و (ii) صدق می‌کند باید به این شکل باشد. برای $Y \in \mathfrak{D}$ و هر میدان برداری X داریم

$$\begin{aligned} P'(Y) = ۰ & \\ & \Rightarrow (\nabla_X P')(Y) + P'(\nabla_X Y) = ۰ \\ & \Rightarrow P'(\nabla_X Y) = -(\nabla_X P')(Y) \qquad (۵.۱۰) \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$$

با استفاده از (i)، (ii) و (۵.۱۰) داریم

$$P'(\nabla_X Y) + B(X,Y) = ۰ \Rightarrow B(X,Y) = (\nabla_X P')(Y)$$

لذا $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\nabla_X P')(Y) + S(X,Y)$ برای یک S طوری که $S(X,Y) = ۰$ برای $Y \in \mathfrak{D}$.
ادعا آخر نیز از گزاره ۵.۱ نتیجه می‌شود.

■

تبصره ۵.۱۵ مهم است که ملاحظه شود، آن چیزهایی که در مورد $\tilde{\nabla}$ گفته شد که تنها به تحدیدش به D

بستگی دارد، بطور مساوی برای هر هموستار آفین تشریح شده با گزاره ۵.۱۴، درست خواهد بود. این بویژه برای بحث تبدیلات در بخش ۵.۳ و قوانین بقاء در بخش ۵.۴ درست است.

■

برای اختتام این بخش، یک هموستار آفین که به D تحدید می‌شود معرفی می‌شود که تحدیدش به D، همانند $\overline{\nabla}$ است. هموستاری که ساخته می‌شود، بهرحال این خاصیت را دارد که در برخی مثال‌ها ساده‌تر محاسبه می‌شود، لذا این یک ثبت ارزنده است. اگر A یک $(۱,۱)$ میدان تانسوری معکوس‌پذیر روی M باشد، یک هموستار آفین روی M را تعریف می‌کنیم توسط

$$\overset{A}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A^{-۱}\left(\nabla_X\left(AP'\right)\right)(Y)$$

ادعا می‌کنیم که $\overset{A}{\nabla}$ خواص (i) و (ii) از گزاره ۵.۱۴ را برآورده می‌کند. محاسبه می‌کنیم

$$A^{-۱}\left(\nabla_X\left(AP'\right)\right)(Y) = A^{-۱}\left(\nabla_X A\right)\left(P'(Y)\right) + \left(\nabla_X P'\right)(Y)$$

با مشاهده $A^{-۱}\left(\nabla_X A\right)\left(P'(Y)\right) = ۰$ برای $Y \in \mathfrak{D}$ می‌بینیم که $\overset{A}{\nabla}$ براستی خواص (i) و (ii) از گزاره ۵.۱۴ را با اعمال ادعا آخر از آن گزاره برآورده می‌کند.

در مثال‌ها می‌توان A را برای ساده کردن جمله AP' استفاده کرد قبل از آنکه مشتق گرفته شود و این اغلب مفید است. این را در مثال بخش ۵.۶ خواهیم دید. ملاحظه می‌کنیم اگر $A = \mathrm{id}_{\mathrm{TM}}$ آنگاه $\overset{A}{\nabla} = \overline{\nabla}$.

۵.۶. یک مثال ساده. اینجا می‌گیریم $M = \mathbb{R}^۳$ و فرض می‌کنیم متریک ریمانی

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

گیریم ∇ هموستار آفین لوی—چویتا تخصیص داده شده باشد. فرض می‌کنیم توزیع D تولید شده توسط دو میدان برداری

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

روی $\mathbb{R}^۳$. این سیستم گاهی اوقات 'هایزنبرگ سیستم'[۱] نامیده می‌شود چون کروشه‌های میدان‌های برداری واقع در D از روابط جابجاگر اطاعت می‌کنند که یادآور جبر لی از هایزنبرگ گروه[۲] است.

[۱] Heisenberg system
[۲] Heisenberg group

هموستار تحدید شده. متمم متعامد از D با میدان برداری

$$y\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}$$

تولید می‌شود. لذا داریم

$$P'(x,y,z).(v_x,v_y,v_z)=\frac{1}{1+y^2}(y^2v_x-yv_z,0,-yv_x+v_z)$$

از هموستار توسیع یافته $\overset{A}{\nabla}$ تعریف شده با (۵.۱۱) استفاده می کنیم و انتخاب می‌کنیم $A=(1+y^2)\mathrm{id}_{\mathrm{TM}}$. ضرایب ناصفر هموستار $\overset{A}{\nabla}$ محاسبه می‌شود که

$$\Gamma^x_{yx}=\frac{2y}{1+y^2}\quad,\quad\Gamma^x_{yz}=\frac{-1}{1+y^2}\quad,\quad\Gamma^z_{yx}=\frac{-1}{1+y^2}$$

بیاد آوریم که این هموستار بی‌تاب نیست و لذا تقارن‌های اندیس هموستار لوی—چویتا را ندارد. معادلات برای ژئودزیک‌های این هموستار آفین

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+\tfrac{1}{1+y^2}\left(2y\,\dot{x}\,\dot{y}-\dot{y}\,\dot{z}\right)=0\\&\ddot{y}=0\\&\ddot{z}-\tfrac{1}{1+y^2}\,\dot{x}\,\dot{y}=0\end{aligned}$$

این معادلات باید به D تحدید شوند زیرا آنها تنها شرایط اولیه جالب توجه می‌باشند. سرعت‌های تحدید شده ایفا می‌کنند معادله

$$\dot{z}=y\,\dot{x}$$

بنابراین معادلات حرکت تحدید شده به D را محاسبه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+\tfrac{y}{1+y^2}\,\dot{x}\,\dot{y}=0\\&\ddot{y}=0\\&\ddot{z}-\tfrac{1}{1+y^2}\,\dot{x}\,\dot{y}=0\end{aligned}$$

D—تبدیلات آفین. اکنون به بررسی تبدیلات آفین از $\overset{A}{\nabla}$ می‌پردازیم. بدنبال گزاره ۵.۷، جستجو می‌کنیم تبدیلات آفین از ∇ که با D سازگار هستند. آسانتر است که به حالت بی‌نهایت کوچک بنگریم. جبر لیِ

ایزومتری‌های بی‌نهایت کوچک از g با $\mathfrak{se}(3)$ یکریخت است. میدان برداری

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X + 3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_4 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad X_5 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad X_6 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

تشکیل یک پایه برای جبر لی ایزومتری‌های بی‌نهایت کوچک از g می‌دهند. از این میدان‌های برداری، ثابت می‌شود که تنها X_1 و X_3 با D سازگار هستند. بنابراین هر دو X_1 و X_3، D—ایزومتری‌های آفین بی‌نهایت کوچک از $\overset{A}{\nabla}$، از گزاره ۵.۷، هستند. گروه تولید شده با این تبدیلات با $\mathbb{R}^2$ یکریخت است و عمل روی $\mathbb{R}^3$ توسط $((a,b),(x,y,z)) \mapsto (x+a, y, z+b)$ است. بنابراین، در این مثال، $\mathrm{Aff}_0(\overset{A}{\nabla})$ گروه لی با بعد متناهی است و $\mathrm{aff}_0(\overset{A}{\nabla})$ جبر لی آن است.

تحول تکانه. کمیت‌های پایدار از دینامیک نامحدود را محاسبه می‌کنیم که

$$J_{X_1} = v_x \quad , \quad J_{X_2} = v_y \quad , \quad J_{X_3} = v_z$$

$$J_{X_4} = -zv_y + yv_z \quad , \quad J_{X_5} = zv_x - xv_z \quad , \quad J_{X_6} = -yv_x + xv_y$$

در طول ژئودزیک‌های $\overset{A}{\nabla}$ بدست می‌آوریم

$$J_{X_1} = \frac{\dot{y}(\dot{z} - 2y\dot{x})}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_2} = 0 \quad , \quad J_{X_3} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{1+y^2}$$

$$J_{X_4} = \frac{y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_5} = \frac{\dot{y}(z\dot{z} - (x+2yz)\dot{x})}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_6} = \frac{y\dot{y}(2y\dot{x} - \dot{z})}{1+y^2}$$

این معادلات تحول را ساده می‌کنیم با ملاحظه آنکه تنها به حل‌های واقع در D علاقه‌مند هستیم. با جایگزینی سرعت‌های محدود شده در معادلات برای تحول تکانه بدست می‌آوریم

$$J_{X_1} = \frac{-y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_2} = 0 \quad , \quad J_{X_3} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{1+y^2}$$

$$J_{X_4} = \frac{y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_5} = \frac{-\dot{x}\dot{y}(x+yz)}{1+y^2} \quad , \quad J_{X_6} = \frac{y^2\dot{x}\dot{y}}{1+y^2}$$

با نگاه به این روابط دو قانون بقاء را می‌بینیم. پیش از همه، چون $X_2 \in \mathfrak{D}$، حقیقت آنکه J_{X_2} پایدار است از گزاره ۵.۱۲ بدست می‌آید و بطور مشابه قانون بقاء

$$J_{X_1+X_4} = 0$$

معادله تکانه. تعریف معادله تکانه باعث می‌شود معادلات تکانه بسیاری ثبت شود. بهرحال برای شرح نظریه تعریف می‌کنیم یک مقطع از D توسط

$$Y = X_1 + yX_3$$

این مقطع از D با ترکیب خطی از ایزومتری‌های آفین بی‌نهایت کوچک که سازگار با D هستند، برجسته می‌باشد. با استفاده از گزاره ۵.۱۳ بدست می آوریم

$$J_Y = g\left(\dot{y}\, X_3, \dot{x}\, X_1 + \dot{y}\, X_2 + \dot{z}\, X_3\right) = \dot{y}\, \dot{z}$$

فصل ۲

سیستم‌های کنترلی هموستار آفین

۱. مقدمه

در این فصل به اصل ماکسیمال ......، اعمال شده به سیستم‌هایی که میدان برداری پیشامد، فشانه ژئودزیک مربوطه به یک هموستار آفین است، می‌پردازیم. نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که سمت چپ 'معادله ژاکوبی الحاقی' است. این آخری، هندسه همیلتونی از سیستم هموستار آفین مربوط می‌سازد. نسخه منتج از اصل ماکسیمال سپس به وضعیتی اعمال می‌شود که تابع هزینه، مجذور نرم نیروی ورودی است. و سرانجام برخی نتایج در حوزه کنترل‌پذیری برای سیستم‌های هموستار آفین بیان می‌شود.

۲. تعاریف و علامت‌گذاری

وقتی می‌نویسیم $A \subset S$، معنی می‌کنیم که احتمال $A = S$ نیز باشد. اگر S یک مجموعه باشد، $\mathrm{id}_S : S \to S$ نگاشت همانی روی S است. اگر S یک مجموعه باشد، 2^S مجموعه زیر مجموعه‌های S است.

حرف I، بازه غیر تهی در $\mathbb{R}$ را نشان می‌دهد و مگر آنکه بیان شود اجازه می‌دهیم I نیم—نامتناهی یا نامتناهی باشد. همچنین، مگر آنکه بیان شود و آن ممکن است باز یا بسته در هر یک نقاط پایانی‌اش

باشد. اگر V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، V^* دوگانش را نشان می‌دهد و می‌نویسیم $\langle\alpha;v\rangle$ تا جفت طبیعی از $\alpha \in V^*$ با $v \in V$ را نشان دهیم. اگر $S \subset V$ آنگاه نشان می‌دهیم

$$\operatorname{ann}(S) = \{\alpha \in V^* |\ \alpha(v) = \text{۰}, \forall\ v \in S\}$$

همه خمینه‌ها با بعد متناهی، جدایی‌پذیر و C^∞ هستند. بطور مشابه، مگر آنکه بیان شود، همه اشیاء، تابع‌ها، میدان‌های برداری و غیره از رده C^∞ فرض می‌شوند. کلاف مماس یک خمینه M را با $\pi_{TM} : TM \to M$ و کلاف پادمماس را با $\pi_{T^*M} : T^*M \to M$ نشان می‌دهیم. $C^*(M)$، مجموعه توابع هموار روی M را نشان می‌دهد و $\Gamma^\infty(E)$، مقاطع هموار از کلاف برداری $\pi : E \to B$ را نشان می‌دهد. مجموعه تانسورهای از نوع (r,s) از کلاف برداری $\pi : E \to B$ را با $T^r_s(E)$ نشان می‌دهیم. اگر $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد، $T\phi : TM \to TN$ مشتق‌اش را نشان می‌دهد و $T_x\phi$، تحدید $T\phi$ به فضای مماس T_xM است. مشتق لی نسبت به میدان برداری X با $\mathfrak{L}_X$ نشان داده می‌شود.

با مختصات موضعی روی خمینه‌های TQ، T^*Q، TTQ و T^*TQ (به همراه Q خودش یک خمینه)، کار خواهیم کرد. لذا داشتن یک راه سازگار از نوشتن چنین مختصاتی مطلوب است. اگر $\left(q^\text{۱},\ldots,q^n\right)$ مختصاتی برای Q باشد، مختصات طبیعی برای TQ با $\left(q^\text{۱},\ldots,q^n,v^\text{۱},\ldots,v^n\right)$ نشان داده می‌شود که اغلب برای اختصار با (q,v) نشان می‌دهیم. با استفاده از این علامت‌گذاری مختصر شده، مختصات طبیعی برای T^*Q با (q,p) نشان داده می‌شود و مختصات برای TTQ و T^*TQ بترتیب با $((q,v),(u,w))$ و $((q,v),(\alpha,\beta))$ نشان داده می‌شود. در هر یک از دو حالت آخری، جفت اول از مختصات به مختصات برای فضای پایه که TQ هست، ارجاع می‌دهد و جفت دوم از مختصات، مختصات تاری هستند.

یک تابع کاراتئودوری [1] روی خمینه M، یک نگاشت $\phi : I \times M \to \mathbb{R}$ است که

CF۱. $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه است.

CF۲. تابع $x \mapsto \phi(t,x)$ یک تابع پیوسته برای هر $t \in I$ است.

CF۳. تابع $t \mapsto \phi(t,x)$ برای هر $x \in M$ انتگرال‌پذیر است.

یک تابع کاراتئودوری $\phi : I \times M \to \mathbb{R}$، .... [2] (LIB) است اگر برای هر زیرمجموعه فشرده

[1] caratheodory function

[2] locally integrally bounded

$K \subset M$، موجود باشد یک تابع نامنفی، موضعاً لبگ انتگرال‌پذیر $\psi : I \to \mathbb{R}$ با خاصیت $|\phi(t,x)| \leq \psi(t)$ برای هر $(t,x) \in I \times K$. یک تابع کاراتئودوری $\phi : I \times M \to \mathbb{R}$ از رده C^k است اگر تابع $x \mapsto \phi(t,x)$ از رده C^k برای هر $t \in I$ باشد. یک تابع کاراتئودوری $\phi : I \times M \to \mathbb{R}$، موضعاً انتگرال‌پذیر از رده C^k ($\mathrm{LIC^k}$) است اگر از رده C^k باشد و تابع $(t,x) \mapsto X_1 \cdots X_k \phi(t,x)$، برای هر گردایه $\{X_1, \ldots, X_k\}$ از C^k میدان‌های برداری روی M، LIB باشد. می‌گوییم ϕ موضعاً انتگرال‌پذیر از رده C^∞ ($\mathrm{LIC^\infty}$) است اگر برای هر عدد صحیح $k \geq 0$، $\mathrm{LIC^k}$ باشد.

یک میدان برداری کاراتئودوری یک نگاشت $X : I \times M \to TM$ است که

CVF۱. $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه است.

CVF۲. $X(t,x) \in T_xM$ برای هر $(t,x) \in I \times M$.

CVF۳. $(t,x) \mapsto (\mathfrak{L}_X \phi)(t,x)$ یک تابع کاراتئودوری برای هر $\phi \in C^\infty(M)$ است.

یک میدان برداری کاراتئودوری $X : I \times M \to TM$، $\mathrm{LIC^k}$ است اگر $(t,x) \mapsto X(t,x)\phi$ یک تابع $\mathrm{LIC^k}$ روی M برای هر $\phi \in C^\infty(M)$ باشد. یک میدان برداری کاراتئودوری مرتبه دوم روی M، یک میدان برداری کاراتئودوری $X : I \times TM \to TTM$ روی TM با ویژگی $T\pi_{TM} \circ X(t, v_x) = v_x$ برای هر $(t, v_x) \in I \times TM$ است.

بیاد آوریم که یک تابع $f : I \to \mathbb{R}$، جایی که $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه است، موضعاً مطلقاً پیوسته (LAC) است اگر تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر باشد و اگر برای هر زیربازه فشرده $[a,b] \subset I$، موجود باشد یک تابع اندازه‌پذیر کراندار $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ با ویژگی

$$(f|\,[a,b])\,(t) = \int_a^t g(s)ds$$

یک تابع $f : I \to \mathbb{R}$، موضعاً مطلقاً مشتق‌پذیر (LAD) است اگر برای هر زیربازه فشرده $[a,b] \subset I$، موجود باشد یک تابع مطلقاً پیوسته $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ با ویژگی

$$(f'|\,[a,b])\,(t) = \int_a^t g(s)ds$$

واضح است که یک تابع موضعاً مطلقاً مشتق‌پذیر از رده C^1 است و تقریباً همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است.

یک منحنی روی یک خمینه M، یک نگاشت پیوسته $c : I \to M$ است که I یک بازه است. یک منحنی c، LAC یا LAD است اگر $\phi \circ c$ بترتیب LAC یا LAD برای هر $\phi \in C^\infty(M)$ باشد. یک میدان برداری کاراتئودوری $X : I \times M \to TM$ داده شده، یک منحنی انتگرال برای X، یک منحنی LAC، $c : J \to M$ با ویژگی $c'(t) = X(t, c(t))$ برای تقریباً همه $t \in J$ است که J یک زیربازه از I است. بیاد آوریم که $\mathrm{LIC^k}$، $k \geq ۱$، میدان‌های برداری یک منحنی انتگرال ماکسیمال با شرط اولیه x در زمان $t = a$ دارند. اگر $X : I \times TM \to TTM$ یک میدان برداری کاراتئودوری LIC^∞ مرتبه دوم باشد آنگاه منحنی‌های انتگرالش، منحنی‌های LAC، $\sigma : J \to TM$ هستند. بنابراین وجود دارد یک منحنی LAD، $c : J \to M$ طوری که $c'(t) = \sigma(t)$ برای هر $t \in J$. گیریم $\pi : E \to B$ یک کلاف برداری باشد. اگر $c : I \to B$ یک منحنی LAC یا LAD باشد، یک مقطع LAC یا LAD از π در طول c، یک نگاشت LAC یا LAD، $\chi : I \to E$ با ویژگی $\pi \circ \chi(t) = c(t)$ برای $t \in I$ است. ملاحظه می‌کنیم که یک مقطع از c در طول π، نمی‌تواند خواص همواری قویتری از c داشته باشد. اصولاً به میدان‌های برداری و میدان‌های یک فرم در طول منحنی‌ها علاقه‌مندیم.

بخش I. کلاف‌های مماس و هموستارهای آفین

۳. هندسه کلاف مماس

در رفتار اصل ماکسیمم بحث خواهیم کرد وقتی اعمال می‌شود به سیستم‌هایی که میدان برداری پیشامد[۱] یک میدان برداری مرتبه دوم است، که لذا یک میدان برداری روی کلاف مماس TQ از خمینه پیکربندی Q است. در این بخش برخی لوازم هندسه کلاف مماس را معرفی می‌کنیم که در رفتارمان با مسئله کنترل بهینه استفاده خواهیم کرد. بعلاوه، برخی از این علامت‌گذاری‌ها برای فهم شکل هندسی اصل ماکسیمم مفید هستند.

در این بخش یک تناوب میان حروف M و Q برای نشان دادن خمینه کلی مشاهده می‌شود. اسلوبی در ورای این وجود دارد. در ساختارهای هندسی بخش ۵، Q یا کلاف مماسش TQ ظاهر می‌شود. چنین ساختارهایی را اینجا روی M نشان می‌دهیم. یعنی وقتی شما M را در این بخش می‌بینید ممکن است در

[۱] drift vector field

بخش‌های بعدی به Q یا TQ ارجاع شود. در این بخش فرض می‌کنیم هر دو M و Q، n بعدی باشند.

۳.۱. ترفیع مماس از یک میدان برداری. گیریم $X : I \times M \to TM$ یک میدان برداری LIC^{∞} روی یک خمینه M باشد. برای $t \in I$ گیریم $s \mapsto F_{t,s}$ خانواده یک پارامتری از دیفیومورفیسم‌های معرّف شار میدان برداری C^{∞}، $x \mapsto X(t,x)$ باشد. لذا

$$\frac{d}{ds}F_{t,s}(x) = X\left(t, F_{t,s}(x)\right) \quad , \quad F_{t,\circ}(x) = x$$

بویژه، $F_{t,s}$ شار میدان برداری وابسته زمانی X نیست. تعریف می‌کنیم یک میدان برداری LIC^{∞}، X^T، روی TM با

$$X^T\left(t, v_x\right) = \frac{d}{ds}|_{s=\circ} T_x F_{t,s}(v_x)$$

در مختصات می‌توان نشان داد که

$$X^T = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} v^j \frac{\partial}{\partial v^i}$$

تبصره ۳.۱ ۱. ملاحظه می‌کنیم که X^T یک میدان برداری خطی روی TM است. یعنی X^T، تصویرپذیر است و $X^T : I \times TM \to TTM$ یک نگاشت کلاف برداری است.

۲. چون X^T تصویرپذیر است و به X تصویر می‌شود، اگر $t \mapsto v(t)$ یک منحنی انتگرال برای X^T باشد، آنگاه این منحنی، منحنی $t \mapsto \pi_{TM} \circ v(t)$ را می‌پوشاند و این منحنی آخری، بعلاوه یک منحنی انتگرال برای X است. لذا منحنی‌های انتگرال برای X^T را می‌توان بعنوان میدان‌های برداری در طول منحنی‌های انتگرال X در نظر گرفت.

۳. گیریم $x \in M$ و c منحنی انتگرال برای X با شرط اولیه x در زمان $t = a$ باشد. گیریم c_1^T و c_2^T منحنی‌های انتگرال برای X^T با شرایط اولیه $v_{1,x}$ و $v_{2,x}$، بترتیب، در زمان $t = a$ باشند. آنگاه $t \mapsto \alpha_1 c_1^T(t) + \alpha_2 c_2^T(t)$ یک منحنی انتگرال برای X^T با شرط اولیه $\alpha_1 v_{1,x} + \alpha_2 v_{2,x}$ برای $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ است. یعنی خانواده منحنی‌های انتگرال برای X^T که c را می‌پوشانند یک فضای برداری از بعد $\dim(M)$ است.

۴. X^T را می‌توان بعنوان 'خطی سازی' از X در حالت زیر در نظر گرفت. $c : I \to M$ منحنی انتگرال

X گذرا از $x \in M$ در زمان $t = a$ باشد و گیریم $c^T : I \to TM$ منحنی انتگرال X^T با شرط اولیه $v_x \in T_xM$ در زمان $t = a$ باشد. انتخاب می کنیم یک خانواده یک پارامتری هموار از دگردیسی‌های $\sigma : I \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ از c با خواص زیر:

(a) $s \mapsto \sigma(t, s)$ مشتق‌پذیر است برای $t \in I$.

(b) برای $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$، $t \to \sigma(t, s)$ منحنی انتگرال X گذرا از $\sigma(a, s)$ در زمان $t = a$ است.

(c) $\sigma(t, \circ) = c(t)$ برای $t \in I$.

(d) $\frac{d}{ds}|_{s=\circ}\sigma(a, s) = v_x$.

بنابراین داریم $c^T(t) = \frac{d}{ds}|_{s=\circ}\sigma(t, s)$. لذا $X^T(v_x)$، 'نوسان' حل‌های X را اندازه می‌گیرد وقتی مختل می‌شود توسط شرایط اولیه‌ای که در جهت v_x واقع‌اند.

ترفیع X^T از X، از M به TM را ترفیع مماس از X می‌نامیم. یک راه متعارف دیگر برای ترفیع یک میدان برداری به کلاف مماس وجود دارد. برای یک میدان برداری LIC^∞، X، روی M تعریف می‌کنیم ترفیع عمودی از X به میدان برداری LIC^∞، $\mathrm{vlft}(X)$ روی TM داده شده توسط

$$\mathrm{vlft}(X)(t, v_x) = \frac{d}{ds}|_{s=\circ}(v_x + sX(t, x))$$

اگر $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ در نقشه موضعی باشد، آنگاه $\mathrm{vlft}(X) = X^i\frac{\partial}{\partial v^i}$ در مختصات طبیعی تخصیص داده شده برای TM است.

۳.۲. ترفیع پادمماس از یک میدان برداری. همچنین یک نسخه پادمماس از X^T وجود دارد که بطور طبیعی تعریف می‌کنیم. اگر X یک میدان برداری LIC^∞ روی M باشد، تعریف می‌کنیم یک میدان برداری LIC^∞، X^{T^*} روی T^*M توسط

$$X^{T^*}(t, \alpha_x) = \frac{d}{ds}|_{s=\circ}T_x^*F_{t,-s}(\alpha_x)$$

در مختصات داریم

$$X^{T^*} = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i}p_j\frac{\partial}{\partial p_i}$$

همچون حالت X^T، برخی تبصره‌های مفید درباره معنی X^{T^*} را می‌سازیم.

تبصره ۳.۲ ۱. X^{T^*} یک میدان برداری همیلتونی LIC^∞ (نسبت به ساختار همتافته طبیعی روی T^*M) مطابق با LIC^∞ همیلتونی $H_X : (t, \alpha_x) \to \langle \alpha_x; X(t,x) \rangle$ است.

۲. ملاحظه می‌کنیم X^{T^*} یک میدان برداری خطی است. یعنی، X^{T^*} تصویرپذیر است و $X^{T^*} : I \times T^*M \to TT^*M$ یک نگاشت کلاف برداری است.

۳. اگر $t \mapsto \alpha(t)$ یک منحنی انتگرال برای X^{T^*} باشد، آنگاه این منحنی، منحنی $t \mapsto \pi_{T^*M} \circ \alpha(t)$ را می‌پوشاند و این منحنی آخری بعلاوه یک منحنی انتگرال برای X است. لذا منحنی‌های انتگرال X^{T^*} را می‌توان بعنوان میدان‌های یک فرم در طول منحنی‌های انتگرال X در نظر گرفت.

۴. اگر $c : I \to M$ منحنی انتگرال برای X با شرط اولیه $x \in M$ در زمان $t = a \in I$ باشد آنگاه منحنی‌های انتگرال از X^{T^*} با شرایط اولیه در T_x^*M تشکیل یک فضای برداری با بعد $\dim(M)$ می‌دهند که بطور طبیعی یکریخت با T_x^* است.

۳.۳. خواص توأم ترفیع مماس و پادمماس. به واسطه تعریفشان، با هم X^T و X^{T^*} باید برخی خواص را دارا باشد. گیریم $TM \oplus T^*M$ جمع ویتنی[۱] از TM و T^*M باشد. بعنوان یک خمینه، این بعنوان یک زیرخمینه نشانده شده از $TM \times T^*M$ با $v_x \oplus \alpha_x \mapsto (v_x, \alpha_x)$ در نظر گرفته می‌شود. بدین روش $TM \oplus T^*M$ را با ضرب تاری[۲] $TM \times_M T^*M$ یکی می‌گیریم. اگر X یک میدان برداری LIC^∞ روی M باشد، یک میدان برداری LIC^∞، $X^T \times X^{T^*}$، روی $TM \times T^*M$ را با رابطه

$$X^T \times X^{T^*}(t, v, \alpha) = \left(X^T(t, v), X^{T^*}(t, \alpha) \right)$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که در این تعریف، لازم نیست که $\pi_{TM}(v) = \pi_{T^*M}(\alpha)$.

لم ۳.۳ $X^T \times X^{T^*}$ مماس بر $TM \oplus T^*M$ است.

---
[۱] Whitney sum
[۲] fibre product

برهان. مختصات طبیعی برای $TM \times T^*M$ را با $((x,v),(y,p))$ نشان می‌دهیم. اگر یک تابع $\mathbb{R}^n$—مقدار f در این مختصات را با $f((x,v),(y,p)) = (y-x)$ تعریف کنیم آنگاه $TM \oplus T^*M$ موضعاً با $f^{-1}(0)$ تعریف می‌شود. لذا نتیجه بدست می آید اگر بتوانیم نشان دهیم که $X^T \times X^{T^*}$، در هسته $T_{((x,v),(y,p))}f$ برای هر $((x,v),(y,p)) \in f^{-1}(0)$ واقع است. محاسبه می‌کنیم

$$T_{((x,v),(y,p))}f\left((e_1,e_2),(e_3,e_4)\right) = e_3 - e_1$$

از این محاسبه و مختصات موضعی برای X^T و X^{T^*}، نتیجه بدست می آید.

■

بدین روش تحدید $X^T \times T^{T^*}$ به $TM \oplus T^*M$ با معنی است و میدان برداری LIC^∞ تحدید شده را با $X^T \oplus X^{T^*}$ نشان می‌دهیم. نتیجه زیر خاصیت توأم مطلوب از X^T و X^{T^*} را می‌دهد.

گزاره ۳.۴ اگر X یک میدان برداری LIC^∞ روی M باشد آنگاه $X^T \oplus X^{T^*}$ تابع $v_x \oplus \alpha_x \to \alpha_x.v_x$ روی $TM \oplus T^*M$ را ناوردا می‌گذارد.

برهان. لم زیر را بکار می‌بریم.

لم ۱. اگر τ، $(1,1)$ میدان تانسوری روی M باشد آنگاه مشتق لی از تابع $f_\tau = v_x \oplus \alpha_x \mapsto \tau\left(\alpha_x, v_x\right)$ روی $TM \oplus T^*M$ نسبت به میدان برداری $X^T \oplus X^{T^*}$، تابع $v_x \oplus \alpha_x \mapsto \left(\mathfrak{L}_X \tau\right)\left(\alpha_x, v_x\right)$ است.

برهان. در مختصات موضعی کار می‌کنیم جایی که $f_\tau = \tau^i_j p_i v^j$. سپس محاسبه می‌کنیم

$$\mathfrak{L}_{X^T \oplus X^{T^*}} f_\tau = \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^k} X^k p_i v^j + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \tau^j_k p_i v^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \tau^k_j p_i v^j$$

که نتیجه می‌شود با عبارت مختص برای $\left(\mathfrak{L}_X \tau\right)\left(\alpha_x, v_x\right)$ برابر است.

■

اکنون مشاهده می‌کنیم که تابع $v_x \oplus \alpha_x \to \alpha_x.v_x$ دقیقاً $f_{\mathrm{id}_{TM}}$ در علامت‌گذاری لم است. لذا کافی است که نشان دهیم $\mathfrak{L}_X \mathrm{id}_{TM} = 0$ برای هر میدان برداری X. اما اگر از برابری $\mathrm{id}_{TM}(Y) = Y$ $(Y \in \Gamma^\infty(TM))$ نسبت به X مشتق بگیریم بدست می آوریم

$$(\mathfrak{L}_X \mathrm{id}_{TM})(Y) + \mathrm{id}_{TM}([X,Y]) = [X,Y]$$

که از این، قضیه نتیجه می‌شود.

■

تبصره ۳.۵ در حقیقت، X^{T^*} یکتا میدان برداری خطی روی T^*M است که به X تصویر می‌شود و در گزاره ۳.۴ صدق می‌کند.

۳.۴. ترفیع پادمماس از ترفیع عمودی. بعداً از سیستم‌های که فضای فاز کلاف مماس است و میدان‌های برداری کنترل، ترفیع‌های عمودی هستند بحث خواهیم کرد. بعنوان یک نتیجه از کاربرد اصل ماکسیمم به چنین سیستم‌هایی، علاقه‌مند به ترفیع پادمماس از میدان‌های برداری ترفیع‌شده عمودی هستیم. لذا گیریم Q یک خمینه با بعد متناهی باشد و گیریم X یک میدان برداری LIC^∞ روی Q بهمراه $\mathrm{vlft}(X)^{T^*}$ ترفیع عمودی‌اش به TQ باشد. در مختصات موضعی برای $\mathrm{vlft}(X)^{T^*}$ خواهیم داشت

$$(\mathrm{vlft}(X))^{T^*} = X^i \frac{\partial}{\partial v^i} - \frac{\partial X^j}{\partial q^i}\beta_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$$

اینجا مختصات طبیعی برای T^*TQ را با $((q,v),(\alpha,\beta))$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۳.۶ جالب است که ارتباط بین $(\mathrm{vlft}(X))^{T^*}$ و $\mathrm{vlft}\left(X^{T^*}\right)$ را در نظر بگیریم. میدان برداری آخری در این عبارت مختص

$$\mathrm{vlft}(X^{T^*}) = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \frac{\partial X^j}{\partial q^i} p_j \frac{\partial}{\partial \gamma_i}$$

است جایی که مختصات طبیعی برای TT^*Q بعنوان $((q,p),(u,\gamma))$ در نظر گرفته می‌شود. اکنون ملاحظه می‌کنیم وجود دارد دیفیومورفیسم متعارف ϕ_Q بین T^*TQ و TT^*Q تعریف شده در مختصات توسط

$$((q,v),(\alpha,\beta)) \mapsto ((q,\beta),(v,\alpha))$$

ثابت می‌شود $\mathrm{vlft}\left(X^{T^*}\right) = \phi_Q^*(\mathrm{vlft}(X))^{T^*}$. همچنین ملاحظه می کنیم که T^*TQ یک خمینه همتافته است چون کلاف پاد مماس است. کلاف مماس یک خمینه همتافته نیز یک خمینه همتافته است. بنابراین، بویژه، TT^*Q یک خمینه همتافته است. ساختار همتافته روی TT^*Q تعریف شده در مختصات، داده

می‌شود با رابطه

$$\omega_{TT^*Q} = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}\gamma_i + \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

ثابت می‌شدود که دیفیومورفسیم ϕ_Q نسبت به این ساختارهای همتافته، همتافته است. چون $(\mathrm{vlft}(X))^{T^*}$ یک میدان برداری همیلتونی روی T^*TQ با تبصره ۳.۲-۱، است میدان برداری $\mathrm{vlft}\left(X^{T^*}\right)$ باید همچنین همیلتونی روی TT^*Q بهمراه ساختار همتافته توضیح داده شده، باشد. محاسبه می‌شود همیلتونی با رابطه $V_{\alpha_q} \mapsto \langle \alpha_q; X(q)\rangle$ داده شده است جایی که $V_{\alpha_q} \in TT^*Q$.

یک تعریف ذاتی از ϕ_Q بطریق زیر است. نگاشت $\rho : T^*TQ \to T^*Q$ را به روش زیر تعریف می کنیم:

$$\left\langle \rho\left(\alpha_{v_q}\right); u_q \right\rangle = \langle \alpha_{v_q}; \mathrm{vlft}_{v_q}(u_q)\rangle$$

لذا ثابت می‌شود که ϕ_Q یک نگاشت یکتاست که نمودار زیر را

$$\begin{tikzcd}
T^*Q & TT^*Q \arrow[l, "\pi_{TT^*Q}"'] \arrow[r, "T\pi_{T^*Q}"] & TQ \\
 & T^*TQ \arrow[ul, "\rho"] \arrow[u, "\phi_Q"] \arrow[ur, "\pi_{T^*TQ}"'] &
\end{tikzcd}$$

جابجایی می‌کند.

۳.۵. پیچیدگی متعارف[1] از TTQ. گیریم ρ_1 و ρ_2 نگاشت‌های C^2 از یک همسایگی $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ به Q باشند. اجازه دهید با (t_1, t_2) مختصات برای $\mathbb{R}^2$ را نشان دهیم. می‌گوییم دو تا چنین نگاشتی هم‌ارزند اگر $\rho_1(0,0) = \rho_2(0,0)$ و اگر

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1}(0,0) = \frac{\partial \rho_2}{\partial t_1}(0,0) \quad , \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t_2}(0,0) = \frac{\partial \rho_2}{\partial t_2}(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t_1 \partial t_2}(0,0) = \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial t_1 \partial t_2}(0,0)$$

[1] canonical involution

به یک رده هم‌ارزی $[\rho]$، تخصیص می‌دهیم، در مختصات، نقطه

$$\left(\rho\left(0,0\right),\frac{\partial\rho}{\partial t_1}(0,0),\frac{\partial\rho}{\partial t_2}(0,0),\frac{\partial^2\rho}{\partial t_1\partial t_2}(0,0)\right)$$

در نقشه موضعی از TTQ.

نسبت به این نمایش نقاط در TTQ، پیچیدگی متعارف $I_Q : TTQ \to TTQ$ تخصیص داده می‌شود. اگر ρ یک نگاشت از یک همسایگی $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ به Q باشد تعریف می‌کنیم $\overline{\rho}\left(t_1,t_2\right) = \rho\left(t_1,t_2\right)$ که یک نگاشت از یک همسایگی $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ به Q است. سپس تعریف می‌کنیم

$$I_Q\left([\rho]\right) = [\overline{\rho}]$$

در مختصات

$$I_Q((q,v),(u,w)) = ((q,u),(v,w))$$

۳.۶. ساختار مماس تقریباً متعارف. آخرین مطلب از هندسه کلاف مماس که بحث می‌کنیم، ساختار مماس تقریباً متعارف روی TM است. این، $(1,1)$ میدان تانسوری J_M روی TM است که توسط

$$J_M\left(X_{v_x}\right) = \mathrm{vlft}_{v_x}\left(T_{v_x}\pi_{TM}\left(X_{v_x}\right)\right)$$

تعریف می‌شود جایی که $X_{v_x} \in T_{v_x}TM$. ثابت می‌شود در مختصات موضعی داریم

$$J_M = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes \mathrm{d}x^i$$

۴. مطالبی از هندسه دیفرانسیل آفینی

در مسئله‌های کنترلی که بررسی خواهیم کرد، میدان برداری پیشامد، فشانه ژئودزیک تخصیص داده شده به یک هموستار آفین است. هندسه هموستار آفین در راه جالب به مسئله کنترل بهینه وارد می‌شود. و برای این مطلب به کمی پس زمینه هندسه دیفرانسیل آفین نیازمندیم. تنها یک طرح مختصر ارائه می‌شود و برای جزئیات می‌توان به کتاب [۸] مراجعه کرد.

۴.۱. تعاریف پایه‌ای. یک هموستار آفین روی خمینه Q، یک تخصیص به هر جفت از میدان‌های برداری X و Y روی Q یک میدان برداری $\nabla_X Y$ است و باید خواص زیر را دارا باشد.

AC۱. نگاشت $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$، $\mathbb{R}$—دو خطی است.

AC۲. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ برای $f \in C^\infty(Q)$.

AC۳. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (\mathfrak{L}_X f)\, Y$ برای $f \in C^\infty(Q)$.

میدان برداری $\nabla_X Y$، مشتق کواریانت از Y نسبت به X نامیده می‌شود. اگر (U,ϕ) یک نقشه برای Q با مختصات $(q^۱,\ldots,q^n)$ باشد آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم $n^۳$ تابع Γ^i_{jk}، $i,j,k = ۱,\ldots,n$، روی U توسط

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^j}} \frac{\partial}{\partial q^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial q^i}$$

این توابع نمادهای کریستفل برای هموستار آفین ∇ نامیده می‌شوند.

برای هر میدان برداری X روی Q، چون $\nabla_X Y$، $C^\infty(Q)$—خطی در X است، داده شده یک (r,s) میدان تانسوری τ روی Q، می‌توانیم تعریف کنیم یک $(r, s+۱)$ میدان تانسوری $\nabla\tau$ روی Q توسط

$$\nabla\tau\left(\alpha^۱,\ldots,\alpha^r, X_۱,\ldots,X_s; X_{s+۱}\right) = \left(\nabla_{X_{s+۱}}\tau\right)\left(\alpha^۱,\ldots,\alpha^r, X_۱,\ldots,X_s\right)$$

اگر τ یک (r,s) میدان برداری باشد و $\alpha^۱,\ldots,\alpha^r$ یک فرم‌ها و $X_۱,\ldots,X_s$ میدان‌های برداری باشند آنگاه $\nabla\tau\left(\alpha^۱,\ldots,\alpha^r, X_۱,\ldots,X_s\right)$ نشان می‌دهد یک فرم تعریف شده توسط

$$\left\langle \nabla\tau\left(\alpha^۱,\ldots,\alpha^r, X_۱,\ldots,X_s\right); Y\right\rangle = \nabla\tau\left(\alpha^۱,\ldots,\alpha^r, X_۱,\ldots,X_s; Y\right) \quad , \quad Y \in \Gamma^\infty(TQ)$$

ملاحظه می‌کنیم که سمی‌کالن را قبل از مکان آخر استفاده می‌کنیم وقتی می‌خواهیم $\nabla\tau$ را به عنوان یک میدان تانسوری از نوع $(r, s+۱)$ بجای یک تانسور T^*Q—مقدار از نوع (r,s) بکار بریم. اگر X یک میدان برداری باشد، ∇X یک $(۱,۱)$ میدان تانسوری است که بعنوان یک درون‌ریختی از TQ در نظر گرفته می‌شود. درون‌ریختی دوگان را با $(\nabla X)^*$ نشان می‌دهیم.

متریک ریمانی g روی Q داده شده، وجود دارد یک هموستار آفین یکتا $\overset{g}{\nabla}$ روی Q که دو خاصیت زیر را داراست:

LC۱. $\overset{g}{\nabla} g = 0$.

LC۲. $\overset{g}{\nabla}_X Y - \overset{g}{\nabla}_Y X = [X, Y]$.

هموستار آفین $\overset{g}{\nabla}$، هموستار لوی—چویتا تخصیص داده شده به متریک ریمانی g نامیده می‌شود. اگر g_{ij} مؤلفه‌های متریک ریمانی g در یک مجموعه از مختصات را نشان دهد آنگاه نمادهای کریستفل از $\overset{g}{\nabla}$ بدست می آیند توسط

$$\overset{g}{\Gamma}{}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} \right)$$

علامت‌گذاری هموستار آفین آنچنان که تعریف شد ممکن است برای مشتق‌گیری از میدان‌های برداری در طول منحنی‌ها استفاده شود. گیریم $c : I \to Q$ یک منحنی LAC باشد و گیریم $V : I \to TQ$ یک میدان برداری LAC در طول c باشد. پس $V(t) \in T_{c(t)}Q$ برای $t \in I$. اگر میدان برداری X، c را بعنوان منحنی انتگرال دارا باشد و میدان برداری Y با ویژگی $Y(c(t)) = V(t)$ برای $t \in I$ باشد آنگاه مشتق کواریانت از V در طول c، تعریف می‌شود میدان برداری در طول c توسط

$$\nabla_{c'(t)} V(t) = \left(\nabla_X Y \right) (c(t))$$

با استفاده از خواص هموستار آفین و بویژه $AC2$، ثابت می‌شود این تعریف مستقل از توسیع‌های X و Y از c' و V است. در مختصات داریم

$$\left(\nabla_{c'(t)} V(t) \right)^i = \dot{V}^i(t) + \Gamma^i_{jk} \left(q(t) \right) \dot{q}^j(t) V^k(t)$$

بروشی مشابه می‌توان مشتق کواریانت از یک میدان تانسوری معمولی در طول c را تعریف کرد.

از جذابیت‌های ویژه منحنی‌های LAC، $c : I \to Q$ هستند که $\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0$. چنین منحنی‌هایی برای هموستار آفین ∇ ژئودزیک نامیده می‌شوند. لذا یک ژئودزیک در مختصات معادله زیر را ارضاء می‌کند

$$\ddot{q}^i(t) + \Gamma^i_{jk} \left(q(t) \right) \dot{q}^j(t) \dot{q}^k(t) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

ژئودزیک‌ها بنابراین منحنی‌هایی از رده C^∞ هستند. ملاحظه می‌کنیم که معادله ژئودزیک یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، که لذا یک میدان برداری مرتبه دوم روی TQ تعریف می‌کند. این میدان برداری مرتبه دوم را با Z نشان می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که در مختصات

$$Z = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{jk} v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i}$$

این میدان برداری فشانه ژئودزیک از ∇ نامیده می‌شود. تصویر منحنی‌های انتگرال Z به Q بوسیله افکنش کلاف مماس دقیقاً ژئودزیک‌های ∇ هستند.

۴.۲. تاب و انحناء. شرط LC۲ پیشنهاد می‌کند که برای یک هموستار آفین معمولی عبارت

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ممکن است تا حدی مهم باشد. که براستی چنین است و T که تعریف شد یک $(۱,۲)$ میدان تانسوری است که تاب برای ∇ نامیده می‌شود.

همچنین به تانسور دیگری که به هموستار آفین تخصیص داده می‌شود علاقه‌مندیم: تانسور انحناء. تانسور انحناء یک $(۱,۳)$ میدان تانسوری روی Q است، اما راحت است که به آن تا حدی علامت‌گذاری غیراستاندارد بدهیم. اگر $\tilde{R}$، $(۱,۳)$ میدان تانسوری باشد آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم یک مقطع R از $T^۰_۲(TQ) \otimes T^۱_۱(TQ)$ توسط $R(X,Y)W = \tilde{R}(X,Y,W)$. با این علامت‌گذاری تعریف می‌کنیم R را توسط

$$R(X,Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X \nabla_{[X,Y]} W$$

ثابت می‌شود که R تساوی اول بیانچی [۱] را ارضاء می‌کند.

$$\sum_{\sigma \in S_۳} \left(R\left(X_{\sigma(۱)}, X_{\sigma(۲)}\right) X_{\sigma(۳)} \right) =$$
$$\sum_{\sigma \in S_۳} \left(T\left(T\left(X_{\sigma(۱)}, X_{\sigma(۲)}\right), X_{\sigma(۳)}\right) + \left(\nabla_{X_{\sigma(۱)}} T\right)\left(X_{\sigma(۲)}, X_{\sigma(۳)}\right)\right) \qquad (۴.۱)$$

جایی که $S_۳$ گروه جایگشت روی سه نماد است.

[۱] frist Bianchi identity

مفید خواهد بود که عبارت‌های مختص برای تانسورهای تاب و انحناء داشت:

$$\begin{aligned} T^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \\ R^i_{jkl} &= \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial q^l} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

در نوشتن این فرمول‌ها مختص استفاده می‌کنیم از قراردادهای

$$T(X,Y) = T^i_{jk}X^jY^k \quad , \quad R(X,Y)W = R^i_{jkl}W^jX^kY^l$$

همچنین به فرمول مختص برای ∇T نیازمندیم:

$$\begin{aligned} (\nabla T)^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial q^l} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{lj} + \\ \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{lk} + \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{lk} \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

این فرمول استفاده می‌کند از قرارداد

$$\nabla T\,(W,X;Y) = (\nabla T)^i_{jkl}\,W^jX^kY^l$$

مفید است که مجزا کنیم وقتی درباره تانسور انحناء برای هموستار لوی‌—چویتا صحبت می‌کنیم. لذا این را با $\overset{g}{R}$ نمایش می‌دهیم. تانسور انحناء لوی—چویتا دارای تقارن‌هایی است که مفید می‌باشد. بویژه، فرمول زیر که در فصل V از کتاب [۸] پیدا می‌شود:

$$g\left(\overset{g}{R}\,(X_۳, X_۴)\,X_۲, X_۱\right) = g\left(\overset{g}{R}\,(X_۱, X_۲)\,X_۴, X_۳\right) \tag{۴.۴}$$

برای همه میدان‌های برداری $X_۱, \ldots, X_۴ \in \Gamma^\infty(TQ)$.

۴.۳. معادله ژاکوبی. در رفتار سیستم‌های کنترلی بحث خواهیم کرد که در کنترل‌ها آفین هستند، برای آنها میدان برداری پیشامد، فشانه ژئودزیک از یک هموستار آفین است. در مطالعه مسئله کنترل بهینه برای چنین سیستم‌هایی به معادلاتی که 'دوگان' به معادلات تشریح کننده انحراف ژئودزیک هستند می‌رسیم. در اینجا معادلاتی از نوسان خود ژئودزیک‌ها بررسی می‌کنیم. بنابراین وضعیتی همچون زیر بررسی می‌شود. گیریم ∇ یک هموستار آفین روی Q و $c : I \to Q$ یک ژئودزیک تثبیت شده برای ∇ باشد. بوسیله یک خانواده مشتق‌پذیر از ژئودزیک‌ها دور c، یک نگاشت $\sigma : I \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to Q$ را با خواص زیر در نظر می‌گیریم:

۱. σ هموار است.

۲. $t \mapsto \sigma(t,s)$ یک ژئودزیک برای ∇ برای هر $s \in]-\epsilon, \epsilon[$.

۳. $\sigma(t,\circ) = c(t)$ برای هر $t \in I$.

یک میدان ژاکوبی، یک میدان برداری ξ در طول یک ژئودزیک c از شکل

$$\xi(t) = \frac{d}{ds}|_{s=\circ}\sigma(t,s) \quad , \quad t \in I$$

برای یک خانواده مشتق‌پذیر σ از ژئودزیک‌های دور c است. ثابت می‌شود که شرط لازم و کافی برای یک میدان برداری ξ در طول یک ژئودزیک یک میدان ژاکوبی باشد آن است که ارضاء کند معادله ژاکوبی:

$$\nabla^{۲}_{c'(t)}\xi(t) + R\left(\xi(t), c'(t)\right)c'(t) + \nabla_{c'(t)}\left(T\left(\xi(t), c'(t)\right)\right) = \circ$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادله یک معادله مرتبه دوم برای میدان برداری ξ در طول $c : I \to Q$ است. لذا برای مشخص کردن حلش بطور یکتا شرط اولیه برای $\xi(a)$ و $\nabla_{c'(a)}\xi(a)$ برای یک $a \in I$ نیاز است.

۵. هموستارهای اِرسمن القاء شده توسط یک هموستار آفین

این بخش، جزء لازم از اصل ماکسیمم برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین را ایجاد می‌کند: معادله ژاکوبی الحاقی. بواقع نتایج این بخش بویژه از بخش ۵.۹، مغز این بررسی را نشان می‌دهد چون نتایج کنترل بهینه از بخش II در یک راه نسبتاً مستقیم دنبال می‌کند اولین دسترسی نتایجی که اکنون تهیه می‌شود.

۵.۱. تبصره انگیزشی. چنانکه قبلاً چندین بار بیان کرده‌ایم، به سیستم‌های آفین کنترلی نگاه خواهیم کرد که میدان برداری پیشامد فشانه ژئودزیک Z برای یک هموستار آفین است. از آشنایی با اصل ماکسیمال، سریعاً فهمیده می‌شود که ترفیع پادمماس از Z مهم می‌باشد. یک راه برای تنظیم هدف این بخش، فکر کردن دربارهٔ چگونگی نمایش Z^{T^*} برحسب اشیاء تعریف شده روی Q است،

با اینکه Z^{T^*} خودش یک میدان برداری روی T^*TQ است. یک راه ممکن برای حرکت در جهت درست بطریق زیر است:

۱. بر اساس تبصره ۳.۱−۴ و تعریف معادله ژاکوبی، انتظار می‌رود که ارتباطی میان Z^T و معادله ژاکوبی موجود باشد.

۲. توسط تبصره ۳.۵ یک ارتباط میان Z^T و Z^{T^*} موجود است.

۳. از ۱ و ۲ می‌توان انتظار داشته باشیم که با فهمیدن ارتباط میان Z^T و معادله ژاکوبی، بتوانیم ذاتاً Z^{T^*} را روی Q نمایش دهیم.

بنابراین دیده می‌شود که نزدیکیمان برای فهم Z^{T^*}، موجب می‌شود که ابتدا Z^T را بر حسب معادله ژاکوبی بفهمیم. خواهیم دید همین که این کار انجام شد، این یک موضوع معمولی است به 'دوگان سازی' ساختارهایمان تا به آنچه آن را معادله ژاکوبی الحاقی می‌نامیم برسیم، یک نسخه یک فرم از معادله ژاکوبی که در اصل ماکسیمم برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین نمایان می‌شود.

بمنظور فهمیدن همزمان Z^T و Z^{T^*} از هموستارهای ارسمن گوناگونی استفاده می‌کنیم تا شکافتنی‌های لازم از فضاهای مماس بدست آید. ملاحظه می‌کنیم که بعنوان نگاشت، میدان‌های برداری Z^T و Z^{T^*}، بترتیب، $T(TTQ)$ و $T(T^*TQ)$−مقدار هستند. همچنین ملاحظه می‌کنیم که فضاهای مماس بر TTQ و T^*TQ، $\dim(Q)$ ۴−بعد هستند. هدفمان شکستن این فضاهای مماس به چهار قسمت است که بعد هر یک $\dim(Q)$ است. برای یک بحث عمومی از هموستار ارسمن به فصل III از کتاب [۹] می‌توان رجوع کرد. در صورت تمایل به گذشتن از این قسمت و تعقیب مطالب به قضایای ۵.٦ و ۵.۱۰ می‌توان رجوع کرد.

۵.۲. هموستارهای ارسمن. بیاد آوریم که یک هموستار ارسمن روی کلاف تاری موضعاً بدیهی $\pi : M \to B$، یک متمم HM به $VM \triangleq \ker(T\pi)$ در TM است. بنابراین $TM = HM \oplus VM$. بوسیله $\mathrm{hor} : TM \to TM$ افکنش افقی و با $\mathrm{ver} : TM \to TM$ افکنش عمودی را نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که برای هر $x \in M$، $T_x\pi | H_xM : H_xM \to T_{\pi(x)}B$ یک یکریختی است. معکوسش را با $\mathrm{hlft}_x : T_{\pi(x)}B \to H_xM$ نمایش می‌دهیم. اگر $\left(\left(x^1, \ldots, x^m\right), \left(y^1, \ldots, y^{n-m}\right)\right)$ مختصات کلافی

برای M باشد آنگاه داریم

$$\mathrm{hlft}_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)=\frac{\partial}{\partial x^a}+C_a^\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\quad,\quad a=1,\dots,m$$

این ضرایب هموستار C_a^α، $a=1,\dots,m$ و $\alpha=1,\dots,n-m$ را تعریف می‌کند.

یک هموستار ارسمن داده شده، فرم هموستار، یک فرم عمودی—مقدار ω است که تعریف شده توسط

$$\omega(v_x)=\mathrm{ver}(v_x)$$

فرم انحناء، دو فرم عمودی—مقدار Ω است تعریف شده توسط

$$\Omega(u_x,v_x)=-\omega\left([\mathrm{hor}X,\mathrm{hor}Y]\,(x)\right)$$

جایی که X و Y میدان‌های برداری هستند که بترتیب، u_x و v_x را بسط می‌دهند. ثابت می‌شود که Ω به توسیع‌ها وابسته نیست لذا تنها به مقادیر X و Y در $x\in M$ وابسته است.

۵.۳. هموستارهای خطی روی کلاف‌های برداری. در این بخش ساختارهای بخش ۳.۳ را تعمیم می‌دهیم.

اگر $\pi:E\to B$ یک کلاف برداری باشد آنگاه VE با کلاف ....[1]، $\pi^*\pi:\pi^*E\to B$ یکریخت است که تار روی e_b دقیقاً $\pi^{-1}(b)$ است. تعریف می‌کنیم یک یکریختی کلاف برداری $\mathrm{vlft}:\pi^*\mathrm{E}\to\mathrm{VE}$ توسط

$$\mathrm{vlft}(\widetilde{e}_b,e_b)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,(\widetilde{e}_b+te_b)$$

به تناسب علامت‌گذاری بخش ۳.۱، بجای $\mathrm{vlft}(\widetilde{e}_b,e_b)$ می‌نویسیم $\mathrm{vlft}_{\widetilde{e}_b}(e_b)$. یک هموستار ارسمن روی $\pi:E\to B$ خطی است اگر $K:=pr_2\circ(\mathrm{vlft})^{-1}\circ\mathrm{ver}:TE\to VE\to EX_ME\to E$ نگاشت کلاف برداری نسبت به کلاف‌های برداری $T\pi:TE\to TB$ و $\pi_{TE}:TE\to E$ باشد و اگر $K\circ\mathrm{vlft}=pr_2$ باشد. ثابت می‌شود یک هموستار ارسمن خطی است اگروتنهااگر ضرایب هموستار دارای شکل

[1] pull back

$C_a^\alpha(x,u) = A_{a\beta}^\alpha(x)u^\beta$ باشند جایی که (x,u) مختصات کلاف برداری هستند. این توابع موضعی $A_{a\beta}^\alpha$، $\alpha,\beta = ۱,\dots,n-m$، $a = ۱,\dots,m$ روی فضای پایه را تعریف می‌کند.

گیریم X یک میدان برداری روی فضای پایه B از یک کلاف برداری $\pi : E \to B$ باشد. یک میدان برداری خطی روی X، یک میدان برداری $Y : E \to TE$ است طوری که $T\pi \circ Y + \pi \circ X$ و نیز نگاشت کلاف برداری است. در مختصات (x,u) یک میدان برداری خطی Y روی X دارای شکل

$$Y = X^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + Y_\beta^\alpha(x)u^\beta\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (۵.۱)$$

است جایی که X^a مؤلفه‌های X هستند و برای توابع Y_β^α، $\alpha,\beta = ۱,\dots,n-m$ که روی فضای پایه موضعاً تعریف شده‌اند. شار یک میدان برداری خطی از یکریختی‌های کلاف برداری موضعی از E تشکیل شده است. لذا اگر $\pi^* : E^* \to B$ کلاف دوگان باشد و اگر v یک میدان برداری خطی روی E^* روی X باشد می‌توانیم تعریف کنیم $Y \oplus v$ بعنوان میدان برداری خطی روی $E \oplus E^*$ که شار آن خانواده یکریختی‌های کلاف برداری است که توسط جمع مستقیم آنهایی که بوسیله Y و v تولید شده‌اند، داده شده است. تعریف می‌کنیم یک تابع f_E روی $E \oplus E^*$ با رابطه $f_E\,(e_b \oplus \alpha_b) = \alpha_b.e_b$. اگر Y یک میدان برداری خطی روی X روی E باشد آنگاه وجود دارد یک میدان برداری خطی یکتا روی X روی E^*، با نمایش Y^*، با ویژگی

$$\mathfrak{L}_{Y\oplus Y^*} * f_E = ۰$$

در مختصات، اگر Y با (۵.۱) داده شده باشد آنگاه

$$Y^* = X^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} - Y_\beta^\alpha(x)\rho_\alpha\frac{\partial}{\partial \rho_\beta}$$

البته، وقتی $E = TM$ و $Y = X^T$ می‌بینیم که $Y^* = X^{T^*}$ که با تبصره ۳.۵ سازگار است.

اگر HE یک هموستار خطی روی کلاف برداری $\pi : E \to B$ باشد آنگاه یک هموستار خطی یکتا HE^* روی کلاف دوگان $\pi^* : E^* \to B$ که ارضاء می‌کند خاصیت

$$\mathrm{hlft}(X)^* = \mathrm{hlft}^*(X) \qquad (۵.۲)$$

جایی که X یک میدان برداری B، hlft ترفیع افقی تخصیص داده شده به HE و hlft^* ترفیع افقی تخصیص داده شده به HE^* می‌باشد [۹]. اگر $A_{a\beta}^\alpha(x)u^\beta$ ضرایب هموستار برای HE در مختصات

کلاف برداری (x,u) باشد آنگاه ضرایب هموستار برای HE^* در مختصات کلاف برداری دوگان (x,ρ)، $A^{\alpha}_{a\beta}(x)\rho_{\alpha}$ می‌باشد.

۵.۴. هموستار ارسمن روی $\pi_{TM} : TM \to M$ تخصیص داده شده به یک میدان برداری مرتبه دوم روی TM. گیریم S یک میدان برداری مرتبه دوم روی TM باشد. بنابراین $S : TM \to TTM$ دارای ویژگی $T_{\pi_{TM}} \circ S = \mathrm{id}_{TM}$ است. یک هموستار ارسمن روی $\pi_{TM} : TM \to M$ بطریق زیر تعریف می‌کنیم. در مختصات طبیعی (x,v) برای TM، یک میدان برداری مرتبه دوم S را می‌نویسیم با

$$S = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^i(x,v)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

در نظر گیریم یک پایه موضعی برای HTM که با میدان‌های برداری

$$\mathrm{hlft}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{۱}{۲}\frac{\partial S^j}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial v^j} \quad , \quad i = ۱, \ldots, n \qquad (۵.۳)$$

داده شده است. ثابت می‌شود که این تعریف خوش‌تعریف است. این هموستار ارسمن یک شکافتن $T_{v_x}TM$ به قسمت افقی و عمودی ارائه می‌دهد. قسمت افقی با T_xM از طریق hlft_{v_x} یکریخت است و قسمت عمودی با T_xM به روش طبیعی (آن فضای مماس به یک فضای برداری است) یکریخت است. بنابراین یکریختی طبیعی $T_{v_x}TM \cong T_xM \oplus T_xM$ را داریم و قرارداد می‌کنیم که بخش اول از این شکافتن افقی است و بخش دوم عمودی می‌باشد.

۵.۵. هموستار ارسمن روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ تخصیص داده شده به یک هموستار آفین روی Q. اگر Z فشانه ژئودزیک تعریف شده توسط هموستار آفین ∇ روی Q باشد آنگاه می‌توانیم از ساختار بخش قبلی برای تهیه یک هموستار ارسمن روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ استفاده کنیم. ثابت می‌شود در مختصات موضعی یک پایه برای HTQ داده شده توسط

$$\mathrm{hlft}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right) v^k \frac{\partial}{\partial v^j} \quad , \quad i = ۱, \ldots, n$$

این تعریف می‌کند 'hlft' بعنوان نگاشت ترفیع افقی برای هموستار که اینجا شرح می‌دهیم. همچنین با

'vlft' نگاشت ترفیع عمودی تخصیص داده شده به این هموستار را نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که داریم $Z(v_q) = \mathrm{hlft}_{v_q}(v_q)$.

هموستار ارسمن HTQ، فرم هموستار ω و فرم انحناء Ω را همچون بخش ۵.۲ تعریف می‌کند. مفید است که یک فرمول ربط‌دهنده Ω به تانسور انحناء R و تانسور تاب T داشته باشیم.

گزاره ۵.۱ گیریم ∇ یک هموستار آفین روی Q باشد و Ω فرم انحناء برای هموستار ارسمن تخصیص داده شده روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ باشد. فرمول زیر برقرار می‌ماند:

$$\Omega(\mathrm{hlft}_{v_q}(u_q), \mathrm{hlft}_{v_q}(w_q)) = \mathrm{vlft}_{v_q}(R(u_q, w_q)v_q) - \frac{۱}{۲}(\nabla_{u_q} T)(w_q, v_q) +$$

$$\frac{۱}{۲}(\nabla_{w_q} T)(u_q, v_q) - \frac{۱}{۲}T(T(u_q, w_q), v_q) + \frac{۱}{۴}(T(T(u_q, v_q), w_q) -$$

$$T(T(w_q, v_q), u_q))$$

بویژه اگر ∇ بدون تاب باشد آنگاه

$$\Omega(\mathrm{hlft}_{v_q}(u_q), \mathrm{hlft}_{v_q}(w_q)) = \mathrm{vlft}_{v_q}(R(u_q, w_q)v_q)$$

برهان. ساده‌ترین هر چند خسته‌کننده، برهان در مختصات است. گیریم X و Y میدان‌های برداری باشند که u_q و w_q را بترتیب توسیع می‌دهند. محاسبه نشان می‌دهد

$$\mathrm{ver}([\mathrm{hlft}X, \mathrm{hlft}Y]) = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} + \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial q^k} +$$

$$\frac{۱}{۲}(\Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk} -$$

$$\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl}))v^i X^k Y^l \frac{\partial}{\partial v^i}$$

اکنون با بکارگیری فرمول مختص (۴.۲) برای T و R و فرمول مختص (۴.۳) برای ∇T ثابت می‌شود که

$$\mathrm{ver}([\mathrm{hlft}X, \mathrm{hlft}Y])(v_q) = \mathrm{vlft}_{v_q}(R(w_q, u_q)v_q + R(w_q, v_q)u_q + R(v_q, u_q)w_q +$$

$$(\nabla_{u_q} T)\,(w_q, u_q) + \frac{۱}{۲}T(T(u_q, v_q), w_q) + \frac{۱}{۲}T(T(v_q, w_q), u_q)$$

نتیجه اکنون با استفاده از تساوی اول بیانچی (۴.۱) ثابت می‌شود.

■

بیاد آوریم که هموستار روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ یک یکریختی طبیعی از $T_{v_q}\mathrm{TQ}$ با $T_qQ \oplus T_qQ$ مانند بخش ۵.۴ تهیه می‌کند. این یک یکریختی از $T^*_{v_q}TQ$ با $T^*_qQ \oplus T^*_qQ$ ایجاد می‌کند. در مختصات پایه

$$dq^i \quad , \quad dv^i + \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right) v^k dq^j \quad , \quad i = ۱, \ldots, n \qquad (۵.۴)$$

سازگار شده با این ساختار که n بردار اول یک پایه برای قسمت افقی از $T^*_{v_q}TQ$ و n بردار دوم یک پایه برای قسمت عمودی تشکیل می‌دهند.

۵.۶. هموستار ارسمن روی $\pi_{T^*Q} : T^*Q \to Q$ تخصیص داده شده به یک هموستار آفین روی Q. می‌دانیم کلاف پادمماس از Q را به یک هموستار ارسمن القاء شده توسط ∇ مجهز کرد. با ملاحظه اینکه هموستار ارسمن HTQ القاء شده توسط یک هموستار آفین، یک هموستار خطی است این کار را انجام می‌دهیم. بنابراین داریم یک هموستار القاء شده HT^*Q روی $\pi_{T^*Q} : T^*Q \to Q$ که ترفیع افقی توسط (۵.۲) تعریف شده است. یک پایه مختص برای HT^*Q داده شده توسط

$$\mathrm{hlft}^*\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki} + \Gamma^j_{ki}\right) p_j \frac{\partial}{\partial p_k} \quad , \quad i = ۱, \ldots, n$$

ملاحظه می‌کنیم که hlft^* ترفیع افقی برای هموستار ارسمن روی $\pi_{T^*Q} : T^*Q \to Q$ را نشان می‌دهد. زیرکلاف عمودی دارای پایه

$$\mathrm{vlft}^*(\mathrm{d}q^i) = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad , \quad i = ۱, \ldots, n$$

است که نگاشت ترفیع عمودی vlft^* را تعریف می‌کند.

۵.۷. هموستار ارسمن روی $\pi_{TTQ} : TTQ \to TQ$ تخصیص داده شده به یک هموستار آفین روی Q. در این بخش القاء می‌کنیم یک هموستار روی $\pi_{TTQ} : TTQ \to TQ$ با استفاده از یک میدان برداری مرتبه دوم چنانکه در بخش ۵.۴ توضیح داده شد. هنوز یک میدان برداری مرتبه دوم روی

TTQ نداریم. ملاحظه می‌کنیم که Z^T میدان برداری روی TTQ است و می‌توانیم عبارت مختص‌اش را مشخص کنیم که

$$Z^T = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{jk} v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i} + w^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} v^j v^k u^l + \Gamma^i_{jk} w^j v^k + \Gamma^i_{kj} w^j v^k \right) \frac{\partial}{\partial w^i} \quad (۵.۵)$$

این میدان برداری تقریباً مرتبه دوم است. برای مرتبه دوم ساختنش، از پیچیدگی متعارف $I_Q : TTQ \to TTQ$ تشریح شده در بخش ۳.۵ و لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۵.۲ $I_Q^* Z^T$ یک میدان برداری مرتبه دوم روی TTQ است.

برهان. یک محاسبه با استفاده از عبارت مختص برای I_Q و Z^T نتیجه می‌دهد.

$$I_Q^* Z^T = u^i \frac{\partial}{\partial q^i} + w^i \frac{\partial}{\partial v^i} - \Gamma^i_{jk} u^j u^k \frac{\partial}{\partial u^i} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial q^l} v^l u^j u^k + \Gamma^i_{jk} u^k w^j + \Gamma^i_{kj} u^k w^j \right) \frac{\partial}{\partial w^i} \quad (۵.۶)$$

که لم را ثابت می‌کند.

■

اکنون می‌توانیم از روند بخش ۵.۴ برای تولید یک هموستار روی $\pi_{TTQ} : TTQ \to TQ$ استفاده کنیم. اجازه دهید این هموستار را با $H(TTQ)$ نشان دهیم. ملاحظه می‌کنیم این هموستار یک شکافتن

$$T_{X_{v_q}} TTQ \simeq T_{v_q} TQ \oplus T_{v_q} TQ \quad (۵.۷)$$

برای $X_{v_q} \in T_{v_q} TQ$، بوجود می آورد. همچنین، هموستار HTQ روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ توضیح داده شده در بخش ۵.۵ یک شکافتن $T_{v_q} TQ \simeq T_q Q \oplus T_q Q$ را می‌دهد. بنابراین، داریم

$$T_{X_{v_q}} TTQ \simeq T_q Q \oplus T_q Q \oplus T_q Q \oplus T_q Q \quad (۵.۸)$$

در این شکافتن دو مؤلفه اول، زیرفضای افقی و دو مؤلفه دوم زیرفضای عمودی هستند. در درون هر جفت، قسمت اول افقی و قسمت دوم عمودی است.

اکنون اجازه دهید یک پایه از میدان‌های برداری روی TTQ که با شکافتن (۵.۸) سازگارند بنویسیم. برای بدست آوردن یک عبارت مختص برای یک پایه از این هموستار، از عبارت مختص (۵.۶) برای

$I_Q^* Z^T$ استفاده می‌کنیم. یک پایه می‌نویسیم که با شکافتن $T_{v_q}TQ$ از سازگار است. بردارهای پایه منتج برای $H(TTQ)$ هستند.

$$\mathrm{hlft}^T\left(\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)v^k\frac{\partial}{\partial v^j}\right)=\frac{\partial}{\partial q^i}-$$

$$\tfrac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)v^k\tfrac{\partial}{\partial v^j}-\tfrac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)u^k\tfrac{\partial}{\partial w^j}-$$

$$\tfrac{۱}{۲}\left(\tfrac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial q^k}u^lv^k+\tfrac{\partial\Gamma^j_{li}}{\partial q^k}u^lv^k+\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)w^k-\right.$$

$$\left.\tfrac{۱}{۲}\left(\Gamma^k_{il}+\Gamma^k_{li}\right)\left(\Gamma^j_{km}+\Gamma^j_{mk}\right)u^mv^l\right)\tfrac{\partial}{\partial w^j}\quad,\quad i=۱,\ldots,n$$

$$\mathrm{hlft}^T\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)=\frac{\partial}{\partial v^i}-\frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)u^k\frac{\partial}{\partial w^j}\quad,\quad i=۱,\ldots,n$$

که n بردار پایه اول تشکیل یک پایه برای قسمت افقی از $H_{X_{v_q}}(TTQ)$ و n بردار دوم تشکیل یک پایه برای قسمت عمودی از $H_{X_{v_q}}(TTQ)$، نسبت به شکافتن $H_{X_{v_q}}(TTQ)\simeq T_qQ\oplus T_qQ$، می‌دهند. از نماد hlft^T برای ارجاع به ترفیع افقی برای هموستار روی $\pi_{TTQ}:TTQ\to TQ$ استفاده می‌کنیم. همچنین با vlft^T ترفیع عمودی روی این کلاف برداری را نشان می‌دهیم. می‌توانیم یک پایه برای زیرکلاف عمودی از $\pi_{TTQ}:TTQ\to TQ$ بدست می‌آوریم که با شکافتن $T_{v_q}TQ$ سازگار است بدست آوریم. ثابت می‌شود که میدان‌های برداری

$$\mathrm{hlft}^T\left(\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)v^k\frac{\partial}{\partial v^j}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i}-\frac{۱}{۲}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)v^k\frac{\partial}{\partial w^j}\quad,\quad i=۱,\ldots,n$$

$$\mathrm{vlft}^T\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)=\frac{\partial}{\partial w^i}\quad,\quad i=۱,\ldots,n$$

این ویژگی را دارند که n بردار اول قسمت افقی از $V_{X_{v_q}}TTQ$ را تولید می‌کند و n بردار دوم قسمت عمودی از $V_{X_{v_q}}TTQ$ را تولید می‌کنند.

تبصره ۵.۳ ۱. ساختار در این بخش در حقیقت می‌تواند با یک میدان برداری مرتبه دوم

دلخواه ساخته شود. یعنی اگر S یک میدان برداری مرتبه دوم روی TQ باشد، آنگاه $I_Q^* S^T$ یک میدان برداری مرتبه دوم روی TTQ است. این میدان برداری مرتبه دوم آنگاه یک هموستار روی $TTQ \to TQ$: π_{TTQ} القاء می‌کند. بوضوح بنابراین این ساختار می‌تواند تکرار شود و لذا یک هموستار روی kاُمین کلاف مماس $T^kQ \to T^{k-1}Q$: $\pi_{TT^{k-1}Q}$ تولید می‌کند ($k \geq 2$). این بنابراین یک یکریختی از $T_X T^k Q$ با جمع مستقیم $T_qQ \oplus \cdots \oplus T_qQ$، 2^k نسخه از T_qQ، تولید می‌کند جایی که $X \in T^kQ$ و $q = \pi_{TQ} \circ \cdots \circ \pi_{TT^{k-1}Q}(X)$.

۵.۸ هموستار ارسمن روی $T^*TQ \to TQ$: π_{T^*TQ} تخصیص داده شده به یک هموستار آفین روی Q. همانند کلاف مماس TQ که به یک هموستار ارسمن مجهز شد می‌توان برای کلاف پادمماس انجام داد. برای ساختن این هموستار ملاحظه می‌کنیم که هموستار $H(TTQ)$ روی $TTQ \to TQ$: π_{TTQ} یک هموستار خطی است و لذا وجود دارد یک هموستار بطور طبیعی القاء شده روی $T^*TQ \to TQ$: π_{T^*TQ} که ترفیع افقی‌اش با (۵.۲) تعریف شده است. این هموستار را با $H(T^*TQ)$ نشان می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که این یک شکافتن

$$T_{\Lambda_{v_q}} T^*TQ \simeq T_{v_q}TQ \oplus T^*_{v_q}TQ$$

بوجود می‌آورد که $\Lambda_{v_q} \in T^*_{v_q}TQ$. هموستار بخش ۵.۵ روی $TQ \to Q$: π_{TQ} یک شکافتن $T_{v_q}TQ \simeq T_qQ \oplus T_qQ$ را بوجود می‌آورد و لذا یک شکافتن $T^*_{v_q}TQ \simeq T^*_qQ \oplus T^*_qQ$ را داریم. این بنابراین ایجاد می‌کند شکافتن

$$T_{\Lambda_{v_q}} T^*TQ \simeq T_qQ \oplus T_qQ \oplus T^*_qQ \oplus T^*_qQ$$

دو مؤلفه اول این شکافتن بخش افقی فضا برداری هستند و دو مؤلفه دوم بخش عمودی هستند. برای هر جفت، مؤلفه اول افقی و مؤلفه دوم عمودی است.

اکنون اجازه دهید یک پایه برای میدان‌های برداری روی T^*TQ بنویسیم که سازگار با شکافتن است که اکنون تشریح شد. در ابتدا مشخص می‌کنیم که یک پایه برای زیرکلاف افقی هست

$$\mathrm{hlft}^{T^*}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right) v^k \frac{\partial}{\partial v^j}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i} -$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)v^k\tfrac{\partial}{\partial v^j}+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial q^l}v^l\beta_j+\tfrac{\partial\Gamma^j_{ki}}{\partial q^l}v^l\beta_j+\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)\alpha_j-\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^l_{im}+\Gamma^l_{mi}\right)\left(\Gamma^j_{lk}+\Gamma^j_{kl}\right)v^m\beta_j\right)\tfrac{\partial}{\partial\alpha_k}+\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)\beta_j\tfrac{\partial}{\partial\beta_k}\ ,\ \ i=1,\dots,n$$

$$\mathrm{hlft}^{T^*}\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)=\frac{\partial}{\partial v^i}-\frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)\beta_j\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\quad,\quad i=1,\dots,n$$

n بردار پایه اول بخش افقی از $T_{\Lambda_{v_q}}T^*TQ$ را تولید می‌کند و n بردار دوم بخش عمودی را تولید می‌کنند. نماد hlft^{T^*} برای ارجاع به نگاشت ترفیع افقی روی کلاف $\pi_{T^*TQ}:T^*TQ\to TQ$ استفاده می‌شود و همچنین نگاشت ترفیع عمودی با vlft^{T^*} نشان داده می‌شود. همچنین می‌توان یک پایه برای $\ker\left(T\pi_{T^*TQ}\right)=V\left(T^*TQ\right)$ نوشت که سازگار با شکافتن از $T^*_{v_q}TQ$ است. با استفاده از (۵.۴) یک پایه

$$\mathrm{vlft}^{T^*}(\mathrm{d}q^i)=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\quad,\quad i=1,\dots,n$$
$$\mathrm{vlft}^{T^*}\left(\mathrm{d}v^i+\frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}\right)v^k\mathrm{d}q^j\right)=\frac{\partial}{\partial\beta_i}+\frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}\right)v^k\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\quad i=1,\dots,n$$

تولید می‌شود که n بردار اول یک پایه برای قسمت افقی از $V_{\Lambda_{v_q}}T^*TQ$ و n بردار دوم یک پایه برای قسمت عمودی هستند.

۵.۹. نمایش‌های Z^T و Z^{T^*}. در بخش‌های قبلی پایه‌های موضعی هموستارهای متعددی که ساخته شد، تهیه کردیم. با این مختصات موضعی در دست و با عبارت‌های مختص (۵.۵) و (۵.۱۲) (در ادامه می‌آید) برای Z^T و Z^{T^*}، یک موضوع معمولی است که شکل $Z^T(X_{v_q})$ و $Z^{T^*}(\Lambda_{v_q})$ در این شکافتن‌ها را مشخص شود جایی که $X_{v_q}\in TTQ$ و $\Lambda_{v_q}\in T^*TQ$.

در ابتدا به Z^T نگاه می‌کنیم. در این حالت بیاد آوریم که هموستار $H(TTQ)$ روی $\pi_{TTQ}:TTQ\to TQ$ و هموستار HTQ روی $\pi_{TQ}:TQ\to Q$ ترکیبشان شکافتن

$$T_{X_{v_q}}TTQ\simeq T_qQ\oplus T_qQ\oplus T_qQ\oplus T_qQ$$

را می‌دهد جایی که $X_{v_q}\in T_{v_q}TQ$. در اینجا قراردادمان را ادامه می‌دهیم که دو مؤلفه اول به مؤلفه افقی برای هموستار $H(TTQ)$ روی $\pi_{TTQ}:TTQ\to TQ$ و دو مؤلفه دوم به مؤلفه عمودی ارجاع می‌دهد. با استفاده از شکافتن (۵.۷) اجازه دهید بنویسیم $X_{v_q}\in T_{v_q}TQ$ را بعنوان $u_{v_q}\oplus w_{v_q}$ برای یک

$u_{v_q}, w_{v_q} \in T_qQ$. ملاحظه می‌کنید که از علامت‌گذاری معمولی‌امان در نوشتن بردارهای مماس در T_qQ با زیرنویس q منحرف شده‌ایم و در عوض از زیرنویس v_q استفاده می‌شود. این استفاده از علامت‌گذاری لازم (و راحت) است برای بازتاب حقیقت آنکه این بردارها وابسته‌اند به جایی که در TQ هستیم و نه فقط در Q. یک محاسبه نتیجه زیر را ثابت می‌کند جایی که Ω فرم انحناء برای هموستار HTQ است.

گزاره ۵.۴ $Z^T\left(u_{v_q} \oplus w_{v_q}\right) = v_q \oplus \circ \oplus w_{v_q} \oplus \left(-\Omega\left(\mathrm{hlft}_{v_q}\left(u_{v_q}\right), \mathrm{hlft}_{v_q}\left(v_q\right)\right)\right)$.

در نوشتن این فرمول، Ω را ملاحظه می‌کنیم که مقادیرش را در $V_{v_q}TQ \simeq T_qQ$ می‌گیرد.

از این نمایش Z^T برای بدست آوردن یک ارتباط میان حل‌های معادله ژاکوبی و منحنی‌های انتگرال از Z^T استفاده می‌کنیم. برای انجام این کار در ابتدا لم زیر ثابت می‌شود. یک شکل کلی‌تر از آنچه نیاز داریم در این لم بیان می‌شود اما این کلیت در بخش ۷ مفید خواهد بود.

لم ۵.۵ گیریم Y یک LIC^∞ میدان برداری روی Q باشد و فرض می‌کنیم $c: I \to Q$ یک منحنی LAD است که ارضاء می‌کند $\nabla_{c'(t)}c'(t) = Y(t, c(t))$ و با $\sigma: I \to TQ$ میدان برداری مماس بر c (یعنی $\sigma = c'$) را نشان می‌دهیم. گیریم $X: I \to TTQ$ یک میدان برداری LAC در طول σ باشد و نشان می‌دهیم $X(t) = X_۱(t) \oplus X_۲(t) \in T_{c(t)}Q \oplus T_{c(t)}Q$. آنگاه بردار مماس بر منحنی $t \mapsto X(t)$ داده شده توسط $c'(t) \oplus Y(t, c(t)) \oplus \widetilde{X}_۱(t) \oplus \widetilde{X}_۲(t)$ جایی که

$$\widetilde{X}_۱(t) = \nabla_{c'(t)}X_۱(t) + \frac{۱}{۲}T\left(X_۱(t), c'(t)\right) \quad , \quad \widetilde{X}_۲(t) = \nabla_{c'(t)}X_۲(t) + \frac{۱}{۲}T\left(X_۲(t), c'(t)\right)$$

برهان. در مختصات منحنی $t \mapsto X(t)$ دارای شکل

$$\left(q^i(t), \dot{q}^j(t), X_۱^k(t), X_۲^l(t) - \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^l_{mr} + \Gamma^l_{rm}\right)\dot{q}^m(t)X_۱^r(t)\right)$$

بردار مماس بر این منحنی بنابراین داده شده $a.e$ با

$$\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(Y^i - \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial v^i} + \dot{X}_۱^i\frac{\partial}{\partial u^i} + \left(\dot{X}_۲^i - \frac{۱}{۲}\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^l X_۱^j - \frac{۱}{۲}\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^l X_۱^j\right.$$
$$\left. - \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right)\left(Y^k - \Gamma^k_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right)X_۱^j - \frac{۱}{۲}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right)\dot{q}^k X_۱^j\right)\frac{\partial}{\partial w^i}$$

یک محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که این میدان برداری مماس دارای نمایش

$$c'(t) \oplus Y(t, c(t)) \oplus \left(\nabla_{c'(t)} X_1(t) + \frac{1}{2} T\left(X_1(t), c'(t)\right)\right) \oplus \left(\nabla_{c'(t)} X_2(t) + \frac{1}{2} T\left(X_2(t), c'(t)\right)\right)$$

که لم را ثابت می‌کند.

■

اکنون نتیجه اصلی‌امان را ثابت می‌کنیم که منحنی‌های انتگرال Z^T را با حل‌های معادله ژاکوبی مرتبط می‌سازد.

قضیه ۵.۶ گیریم ∇ یک هموستار آفین روی Q و Z فشانه ژئودزیک آن باشد. گیریم $c : I \to Q$ یک ژئودزیک با $t \mapsto \sigma(t) \triangleq c'(t)$ منحنی انتگرال مربوطه Z باشد. گیریم $a \in I$ و $u, w \in T_{c(a)}Q$ و تعریف می‌کنیم میدان‌های برداری $U, W : I \to TQ$ در طول c با پرسیدن اینکه $t \mapsto U(t) \oplus W(t) \in T_{c(t)}Q \oplus T_{c(t)}Q \simeq T_{\sigma(t)}TQ$ منحنی انتگرال Z^T با شرط اولیه $u \oplus w \in T_{c(a)}Q \oplus T_{c(a)}Q \simeq T_{\sigma(a)}TQ$ باشد. آنگاه U و W دارای خواص زیراند:

(i). U در معادله ژاکوبی صدق می‌کند.

(ii). $W(t) = \nabla_{c'(t)} U(t) + \frac{1}{2} T\left(U(t), c'(t)\right)$

برهان. سراسر برهان نقاط در TTQ را بعنوان جمع مستقیم از بردارهای مماس بر Q با استفاده از هموستار روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ القاء شده توسط ∇ نشان می‌دهیم. بردار مماس بر منحنی $t \mapsto U(t) \oplus W(t)$ در t باید برابر $Z^T(U(t) \oplus W(t))$ باشد. با لم ۵.۵ و گزاره ۵.۴ این معنی می‌دهد که

$$\nabla_{c'(t)} U(t) = W(t) - \frac{1}{2} T(U(t), c'(t))$$

$$\nabla_{c'(t)} W(t) = -\Omega\left(\mathrm{hlft}_{c'(t)}\left(U(t)\right), \mathrm{hlft}_{c'(t)}\left(c'(t)\right)\right) - \frac{1}{2} T(W(t), c'(t)) \qquad (۵.۹)$$

اولین این معادلات (ii) را ثابت می‌کند. برای اثبات (i) از اولین معادلات (۵.۹) مشتق کواریانت می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد، با استفاده از دومین معادلات (۵.۹)،

$$\nabla^2_{c'(t)} U(t) = -\Omega\left(\mathrm{hlft}_{c'(t)}(U(t)), \mathrm{hlft}_{c'(t)}(c'(t))\right) -$$

$$\frac{1}{2}T(W(t),c'(t)) - \frac{1}{2}\nabla_{c'(t)}(T(U(t),c'(t))) \qquad (5.10)$$

اکنون از گزاره ۵.۱ می‌بینیم که

$$-\Omega\left(\mathrm{hlft}_{c'(t)}(U(t)),\mathrm{hlft}_{c'(t)}(c'(t))\right) = -R(U(t),c'(t))c'(t) -$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{c'(t)}T\right)(U(t),c'(t)) + \frac{1}{4}T(T(U(t),c'(t)),c'(t)) \qquad (5.11)$$

ترکیب (۵.۱۰) و (۵.۱۱) و اولین معادلات (۵.۹) می‌دهد

$$\nabla^2_{c'(t)}U(t) + R(U(t),c'(t))c'(t) + \nabla_{c'(t)}\left(T\left(U(t),c'(t)\right)\right) = 0$$

که بطور ساده معادله ژاکوبی است که این (i) را ثابت می‌کند.

■

تبصره ۵.۷ اکنون اجازه دهید به نتایج شبیه مرتبط با Z^{T^*} نگاه کنیم. در ابتدا فرمول مختص برای این میدان برداری می‌دهیم:

$$Z^{T^*} = v^i\frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma^i_{jk}v^jv^k\frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial q^i}v^jv^k\beta_l\frac{\partial}{\partial\alpha_i} - \left(\alpha_i - \Gamma^l_{ij}v^j\beta_l - \Gamma^l_{ji}v^j\beta_l\right)\frac{\partial}{\partial\beta_i} \qquad (5.12)$$

برای ایجاد تجزیه برای Z^{T^*} به مقداری علامت‌گذاری اضافی نیازمندیم. ثابت کنید $v_q \in T_qQ$ و ملاحظه می‌کنیم برای $u_q \in T_qQ$ داریم $\Omega\left(\mathrm{hlft}_{v_q}(u_q),\mathrm{hlft}_{v_q}(v_q)\right) \in V_{v_q}TQ \simeq T_qQ$. لذا ملاحظه می‌کنیم $u_q \mapsto \Omega\left(\mathrm{hlft}_{v_q}(u_q),\mathrm{hlft}_{v_q}(v_q)\right)$، بعنوان یک درون‌ریختی از T_qQ در نظر گرفته می‌شود. اجازه دهید درون‌ریختی دوگان را با $\beta_q \mapsto \Omega^*\left(\mathrm{hlft}_{v_q}(\beta_q),\mathrm{hlft}_{v_q}(v_q)\right)$ نشان دهیم.

در مورد تانسورهای تاب و انحناء به علامت‌گذاری بیشتری نیازمندیم. برای $u_q, v_q \in T_qQ$ و $\alpha_q \in T^*_qQ$، تعریف می‌کنیم $R^*(\alpha_q,u_q)v_q \in T^*_qQ$ توسط

$$\langle R^*\left(\alpha_q,u_q\right)v_q; w_q\rangle = \langle\alpha_q; R\left(w_q,u_q\right)v_q\rangle \quad , \quad w_q \in T_qQ$$

و بطور مشابه تعریف می‌کنیم $T^*\left(\alpha_q,u_q\right) \in T^*_qQ$ توسط

$$\langle T^*\left(\alpha_q,u_q\right); w_q\rangle = \langle\alpha_q; T\left(w_q,u_q\right)\rangle \quad , \quad w_q \in T_qQ$$

با این تانسورهای تعریف شده، می‌گوییم که میدان یک فرم $\alpha : I \to T^*Q$ در طول یک ژئودزیک $c : I \to Q$ از ∇، یک حل معادله ژاکوبی الحاقی است اگر

$$\nabla^{۲}_{c'(t)}\alpha(t) + R^*\left(\alpha(t), c'(t)\right)c'(t) - T^*\left(\nabla_{c'(t)}\alpha(t), c'(t)\right) = ۰$$

برای $t \in I$.

■

اکنون اجازه دهید بیاد آوریم شکافتن‌های تخصیص داده شده به هموستار $H(T^*TQ)$ روی $\pi_{T^*TQ} : T^*TQ \to TQ$ که در بخش ۵.۸ تشریح شد. برای $\Lambda_{v_q} \in T^*_{v_q}TQ$ داریم

$$T_{\Lambda_{v_q}}T^*TQ \simeq T_qQ \oplus T_qQ \oplus T^*_qQ \oplus T^*_qQ$$

بنابراین می‌نویسیم $\Lambda_{v_q} \in T^*_{v_q}TQ$ بعنوان $\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}$ برای یک $\alpha_{v_q}, \beta_{v_q} \in T^*Q$، جایی که دوباره از علامت‌گذاری غیر معمول استفاده می‌کنیم. این بنابراین فرمول زیر برای Z^{T^*} نسبت به شکافتن‌امان ارائه می‌دهد.

گزاره ۵.۸ $Z^{T^*}\left(\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) = v_q \oplus ۰ \oplus \left(\Omega^*\left(\mathrm{vlft}_{v_q}\left(\beta_{v_q}\right), \mathrm{hlft}_{v_q}\left(v_q\right)\right), -\alpha_{v_q}\right)$.

برای تشریح ارتباط میان منحنی‌های انتگرال از Z^{T^*} و حل‌های معادله ژاکوبی الحاقی، شبیه به لم ۵.۵ را داریم.

لم ۵.۹ گیریم Y یک میدان برداری LIC^∞ روی Q باشد و فرض می‌کنیم که $c : I \to Q$ منحنی LAD ارضاء کننده $\nabla_{c'(t)}c'(t) = Y(t, c(t))$ باشد و نشان می‌دهیم با $\sigma : I \to TQ$ میدان برداری مماس از c (یعنی $\sigma = c'$). گیریم $\Lambda : I \to T^*TQ$ میدان یک فرم LAC در طول σ باشد و نشان می‌دهیم $\Lambda(t) = \Lambda^{۱}(t) \oplus \Lambda^{۲}(t) \in T^*_{c(t)}Q \oplus T^*_{c(t)}Q \simeq T^*_{\sigma(t)}TQ$. آنگاه بردار مماس بر منحنی $t \mapsto \Lambda$ داده شده توسط $c'(t) \oplus Y(t, c(t)) \oplus \widetilde{\Lambda}^{۱}(t) \oplus \widetilde{\Lambda}^{۲}(t)$ جایی که

$$\widetilde{\Lambda}^{۱}(t) = \nabla_{c'(t)}\Lambda^{۱}(t) - \frac{۱}{۲}T^*\left(\Lambda^{۱}(t), c'(t)\right)\ ,\ \widetilde{\Lambda}^{۲}(t) = \nabla_{c'(t)}\Lambda^{۲}(t) - \frac{۱}{۲}T^*\left(\Lambda^{۲}(t), c'(t)\right)$$

برهان. در مختصات منحنی $t \mapsto \Lambda$ دارای شکل

$$\left(q^i(t), \dot{q}^j(t), \Lambda^1_k(t) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{kr} + \Gamma^m_{rk}\right)\dot{q}^r(t)\Lambda^2_m(t), \Lambda^2_i(t)\right)$$

بردار مماس بر این منحنی بنابراین داده شده توسط

$$\dot{q}^j\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(Y^i - \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial v^i} + \left(\dot{\Lambda}^1_i + \frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial q^l}\dot{q}^l\dot{q}^k\Lambda^2_j + \frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma^j_{ki}}{\partial q^l}\dot{q}^l\dot{q}^k\Lambda^2_j + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right)\left(Y^k - \Gamma^k_{lm}\dot{q}^l\dot{q}^m\right)\Lambda^2_j + \frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{ik} + \Gamma^j_{ki}\right)\dot{q}^k\Lambda^2_j\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_i} + \Lambda^2_i\frac{\partial}{\partial\beta^i}$$

یک محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که این میدان برداری مماس دارای نمایش

$$c'(t) + Y(t, c(t)) \oplus \left(\nabla_{c'(t)}\Lambda^1(t) - \frac{1}{2}T^*\left(\Lambda^1(t), c'(t)\right)\right) \oplus$$

$$\left(\nabla_{c'(t)}\Lambda^2(t) - \frac{1}{2}T^*\left(\Lambda^2(t), c'(t)\right)\right)$$

می‌باشد که لم را ثابت می‌کند.

■

اکنون نتیجه اصلی‌امان که منحنی‌های انتگرال Z^T را با حل‌های معادله ژاکوبی الحاقی مربوط می‌سازد ثابت می‌کنیم.

قضیه ۵.۱۰ گیریم ∇ یک هموستار آفین روی Q باشد و Z فشانه ژئودزیک آن باشد. گیریم $c : I \to Q$ یک ژئودزیک باشد و $t \mapsto \sigma(t) \triangleq c'(t)$ منحنی انتگرال مربوطه Z باشد. گیریم $a \in I$ و $\theta, \lambda \in T^*_{c(a)}Q$ و تعریف می کنیم میدان‌های یک فرم $\theta, \Lambda : I \to T^*Q$ در طول c با پرسیدن آنکه $t \mapsto \theta(t) \oplus \Lambda(t) \in T^*_{c(t)}Q \oplus T^*_{c(t)}Q \simeq T^*_{\sigma(t)}TQ$ منحنی انتگرال از Z^{T^*} با شرط اولیه $\theta \oplus \lambda \in T^*_{c(a)}Q \oplus T^*_{c(a)}Q \simeq T^*_{\sigma(a)}TQ$ باشد. آنگاه θ و Λ خواص زیر را دارند:

(i) Λ در معادله ژاکوبی الحاقی صدق می‌کند.

(ii) $\theta(t) = -\nabla_{c'(t)}\Lambda(t) + \frac{1}{2}T^*\left(\Lambda(t), c'(t)\right)$.

برهان. سراسر برهان نقاط در T^*TQ را بعنوان جمع مستقیم از بردارهای پادمماس بر Q با استفاده از هموستار روی $\pi_{TQ} : TQ \to Q$ القاء شده توسط ∇ نشان می‌دهیم. بردار مماس بر منحنی

$t \mapsto \theta(t) \oplus \Lambda(t)$ در t باید برابر $Z^{T^*}(\theta(t) \oplus \Lambda(t))$ باشد. از لم ۵.۹ و گزاره ۵.۸ این معنی می‌دهد که

$$\nabla_{c'(t)}\theta(t) = \Omega^*\left(\mathrm{vlft}_{c'(t)}(\Lambda(t)), \mathrm{hlft}_{c'(t)}(c'(t))\right) + \frac{1}{2}T^*(\theta(t), c'(t))$$

$$\nabla_{c'(t)}\Lambda(t) = -\theta(t) + \frac{1}{2}T^*(\Lambda(t), c'(t)) \qquad (5.13)$$

دومین این معادلات (i) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ii)، از دومین معادلات (۵.۱۳) مشتق کواریانت می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد، با استفاده از اولین معادلات (۵.۱۳)،

$$\nabla^2_{c'(t)}\Lambda(t) = -\Omega^*\left(\mathrm{hlft}_{c'(t)}(\Lambda(t)), \mathrm{hlft}_{c'(t)}(c'(t))\right) - \frac{1}{2}T^*(\theta(t), c'(t)) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{c'(t)}T^*\right)(\Lambda(t), c'(t)) + \frac{1}{2}T^*\left(\nabla_{c'(t)}\Lambda(t), c'(t)\right) \qquad (5.14)$$

اکنون از گزاره ۵.۱ می‌بینیم که

$$\Omega^*\left(\mathrm{vlft}_{c'(t)}(\Lambda(t)), \mathrm{hlft}_{c'(t)}(c'(t))\right) = R^*(\Lambda(t), c'(t))\, c'(t) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{c'(t)}T^*\right)(\Lambda(t), c'(t)) - \frac{1}{4}T^*\left(T^*(\Lambda(t), c'(t)), c'(t)\right) \qquad (5.15)$$

ترکیب (۵.۱۴) و (۵.۱۵) و دومین معادلات (۵.۱۳) نتیجه می‌دهد

$$\nabla^2_{c'(t)}\Lambda(t) + R^*(\Lambda(t), c'(t))\, c'(t) - T^*\left(\nabla_{c'(t)}\Lambda(t), c'(t)\right) = 0$$

که معادله ژاکوبی الحاقی است و این (i) را ثابت می‌کند.

■

تبصره ۵.۱۱ ۱. ملاحظه می‌کنیم که معادله ژاکوبی الحاقی بهمراه خود معادلات ژئودزیک، دینامیک غیربدیهی از میدان برداری همیلتونی Z^{T^*} دارند. همچنین ملاحظه می‌کنیم که همیلتونی در شکافتن‌امان از T^*TQ بطور ساده با $\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \mapsto \alpha_{v_q}.v_q$ داده شده است. چون اصل ماکسیمم از همیلتونی در بیانش استفاده می‌کند، این شکل ساده از همیلتونی بسیار مفید است.

۲. می‌توانیم مضمون گزاره ۳.۴ را در حالتی که میدان برداری، فشانه ژئودزیک است بطریق زیر بیان کنیم. از علامت‌گذاری گزاره‌های ۵.۴ و ۵.۸ استفاده می‌کنیم. گیریم $u_{v_q} \oplus w_{v_q} \in T_{v_q}TQ$ و

$\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \in T^*_{v_q}TQ$. گیریم $\mathrm{ver}\left(Z^T\left(u_{v_q} \oplus w_{v_q}\right)\right)$ قسمت عمودی از $Z^T\left(u_{v_q} \oplus w_{v_q}\right)$ باشد که بعنوان یک بردار در $T_qQ \oplus T_qQ$ در نظر می‌گیریم. بروش مشابه، $\mathrm{ver}\left(Z^{T^*}\left(\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right)\right)$ را بعنوان یک بردار در $T^*_qQ \oplus T^*_qQ$ در نظر می‌گیریم. یک محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که

$$\left\langle \mathrm{ver}\left(Z^{T^*}\left(\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right)\right); u_{v_q} \oplus w_{v_q} \right\rangle + \left\langle \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}; \mathrm{ver}\left(Z^T\left(u_{v_q} \oplus w_{v_q}\right)\right)\right\rangle = ۰$$

■

معادله ژاکوبی و معادله ژاکوبی الحاقی دارای رابطه نزدیک‌تری هستند وقتی ∇ هموستار لوی—چویتا $\overset{g}{\nabla}$ تخصیص داده شده به یک متریک ریمانی g است. با $g^b : TQ \to T^*Q$ نگاشت کلاف برداری تخصیص داده شده به $(۰, ۲)$ تانسور متقارن g را نمایش می‌دهیم. چون g ناتباهیده است، یک متریک کلاف برداری القاء شده روی T^*Q وجود دارد که با $g^{-۱}$ نشان می‌دهیم. بوسیله $g^\# : T^*Q \to TQ$ نگاشت کلاف برداری تخصیص داده شده به $(۰, ۲)$ تانسور $g^{-۱}$ را نشان می‌دهیم، که g^b و $g^\#$ معکوس یکدیگرند. نتیجه زیر را داریم.

گزاره ۵.۱۲ گیریم g متریک ریمانی روی Q بهمراه $\overset{g}{\nabla}$ هموستار لوی—چویتا باشد. اگر $c : I \to Q$ یک ژئودزیک از $\overset{g}{\nabla}$ باشد آنگاه یک میدان یک فرم $\lambda : I \to T^*Q$ در طول c یک حل معادله ژاکوبی است اگروتنهااگر میدان برداری $g^\# \circ \lambda$ در طول c یک معادله ژاکوبی باشد.

برهان. با استفاده از حقیقت $\overset{g}{\nabla} g = ۰$ محاسبه می‌کنیم

$$\nabla^۲_{c'(t)} g^\#(\lambda(t)) = g\#\left(\nabla^۲_{c'(t)}\lambda(t)\right) \qquad (۵.۱۶)$$

اکنون با استفاده از (۴.۴) و برای $u \in T_{c(t)}Q$ محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\langle R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t); u\rangle &= \langle \lambda(t); R\left(u, c'(t)\right) c'(t)\rangle \\ &= g\left(R(u, c'(t))c'(t), g^\#(\lambda(t))\right) \\ &= g\left(R\left(g^\#\left(\lambda(t)\right), c'(t)\right) c'(t), u\right) \\ &= \left\langle g^b\left(R\left(g^\#(\lambda(t)), c'(t)\right) c'(t)\right); u\right\rangle\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که

$$R^{\#}\left(R^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t)\right)=R\left(g^{\#}\left(\lambda(t)\right), c'(t)\right) c'(t) \tag{۵.۱۷}$$

ترکیب (۵.۱۶) و (۵.۱۷) نتیجه می‌دهد

$$\nabla_{c'(t)}^{۲} g^{\#}(\lambda(t))+R\left(g^{\#}(\lambda(t)), c'(t)\right) c'(t)=g^{\#}\left(\nabla_{c'(t)}^{۲} \lambda(t)+R^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t)\right)$$

و اکنون نتیجه بدست می آید چون $\overset{g}{\nabla}$ بی‌تاب است و $g^{\#}$ یک یکریختی کلاف برداری است.

■

۵.۱۰. نمایش $(\mathrm{vlft}(X))^{\mathrm{T}^*}$ این بخش را با تهیه فرمولی برای $(\mathrm{vlft}(X))^{\mathrm{T}^*}$ که X یک میدان برداری روی Q است کامل می‌کنیم. برای دادن چنین فرمولی به مقداری علامت‌گذاری نیازمندیم. برای $\alpha_q \in T_qQ$، **تعریف می‌کنیم** $(\nabla X)^*(\beta_q) \in T_q^*Q$ بوسیله

$$\left\langle(\nabla X)^{*}\left(\alpha_{q}\right) ; u_{q}\right\rangle=\left\langle\alpha_{q} ; \nabla_{u_{q}} X\right\rangle$$

اکنون علامت‌گذاری استفاده شده در گزاره ۵.۸ را اختیار می‌کنیم. برهان در مختصات با استفاده از فرمول مختص (۳.۳) انجام می‌شود.

گزاره ۵.۱۳ اگر X یک میدان برداری روی Q باشد آنگاه

$$(\mathrm{vlft}(X))^{T^{*}}\left(\alpha_{v_{q}} \oplus \beta_{v_{q}}\right)=\circ \oplus X(q) \oplus\left(\frac{۱}{۲} T^{*}\left(\beta_{v_{q}}, X(q)\right)-(\nabla X)^{*}\left(\beta_{v_{q}}\right)\right) \oplus \circ$$

تبصره ۵.۱۴ نمایش $(\mathrm{vlft}(X))^{T^*}$ دارای تعبیر هندسی بیشتری به طریق زیر است. گیریم X^{T^*} ترفیع پادمماس از X به یک میدان برداری روی T^*Q است. این میدان برداری بنابراین نسبت به تجزیه مطابق با هموستار روی $\pi_{T^*Q} : T^*Q \to Q$ داده شده در بخش ۵.٦ می‌تواند نوشته شود. اگر چنین کنیم، خواهیم داشت

$$X^{T^{*}}\left(\alpha_{q}\right)=X(q) \oplus\left(\frac{۱}{۲} T^{*}\left(\alpha_{q}, X(q)\right)-(\nabla X)^{*}\left(\alpha_{q}\right)\right)$$

لذا می‌بینیم که این با توضیح‌امان در بخش ۳.۴ در ارتباط میان $(\mathrm{vlft}(X))^{T^*}$ و $\mathrm{vlft}\left(X^{T^*}\right)$ سازگار است.

■

بخش II. کنترل بهینه

۶. اصل ماکسیمم برای سیستم‌های آفین کنترلی روی خمینه‌ها

۶.۱ سیستم‌های آفین کنترل. اجازه دهید در ابتدا عمومیت‌های مربوط به سیستم‌های آفین کنترلی را بحث کنیم. یک سیستم آفین کنترلی یک سه‌گانه $\Sigma = (M, \mathfrak{F}, U)$ است جایی که M خمینه $n-$بعدی جدایی‌پذیر، همبند و هاسدورف و $\mathfrak{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ یک گردایه از میدان‌های برداری C^∞ روی M و $U : M \to 2^{\mathbb{R}^m}$ که به هر $x \in M$ یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^m$ تخصیص می‌دهد. با $U_x \subset \mathbb{R}^m$ تصویر $x \in M$ تحت U را نشان می‌دهیم. U را نگاشت دامنه ورودی می‌نامیم. می‌گوییم U ثابت است اگر یک زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^m$ موجود باشد طوری که $U_x = S$ برای هر $x \in M$. قطع نظر از جزئیات، بحث می‌کنیم در سیستم‌های کنترلی

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + u^a(t) f_a(x(t))$$

روی M جایی که تابع کنترلی u ارضاء می کند $u(t) \in U_{x(t)}$.

تبصره ۶.۱ ملاحظه می‌کنیم که استفاده از مجموعه‌های کنترلی که وابسته به فضای فاز هستند غیراستاندارد می‌باشد. اما چیزی به پیچیدگی مسئله‌های کنترل که بررسی می‌کنیم اضافه نمی‌کند. گرچه، شبیه به یک تعمیم غریب بنظر می‌رسد اما معقول است زیرا منطقی نیست که انتظار داشته باشیم مقادیر ممکن برای کنترل‌ها عموماً مستقل از فضای فاز باشند.

■

اکنون باید طبیعت دقیق کنترل‌ها برای چنین سیستمی را معین کنیم. بیاد آورید (بطور مثال [۱۶]) که اگر $u : I \to U$ یک نگاشت اندازه‌پذیر به فضای متریک جدایی‌پذیر U باشد و اگر $f : U \times M \to TM$

یک نگاشت پیوسته باشد که دو مؤلفه دوم C^∞ است و $f(u_\circ, x) \in T_xM$ برای هر $u_\circ \in U$ آنگاه نگاشت $(t,x) \mapsto f(u(t),x)$ یک میدان برداری کاراتئودوری LIC^∞ است. لذا یک نگاشت اندازه‌پذیر $u : I \to \mathbb{R}^m$ داده شده می‌توانیم تعریف کنیم یک میدان برداری کاراتئودوری LIC^∞ روی $I \times M$ بوسیله

$$\mathfrak{F}_u(t,x) = f_\circ(x) + u^a(t) f_a(x)$$

یک مسیر کنترل شده برای سیستم آفین کنترلی $\Sigma = (M, \mathfrak{F}, U)$ یک جفت $\gamma = (u,c)$ است جایی که $u : I \to \mathbb{R}^m$ اندازه‌پذیر و $c : I \to M$ یک منحنی انتگرال برای میدان برداری LIC^∞ $\mathfrak{F}_u$ است و آنکه $u(t) \in U_{c(t)}$ برای تقریباً همه $t \in I$. اگر در این تعریف بازه I فشرده باشد آنگاه γ را یک کمان کنترل شده می‌نامیم. با $\mathrm{Ctraj}(\Sigma)$ مجموعه مسیرهای کنترل شده برای Σ و با $\mathrm{Carc}(\Sigma)$ مجموعه کمان‌های کنترل شده را نشان می‌دهیم.

۶.۲. مسئله کنترل بهینه. اکنون یک سیستم آفین کنترلی $\Sigma = (M, \mathfrak{F}, U)$ را بررسی می کنیم اما اکنون یک تابع هزینه F برای Σ می‌سازیم که تعریف شده است روی

$$\mathfrak{D}(\Sigma) = \{(u,x) \in R^m \times M | u \in U_x\}$$

گرچه، تنها به مقادیر F روی این مجموعه علاقه‌مندیم، اما مناسب است که فرض کنیم F تحدید یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}^m \times M$ به $\mathbb{R}$ است و آنکه $x \mapsto F(u,x)$ از رده C^∞ برای هر $u \in \mathbb{R}^m$ است. ملاحظه می‌کنیم که تابع $(t,x) \mapsto F(u(x),x)$ یک تابع کاراتئودوری LIC^∞ است اگر $u : I \to \mathbb{R}^m$ اندازه‌پذیر باشد. خواهیم گفت که $\gamma = (u,c) \in \mathrm{Ctraj}(\Sigma)$، F—مقبول است اگر تابع $t \mapsto F(u(t), c(t))$ موضعاً انتگرال‌پذیر باشد. با $\mathrm{Ctraj}(\Sigma, F)$، زیرمجموعه از $\mathrm{Ctraj}(\Sigma)$ متشکل از مسیرهای کنترل شده F—مقبول را نشان می‌دهیم و با $\mathrm{Carc}(\Sigma, F)$ مجموعه کمان‌های کنترل شده F—مقبول را نشان می‌دهیم.

برای $r = (u,c) \in \mathrm{Carc}(\Sigma, F)$ که u و c روی $I = [a,b]$ تعریف شده‌اند، تعریف می‌کنیم

$$J^{\Sigma,F}(\gamma) = \int_a^b F(u(t), c(t))dt$$

گیریم $S_\circ$ و S_1 زیرخمینه‌های مجزا از M باشند. نشان می‌دهیم

$$\mathrm{Carc}\,(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash) = \left\{ \gamma = (u,c) \in \mathrm{Carc}\,(\Sigma, F) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{جایی که } c,u \text{ تعریف شده‌اند روی } [a,b] \text{ برای} \\ \text{یک } a,b \in R \quad , \quad c(a) \in S_\circ, c(b) \in S_\backslash \end{array} \right\}$$

بطریقی مشابه، برای $a, b \in \mathbb{R}$ با $a < b$، تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Carc}\,(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash, [a,b]) = \left\{ \gamma = (u,c) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{جایی که } c,u \text{ روی } [a,b] \text{ تعریف شده است.} \\ c(a) \in S_\circ, c(b) \in S_\backslash \end{array} \right\}$$

مسئله‌های مرتبط با راه بهینه متصل‌کننده دو خمینه در زیر بیان شده است.

تعریف ۶.۲ گیریم $\Sigma = (M, \mathfrak{F}, U)$ یک سیستم آفین کنترلی باشد و گیریم F تابع هزینه برای Σ باشد و $S_\circ$ و $S_\backslash$ زیرخمینه‌های مجزا از M باشند.

(i) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash)$ یک حل از $\mathfrak{P}(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash)$ است اگر $J^{\Sigma,F}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma,F}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\,(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash)$.

(ii) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash, [a,b])$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash)$ است اگر $J^{\Sigma,F}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma,F}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\,(\Sigma, F, S_\circ, S_\backslash, [a,b])$.

■

یک حالت ویژه از این مسئله اتفاق می‌افتد وقتی $S_\circ = \{x_\circ\}$ و $S_\backslash = \{x_\backslash\}$ برای دو نقطه $x_\circ, x_\backslash \in M$.

۶.۳. اصل ماکسیمم. اکنون که مسئله کنترل بهینه بیان شد، اجازه دهید شرایط لازم برای حل‌های این مسئله را بیان کنیم. گیریم $\Sigma = (M, \mathfrak{F}, U)$ یک سیستم آفین کنترلی باشد و F تابع هزینه برای Σ باشد. یک زیرمجموعه $\mathfrak{D}^*(\Sigma)$ از $U \times T^*M$ تعریف می‌کنیم توسط

$$\mathfrak{D}^*(\Sigma) = \{(u, \alpha_x) \in U \times T^*M | u \in U_x\}$$

همیلتونی $H^{\Sigma,F}$ را بعنوان یک تابع روی $\mathfrak{D}^*(\Sigma)$ تعریف می‌کنیم توسط

$$H^{\Sigma,F}(u, \alpha_x) = F(u,x) + \alpha_x.\, (f_\circ(x) + u^a f_a(x))$$

از این، همیلتونی مینیمم را تعریف می کنیم که تابعی روی T^*M تعریف شده با

$$H_{\min}^{\Sigma,F}(\alpha_x) = \inf_{u\in U_x} H^{\Sigma,F}(u,\alpha_x)$$

و می‌پذیریم قرارداد $H_{\min}^{\Sigma,F}(\alpha_x) = -\infty$ اگر برای هر $C \in \mathbb{R}$ موجود باشد $u \in U_x$ طوری که $H^{\Sigma,F}(u,\alpha_x) < C$. اگر $u \in U_x$ دارای ویژگی $H^{\Sigma,F}(u,\alpha_x) = H_{\min}^{\Sigma,F}(\alpha_x)$ باشد آنگاه می‌گوییم $H_{\min}^{\Sigma,F}$ فهمیده می‌شود توسط u در α_x. اگر $\gamma = (u,c) \in \mathrm{Ctraj}(\Sigma,F)$ آنگاه $H_u^{\Sigma,F}(t,\alpha_x) \mapsto H^{\Sigma,F}(u(t),\alpha_x)$ یک تابع LIC^∞ است. لذا وابسته به این تابع، میدان برداری همیلتونی LIC^∞، $X_{H_u^{\Sigma,F}}$، روی T^*M را داریم.

اگر $\gamma = (u,c) \in \mathrm{Ctraj}(\Sigma,F)$ که u و c روی بازه I تعریف شده‌اند آنگاه میدان یک فرم LAC، $\chi : I \to T^*M$ در طول c مینیمم کننده برای (Σ,F) در طول u است اگر

$$H^{\Sigma,F}(u(t),\chi(t)) \leq H_{\min}^{\Sigma,F}(\chi(t))$$

برای تقریباً همه $t \in I$.

اکنون اصل ماکسیمم را بیان می‌کنیم که آن را بکار خواهیم برد.

قضیه ۶.۳ (اصل ماکسیمم) گیریم $\Sigma = (M,\mathfrak{F},U)$ یک سیستم آفین کنترلی باشد، F تابع هزینه برای Σ و گیریم S_0 و S_1 زیرخمینه‌های مجزا از M باشند. فرض می‌کنیم $\gamma = (u,c) \in \mathrm{Carc}(\Sigma,F)$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}(\Sigma,F,S_0,S_1)$ باشد. آنگاه وجود دارد یک میدان یک فرم LAC، $\chi : [a,b] \to T^*M$، در طول c و یک ثابت $\chi_0 \in \{0,1\}$ با خواص

(i) $\chi(a) \in \mathrm{ann}\left(T_{c(a)}S_0\right), \chi(b) \in \mathrm{ann}\left(T_{c(b)}S_1\right)$.

(ii) $t \mapsto \chi(t)$ یک منحنی انتگرال از $X_{H_u^{\Sigma,\chi_0 F}}$ می‌باشد.

(iii) χ مینیمم کننده برای $(\Sigma,\chi_0 F)$ در طول u است.

(iv) $\chi_0 = 1$ یا $\chi(a) \neq 0$.

اگر U ثابت باشد آنگاه داریم

(v) وجود دارد یک ثابت $C \in \mathbb{R}$ طوری که $H^{\Sigma,\chi_\circ F}(u(t),\chi(t)) = C$.

اگر U ثابت باشد و اگر $\gamma = (u,c)$ یک حل از $\mathfrak{P}(\Sigma, F, S_\circ, S_1)$ باشد آنگاه شرط (v) می‌تواند جایگزین شود با

(vi) $H^{\Sigma,\chi_\circ F}(u(t),\chi(t)) = 0$.

تبصره ۶.۴ ۱. اصل ماکسیمم که اینجا بیان شد یک حالت خاص از آنچه توسط سُسمان[1] بیان شده، می‌باشد.

۲. اگر $S_\circ = \{x_\circ\}$ آنگاه $\chi(a)$ نامحدود است (بجز شرط (iv)). بطور مشابه، اگر $S_1 = \{x_1\}$ آنگاه $\chi(b)$ نامحدود است.

۳. چون میدان برداری همیلتونی $X_{H_u^{\Sigma,F}}$ در متغیرهای تاری، خطی است (تبصره ۳.۲، قسمت ۲)، شرط (iv) در قضیه اصل ماکسیمم ادعا می‌کند $(\chi_\circ, \chi(t))$ برای هر $t \in [a,b]$ غیر صفر است.

■

۷. اصل ماکسیمم روی خمینه‌های با هموستار آفین

اکنون از مزایای کار در بخش اول استفاده می‌کنیم برای تهیه یک انتقال خلاصه از اصل ماکسیمم برای سیستم‌هایی که میدان برداری پیشامد، فشانه ژئودزیک تخصیص داده شده به یک هموستار آفین است و میدان برداری کنترلش، میدان‌های برداری عمودی ترفیع داده شده‌اند.

۷.۱. سیستم‌های کنترلی هموستار آفین. برای دقیق‌تر بودن در بررسی سیستم‌های کنترلی که در نظر می‌گیریم، تعریف می‌کنیم یک سیستم کنترلی هموستار آفین یک چهارگانه $\Sigma_{\text{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ است جایی که Q یک خمینه هموار، بعد متناهی، جدایی‌پذیر و هاسدورف (فضای پیکربندی)، ∇ یک هموستار آفین هموار روی Q، $\mathfrak{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ یک گردایه از میدان‌های برداری هموار روی Q است و $U : Q \to 2^{\mathbb{R}^m}$ یک نگاشت بتوی مجموعه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^m$ است. همچون

[1] sussmann

سیستم‌های آفین کنترلی، نشان می‌دهیم $U_q = U(q) \subset \mathbb{R}^m$ و همچنین می‌گوییم که U ثابت است اگر یک زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^m$ موجود باشد با ویژگی $U_q = S$ برای هر $q \in Q$. سیستم‌های کنترلی که اینجا بررسی می‌شود دارای شکل زیر می‌باشند

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = u^a(t) Y_a(c(t)) \qquad (۷.۱)$$

برای اینکه این را به یک سیستم آفین کنترلی تبدیل کنیم، فضای فاز باید TQ باشد چون (۷.۱) یک سیستم کنترلی از مرتبه دوم است. ثابت می‌شود که معادله مرتبه اول مناسب روی TQ هست

$$\dot{v}(t) = Z(v(t)) + u^a(t) \mathrm{vlft}\left(Y_a\right)(v(t))$$

جایی که Z فشانه ژئودزیک از ∇ است. بنابراین از یک سیستم کنترلی هموستار آفین $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$، یک سیستم آفین کنترلی $\Sigma = \left(TQ, \{Z, \mathrm{vlft}\left(Y_۱\right), \ldots, \mathrm{vlft}\left(Y_m\right)\}, U^T\right)$ بدست می‌آوریم جایی که $U^T : TQ \to ۲^{\mathbb{R}^m}$ تعریف شده با $U^T(v_q) = U(q)$.

تبصره ۷.۱ مشاهده می‌کنیم که همه داده‌های مسئله برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین، روی خمینه پیکربندی Q تعریف شده است. وقتی این سیستم را به یک سیستم کنترلی آفین درمی‌آوریم، بنابراین با ترفیع داده‌های مسئله به TQ در یک روش طبیعی، این کار را انجام می‌دهیم. لذا می‌توانیم از همه ابزار توسعه داده شده برای سیستم‌های آفین کنترلی استفاده کنیم.

■

ملاحظه می‌کنیم اگر $u : I \to \mathbb{R}^m$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه نگاشت $Z_a^{\mathfrak{Y}} : I \times TQ \to TTQ$ داده شده توسط

$$Z_u^{\mathfrak{Y}}(t, v_q) = Z(v_q) + u^a(t) \mathrm{vlft}\left(Y_a(q)\right)$$

یک میدان برداری کاراتئودوری مرتبه دوم LIC^∞ است. لذا این میدان برداری دارای منحنی انتگرال $\sigma : J \to TQ$، برای $J \subset I$ بقدر کافی کوچک، گذرا از $v_q \in TQ$ است. بنابراین وجود خواهد داشت یک منحنی LAD، $c : J \to Q$ با ویژگی $c'(t) = \sigma(t)$ برای هر $t \in J$ که از q با سرعت اولیه v_q می‌گذرد.

یک مسیر کنترل شده برای $\Sigma_{\rm aff}=(Q,\nabla,\mathfrak{Y},U)$ یک جفت $\gamma=(u,c)$ است جایی که $u:I\to\mathbb{R}^m$ اندازه‌پذیر، $c:I\to Q$ LAD بهمراه c' که منحنی انتگرال $Z_u^{\mathfrak{Y}}$ است و $u(t)\in U_{c(t)}$ برای تقریباً همه $t\in I$. اگر بازه I فشرده باشد آنگاه γ یک کمان کنترل شده نامیده می‌شود. با $\operatorname{Ctraj}(\Sigma_{\rm aff})$ مجموعه مسیرهای کنترل شده از $\Sigma_{\rm aff}$ را نشان می‌دهیم و با $\operatorname{Carc}(\Sigma_{\rm aff})$ مجموعه کمان‌های کنترل شده را نشان می‌دهیم.

اجازه دهید یک ویژگی از سیستم‌های کنترلی هموستار آفین بیان کنیم که به مسئله کنترل بهینه کمک خواهد کرد.

لم ۷.۲ گیریم $\Sigma_{\rm aff}=(Q,\nabla,\mathfrak{Y},U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد بهمراه $(u,c)\in\operatorname{Ctraj}(\Sigma_{\rm aff})$ تعریف شده روی $I\subset\mathbb{R}$. برای $\lambda>0$ تعریف می کنیم $I_\lambda=\left\{\frac{1}{\lambda}t|t\in I\right\}$ و تعریف می‌کنیم $\tilde{u}:I_\lambda\to R^m$ و $\tilde{c}:I_\lambda\to Q$ توسط $\tilde{u}(t)=\lambda^2u(\lambda t)$ و $\tilde{c}(t)=c(\lambda t)$. آنگاه، اگر $\tilde{u}(t)=U_{\tilde{c}(t)}$ برای $t\in I_\lambda$ باشد. آنگاه $(\tilde{u},\tilde{c})\in\operatorname{Ctraj}(\Sigma_{\rm aff})$.

برهان. محاسبه می‌کنیم

$$\nabla_{\tilde{c}'(t)}\tilde{c}'(t)=\lambda^2\nabla_{c'(\lambda t)}c'(\lambda t)=\lambda^2u(\lambda t)=\tilde{u}(t)$$

■

۷.۲. مسئله کنترل بهینه برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین. البته، چون یک سیستم کنترلی هموستار آفین، یک سیستم آفین کنترلی تعریف می‌کند، می‌توان مسئله کنترل بهینه روی TQ را دقیقاً صورت‌بندی کرد چنانکه در بخش ۶.۲ انجام شد. بهرحال، می‌خواهیم که یک رده از توابع هزینه انتخاب کنیم که بازتاب می‌کند حقیقت آنکه داده‌های مسئله برای سیستم کنترلی هموستار آفین روی Q تعریف شده است.

گیریم $\Sigma_{\rm aff}=(Q,\nabla,\mathfrak{Y},U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد. در ابتدا تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{D}_Q(\Sigma_{\rm aff})=\{(u,q)\in\mathbb{R}^m\times Q|u\in U_q\}$$

یک $(0,r)$ میدان تانسوری $\mathbb{R}^m$—وابسته روی Q، یک نگاشت $A:\mathbb{R}^m\times Q\to T_r^0(TQ)$ است طوری که

DTF۱. A پیوسته است.

DTF۲. $q \mapsto A(u,q)$ یک $(0,r)$ میدان تانسوری هموار برای هر $u \in \mathbb{R}^m$ است.

ملاحظه می‌کنیم که بواقع تنها به مقادیر میدان‌های تانسوری $\mathbb{R}^m$—وابسته روی $\mathfrak{D}_Q\left(\Sigma_{\text{aff}}\right)$ علاقه‌مندیم. بهرحال، برای سادگی فرض می‌کنیم که آنها روی تمام $\mathbb{R}^m$ تعریف شده‌اند. گیریم $r \geq 0$ و $A : \mathfrak{D}_Q\left(\Sigma_{\text{aff}}\right) \to T_r^\circ(TQ)$ یک $(0,r)$ میدان تانسوری متقارن $\mathbb{R}^m$—وابسته روی Q باشد. گیریم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع از رده C^∞ و $\mathfrak{A} = (A, f)$ و تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{D}_{TQ}\left(\Sigma_{\text{aff}}\right) = \left\{(u, v_q) \in R^m \times TQ | u \in U_q\right\}$$

یک تابع هزینه برای Σ_{aff} یک تابع $F_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{D}_{TQ}\left(\Sigma_{\text{aff}}\right) \to \mathbb{R}$ از شکل زیر می‌باشد.

$$F_{\mathfrak{A}}\left(u, v_q\right) = f\left(A(u,q)\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right)$$

برای $v_1, \ldots, v_{r-1} \in T_qQ$ تعریف می‌کنیم $\widehat{A}\left(v_1, \ldots, v_{r-1}\right) \in T_q^*Q$ توسط

$$\left\langle \widehat{A}\left(v_1, \ldots v_{r-1}\right); u\right\rangle = A\left(u, v_1, \ldots, v_{r-1}\right) \quad , \quad u \in T_qQ$$

می‌پذیریم قرارداد اینکه اگر A، $(0,0)$ میدان تانسوری باشد (یعنی A یک تابع است) آنگاه $\widehat{A} = 0$. لم زیر یک شکل از میدان برداری همیلتونی معینی که با آن مواجه می‌شدیم تهیه می‌کند.

لم ۷.۳ گیریم A، $(0,r)$ میدان تانسوری متقارن روی Q باشد و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ از رده C^∞ باشد و در شکافتن از T^*TQ تعریف شده در بخش ۵.۸ فرض می‌کنیم یک تابع تعریف شده توسط

$$\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \mapsto f\left(A\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right)$$

میدان برداری همیلتونی روی T^*TQ تولید شده توسط این تابع دارای تجزیه

$$f'\left(A\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right)\left(0 \oplus 0 \oplus \left(-\nabla A\left(v_q, \ldots, v_q\right) - \frac{r}{2} T^*\left(\widehat{A}\left(v_q, \ldots, v_q\right), v_q\right)\right) \oplus \left(-r\widehat{A}\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right)\right)$$

برهان. در مختصات طبیعی برای T^*TQ تابع همیلتونی تعریف شده در لم داده شده توسط

$$((q,v), (\alpha, \beta)) \mapsto f\left(A_{j_1 \cdots j_r} v^{j_1} \cdots v^{j_r}\right)$$

میدان برداری همیلتونی مربوطه در مختصات طبیعی داده شده توسط

$$f'\left(A_{j_۱\cdots j_r}v^{j_۱}\cdots v^{j_r}\right)\left(\frac{-\partial A_{j_۱\cdots j_r}}{\partial q^i}v^{j_۱}\dots v^{j_r}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}-rA_{ij_۲\dots j_r}v^{j_۲}\dots v^{j_r}\frac{\partial}{\partial\beta_i}\right)$$

اکنون این را در یک پایه سازگار با شکافتن از $T_{\Lambda_{v_q}}T^*TQ$ بیان می‌کنیم که بدست می آوریم

$$f'\left(A_{j_۱\cdots j_r}v^{j_۱}\cdots v^{j_r}\right)\left(-\left(\frac{\partial A_{j_۱\cdots j_r}}{\partial q^i}v^{j_۱}\dots v^{j_r}-\frac{r}{۲}\left(\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ki}\right)v^kA_{lj_۲\dots j_r}v^{j_۲}\dots v^{j_r}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_i}-\right.$$
$$\left.rA_{ij_۲\dots j_r}v^{j_۲}\dots v^{j_r}\left(\frac{\partial}{\partial\beta_i}+\frac{۱}{۲}\left(\Gamma^i_{kl}+\Gamma^i_{lk}\right)v^l\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\right)\right)$$

از این می‌بینیم که نمایش میدان برداری همیلتونی هست

$$\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\mapsto f'\left(A\left(v_q,\dots,v_q\right)\right)$$
$$\left(۰\oplus۰\oplus\left(-\nabla A\left(v_q,\dots,v_q\right)-\frac{r}{۲}T^*\left(\widehat{A}\left(v_q,\dots,v_q\right),v_q\right)\right)\oplus\left(-r\widehat{A}\left(v_q,\dots,v_q\right)\right)\right)$$

که این برهان را کامل می‌کند.

■

اکنون وضع مناسبی است که لم زیر را بیان کنیم هرچند تا بخش ۸ استفاده نمی‌شود. آن چنانکه در مورد $(۰,r)$ میدان‌های تانسوری متقارن صحبت شد، می‌توان در مورد $(r,۰)$ میدان‌های تانسوری متقارن صحبت کرد. و برای این دومی علامت‌گذاری شبیه به قبلی، تولید می‌کنیم. یعنی، اگر B یک $(r,۰)$ میدان تانسوری متقارن باشد و اگر $\alpha^۱,\dots,\alpha^{r-۱}\in T_q^*Q$ تعریف می‌کنیم $\widehat{B}\left(\alpha^۱,\dots,\alpha^{r-۱}\right)\in T_qQ$ توسط

$$\left\langle\beta;\widehat{B}\left(\alpha^۱,\dots,\alpha^{r-۱}\right)\right\rangle=B\left(\beta,\alpha^۱,\dots,\alpha^{r-۱}\right)\quad,\quad\beta\in T_q^*Q$$

اکنون لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۷.۴ گیریم B، $(r,۰)$ میدان تانسوری متقارن روی Q باشد و تعریف می‌کنیم یک تابع روی T^*TQ توسط

$$\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\mapsto B\left(\beta_{v_q},\dots,\beta_{v_q}\right)$$

میدان برداری همیلتونی تولید شده توسط این تابع دارای نمایش

$$۰\oplus\left(r\widehat{B}\left(\beta_{v_q},\dots,\beta_{v_q}\right)\right)\oplus\left(\nabla B\left(\beta_{v_q},\dots,\beta_{v_q}\right)-\frac{r}{۲}T^*\left(\beta_{v_q},\widehat{B}\left(\beta_{v_q},\dots,\beta_{v_q}\right)\right)\right)\oplus۰$$

برهان. در مختصات طبیعی برای T^*TQ تابع در لم دارای شکل زیر می‌باشد

$$((q,v),(\alpha,\beta)) \mapsto B^{j_1\cdots j_r}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_r}$$

بنابراین میدان برداری همیلتونی تخصیص داده شده به این تابع، داده شده در مختصات طبیعی توسط

$$rB^{rj_2\cdots j_r}\beta_{j_2}\cdots\beta_{j_r}\frac{\partial}{\partial v^i}-\frac{\partial B^{j_1\cdots j_r}}{\partial q^i}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_r}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$$

اگر این را در شکافتن از $T_{\Lambda_{v_q}}T^*TQ$ بنویسیم تجزیه زیر از میدان برداری همیلتونی را بدست می آوریم

$$0\oplus\left(r\hat{B}\left(\beta_{v_q},\ldots,\beta_{v_q}\right)\right)\oplus\left(\nabla B\left(\beta_{v_q},\ldots,\beta_{v_q}\right)-\frac{r}{2}T^*\left(\beta_{v_q},\hat{B}\left(\beta_{v_q},\ldots,\beta_{v_q}\right)\right)\right)\oplus 0$$

که لم را ثابت می‌کند.

■

گیریم $F_{\mathfrak{F}}$ تابع هزینه برای Σ_{aff} باشد چنانکه در بالا تعریف شد. می‌گوییم که $\gamma=(u,c)\in\mathrm{Ctraj}(\Sigma)$، $F_{\mathfrak{A}}$—مقبول است اگر تابع $t\mapsto F_{\mathfrak{A}}\left(u(t),c'(t)\right)$ موضعاً انتگرال‌پذیر باشد. مجموعه مسیرهای کنترلی $F_{\mathfrak{A}}$—مقبول را با $\mathrm{Ctraj}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}})$ نشان می‌دهیم و مجموعه کمان‌های کنترلی $F_{\mathfrak{A}}$—مقبول را با $\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}})$ نشان می‌دهیم.

برای $\gamma=(u,c)\in\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}}\right)$ جایی که u و c روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند، تعریف می‌کنیم

$$J^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}}}(\gamma)=\int_a^b F_{\mathfrak{A}}\left(u(t),c'(t)\right)dt$$

برای $q_0,q_1\in Q$ و $v_{q_0}\in T_{q_0}Q$ و $v_{q_1}\in T_{q_1}Q$ نشان می‌دهیم

$$\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}},v_{q_0},v_{q_1})=\left\{\gamma=(u,c)\in\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}})\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{جایی که } u \text{ و } c \text{ روی } [a,b] \text{ تعریف}\\ \text{شده‌اند برای یک } a,b\in\mathbb{R}.\\ c'(a)=v_{q_0},c'(b)=v_{q_1}\end{array}\right\}$$

برای $a,b\in\mathbb{R}$ ثابت شده که $a<b$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}},v_{q_0},v_{q_1},[a,b])=\left\{\gamma=(u,c)\in\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}},F_{\mathfrak{A}})\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{جایی که } u \text{ و } c \text{ روی } [a,b] \text{ است.}\\ c'(a)=v_{q_0},c'(b)=v_{q_1}\end{array}\right\}$$

زیرمجموعه بالا از کمان‌های کنترل شده مطابق با سرعت و مکان اولیه و نهایی هستند. برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین، همچنین با معنی است که تنها مکان اولیه و نهایی ثابت باشند در حالی که سرعت‌ها آزادند. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1) = \left\{ \gamma = (u,c) \in \mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{جایی که } u \text{ و } c \text{ روی } [a,b] \text{ تعریف} \\ \text{شده‌اند برای یک } a,b \in \mathbb{R}. \\ c(a) = q_0, c(b) = q_1 \end{array} \right\}$$

و برای $a,b \in \mathbb{R}$ که $a < b$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1, [a,b]) = \left\{ \gamma = (u,c) \in \mathrm{Carc}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{جایی که } u \text{ و } c \text{ روی } [a,b] \text{ تعریف} \\ \text{شده‌اند. } c(a) = q_0, c(b) = q_1 \end{array} \right\}$$

اکنون مسئله‌های کنترلی که بررسی می کنیم تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۵ گیریم $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد، گیریم $F_{\mathfrak{A}}$ یک تابع هزینه برای Σ_{aff} باشد و گیریم $q_0, q_1 \in Q$ و $v_{q_0} \in T_{q_0}Q$ و $v_{q_1} \in T_{q_1}Q$.

(i) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ یک حل از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ است اگر $J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$.

(ii) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}, [a,b]\right)$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ است اگر $J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}, [a,b]\right)$.

(iii) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$ یک حل از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$ است اگر $J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$.

(iv) یک کمان کنترل شده $\gamma_* \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1, [a,b]\right)$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$ است اگر $J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma_*) \leq J^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}(\gamma)$ برای هر $\gamma \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1, [a,b]\right)$.

■

تبصره ۷.۶ لم ۷.۲ برخی مسئله‌های بهینه ممکن را از بررسی شدن حذف می‌کند. برای مثال اگر نگاشت

دامنه ورودی U داده شده باشد توسط $U_q = \mathbb{R}^m$ برای هر $q \in Q$، آنگاه مسئله زمان بهینه راندن میان دو مکان بی‌معنی است. این هست بدلیل اینکه لم ۷.۲ ایجاب می‌کند که در این حالت با استفاده از کنترل‌های بزرگ، زمان انتقال از q_0 به q_1 را به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم، به شرط آنکه بتوان یک کمان کنترل شده متصل کننده نقاط یافت.

■

۷.۳. اصل ماکسیمم برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین. قبل از بیان اصل ماکسیمم برای سیستم‌هایی که در حال بررسی کردنیم، اجازه دهید به همیلتونی این سیستم‌ها نگاه کنیم. در این فرایند، از شکافتن T^*TQ که در گزاره ۵.۸ نشان داده شده استفاده می‌کنیم. لذا می‌نویسیم $\Lambda_{v_q} \in T^*_{v_q}TQ$ را بعنوان $\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}$ برای یک $\alpha_{v_q}, \beta_{v_q} \in T^*_qQ$. تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{D}^*_{TQ}\left(\Sigma_{\text{aff}}\right) = \left\{\left(u, \Lambda_{v_q}\right) \in \mathbb{R}^m \times T^*TQ | u \in U_q\right\}$$

همیلتونی برای یک سیستم کنترلی هموستار آفین Σ_{aff} بهمراه تابع هزینه $F_{\mathfrak{A}}$، تابع روی $\mathfrak{D}^*_{TQ}\left(\Sigma_{\text{aff}}\right)$ تعریف شده با رابطه زیر است

$$H^{\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}\left(U, \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) = F_{\mathfrak{A}}\left(u, v_q\right) + \alpha_{v_q}.v_q + u^a\left(\beta_{v_q}.Y_a(q)\right)$$

همیلتونی مینیمم بنابراین به روش معمولی تعریف شده توسط:

$$H^{\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}_{\min}\left(\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) = \inf_{u \in U_q} H^{\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}\left(u, \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right)$$

گیریم $\gamma = (u, c) \in \operatorname{Ctraj}\left(\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}\right)$ که u و c روی یک بازه I تعریف شده‌اند. یک میدان یک فرم LAD، $\lambda : [a, b] \to T^*Q$ در طول c مینیمم کننده برای $\left(\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}\right)$ در طول u است اگر

$$H^{\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}\left(u(t), \theta(t) \oplus \lambda(t)\right) \leq H^{\Sigma_{\text{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}_{\min}\left(\theta(t) \oplus \lambda(t)\right)$$

برای تقریباً هر $t \in I$ و جایی که

$$\theta(t) = \frac{۱}{۲}T^*\left(\lambda(t), c'(t)\right) - \nabla_{c'(t)}\lambda(t) - r\lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right), t \in [a, b]$$

قضیه ۷.۷ (اصل ماکسیمم برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین) گیریم $\Sigma_{\text{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد بهمراه $F_{\mathfrak{A}}$ یک تابع هزینه برای Σ_{aff} جایی که $\mathfrak{A} = (A, f)$. فرض کنیم

که $\gamma = (u, c) \in \mathrm{Carc}\,(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}})$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_{\circ}}, v_{q_{۱}}\right)$ باشد. آنگاه وجود دارد یک میدان یک فرم LAD، $\lambda : [a, b] \to T^*Q$ در طول c و یک ثابت $\lambda_\circ \in \{\circ, ۱\}$ با ویژگی

(i) برای تقریباً هر $t \in [a, b]$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{۲}_{c'(t)}\lambda(t) + R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right)c'(t) - T^*\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t), c'(t)\right) = \\
&\quad u^a(t)\left(\nabla Y_a\right)^*\left(\lambda(t)\right) + \lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\Big(\ \nabla A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right) - \\
&\quad r\left(\nabla_{c'(t)}\widehat{A}\right)\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right) - r(r-۱)u^a(t)\widehat{A}\left(Y_a\left(c(t)\right), c'(t), \ldots, c'(t)\right) + \\
&\qquad rT^*\left(\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right), c'(t)\right)\Big) - \\
&\quad r\lambda_\circ f''\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\left(\nabla A\left(c'(t), \ldots, c'(t); c'(t)\right) + \right. \\
&\qquad \left. ru^a(t)A\left(Y_a(c(t)), c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)
\end{aligned}
$$

(ii) λ مینیمم کننده برای $(\Sigma_{\mathrm{aff}}, \lambda_{\circ} F_{\mathfrak{A}})$ در طول u است.

(iii) $\lambda_{\circ} = ۱$ یا $\theta(a) \oplus \lambda(a) \neq \circ$.

با

$$
\theta(t) = \frac{۱}{۲}T^*\left(\lambda(t), c'(t)\right) - \nabla_{c'(t)}\lambda(t) - r\lambda_{\circ} f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right), t \in [a, b]
$$

اگر U ثابت باشد آنگاه داریم

(iv) وجود دارد ثابت $C \in \mathbb{R}$ طوری که $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}\left(u(t), \theta(t) \oplus \lambda(t)\right) = C$.

اگر U ثابت باشد و $\gamma = (u, c)$ یک حل از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_{\circ}}, v_{q_{۱}}\right)$ باشد آنگاه شرط (iv) جایگزین می‌شود با

(v) $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}\left(u(t), \theta(t) \oplus \lambda(t)\right) = \circ$.

اگر $\gamma = (u, c)$ یک حل از $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_{\circ}, q_{۱}\right)$ باشد آنگاه شرایط (i)—(iii) برقرار می‌ماند، بعلاوه، $\lambda(a) = \circ$ و $\lambda(b) = \circ$. اگر U ثابت باشد آنگاه شرط (iv) برقرار می‌ماند. اگر γ یک حل از

$\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_{\circ}, q_{1}\right)$ باشد و اگر U ثابت باشد آنگاه (v) برقرار می‌ماند.

برهان. هم‌ارزی شرایط در قضیه با آنهایی که در اصل ماکسیمم معمولی بعنوان قضیه ۶.۳ بیان شد، نشان خواهیم داد وقتی $S_{\circ}=\{v_{q_{\circ}}\}$ و $S_{1}=\{v_{q_{1}}\}$. در ابتدا میدان یک فرم λ در طول c را به منحنی انتگرال χ از میدان برداری همیلتونی با همیلتونی $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}$ ربط می‌دهیم چنانکه در اصل ماکسیمم بیان شد. ادعا می‌کنیم که منحنی

$$t \mapsto \Big(\tfrac{1}{2} T^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right)-\nabla_{c'(t)} \lambda(t)- \\ r \lambda_{\circ} f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right) \widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\Big) \oplus \lambda(t) \qquad (۷.۲)$$

χ را نسبت به شکافتن‌امان از $T^{*}_{c'(t)} TQ$ نشان می‌دهیم. برای این کار باید نشان دهیم (۷.۲) منحنی انتگرال از میدان برداری همیلتونی وابسته زمان با همیلتونی $\left(t, \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) \mapsto H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, \lambda_{\circ} F_{\mathfrak{A}}}\left(u(t), \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right)$ است. ملاحظه می کنیم $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, \lambda_{\circ} F_{\mathfrak{A}}}$ جمع سه تابع زیر است:

$$\Lambda_{v_q} \mapsto \Lambda_{v_q} . Z\left(v_q\right) \quad (1) \quad , \quad \Lambda_{v_q} \mapsto u^{\alpha}(t)\left(\Lambda_{v_t}, \operatorname{vlft}\left(Y_a(q)\right)\right) \quad (2) \quad , \quad \Lambda_{v_q} \mapsto \lambda_{\circ} F_{\mathfrak{A}}(u(t), q) \quad (3)$$

بنابراین میدان برداری همیلتونی، جمع سه میدان برداری همیلتونی مطابق با سه همیلتونی است. اجازه دهید این سه میدان برداری همیلتونی را در شکافتن $T_{\Lambda_{v_q}} T^{*} TQ$ بنویسیم. در هر حالت می‌نویسیم، به روش معمول، $\Lambda_{v_q}=\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}$. از گزاره ۵.۸ و ۵.۱ میدان برداری همیلتونی برای همیلتونی (۱) دارای نمایش زیر است

$$\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \mapsto v_q \oplus \circ \oplus\left(R^{*}\left(\beta_{v_q}, v_q\right) v_q+\frac{1}{2}\left(\nabla_{v_q} T^{*}\right)\left(\beta_{v_q}, v_q\right)-\frac{1}{4} T^{*}\left(T^{*}\left(\beta_{v_q}, v_q\right), v_q\right)\right) \oplus\left(-\alpha_{v_q}\right)$$

نمایش میدان برداری همیلتونی تخصیص داده شده به همیلتونی (۲) از گزاره ۵.۱۳ دارای نمایش زیر است

$$\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \mapsto \circ \oplus u^{a}(t) Y_a(q) \oplus\left(u^{a}(t) \frac{1}{2} T^{*}\left(\beta_{v_q}, Y_a(q)\right)-u^{a}(t)\left(\nabla Y_a\right)^{*}\left(\beta_{v_q}\right)\right) \oplus \circ$$

اکنون اجازه دهید نمایش میدان برداری همیلتونی تخصیص داده شده به همیلتونی (۳) را محاسبه کنیم. در این حالت از لم ۷.۳ استفاده می‌کنیم برای دیدن اینکه میدان برداری همیلتونی برای همیلتونی (۳) دارای نمایش زیر می‌باشد

$$\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q} \mapsto \lambda_{\circ} f'\left(A\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right) \\ \left(\circ \oplus \circ \oplus\left(-\nabla A\left(v_q, \ldots, v_q\right)-\tfrac{r}{2} T^{*}\left(\widehat{A}\left(v_q, \ldots, v_q\right), v_q\right)\right) \oplus\left(-r \widehat{A}\left(v_q, \ldots, v_q\right)\right)\right)$$

در اینجا وابستگی A به u لحاظ نشده است اما آن باید بطور ضمنی ملاحظه شود.

اکنون همه اینها را با هم جمع می‌کنیم. منحنی انتگرال از میدان برداری همیلتونی را با $\theta(t) \oplus \lambda(t)$ می‌نویسیم، شبیه به لم ۵.۹. از این لم تنابراین داریم

$$\nabla_{c'(t)}\theta(t) = R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right)c'(t) + \tfrac{1}{2}\left(\nabla_{c'(t)}T^*\right)\left(\lambda(t), c'(t)\right) - \tfrac{1}{4}T^*\left(T^*\left(\lambda(t), c'(t)\right), c'(t)\right) +$$
$$u^a(t)\tfrac{1}{2}T^*\left(\lambda(t), Y_a(t)\right) - u^a(t)\left(\nabla Y_a\right)^*\left(\lambda(t)\right) - \lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\nabla A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)$$
$$-\tfrac{r}{2}\lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)T^*\left(\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right), c'(t)\right) + \tfrac{1}{2}T^*\left(\theta(t), c'(t)\right)$$
$$\nabla_{c'(t)}\lambda(t) = -\theta(t) - r\lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right) + \tfrac{1}{2}T^*\left(\lambda(t), c'(t)\right)$$

ملاحظه می‌کنیم که سمت راست دومین معادله، LAC می‌باشد چون $t \mapsto \theta(t) \oplus \lambda(t)$ منحنی انتگرال برای میدان برداری همیلتونی LIC^∞ است و چون $t \mapsto c'(t)$، LAC می‌باشد. لذا λ ارضاء می‌کند معادله دیفرانسیل وابسته به زمان مرتبه اول که در زمان LAC می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $t \mapsto \lambda(t)$، LAD می‌باشد. لذا می‌توان مشتق کواریانت از دومین این معادلات گرفت و اولین معادلات را به معادله منتج جایگزین کرد. نتیجه هست

$$\nabla^2_{c'(t)}\lambda(t) = -R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right)c'(t) + T^*\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t), c'(t)\right) + u^a(t)\left(\nabla Y_a\right)^*\left(\lambda(t)\right) +$$
$$\lambda_\circ f'\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\left(\nabla A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right) - r\left(\nabla_{c'(t)}\widehat{A}\right)\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right) -\right.$$
$$\left.r(r-1)u^a(t)\widehat{A}\left(Y_a\left(c(t)\right), c'(t), \ldots, c'(t)\right) + rT^*\left(\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right), c'(t)\right)\right) -$$
$$r\lambda_\circ f''\left(A\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\left(\nabla A\left(c'(t), \ldots, c'(t); c'(t)\right) +\right.$$
$$\left.ru^a(t)A\left(Y_a(c(t)), c'(t), \ldots, c'(t)\right)\right)\widehat{A}\left(c'(t), \ldots, c'(t)\right)$$

که برقرار می‌ماند. از این نتیجه می‌گیریم که $t \mapsto \chi(t)$ تعریف شده با (۷.۲) دارای ویژگی $\chi'(t) = X_{H_u^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, \lambda_\circ F_{\mathfrak{A}}}}$ است. لذا وجود λ ارضاء کننده (i) معادل با وجود منحنی انتگرال χ بیان شده در قضیه ۶.۳ دارد.

ملاحظه می‌کنیم برای $u \in \mathbb{R}^m$، میدان برداری $v_q \mapsto Z\left(v_q\right) + u^aY_a(q)$ روی TQ دارای شکل $v_q \mapsto v_q \oplus u^aY_a(q)$ در شکافتن TTQ تعریف شده در بخش ۵.۷، می‌باشد. این نشان می‌دهد که همیلتونی $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}}$ دارای شکل داده شده در شکافتن T^*TQ می‌باشد.

بنابراین شرایط (ii) – (v) معادل با شرایط (iii) – (vi) از قضیه ۶.۳ هستند.

آخرین ادعا با ملاحظه حل‌ها از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_{\circ}, q_{۱}\right)$ و $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_{\circ}, q_{۱}\right)$ از قضیه ۶.۳ در حالتی که $S_{\circ} = t_{q_{\circ}}Q$ و $S_{۱} = t_{q_{۱}}Q$ نتیجه می‌شود. ملاحظه می‌کنیم در شکافتن $T^{*}_{v_{q_{\circ}}}TQ = T^{*}_{q_{\circ}}Q \oplus T^{*}_{q_{\circ}}Q$، داریم $\operatorname{ann}\left(T_v\left(T_{q_{\circ}}Q\right)\right) = T^{*}_{q_{\circ}}Q \oplus \{\circ\}$ برای $v \in T_{q_{\circ}}Q$ و بطور مشابه برای $q_{۱}$.

■

تبصره ۷.۸ ۱. اجازه دهید اهمیت لم پیشین را بررسی کنیم. اگر بسادگی اصل ماکسیمم از قضیه ۶.۳ را اعمال کنیم، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای میدان یک فرم در طول مسیرهای داخل TQ بدست می‌آوریم. قضیه ۷.۷ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای میدان یک فرمی در طول مسیرهای داخل Q تهیه می‌کند. اما، مهم‌تر، معادله دیفرانسیل حاکم بر تحول این میدان یک فرم روی Q، یک نشانه واضح که چگونه هندسه سیستم کنترلی به درون مسئله کنترل بهینه وارد می‌شود، تهیه می‌کند. با این شناخت، در بخش بعد برای صورت‌بندی مسئله کنترل بهینه استفاده می‌کنیم که بوضوح از هندسه سیستم کنترلی بواسطه هموستار آفینش استفاده می‌کند.

۲. معادله مرتبه دوم برای λ در (i) از قضیه ۷.۷ را معادله الحاقی برای $(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}})$ می‌نامیم. ملاحظه می‌کنیم که سمت چپ از این معادله چیزی بیشتر از معادله ژاکوبی الحاقی نیست.

۳. این یک نتیجه مفید و جذاب است از استفاده‌امان از نگاشت دامنه ورودی که می‌توانیم سیستم را با انرژی پتانسیل ترکیب کنیم. اجازه دهید چگونگی این کار را توضیح دهیم. تابع پتانسیل V روی Q داده شده و تعریف می‌کنیم لاگرانژی را توسط $L\left(v_q\right) = \frac{۱}{۲}g\left(v_q, v_q\right) - V(q)$ جایی که g یک متریک ریمانی روی Q است. معادله‌های حرکت برای سیستم کنترل شده با میدان‌های برداری کنترل $\mathfrak{Y} = \{Y_{۱}, \ldots, Y_m\}$ بنابراین هستند

$$\overset{g}{\nabla}_{c'(t)}c'(t) = -\mathrm{grad}V(c(t)) + u^a(t)Y_a(c(t))$$

جایی که $\mathrm{grad}V$ میدان برداری گرادیان تخصیص داده شده به V است. بوضوح در طرح کلی تفاوتی ایجاد نمی‌شود اگر $\overset{g}{\nabla}$ را با یک هموستار آفین دلخواه ∇ جایگزین کنیم و بجای $\mathrm{grad}V$ یک میدان برداری معمولی $Y_{\circ}$ روی Q قرار دهیم. سؤال این است چگونه میدان برداری $Y_{\circ}$ را در سیستم کنترلی هموستار آفین‌امان $(Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ ترکیب کنیم. این را با تعریف یک مجموعه جدید $\widetilde{\mathfrak{Y}} = \{Y_{\circ}, Y_{۱}, \ldots, Y_m\}$

از میدان برداری کنترل و نگاشت دامنه ورودی جدید $\widetilde{U}_q = \{1\} \times U_q \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$ انجام می‌دهیم. اکنون می‌توان قضیه ۷.۷ را کلمه به کلمه در مورد سیستم کنترلی هموستار آفین جدید $\widetilde{\Sigma}_{\mathrm{aff}} = \left(Q, \nabla, \widetilde{\mathfrak{Y}}, \widetilde{U}\right)$ اعمال کرد.

■

تعریف ۷.۹ گیریم Σ_{aff} یک سیستم کنترلی هموستار آفین و $F_{\mathfrak{A}}$ یک تابع هزینه برای Σ_{aff} باشد. گیریم $\mathfrak{P}$ یکی از مسئله‌های $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$، $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$، $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$ یا $\mathfrak{P}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}, q_0, q_1\right)$ باشد و گیریم $\gamma = (c, u) \in \mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F_{\mathfrak{A}}\right)$ شرایط لازم از قضیه ۷.۷ را ارضاء می‌کند بهمراه $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ و λ که از قضیه گرفته شده‌اند. γ را اِکسترِمال کنترل شده [1] برای $\mathfrak{P}$، λ_0 را ضریب لاگرانژی ثابت برای γ، و λ را میدان برداری الحاقی برای γ می‌نامیم. اگر $\lambda_0 = 1$ (بترتیب. $\lambda_0 = 0$) باشد آنگاه γ را اکسترمال کنترل شده نرمال (بترتیب. غیرنرمال) می‌نامیم.

■

نسخه اصل ماکسیمم بیان شده در قضیه ۷.۷ تقریباً کلی است و بیشتر پیچیدگی بیانش مرهون به کلیت آن است. بهرحال، وقتی در رده‌های خاصی از مسائل بهینه نگاه می‌کنیم، شکل کلی قضیه را می‌توان به چیزی جذاب‌تر کاهش داد. این را با شروع به نگاه کردن به رده ساده‌ای از توابع هزینه، شرح می‌دهیم.

۸. کنترل‌های مینیمم کننده نیرو

با پس زمینه بحث عمومی‌امان در بخش ۷، اجازه دهید اکنون به بررسی حالت ویژه جالبی از مسئله کنترل بهینه که مستلزم مینیمم کردن ورودی‌ها است، بپردازیم. چون ورودی‌ها ضرایب میدان‌های برداری ورودی هستند و میدان‌های برداری ورودی به نیروها در سیستم‌های فیزیکی مربوطند، این را به مسئله مینیمم کردن نیرو ترجمه می‌کنیم. فرض می‌کنیم Q به متریک ریمانی g مجهز باشد. تابع

[1] controlled extremal

هزینه که بررسی می‌کنیم، هست

$$F\left(u, v_q\right)=\frac{1}{2} g\left(u^a Y_a(q), u^b Y_b(q)\right) \qquad (8.1)$$

در طرز صحبت بخش ۷.۲ از یک $(0,0)$ میدان تانسوری $\mathbb{R}^m$—وابسته استفاده کردیم و انتخاب کردیم $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. برای نگاشت دامنه ورودیمان، $U: Q \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ قرار می‌دهیم $U_q=\mathbb{R}^m$ برای هر $q \in Q$.

برای خلاصه‌نویسی، اجازه دهید دقیق‌تر مسئله‌ای را که می‌خواهیم حل کنیم، تعریف کنیم.

تعریف ۸.۱ گیریم $\Sigma_{\mathrm{aff}}=(Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین بهمراه $U_q=\mathbb{R}^m$ برای $q \in Q$ و تابع هزینه F تعریف شده توسط (۸.۱) باشد. گیریم $q_0, q_1 \in Q$ و $v_{q_0} \in T_{q_0} Q$ و $v_{q_1} \in T_{q_1} Q$.

(i) یک کمان کنترل شده $\gamma=(u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ است اگر یک حل از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ باشد.

(ii) یک کمان کنترل شده $\gamma=(u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}_{[a, b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ است اگر یک حل از $\mathfrak{P}_{[a, b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ باشد.

(iii) یک کمان کنترل شده $\gamma=(u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ است اگر یک حل از $\mathfrak{P}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F, q_0, q_1\right)$ باشد.

(iv) یک کمان کنترل شده $\gamma=(u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}_{[a, b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ است اگر یک حل از $\mathfrak{P}_{[a, b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, F, q_0, q_1\right)$ باشد.

■

یک توزیع Y روی Q تعریف می‌کنیم با

$$Y_q=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{Y_1(q), \ldots, Y_m(q)\right\}$$

و فرض می‌کنیم این توزیع دارای رتبه ثابت باشد (اما نه لزوماً از رتبه m). نگاشت $i_Y: Y \rightarrow TQ$ شمول را نشان می‌دهد. نگاشت $f_Y: TQ \rightarrow TQ$ افکنش g—متعامد بطور پوشا به Y را نشان می‌دهد

بهمراه P_{Y_q} که تحدیدش به T_qQ می‌باشد. بنابراین می‌توانیم یک $(0,2)$ میدان تانسوری g_Y روی Q با $g_Y|T_qQ = P^*_{Y_q}(g|T_qQ)$ تعریف کنیم. یعنی، g_Y تحدید به Y از g است. همچنین داریم $(2,0)$ تانسور تخصیص داده شده h_Y تعریف شده توسط

$$h_Y(\alpha_q,\beta_q) = g_Y\left(g^{\#}(\alpha_q), g^{\#}(\beta_q)\right)$$

اینجا $g^{\#} : T^*Q \to TQ$ یکریختی متعارف تخصیص داده شده به متریک ریمانی g است. همچنین تعریف می‌کنیم نگاشت کلاف برداری $h^{\#}_Y : T^*Q \to TQ$ توسط $\left\langle \alpha_q; h^{\#}_Y(\beta_q)\right\rangle = h_Y(\alpha_q,\beta_q)$.

۸.۱. هموستار آفین معمولی. در ابتدا به حالتی نگاه می‌کنیم که $\Sigma_{\text{aff}} = (Q,\nabla,\mathfrak{Y},U)$، یک سیستم کنترلی هموستار آفین معمولی بهمراه U چنانکه در بالا مشخص شد. بنابراین، بویژه، ∇ هموستار لوی–چویتا تخصیص داده شده به متریک ریمانی g که در تعریف تابع هزینه استفاده شد، نیست.

تابع همیلتونی روی $\mathfrak{D}^*_{TQ} = \mathbb{R}^m \times T^*TQ$ داده شده توسط

$$H^{\Sigma_{\text{aff}},F}\left(u,\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\right) = \frac{1}{2}g\left(u^aY_a(q),u^bY_b(q)\right) + \alpha_{v_q}.v_q + u^a\left(\beta_{v_q}.Y_a(q)\right)$$

اجازه دهید تعریف کنیم $A_{\text{sing}}(\Sigma_{\text{aff}}) \subset T^*TQ$ توسط

$$A_{\text{sing}}(\Sigma_{\text{aff}}) = \{\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q} | \beta_{v_q}\in \operatorname{ann}(Y_q)\}$$

لذا تحدید $H^{\Sigma_{\text{aff}},F}$ به $\mathbb{R}^m \times A_{\text{sing}}(\Sigma_{\text{aff}})$ مستقل از u است.

نتیجه زیر شکلی از همیلتونی مینیمم و مقادیری از u که مینیمم فهمیده می‌شود.

لم ۸.۲ عبارت‌های زیر برقرارند.

(i) همیلتونی مینیمم برای تابع هزینه F داده شده توسط

$$H^{\Sigma_{\text{aff}},F}_{\min}(\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}) = \alpha_{v_q}.v_q - \frac{1}{2}h_Y(\beta_{v_q},\beta_{v_q})$$

اگر $u\in\mathbb{R}^m$ نقطه‌ای باشد که $H^{\Sigma_{\text{aff}},F}_{\min}$ فهمیده شود آنگاه u مشخص می‌شود با

$$u^aY_a(q) = -P_{Y_q}\left(g^{\#}(\beta_{v_q})\right) \qquad (۸.۲)$$

(ii) همیلتون مینیمم با تابع هزینه صفر هست

$$H_{\min}^{\Sigma_{\mathrm{aff}},O}\left(\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\right)=\begin{cases}\alpha_{v_q}.v_q & : \alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\in A_{\mathrm{sing}}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}\right)\\ -\infty & : \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

مقادیری از $u\in\mathbb{R}^m$ که $H_{\min}^{\Sigma_{\mathrm{aff}},O}$ فهمیده می‌شود در $\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\in A_{\mathrm{sing}}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}\right)$، دلخواه هستند.

برهان. (i) در ابتدا ملاحظه می کنیم که با یک مکان ثابت شده، می‌توان $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}$ را بعنوان تابعی روی زیرفضای Y_q از T_qQ در نظر گرفت. یک نقطه نوعی در Y_q را با ω نشان می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}$ بعنوان یک تابع روی Y_q هست.

$$\begin{aligned}\omega &\mapsto \tfrac{1}{2}g\left(i_{Y_q}(\omega),i_{Y_q}(\omega)\right)+\alpha_{v_q}.v_q+\beta_{v_q}.i_{Y_q}(\omega)\\ &=\tfrac{1}{2}g\left(i_{Y_q}(\omega),i_{Y_q}(\omega)\right)+\alpha_{v_q}.v_q+g\left(g^{\#}\left(\beta_{v_q}\right),i_{Y_q}(\omega)\right)\\ &=\tfrac{1}{2}g\left(i_{Y_q}(\omega),i_{Y_q}(\omega)\right)+\alpha_{v_q}.v_q+g\left(P_{Y_q}\left(g^{\#}\left(\beta_{v_q}\right)\right),i_{Y_q}(\omega)\right)\end{aligned}$$

چون این یک تابع محدب از ω است، یک مینیمم یکتا خواهد داشت. با مشتق‌گیری از $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}$ نسبت به ω و قرار دادن عبارت منتج در O نشان می‌دهد که مینیمم ارضاء می کند

$$i_Y\left(\omega_{\min}\right)=-P_{Y_q}\left(g^{\#}\left(\beta_{v_q}\right)\right)$$

کنترل‌های u که $\omega_{\min}$ را می‌دهند بنابراین با (۸.۲) معین می‌شوند. لذا این قسمت با جایگزینی عبارت برای $\omega_{\min}$ به داخل $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}$ ثابت می‌شود.

(ii) برای تابع هزینه صفر، $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},O}$ یک تابع آفین از u است. بنابراین دارای کران پایین است اگروتنهااگر بخش خطی صفر باشد. این اتفاق می‌افتد اگروتنهااگر $\alpha_{v_q}\oplus\beta_{v_q}\in A_{\mathrm{sing}}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}\right)$. در این حالت $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},O}$ یک تابع ثابت از u است و لذا u بدون تصریح ...... می‌شود.

■

تبصره ۸.۳ ملاحظه می‌کنیم که کنترل‌ها بطور یکتا توسط فاز مشخص می‌شوند اگر میدان‌های برداری

$Y_1, \ldots, Y_m$ مستقل خطی باشند. والا چندین بردار u وجود دارد که $(8,2)$ را ارضاء می‌کنند و همه آنها منجر به همیلتونی مینیمم یکسانی $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}$ می‌شوند. ملاحظه می‌کنیم با استفاده از قضیه ۷.۷، اجازه می‌دهیم $\lambda_0 = 0$ فقط برای شرایط اولیه‌ای که در $A_{\mathrm{sing}}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}\right)$ واقع می‌شوند.

■

گیریم $L\left(\mathrm{ann}(Y) \times Y; T^*Q\right)$ کلاف برداری از نگاشت‌های کلافی چندخطی از $\mathrm{ann}(Y) \times Y$ به T^*Q باشد. تعریف می‌کنیم $B_Y \in \Gamma^\infty\left(L\left(\mathrm{ann}(Y) \times Y; T^*Q\right)\right)$ توسط

$$\left\langle B_Y\left(\alpha, Y_1\right); X\right\rangle = \left\langle \alpha; \nabla_X Y_1\right\rangle$$

آنکه $B_Y(\alpha, Y_1)$ به مشتق Y_1 وابسته نیست، نتیجه می‌شود چون برای یک تابع $f \in C^\infty(Q)$ داریم

$$\begin{aligned}\left\langle B_Y\left(\alpha, fY_1\right); X\right\rangle &= \left\langle \alpha; \nabla_X\left(fY_1\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha; f\nabla_X Y_1\right\rangle + \left\langle \alpha; \left(\mathfrak{L}_X f\right) Y_1\right\rangle \\ &= \left\langle fB_Y\left(\alpha, Y_1\right); X\right\rangle\end{aligned}$$

که $Y_1 \in Y$ و $\lambda \in \mathrm{ann}(Y)$. اکنون می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۸.۴ گیریم $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد که $U_q = \mathbb{R}^m$ برای $q \in Q$. فرض کنید $\gamma = (u, c)$ یک اکسترمال کنترل شده برای $\mathfrak{F}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ یا $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$ باشد که u و c روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند و λ میدان برداری الحاقی و λ_0 ضریب لاگرانژی می‌باشد. در وضعیت زیر را داریم.

(i) $\lambda_0 = 1$: در این حالت c و λ در معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}&\nabla_{c'(t)} c'(t) = -h_Y^{\#}(\lambda(t)) \\ &\nabla^2_{c'(t)} \lambda(t) + R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t) - T^*\left(\nabla_{c'(t)} \lambda(t), c'(t)\right) \\ &\tfrac{1}{2} \nabla h_Y\left(\lambda(t), \lambda(t)\right) - T^*\left(\lambda(t), h_Y^{\#}(\lambda(t))\right)\end{aligned} \tag{8.3}$$

(ii) $\lambda_0 = 0$: در این حالت داریم

(a) $\nabla_{c'(t)} c'(t) = u^a(t) Y_a(c(t))$.

(b) برای $t \in [a,b]$، $\lambda(t) \in \operatorname{ann}\left(Y_{c(t)}\right)$.

(c) $\nabla^{2}_{c'(t)}\lambda(t) + R^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t) - T^{*}\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t), c'(t)\right) = B_{Y}\left(\lambda(t), u^{a}(t) Y_{a}(t)\right)$.

اگر $\gamma = (u,c)$ یک حل از $\mathfrak{F}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_{0}, q_{1}\right)$ یا از $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_{0}, q_{1}\right)$ باشد آنگاه بعلاوه داریم $\lambda(a) = 0$ و $\lambda(b) = 0$.

برهان. (i) ملاحظه می‌کنیم که لم ۸.۲ یک همیلتونی مینیمم ایجاد می‌کند که هموار است. چون نگاشت دامنه ورودی U ثابت است می‌توانیم نتیجه بگیریم که $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}_{\min}$، .... در طول حل‌ها ثابت است. نتیجه می‌گیریم که برای محاسبه کمان‌های اکسترمال کافی است مسیرهای میدان برداری همیلتونی با همیلتونی $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}_{\min}$ را محاسبه کنیم. لذا معادلات مطابق با میدان برداری همیلتونی با همیلتونی زیر را محاسبه می‌کنیم

$$H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}_{\min}\left(\alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) = \alpha_{v_q}.v_q - \frac{1}{2} h_{Y}\left(\beta_{v_q}, \beta_{v_q}\right)$$

مطابق معمول از علامت‌گذاری مطابق با شکافتن از $T^{*}TQ$ استفاده می‌کنیم. همچنین میدان برداری در شکافتن از $T\left(T^{*}TQ\right)$ را مطابق قبل می‌نویسیم. لذا میدان برداری همیلتونی با همیلتونی $H^{\Sigma_{\mathrm{aff}},F}_{\min}$، جمع دو همیلتونی است. از قضیه ۵.۱۰ میدان برداری همیلتونی اول دارای نمایش زیر است

$$v_q \oplus 0 \oplus \left(R^{*}\left(\beta_{v_q}, v_q\right) v_q + \frac{1}{2}\left(\nabla_{v_q} T^{*}\right)\left(\beta_{v_q}, v_q\right) - \frac{1}{4} T^{*}\left(T^{*}\left(\beta_{v_q}, v_q\right), v_q\right)\right) \oplus \left(-\alpha_{v_q}\right)$$

از لم ۷.۴ میدان برداری همیلتونی برای همیلتونی $\frac{-1}{2} h_{Y}\left(\beta_{v_q}, \beta_{v_q}\right)$ هست

$$0 \oplus \left(-h^{\#}_{Y}\left(\beta_{v_q}\right)\right) \oplus \left(-\frac{1}{2}\nabla h_{Y}\left(\beta_{v_q}, \beta_{v_q}\right) + \frac{1}{2} T^{*}\left(\beta_{v_q}, h^{\#}_{Y}\left(\beta_{v_q}\right)\right)\right) \oplus 0$$

این نتیجه می‌دهد

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = -h^{\#}_{Y}\left(\lambda(t)\right)$$

که اولین معادلات (۸.۳) می‌باشد. اکنون گیریم $\theta(t) \oplus \lambda(t)$ منحنی انتگرال روی c' از میدان برداری همیلتونی باشد. از لم ۵.۹ داریم

$$\begin{aligned}
\nabla_{c'(t)}\theta(t) = {} & R^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t) + \tfrac{1}{2}\left(\nabla_{c'(t)} T^{*}\right)\left(\lambda(t), c'(t)\right) - \tfrac{1}{4} T^{*}\left(T^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right), c'(t)\right) \\
& - \tfrac{1}{2}\nabla h_{Y}\left(\lambda(t), \lambda(t)\right) + \tfrac{1}{2} T^{*}\left(\lambda(t), h^{\#}_{Y}\left(\lambda(t)\right)\right) + \tfrac{1}{2} T^{*}\left(\theta(t), c'(t)\right) \qquad (8.4)
\end{aligned}$$

$$\nabla_{c'(t)}\lambda(t) = -\theta(t) + \tfrac{1}{2} T^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right)$$

مشتق‌گیری کواریانت از معادله دوم در طول c می‌دهد

$$\nabla^{۲}_{c'(t)}\lambda(t) = -\nabla_{c'(t)}\theta(t) + \tfrac{۱}{۲}\left(\nabla_{c'(t)}T^*\right)(\lambda(t), c'(t)) +$$
$$\tfrac{۱}{۲}T^*\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t), c'(t)\right) - \tfrac{۱}{۲}T^*\left(\lambda(t), h^{\#}_{Y}(\lambda(t))\right)$$

با جایگزینی اولین معادلات (۸.۴)، دومین معادلات (۸.۳) نتیجه می‌شود که برهان این قسمت از لم را ثابت می‌کند.

(ii) در ابتدا ملاحظه می‌کنیم که λ می‌تواند مینیمم کننده باشد تنها اگر $\theta(t) \oplus \lambda(t) \in A_{\text{sing}}(\Sigma_{\text{aff}})$ برای هر $t \in [a, b]$. این معنی می‌دهد که $\lambda(t)$ باید $Y_{c(t)}$ را صفر کند. چون $\lambda_{\circ} = \circ$، از قضیه ۷.۷ و تعریف B_Y نتیجه مطلوب بدست می آید.

■

تبصره ۸.۵ ۱. قضیه ایجاب می‌کند که تمام اکسترمال‌های نرمال برای مسئله مینیمم‌سازی نیرو از رده C^∞ هستند.

۲. اگر $\gamma = (u, c) \in \text{Ctraj}(\Sigma_{\text{aff}})$ آنگاه

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = u^a(t)Y_a(c(t)) \Rightarrow g\left(u^a(t)Y_a(c(t)), u^b(t)Y_b(c(t))\right) = g\left(\nabla_{c'(t)}c'(t), \nabla_{c'(t)}c'(t)\right)$$

لذا مسئله مینیمم‌سازی نیرو دیده می‌شود بعنوان مینیمم‌سازی

$$\int_a^b g\left(\nabla_{c'(t)}c'(t), \nabla_{c'(t)}c'(t)\right) dt$$

روی همه منحنی‌های LAD، $c : [a, b] \to Q$ که در معرض شرایط مرزی ویژه (سرعت ثابت یا آزاد) و قید $\nabla_{c'(t)}c'(t) \in Y_{c(t)}$ ... قرار دارند.

۸.۲. حالت تماماً تحریک شده[۱]. اجازه دهید اکنون به حالت تحریک کامل بپردازیم. یک سیستم کنترلی هموستار آفین $\Sigma_{\text{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$، تماماً تحریک شده است اگر $T_qQ = \text{span}_{\mathbb{R}}\{Y_۱(q), \ldots, Y_m(q)\}$ برای هر $q \in Q$. لذا در این بخش قرار می‌دهیم Σ_{aff} را یک سیستم کنترلی هموستار آفین تماماً تحریک شده که $U_q = \mathbb{R}^m$ برای هر $q \in Q$.

[۱] The fully actuated case

اجازه دهید در ابتدا نشان دهیم همه اکسترمال‌ها برای مسئله مینیمم‌سازی نیرو در یک سیستم تماماً تحریک شده نرمال هستند.

گزاره ۸.۶ گیریم $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y}, U)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین تماماً تحریک شده بهمراه $\gamma = (u, c)$ یک اکسترمال کنترل شده برای یکی از چهار مسئله تعریف ۸.۱ باشد. ضریب لاگرانژی مربوطه $\lambda_\circ$ غیرصفر است.

برهان. این از شرط مینیمم‌سازی همیلتونی نتیجه می‌شود. چون همیلتونی است

$$H^{\Sigma_{\mathrm{aff}}, \lambda_\circ F}\left(u, \alpha_{v_q} \oplus \beta_{v_q}\right) = \frac{\lambda_\circ}{۲} g\left(u^a Y_a(q), u^b Y_b(q)\right) + \alpha_{v_q} . v_q + u^a\left(\beta_{v_q} . Y_a(q)\right)$$

تنها راه برای اینکه همیلتونی با $\lambda_\circ = ۰$ مینیمم باشد آن است که β_{v_q} صفر باشد. این نمی‌تواند اتفاق بیافتد چون قضیه ۷.۷ ادعا می‌کند که $\lambda_\circ$ و λ هر دو با هم در طول یک اکسترمال نمی‌توانند صفر باشند.

■

اکنون روی حالت نرمال از قضیه ۸.۴ متمرکز می‌شویم. اینجا ساده‌سازی رخ می‌دهد چون h_Y به متریک کلاف برداری $g^{-۱}$ روی T^*Q القاء شده توسط g تبدیل می‌شود. از قضیه ۸.۴، اگر $\gamma = (u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_\circ}, v_{q_۱}\right)$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}
&\nabla_{c'(t)} c'(t) = -g^{\#}(\lambda(t)) \\
&\nabla^{۲}_{c'(t)} \lambda(t) + R^*\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t) - T^*\left(\nabla_{c'(t)} \lambda(t), c'(t)\right) = \\
&\qquad \tfrac{۱}{۲} \nabla g^{-۱}\left(\lambda(t), \lambda(t)\right) - T^*\left(\lambda(t), g^{\#}(\lambda(t))\right)
\end{aligned} \qquad (۸.۵)$$

لذا می‌بینیم که میدان برداری الحاقی λ بطور جبری از مشتق کواریانت c در طول خودش مشخص می‌شود.

گزاره ۸.۷ گیریم Σ_{aff} یک سیستم کنترلی هموستار آفین تماماً تحریک شده باشد و $\gamma = (u, c)$ یک اکسترمال کنترل شده برای یکی از چهار مسئله کنترل تعریف ۸.۱ باشد که u و c روی $[a, b]$ تعریف شده‌اند و $\lambda : [a, b] \to T^*Q$ میدان برداری الحاقی مربوطه می‌باشد. آنگاه

$\lambda(t) = -g^b\left(\nabla_{c'(t)}c'(t)\right)$ برای $t \in [a,b]$ و c ارضاء می کند معادله

$$\nabla^{3}_{c'(t)}c'(t) + \left(\nabla^{2}_{c'(t)}g^{\#}\right)(\lambda(t)) + 2\left(\nabla_{c'(t)}g^{\#}\right)\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t)\right) + g^{\#}\left(\nabla^{2}_{c'(t)}\lambda(t)\right) = 0$$

اگر $\gamma = (u,c)$ یک حل از $\mathfrak{F}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1)$ یا $\mathfrak{F}_{[a,b]}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1)$ باشد آنگاه بعلاوه باید $\nabla_{c'(a)}c'(a) = 0$ و $\nabla_{c'(b)}c'(b) = 0$.

برهان. اگر از اولین معادلات (۸.۵) در طول c مشتق کواریانت بگیریم بدست می آوریم

$$\nabla^{2}_{c'(t)}c'(t) = -\left(\nabla_{c'(t)}g^{\#}\right)(\lambda(t)) - g^{\#}\left(\nabla_{c'(t)}\lambda(t)\right)$$

و با مشتق‌گیری از این عبارت نتیجه مطلوب بدست می آید.

■

۸.۳. هموستار آفین لوی–چویتا. اکنون ساختارهای بخش‌های قبل را به حالت $\nabla = \overset{g}{\nabla}$ اختصاص می‌دهیم که $\overset{g}{\nabla}$ هموستار لوی–چویتا مشخص شده با متریک ریمانی استفاده شده در تعریف تابع هزینه است. در این حالت، موضوعات تا حدی ساده می‌شوند چون $\overset{g}{\nabla} g = 0$ و نیز $\overset{g}{\nabla}$ بی‌تاب است. اجازه دهید قضیه ۸.۴ را برای هموستار لوی–چویتا بیان کنیم.

گزاره ۸.۸ گیریم g یک متریک ریمانی روی Q باشد و $\Sigma_{\mathrm{aff}} = \left(Q, \overset{g}{\nabla}, \mathfrak{Y}, U\right)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین با تابع هزینه F تعریف شده توسط g باشد. فرض کنیم $\gamma = (u,c)$ یک حل از یکی از چهار مسئله کنترلی تعریف ۸.۱ باشد که u و c روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند. اگر λ_0 ضریب لاگرانژی مربوطه غیرصفر باشد آنگاه c از رده C^∞ است و وجود دارد یک میدان برداری C^∞ در طول ω طوری که c و ω با هم در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} &\overset{g}{\underset{c'(t)}{\nabla}} c'(t) = -P_Y(\omega(t)) \\ &\overset{g}{\nabla}{}^{2}_{c'(t)}\omega(t) + \overset{g}{R}(\omega(t), c'(t))\, c'(t) = \tfrac{1}{2} g^{\#}\left(\overset{g}{\nabla} g_Y(\omega(t), \omega(t))\right) \end{aligned} \tag{۸.۶}$$

اگر $\gamma = (u,c)$ یک حل از $\mathfrak{F}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1)$ یا $\mathfrak{F}_{[a,b]}(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1)$ باشد آنگاه بعلاوه داریم $\omega(a) = 0$ یا $\omega(b) = 0$.

برهان. گیریم λ میدان یک فرم در طول c داده شده از قضیه ۸.۴ باشد و تعریف می‌کنیم $\omega = g^{\#} \circ \lambda$. نشان خواهیم داد که c و ω معادلات (۸.۶) را ارضاء می‌کنند. چون $\overset{g}{\nabla} g = 0$ داریم

$$\overset{g}{\nabla}{}^{2}_{c'(t)}\omega(t) = g^{\#}\left(\overset{g}{\nabla}{}^{2}_{c'(t)}\lambda(t)\right) \tag{8.7}$$

از معادلات (۵.۱۷) در برهان گزاره ۵.۱۲ داریم

$$\overset{g}{R}\left(\omega(t), c'(t)\right) c'(t) = g^{\#}\left(\overset{g}{R}{}^{*}\left(\lambda(t), c'(t)\right) c'(t)\right) \tag{8.8}$$

اکنون گیریم $\beta \in \Gamma^{\infty}\left(T^{*}Q\right)$ و $X = g^{\#}(\beta) \in \Gamma^{\infty}\left(T^{*}Q\right)$. از تعریف h_{Y} داریم

$$h_{Y}\left(\beta(q), \beta(q)\right) = g_{Y}\left(X(q), X(q)\right)$$

بنابراین، برای $u \in T_{q}Q$ داریم

$$\overset{g}{\nabla}_{u} h_{Y}\left(\beta(q), \beta(q)\right) + 2 h_{Y}\left(\overset{g}{\nabla}_{u}\beta(q), \beta(q)\right) =$$

$$\overset{g}{\nabla}_{u} g_{Y}\left(X(q), X(q)\right) + 2 g_{Y}\left(\overset{g}{\nabla}_{u}X(q), X(q)\right)$$

چون $\overset{g}{\nabla} g = 0$ داریم $\nabla_{u}X(q) = g^{\#}\left(\nabla_{u}\beta(q)\right)$ که از این ادعا می‌کنیم

$$\overset{g}{\nabla}_{u} h_{Y}\left(\lambda(t), \lambda(t)\right) = \overset{g}{\nabla}_{u} g_{Y}\left(\omega(t), \omega(t)\right) \tag{8.9}$$

از با هم آوردن معادلات (۸.۷)، (۸.۸) و (۸.۹) و تعریف h_{Y}، نتیجه با استفاده از قضیه ۸.۴ بدست می‌آید.

■

اکنون اجازه دهید به حالت تماماً تحریک شده بپردازیم. با اعمال گزاره ۸.۷ می‌توان نشان داد که اکسترمال‌های کنترل شده تماماً تحریک شده ارضاء می‌کنند معادله

$$\overset{g}{\nabla}{}^{3}_{c'(t)}c'(t) + g^{\#}\left(\overset{g}{R}{}^{*}\left(g^{b}\left(\overset{g}{\nabla}_{c'(t)}c'(t)\right), c'(t)\right) c'(t)\right) = 0$$

اکنون بیاد می‌آوریم معادله (۵.۱۷) در برهان گزاره ۵.۱۲ تا نتیجه زیر را ثابت کنیم.

گزاره ۸.۹ گیریم g یک متریک ریمانی روی Q باشد و $\Sigma_{\mathrm{aff}} = \left(Q, \overset{g}{\nabla}, \mathfrak{Y}, U\right)$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین تماماً تحریک شده بهمراه تابع هزینه F تعریف شده توسط g باشد. گیریم γ یک اکسترمال کنترل شده، $\gamma = (u, c)$، برای یکی از چهار مسئله کنترلی از تعریف ۸.۱ باشد که u و c روی بازه $[a, b]$ تعریف شده‌اند. آنگاه معادله زیر را داریم

$$\overset{g}{\nabla}{}^{3}_{c'(t)} c'(t) + \overset{g}{R}\left(\overset{g}{\nabla}_{c'(t)} c'(t), c'(t)\right) c'(t) = 0$$

اگر $\gamma = (u, c)$ یک حل از $\mathfrak{F}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ یا $\mathfrak{F}_{[a,b]}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ باشد آنگاه بعلاوه داریم $\nabla_{c'(a)} c'(a) = 0$ و $\nabla_{c'(b)} c'(b) = 0$.

بخش III. کنترل‌پذیری برای سیستم‌های کنترلی هموستار آفین

۹. کنترل‌پذیری برای سیستم‌های کنترلی آفین

گیریم سه‌گانه $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y})$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین با $U_q = \mathbb{R}^m$ برای $q \in Q$ باشد. گیریم $q_0, q_1 \in Q$ و $v_{q_0} \in T_{q_0} Q$ و $v_{q_1} \in T_{q_1} Q$. با $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ (بترتیب. $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$) مجموعه کمان‌های کنترل شده (u, c) باشد طوری که $c(a) = q_0$ (بترتیب. $c'(a) = v_{q_0}$) و $c(b) = q_1$ (بترتیب. $c'(b) = v_{q_1}$) جایی که (u, c) روی یک بازه $[a, b]$ تعریف شده است. اگر بخواهیم تنها کمان‌های کنترل شده‌ای را از $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1\right)$ (بترتیب. $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}\right)$) که روی یک بازه ثابت $[a, b]$ تعریف شده‌اند بررسی کنیم، می‌نویسیم $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, q_0, q_1, [a, b]\right)$ (بترتیب. $\mathrm{Carc}\left(\Sigma_{\mathrm{aff}}, v_{q_0}, v_{q_1}, [a, b]\right)$). برای $q \in Q$ و V یک همسایگی از q و $T > 0$ تعریف می‌کنیم

$$R_Q^V(q, T) = \left\{ c(T) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{وجود دارد یک مسیر کنترل شده } (u,c) \text{ تعریف شده} \\ \text{روی } [0, T] \text{ با } c'(t) = 0_q \;\;,\;\; c(t) \in V \end{array} \right\}$$

لذا $R_Q^V(q, T)$، مکان‌های دسترس‌پذیر در زمان دقیقاً T از q با سرعت اولیه صفر می‌باشند (0_q بردار صفر در $T_q Q$ است). ملاحظه می‌کنیم که سرعت پایانی را محدود نمی‌کنیم. همچنین تعریف می کنیم

$$R_Q^V(q, \leq T) = \bigcup_{0 \leq T \leq T} R_Q^V(q, t)$$

در این بخش فرض می‌کنیم که یک سیستم کنترلی هموستار آفین تحلیلی $(Q, \nabla, \mathfrak{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\})$ داریم. چون سیستم‌های کنترلی هموستار آفین، گرچه آنها فضای فاز TQ را دارند، بر حسب اشیاء روی خمینه پیکربندی Q تعریف شده‌اند، مطلوب است که نتایجی بدست آوریم که بر حسب شرایط روی Q بیان شود. بعلاوه، این بامعنی می‌سازد که تعاریف کنترل‌پذیری روی خمینه پیکربندی Q را صورت‌بندی کنیم.

تعریف ۹.۱ گیریم $\Sigma_{\text{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y})$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین باشد.

(i) Σ دسترس‌پذیر پیکربندی موضعی در q است اگر برای هر همسایگی V از q، موجود باشد $T > 0$ طوری‌که $R_Q^V(q, \leq t)$ دارای درون ناتهی برای هر $0 < t \leq T$ باشد.

(ii) Σ کنترل‌پذیر پیکربندی موضعی در q است اگر دسترس‌پذیر پیکربندی موضعی باشد و برای هر همسایگی V از q، موجود باشد $T > 0$ طوری که $q \in \operatorname{int}\left(R_Q^V(q, \leq t)\right)$ برای هر $0 < t \leq T$.

(iii) Σ کنترل‌پذیر ساکن است اگر برای هر $q_1, q_2 \in Q$، موجود باشد یک مسیر کنترل شده (u, c) تعریف شده روی $[0, T]$ طوری که $q_1 = c(0)$، $q_2 = c(T)$، $c'(0) = 0_q$ و $c'(T) = 0_{q_2}$.

■

تمایل برای مطالعه 'کنترل‌پذیری پیکربندی' به یک جفت دلایل است. جالب توجه‌ترین این است که ممکن است برای یک سیستم، دسترس‌پذیر پیکربندی موضعی (بترتیب. کنترل‌پذیری) برقرار باشد در حالی که دسترس‌پذیر موضعی (بترتیب. کنترل‌پذیر) در فضای فاز TQ نباشد. اگر تنها علاقه‌مند به آنچه روی پیکربندی اتفاق می‌افتد باشیم، بامعنی است که تعاریف کنترل‌پذیری و محک‌هایی برای بازتاب این، داشته باشیم.

اجازه دهید در ابتدا به شرایط دسترس‌پذیری که در شکل کامل در [۱۴] نمایش داده شده، بپردازیم. قرار می‌دهیم $\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})$ کوچکترین زیرفضا از میدان‌های برداری روی Q که $\mathfrak{Y}$ را دربردارد و تحت حاصلضرب متقارن بسته است و قرار می‌دهیم $\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Sym}\left(\mathfrak{Y}\right)\right)$ کوچکترین زیرفضا از میدان‌های برداری

روی Q که $\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})$ را دربردارد و تحت کروشه لی بسته است. سپس تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})\right)_q = \{X(q) | X \in \mathrm{Lie}\left(\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})\right)\}$$

برای سیستم‌های تحلیلی، نتیجه زیر را برای دسترپذیری پیکربندی داریم.

قضیه ۹.۲ یک سیستم کنترلی هموستار آفین تحلیلی $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y})$ دسترس‌پذیر پیکربندی موضعی در $q \in Q$ است اگروتنهااگر $\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})\right)_q = T_qQ$.

برای C^∞ سیستم‌ها، شرط $\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})\right)_q = T_qQ$ کافی است اما برای دسترس‌پذیری پیکربندی موضعی لازم نیست. این در جزئیات در مقاله [۱۴] بررسی شده است.

یک حاصلضرب متقارن از مجموعه $\mathfrak{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$، بد است اگر شامل تعداد زوجی از میدان‌های برداری Y_a، $a = 1, \ldots, m$ باشد و خوب است اگر بد نباشد. درجه یک حاصلضرب متقارن، تعداد کل میدان‌های برداری است که از آن‌ها تشکیل شده است. برای مثال، حاصلضرب متقارن $\langle Y_a : \langle Y_b : Y_a\rangle\rangle$ خوب و از درجه ۳ است و حاصلضرب متقارن $\langle\langle Y_a : Y_b\rangle : \langle Y_a : Y_b\rangle\rangle$ بد و از درجه ۴ است.

قضیه ۹.۳ گیریم $\Sigma_{\mathrm{aff}} = (Q, \nabla, \mathfrak{Y})$ یک سیستم کنترلی هموستار آفین تحلیلی باشد.

(i) Σ کنترل‌پذیر پیکربندی موضعی در $q \in Q$ است اگر هر حاصلضرب متقارن بد P در q را بتوان نوشت بعنوان

$$P(q) = \sum_{i=1}^{k} \xi^i P_i(q)$$

برای حاصلضرب‌های متقارن خوب $P_1, \ldots, P_k$ از درجه کمتر از درجه P و برای $\xi^i \in \mathbb{R}$، $i = 1, \ldots, k$.

(ii) Σ کنترل‌پذیر ساکن است اگر شرایط (i) در هر $q \in Q$ ارضاء شوند.

در عمل لازم است که شرط (i) را روی یک مجموعه از حاصلضرب‌های متقارن که تشکیل یک پایه

برای

$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})_q = \{X(q)|X \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{Y})\}$$

می‌دهند بررسی کرد.

مراجع

[1] Abraham, R. and Marsden, J.E [1978] **Foundation of Mechanics**, Second edition, Addison Wesly, Reading, MA, ISBN O-8053-O102-X.

[2] Abraham, R., Marsden, J. E., and Ratiu, T.S. [1988] **Manifolds, Tensor Alalysis, and Application**, second edition, number 75 in Applied Mathematical Sciences, Springer- Verlag, ISBN O-387-96790-7.

[3] Agracher, A. A. and Sachkor, Y. [2004] **Control theory from the Geometric Viewpoint**, Spriger- Verlag, New York, ISBN 3-540-21019-9.

[4] Bloch, A. M. [2003] **Nonhomolonomic Mechnics and Control**, volume 24 of interdisciplinary Applied Mathematics, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-095535-6.

[5] Bullo, F., lewis, A. D. [2004] **Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Systems**, number 49 in Text in Applied Mathematics, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-22195-6.

[6] Carmo, M. P. [1976] **Differential Geometry of Carres and Surface**, prentice-Hall.

[7] [1992] **Riemannian Geometry, Mathematics: Theory and Application**, Birkhauser, Boston, ISBN O-8176-3490-8.

[8] Kobayashi, S. and Nomizu, K. [1963] **Foundations of Differential Geometry**, Volume I, number 15 in Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Intersience Publishers, New York, ISBN O-470-49647-9.

[9] Kolar, I, Michor, P. W., and Slovak, J. [1993] **Natural Operations in Differential Geometry**, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-S6235-4.

[10] lang, S. [1995] **Differential and Riemannian Manifolds**, number 160 in Graduate Text in Mathematics, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-94338-2.

[11] Lewis, A. D. [1998] **Affine Connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics**, Report on Maathematical physics, 42 (1/2), 135-164.

[12] [2000] **The geometry of the maximum principle for affine connection control systems**, Preprint, arailable online at http://penclope. most. queensu. ca/ andrew/.

[13] [2004] **Affine connection systems**, in Proceedings of the IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, 128-133, Princeton, NJ.

[14] Lewis, A. D. and Murray,R.M. [1997] **Controllability of simple mechanical control Systems**, SIAM Journal on Control and Optimization, 35 (3), 766-790.

[15] Nijmeijer, H and van der Schoft, A. J. [1990] **Nonlinear Dynamiccal Control Systems**, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-97234-X.

[16] Sontag, E. D. [1998] **Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems**, second edition, number 6 in Texts in Applied Mathematics, Springer- Verlag, New York, ISBN O-387-98489-5.

[17] Sussmann, H. J. [1997] **An introduction to the coordinate- free maximum principle, in Geometry of Feedback and Optimal Control**, B. Jakubezyk and W. Respondek, editors, pages 463-553, Dekker Marcel Dekker, New York.

[18] Warner, F. W. [1983] **Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups**, number 94 in Graduate Text in Mathematics, Springer- Verlag, New York.

[۱۹] شهشهانی، سیاوش. جزوه هندسه منیفلد، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Master of Science Thesis in
Pure Mathematics

Title

Affine Connections and Mechanical Control Systems

Supervisor

Dr. Seyed Reza Moghadasi

Author

Mehran Aminiyan Shahrokh Abadi

Oct 2007