Math. Ann. 307, 445–460 (1997)

Mathematische Annalen

Sur la dynamique des gradients
Existence de varietes invariantes

R. Moussu

Laboratoire de Topologie, UMR5584, Université de Bourgogne, Département de Mathématiques, B.P. 138, F-21 004 Dijon Cedex, France (e-mail: rmoussu@satie.u-bourgogne.fr)

Reçu le 20 juillet 1995 / Version revisée reçue le 20 janvier 1996

Dédié à R. Thom

Soit f une fonction analytique réelle sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soit ∇f son gradient pour la structure euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n$. Au début des années soixante S. Lojasiewicz et R. Thom prouvent dans [Lo_1], [Th_1] que les ensembles limites des courbes intégrales de ∇f sont constitués de points singuliers isolés de f. Ainsi l'étude de la dynamique de ∇f se ramène essentiellement à l'étude des bassins d'attraction de ses points singuliers. Pour construire une stratification raisonnable d'un tel bassin, R. Thom a proposé d'étudier tout d'abord la conjecture suivante:

Conjecture du gradient. *Les courbes intégrales de ∇f possèdent des tangentes en leurs points limites.*

Cette conjecture est prouvée lorsque le cône tangent de f n'est pas "trop" dégénéré. Après avoir énoncé ce résultat nous le démontrons en utilisant des éclatements sphériques des points singuliers de f. Ceci est ensuite utilisé pour prouver le résultat suivant.

Théorème d'existence de variétés invariantes. *Soit a un point singulier de f. Il existe une famille de courbes analytiques lisses Γ passant par a qui sont tangentes à ∇f. Leur réunion S est un sous-ensemble sous analytique. Le cône tangent de S au point a est un sous-ensemble semi-algébrique C dont les équations-inéquations sont déterminées par la partie initiale de f. Enfin, il existe un isomorphisme sous-analytique de S sur C qui envoie chaque courbe Γ sur sa tangente au point a.*

L'ensemble S joue un rôle central dans la dynamique de ∇f au voisinage de a. Il permet une description partielle du bassin d'attraction de a. Par exemple, lorsque a est un maximum local de f on peut dire, avec le langage de R. Thom, que S est un "centre organisateur" du bassin d'attraction de a pour ∇f. Notons que ce résultat illustre la spécificité des champs de gradient puisque qu'un champ de vecteurs analytique réel ne possède pas en général de courbes invariantes analytiques passant par ses points singuliers.

Le plan de ce travail est le suivant. Dans le chapitre I, nous fixons les notations qui seront utilisées dans toute la suite et rappelons le théorème de Lojasiewicz-Thom. Dans le chapitre II, nous étudions "l'éclaté sphérique" d'un gradient et nous démontrons des résultats déjà connus sur la conjecture de Thom qui nous sont utiles dans la suite. Dans le chapitre III, nous énonçons de façon précise le théorème ci-dessus en termes d'éclaté sphérique et nous le prouvons. Enfin, dans le chapitre IV, nous montrons que les résultats classiques sur la conjecture de Thom et ce théorème restent vrais pour les champs de gradient définis à partir d'une structure riemannienne quelconque.

Ce travail doit beaucoup à l'atmosphère stimulante que j'ai rencontré à l'I.M.P.A. lors d'un trop bref séjour, plus particulièrement à J. Palis et à C. Camacho. Ce sont des discussions avec N. Kuiper [Ku_2] et la lecture de la thèse de Hu [Hu] qui m'ont incité à m'intéresser aux gradients.

I Propriétés topologiques et métriques des orbites d'un gradient

Dans les trois premiers chapitres, $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Dans toute la suite f désigne une fonction analytique sur un voisinage U de l'origine 0 de $\mathbf{R}^n$ qui s'annule en 0. On note $\mathrm{Sing} f = \{x \in U / df(x) = 0\}$ son lieu singulier et on suppose que 0 appartient à $\mathrm{Sing} f$. Dans les coordonnées canoniques $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ on note:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}$$

le champ de gradient de f pour la structure euclidienne. Si $t \to \gamma(t)$ est une courbe intégrale maximale de ∇f, la fonction $t \to f(\gamma(t))$ est strictement croissante puisque:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\gamma}{dt}(t) = \nabla f(\gamma(t)), \qquad \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \|\nabla f(\gamma(t))\|^2 .$$

Chaque courbe intégrale de ∇f coupe l'hypersurface de $f^{-1}(0)$ en un point au plus. La dynamique de ∇f au voisinage du point 0 se déduit clairement de celle de $\nabla(-f^2)$. Nous supposerons dans toute la suite que: $f \leqq 0$ et $\mathrm{Sing} f \subset f^{-1}(0)$, ce qui n'est pas restrictif pour une étude, au voisinage de 0, de la dynamique de ∇f.

Théorème de S. Lojasiewicz et R. Thom [Lo_1], [Th_1]. *Il existe un voisinage V de 0 contenu dans U tel que les courbes integrales maximales $t \to \gamma_x(t)$ de ∇f, de conditions initiales les points $\gamma_x(0) = x$ de V, possèdent les propriétés suivantes*:

i) *γ_x est définie sur $\mathbf{R}^+$ et $\gamma_x(\mathbf{R}^+) \subset V$ a une longueur finie.*

ii) *γ_x possède un unique point ω-limite $\omega(\gamma_x) = \lim_{t\to\infty} \gamma_x(t)$ et $r : x \to \omega(\gamma_x)$ est une rétraction de V sur $\mathrm{Sing} f \cap V$.*

Certains arguments de la preuve de ce théorème étant utilisés dans les chapitres suivants, nous allons la rappeler brièvement. Les définitions et les propriétés élémentaires sur la dynamique des champs de vecteurs peuvent-être vues dans [Me, Pa]. Rappelons cependant que $\omega(\gamma_x) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma((t,\infty))}$.

Preuve. Supposons que $U = V(\rho,\eta) = \{x/|x| < \rho, |f(x)| < \eta\}$ et que l'on a l'inégalité de Lojasiewicz [Lo$_1$] sur U: il existe λ, $\mu > 0$ avec $\mu < 1$ tels que $|f(x)|^\mu < \lambda\|\nabla f(x)\|$, pour tout $x \in U$. En utilisant (1), on en déduit la majoration suivante:

$$\left\|\frac{d}{dt}\gamma_x(t)\right\| < \frac{\lambda}{\|f(\gamma_x(t))\|^\mu} \cdot \frac{d}{dt} f(\gamma_x(t))$$

si γ_x est défini sur $[0,t_0]$ et t appartient à $[0,t_0]$. Il existe λ', $\mu' > 0$ avec $\mu' < 1$ tels que:

$$\int_0^{t_0} \left\|\frac{d}{dt}\gamma_x(t)\right\| dt < \lambda'|f(x)|^{\mu'} . \tag{2}$$

D'après l'argument de "majoration à priori" des solutions d'une équation différentielle, il existe ρ', η' tels que, pour tout x appartenant à $V(\rho',\eta')$, γ_x est définie sur $\mathbf{R}^+$ et $\gamma_x(\mathbf{R}^+)$ est de longueur finie. L'ensemble $\omega(\gamma_x)$ étant connexe, il est constitué d'un seul point noté $\omega(\gamma_x) = \lim_{t\to\infty}\gamma_x(t) = r(x)$. Soit r_c l'application de $V(\rho',\eta')$ dans U définie par:

$$r_c(x) = x \quad \text{si} \quad f(x) \geqq c \quad \text{et} \quad r_c(x) = f^{-1}(c) \cap \gamma_x(\mathbf{R}^+) \quad \text{si} \quad f(x) \leqq c\,.$$

D'après (2), la longueur de l'arc de γ_x joignant $r_c(x)$ à $r(x)$ est majorée par $\lambda'|c|^{\mu'}$ et on a $\|r_c(x) - r(x)\| < \lambda'|c|^{\mu'}$. La fonction $r = r_0$ est limite uniforme des r_c pour c tendant vers 0. Ce qui prouve iii) en prenant pour V la réunion des $\gamma_x(\mathbf{R}^+)$ pour x dans $V(\rho',\eta')$. $\square$

II Eclaté d'un gradient et conjecture de Thom

Dans ce chapitre et le suivant, on suppose que f vérifie $*$ ($f \leqq 0$, $\mathrm{Sing} f = f^{-1}(0)$) et les conclusions du théorème de Lojasiewicz-Thom sur un voisinage V de 0 : toute courbe intégrale γ de ∇f est définie sur $\mathbf{R}^+$ et $r : \gamma(0) \to \omega(\gamma) = \lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ est une rétraction de V sur $\mathrm{Sing} f \cap V$. L'étude locale de la dynamique de ∇f se ramène à l'étude des bassins d'attraction $r^{-1}(a)$ des points a de $\mathrm{Sing} f$. Un outil fondamental dans cette étude est "l'éclatement sphérique de centre a de ∇f". Nous allons le définir dans le premier paragraphe et nous en déduirons deux propositions plus ou moins connues sur la conjecture de Thom dans les paragraphes suivants.

1 Eclatement de centre 0 *de* ∇f

Dans toute la suite, on écrit $f = \sum_{k \geqq 2} f_k$, $\nu \geqq 2$ le développement de Taylor de f en 0. Les f_k sont des polynômes homogènes de degré k en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit

$$\pi : \mathbf{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n, \quad \pi(r, X) = rX$$

l'éclatement sphérique du point 0, S^{n-1} désignant la sphère de rayon 1 pour la métrique euclidienne. On pose $F(r, X) = f(rX) = \sum_{k \geqq \nu} r^k F_k(X)$ où les F_k sont les restrictions des f_k à S^{n-1}. La restriction de π à $(\mathbf{R}^+ \backslash \{0\}) \times S^{n-1}$ est un isomorphisme sur $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$. L'image réciproque par cette restriction de la structure euclidienne (canonique) $e = \langle \,;\, \rangle$ est une structure riemannienne $E = \pi^*(e)$. La restriction de ∇f à $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ est l'image par π du champ de gradient ∇F de F pour cette structure. Ceci se traduit par les formules suivantes (pour $r > 0$):

$$\nabla f(rX) = D\pi(\nabla F)(r, X), \qquad E_{(r,X)}(\nabla F(r, X), \bullet) = dF_{(r,X)}(\bullet)\,.$$

Calculons E en fonction de dr et des dX_i où $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ avec $\sum X_i^2 = 1$:

$$E_{(r,X)} = \pi^* \left(\sum (dx_i)^2 \right) = dr^2 + r^2 \sum (dX_i)^2\,.$$

Posons $E_1 = \sum (dX_i)^2$ la structure riemannienne (canonique) de S^{n-1} induite par la structure euclidienne e. En "dualisant" par E la différentielle de F on obtient:

$$\nabla F(r, X) = \sum_{k \geqq \nu} k r^{k-1} F_k(X) \cdot \partial/\partial r + r^{k-2} \nabla F_k(X)\,,$$

où $\nabla F_k(X)$ est le dual de $dF_k(X)$ pour E_1; c'est-à-dire le gradient de F_k pour E_1.

2 Eclaté divisé d'un gradient

La restriction de ∇F au diviseur $0 \times S^{n-1}$ est identiquement nulle pour $\nu \geqq 2$. Il existe un entier $p \geqq 0$ et un champ de vecteurs $\widetilde{\nabla} f$ analytique sur $\mathbf{R}^+ \times S^{n-1}$, non identiquement nul sur le diviseur, tel que $\nabla F = r^p \widetilde{\nabla} f$. Les champs ∇F et $\widetilde{\nabla} f$ ont le même portrait de phases pour $r > 0$. Pour les comparer sur le diviseur, distinguons deux cas.

a) *F_ν est constante.* Le polynôme homogène f_ν est une fonction de $\sum x_i^2$ et ν est pair. Il existe $a < 0$ tel que $f_\nu(x) = a(\sum x_i^2)^{\nu/2}$. On a alors $p = \nu - 1$ et le champ $\widetilde{\nabla} f$ s'écrit:

$$\widetilde{\nabla} f = \nu a \frac{\partial}{\partial r} + \nabla F_{\nu+1} + 0(r)\,,$$

où $0(r)$ désigne un "infiniment petit d'ordre 1" en r. Les courbes intégrales de $\widetilde{\nabla} f$ coupent transversalement le diviseur. Par chaque point X du diviseur passe une unique courbe intégrale $\widetilde{\gamma}_X$ de $\widetilde{\nabla} f$. La courbe image $\pi(\widetilde{\gamma}_X) \backslash \{0\}$

est une courbe intégrale γ_X de ∇f tangente au vecteur X en 0. La réunion $\Gamma_X = \gamma_X \cup \gamma_{-X} \cup \{0\}$ est une courbe analytique invariante de ∇f tangente à la direction X. Ceci prouve évidemment le théorème dans ce cas particulier et permet de décrire complètement le bassin d'attraction du point 0.

b) F_ν *n'est pas constante.* Dans toute la suite, on suppose que cette condition est réalisée. On a alors $p = \nu - 2$ et:

$$\widetilde{\nabla} f(r,X) = \sum_{k \geqq \nu} k\, r^{k-\nu} F_k(X) \cdot r \frac{\partial}{\partial r} + r^{k-\nu} \nabla F_k(X) \tag{3}$$

est un champ de vecteurs tangent au diviseur $0 \times S^{n-1}$. Sa restriction au diviseur identifié à S^{n-1} est ∇F_ν. L'équation différentielle correspondant à $\widetilde{\nabla} f$ s'écrit:

$$\frac{dr}{dt} = r(\nu F(X) + 0(r)) , \qquad \frac{dX}{dt} = \nabla F_\nu(X) + 0(r) , \tag{4}$$

où les $0(r)$ sont des fonctions analytiques sur un voisinage du diviseur nulles pour $r = 0$. Nous allons utiliser $\widetilde{\nabla} f$ pour étudier la conjecture suivante.

3 Conjecture de Thom [Th_2, Th_3]: *Les courbes intégrales de* ∇f *possèdent des tangentes en leurs points* ω*-limites.*

Soit $t \to \gamma(t)$ une courbe intégrale γ de ∇f dont 0 est l'ensemble ω-limite. Il existe une unique courbe intégrale $\widetilde{\gamma}$ de $\widetilde{\nabla} f$ dont l'image par π est la courbe γ, à un changement de paramétrage près. L'étude du bassin d'attraction de 0 se ramène à l'étude des courbes intégrales de $\widetilde{\nabla} f$:

$$t \to \widetilde{\gamma}(t) = (r(t), X(t)) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to \infty} r(t) = 0 .$$

L'ensemble ω-limite de $\widetilde{\gamma}$ noté $\omega(\widetilde{\gamma})$ est l'ensemble des points $(0, X)$ du diviseur tels que:

$$X = \lim_{n \to \infty} X(t_n) \quad \text{où} \quad \lim_{n \to \infty} \{t_n\} = \infty .$$

En identifiant le diviseur et $S^{n-1}, \omega(\widetilde{\gamma})$ s'identifie à l'ensemble $D(\gamma) \subset S^{n-1}$ des directions limites (unitaires) des sécantes en 0 pour la courbe γ; c'est-à-dire, X appartient à $D(\gamma)$ si et seulement si il existe une suite $\{t_n\}$ tendant vers l'infini telle que $X = \lim \gamma(t_n)/\|\gamma(t_n)\|$. On sait ainsi que: $D(\gamma) = \omega(\widetilde{\gamma})$ *est un ensemble connexe, compact et invariant par* $\nabla F_\nu(X)$*. La conjecture de Thom s'énonce*: $\omega(\widetilde{\gamma})$ *est un singleton.*

Les résultats classiques sur la conjecture sont contenus dans les deux théorèmes suivants. Je crois que l'on peut attribuer le premier à Thom-Martinet et le second à Thom-Kuiper. Dans leurs énoncés γ est une courbe intégrale de ∇f telle que $\omega(\gamma) = 0, \widetilde{\gamma}$ est la courbe intégrale correspondante de $\widetilde{\nabla} f$ et

$D(\gamma) = \omega(\widetilde{\gamma})$ est l'ensemble ω-limite de $\widetilde{\gamma}$. Ainsi, γ possède une tangente en $0 = \omega(\gamma)$ si et seulement si $D(\gamma) = \omega(\widetilde{\gamma})$ est un singleton.

Théorème 1. *L'ensemble* $\omega(\widetilde{\gamma})$ *est contenu dans* $\operatorname{Sing} F_v = \{X \in S^{n-1} / dF_v(X) = 0\}$.

Ainsi, la conjecture de Thom est vraie en dimension 2, les points singuliers de F_v étant des points isolés de S^1 compte tenu de l'hypothèse $dF_v \not\equiv 0$. D'autre part, $\omega(\widetilde{\gamma})$ étant un connexe contenu dans $\operatorname{Sing} F_v$, la fonction F_v est constante sur $\omega(\widetilde{\gamma})$.

Théorème 2. *L'ensemble* $D(\gamma) = \omega(\widetilde{\gamma})$ *est un singleton si* $F_v(\omega(\widetilde{\gamma})) \neq 0$.

Ainsi, la conjecture de Thom est vraie pour ∇f en 0 si l'ensemble $Z_v = \operatorname{Sing} F_v \cap F_v^{-1}(0)$ est formé de points isolés. Cette condition ne dépend pas de la structure euclidienne choisie pour définir S^{n-1}. En effet, Z_v est l'intersection de S^{n-1} et de la "partie singulière" S_v de $f_v^{-1}(0)$: $S_v = f_v^{-1}(0) \cap \{x \in \mathbf{R}^n / df_v(x) = 0\}$. En juxtaposant ces deux résultats on a :

Corollaire [Th3]. *La conjecture de Thom est vraie pour* ∇f *en* 0 *si* S_v *est une union finie de droites.*

4 Preuve du théorème 1

Montrons tout d'abord que $\omega(\widetilde{\gamma})$ est contenu dans un niveau critique de F_v. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \omega(\widetilde{\gamma})$ tel que $c = F_v(X)$ ne soit pas une valeur critique de F_v. Considérons la fonction $c(t) = F_v(X(t))$ où $\widetilde{\gamma}(t) = (r(t), X(t))$. D'après l'expression (4) de $\widetilde{\nabla} f$ on a:

$$dF_v(\widetilde{\nabla} f)(r, X) = \|\nabla F_v(X)\|^2 + 0(r) \,.$$

Puisque $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$, il existe $T > 0$, $\eta > 0$ tels que si $t > T$ et $|c(t) - c| < \eta$ on a:

$$c'(t) = dF_v(X'(t)) = \|\nabla F_v(X(t))\|^2 + 0(r(t)) > 0 \,.$$

Le graphe de c coupe la bande $\mathbf{R}^+ \times]c - \eta, c + \eta[$ selon un connexe et c prend une fois au plus les valeurs de l'intervalle $]c - \eta, c + \eta[$. Ceci contredit l'hypothèse $X \in \omega(\widetilde{\gamma})$.

Supposons que $\omega(\widetilde{\gamma})$ contienne un point X non singulier pour F_v. L'orbite de X par ∇F_v est une courbe ξ transverse aux hypersurfaces de niveau F_v. Elle coupe au moins un niveau non critique $F_v = c$. Ceci contredit la première partie de la preuve puisque $\omega(\widetilde{\gamma})$ est un ensemble invariant par ∇F_v qui contient ξ. $\square$

5 Preuve du théorème 2

Soit X un point de $\omega(\widetilde{\gamma})$ tel que $c = F_v(X)$ soit strictement négatif. Fixons α appartenant à $]0, -c[$ et notons $0(e^{-\alpha t})$ les fonctions φ analytiques sur $\mathbf{R}^+$ telles que $e^{\alpha t}\varphi(t)$ soit borné. Si on écrit $\widetilde{\gamma}(t) = (r(t), X(t))$ et $c(t) = F_v(X(t))$

on a:

$$\frac{dr}{dt}(t) = r(t)(c(t) + 0(r(t))) , \qquad \lim_{t\to\infty} c(t) = c , \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 0 .$$

On en déduit que $r(t) = 0(e^{-\alpha t})$. D'après (4), on a:

$$\left\| \frac{dX}{dt}(t) \right\| = \|\nabla F_v(X(t))\| + 0(e^{-\alpha t}) , \quad \|\nabla F_v(X(t))\|^2 = \frac{d}{dt} c(t) + 0(e^{-\alpha t}) .$$

On a la majoration suivante:

$$\|\nabla F_v(X(t))\| \leqq \frac{c'(t)}{\|\nabla F_v(X(t))\|} + 0(e^{-\frac{\alpha}{2}t}) \leqq \lambda \frac{c'(t)}{|c(t) - c|^{\mu}} + 0(e^{-\frac{\alpha}{2}t}) ,$$

d'après l'inégalité de Lojasiewicz, avec λ, $\mu > 0$ et $\mu < 1$. On en déduit que:

$$\int_0^\infty \left\| \frac{dX}{dt}(t) \right\| dt \leqq \lambda' |c(0) - c|^{\mu'} + \int_0^\infty 0(e^{-\frac{\alpha}{2}t})\, dt$$

avec λ', $\mu' > 0$. La courbe $t \to X(t)$ a une longueur finie. Elle possède un seul point limite pour t tendant vers l'infini. $\square$

III Existence de variétés invariantes

Dans tout ce chapitre nous reprenons les notations et les hypothèses du chapitre précédent: f est analytique sur un voisinage V de 0, f vérifie $*$ ($f \leqq 0$, $\operatorname{Sing} f = f^{-1}(0)$), la restriction F_v de f_v à S^{n-1} n'est pas constante, V vérifie la conclusion du théorème de Thom-Lojasiewicz. Nous faisons l'éclatement sphérique, $\pi : \mathbf{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ de 0 et désignons par $\widetilde{\nabla} f$ l'éclaté divisé de ∇f correspondant (voir formules II- (4), II- (4)$'$).

Nous énonçons, dans le paragraphe suivant, le théorème de l'introduction pour $\widetilde{\nabla} f$. Sa version pour ∇f s'en déduit immédiatement. Dans le paragraphe 2, nous démontrons un lemme de courbes invariantes pour une famille de difféomorphismes holomorphes qui dépendent holomorphiquement d'un paramètre. Nous en déduisons dans le paragraphe 3 la preuve du théorème en complexifiant une famille de champ de vecteurs obtenue à partir de $\widetilde{\nabla} f$. Le passage de l'analytique réel à l'analytique complexe simplifie (via le théorème de Weierstrass) la preuve de l'analyticité des courbes invariantes.

1 Théorème des courbes invariantes

Afin de pouvoir énoncer de façon précise le théorème, nous allons tout d'abord définir le cône C des droites passant par 0 tangentes aux courbes invariantes pour ∇f. Plus exactement, nous définissons l'intersection de C avec la sphère S^{n-1}. Soit X un point du lieu singulier $\operatorname{Sing} F_v$ de F_v. La Hessienne $D^2 F_v(X)$ de F_v en X est une forme quadratique sur l'espace tangent à S^{n-1} au point X, noté $T_X S^{n-1}$. Cet espace vectoriel est muni de la structure euclidienne induite par la structure euclidienne $e = \langle\, ; \rangle$ de $\mathbf{R}^n$, ou, plus précisément, par la structure riemannienne E_1 de S^{n-1} induite par e. Dans la suite, nous considérons que $D^2F_v(X)$ est un endomorphisme auto-adjoint de T_XS^{n-1} muni de $E_{1,X}$. Son spectre $\{\lambda_1(X), \lambda_2(X), \dots, \lambda_{n-1}(X)\}$ est réel et on pose $\lambda(X) = \inf\{\lambda_k(X)\}$. Le *sous-ensemble super attractant de* $\widetilde{\nabla} f$ est le sous-ensemble de S^{n-1}:

$$Sa = \{X \in \operatorname{Sing} F_v / F_v(X) < 0 \text{ et } vF_v(X) < \lambda(X)\} .$$

C'est un sous-ensemble semi-algébrique de S^{n-1} non vide. En effet, $F_v \leqq 0$ est non constante. Elle possède des minimaux locaux sur S^{n-1}. Si X est un tel point, $D^2F_v(X)$, considérée comme forme quadratique, est positive. Les valeurs propres de $D^2F_v(X)$ considéré comme endomorphisme auto-adjoint sont positives. Ainsi $\{X \in \operatorname{Sing} F_v/X$ est un minimum local de $F_v\}$ est un sous-ensemble semi-algébrique non vide de Sa. Enfin, v étant pair, S_a est invariant par l'involution $X \to -X$.

L'éclaté divisé $\widetilde{\nabla} f$ est à priori défini sur le voisinage $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$ du diviseur dans $\mathbf{R}^+ \times S^{n-1}$. Il se prolonge en un champ de vecteurs analytiques sur un voisinage de $0 \times S^{n-1}$ dans $\mathbf{R}^+ \times S^{n-1}$, noté encore $\widetilde{\nabla} f$, en posant pour $r < 0$, $\widetilde{\nabla} f(r, X) = \widetilde{\nabla} f(-r; -X)$. Le théorème est énoncé pour ce prolongement avec les hypothéses $*$, $dF_v \not\equiv 0$.

Théorème 3. *Par tout point X de Sa passe une unique courbe Γ_X tangente à $\widetilde{\nabla} f$ analytique, lisse, transverse au diviseur. La réunion SA des Γ_X pour X appartenant à Sa est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R} \times S^{n-1}$, invariant par l'involution $(r, X) \to (-r, -X)$ et isomorphe (semi-analytiquement) au cylindre $\mathbf{R} \times Sa$. Plus précisément, pour tout point X_0 de Sa il existe un voisinage W de X_0 dans S^{n-1} et un plongement analytique H de $\mathbf{R} \times W$ dans $\mathbf{R} \times S^{n-1}$ tels que:*

$$H(\mathbf{R} \times W) \cap SA = H(\mathbf{R} \times Sa) \quad \textit{avec} \quad H(0, X) = (0, X)$$

et les applications partielles $r \to H(r, X)$ paramétrisent les courbes Γ_X pour $X \in Sa \cap W$.

Le théorème énoncé dans l'introduction est évidemment une conséquence de ce théorème. On l'obtient en prenant "l'image directe" par l'application d'éclatement du théorème précédent. Les courbes invariantes Γ sont les courbes $\pi(\Gamma_X)$. Elles sont lisses puisque les Γ_X coupent transversalement le diviseur. Leur réunion est l'ensemble $\pi(SA) = S$. C'est à priori un ensemble sous-analytique. Son cône tangent en 0 est le cône C de sommet 0 construit sur Sa et c'est aussi la réunion des tangentes aux courbes invariantes Γ. Enfin, l'isomorphisme semi-analytique entre SA et $\mathbf{R} \times Sa$ se redescend en un isomorphisme sous-analytique entre S et C qui envoie chaque courbe Γ sur sa tangente au point 0. (Pour les définitions et les propriétés élémentaires des ensembles semi-analytiques voir [Lo$_2$].)

2 Courbes invariantes pour des difféomorphismes holomorphes

Dans ce lemme et dans la preuve du théorème, nous allons utiliser des objets holomorphes obtenus par complexification d'objets analytiques réels. Précisons tout d'abord les notations que nous allons utiliser dans ce cadre. On note z les points de $\mathbf{C}$, $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1})$ ou $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$ les points de $\mathbf{C}^{n-1}$. On munit $\mathbf{C}^{n-1}$ de la norme $\|Z\| = \sup |Z_i|$ et on pose:

$$D_\eta(0) = \{z \in \mathbf{C}/|z| < \eta\}\,, \qquad P_\eta(0) = \{Z \in \mathbf{C}^{n-1}/\|Z\| < \eta\}\,.$$

Nous notons $\theta_2(z, Z)$ les applications holomorphes $\varphi : (z, Z, Y) \to \varphi(z, Z, Y)$ sur des ouverts de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}^{n-1}$ du type $D_\eta(0) \times P_\eta(0) \times W$ telles que:

$$\varphi(0,0,Y) = \partial\varphi/\partial z\ (0,0,Y) = \partial\varphi/\partial Z_1\ (0,0,Y) = \ldots = \partial\varphi/\partial Z_{n-1}\ (0,0,Y) = 0\,.$$

Nous dirons que φ est réelle si pour $(z, Z, Y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1}$ ses composantes sont réelles. La preuve du lemme suivant repose sur un argument de Hadamard [Ha].

Lemme. *Soit ϕ une application holomorphe définie sur un ouvert $D_\eta(0) \times P_\eta(0) \times W$ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}^{n-1}$, à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ qui est réel sur le réel. On suppose que, pour $Y \in W$, les applications partielles ϕ_Y sont des difféomorphismes holomorphes sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ du type suivant*:

$$\phi_Y : (z, Z) \to \phi_Y(z, Z) = (s(Y)z, \varphi_Y(z, Z))$$

où $s : Y \to s(Y)$ est holomorphe avec $|s(Y)| \geqq s > 1$. De plus φ_Y s'écrit

$$\varphi_Y(z, Z) = \varphi(z, Z, Y) = A(Y)Z + \theta_2(z, Z)$$

où $Y \to A(Y)$ est une application holomorphe de W dans $GL(n-1, \mathbf{C})$ telle que:

$$\|A(Y)\| \leqq s' < s \leqq |s(Y)|\,.$$

Alors, il existe $\eta' > 0$ et une application holomorphe h de $D_{\eta'}(0) \times W$ dans $\mathbf{C}^{n-1}$

$$h : (z, Y) \mapsto h(z, Y) = h_Y(z) \quad avec \quad h_Y(0) = h'_Y(0) = 0$$

telle que, pour chaque Y dans W, le graphe de h_Y est l'unique courbe holomorphe invariante de ϕ_Y transverse à l'hyperplan $0 \times \mathbf{C}^{n-1}$. Enfin, h est réelle.

Preuve. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications holomorphes $h : z \to h(z)$ de $D_\eta(0)$ dans $P_\eta(0)$ telles que $\|h(z)\| \leqq |z|$. Le transformé par ϕ_Y du graphe de h est le graphe de l'application h_1 définie pour $z \in D_\eta(0)$ par:

$$h_1 : z \to \varphi_Y(z/s(Y), h(z/s(Y))) = A(Y)(h(z/s(Y))) + \theta_2(z/s(Y), h(z/s(Y)))\,.$$

Fixons α dans l'intervalle $]s'/s, 1[$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $(z, Z, Y) \in D_\eta(0) \times P_\eta(0) \times W$ on ait les majorations suivantes pour la fonction Θ_2 des hypothèses du lemme:

$$\|\theta_2(z, Z)\| < 1/2(|z| + \|Z\|)\ (\alpha s - s')\ ,$$

$$\|\theta_2(z, Z) - \theta_2(z, Z')\| \leqq \|Z - Z'\|\,(\alpha s - s')\ .$$

On a alors la majoration suivante de h_1 le transformé de h:

$$\|h_1(z)\| < s' \cdot \frac{|z|}{s} + \frac{|z|}{s}\ (\alpha s - s') = \alpha|z|\ .$$

Etudions l'application $\underline{\phi}_Y : h \to h_1$ de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ ainsi définie. Soient $h, \underline{h}$ deux éléments de $\mathscr{H}$ et soit:

$$\mu = \mu(h, \underline{h}) = \sup\left\{ \left\| \frac{h(z) - \underline{h}(z)}{z} \right\| \Big/ z \in D_\eta(0) \right\}.$$

Montrons que $\mu_1 = \mu(h_1, \underline{h}_1)$ est inférieur à $\mu\alpha$:

$$\|h_1(z) - \underline{h}_1(z)\| \leqq s'\mu \left|\frac{z}{s}\right| + \mu \left|\frac{z}{s}\right|\ (\alpha s - s') = \alpha\mu|z|\ .$$

L'application $\underline{\phi}_Y$ est une contraction de $\mathscr{H}$. Pour $h_0 \in \mathscr{H}$ fixé la suite des $\{h_n\}$ définies par $h_n = \underline{\phi}_Y(h_{n-1})$ si $n \geqq 1$ tend uniformément pour $(z, Y) \in D_\eta(0) \times W$ vers $h(z, Y) = h_Y(z)$. D'après le théorème classique de convergence de Weierstrass, la fonction h est holomorphe. Par construction, h_Y est l'unique point fixe de $\underline{\phi}_Y$ pour $Y \in W, h_Y$ est réelle sur le réel et h'_Y s'annule en 0. Son graphe est une courbe invariante de ϕ_Y transverse à $0 \times \mathbf{C}^{n-1}$. Soit Γ_Y une courbe invariante pour ϕ_Y transverse à $0 \times \mathbf{C}^{n-1}$. Alors Γ_Y est tangente à $\mathbf{C} \times 0$ puisque $\|A(Y)\| < |s(Y)|$. Pour η assez petit c'est le graphe d'un élément de $\mathscr{H}$. Ainsi Γ_Y est le graphe de h_Y. $\square$

3 *Preuve du théorème des courbes invariantes*

Nous allons montrer l'assertion suivante pour tout X_0 appartenant à Sa.

Assertion. *Si X_0 appartient à Sa, il existe un plongement analytique H de $I \times W$ dans $\mathbf{R} \times S^{n-1}$ où I est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}$, *W un voisinage de X_0 dans S^{n-1} qui s'écrit*:

$$H : (r, X) \to (r, H(r, X)) \quad \textit{avec} \quad H(0, X) = X$$

tel que pour tout point X de $W \cap Sa$, la courbe $\Gamma_X : \underline{r} \to \Gamma_X(r) = H(r, X)$ est tangente à $\widetilde{\nabla} f$ et c'est l'unique courbe tangente à $\widetilde{\nabla} f$ passant par $(0, X)$ *transverse au diviseur.*

Ceci prouvera évidemment que la réunion SA des Γ_{X_0} pour $X_0 \in S_a$ est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R} \times S^{n-1}$, semi-analytiquement isomorphe à $\mathbf{R} \times Sa$. L'invariance de SA par l'involution $(r, X) \to (-r, -X)$ est une conséquence de l'invariance de $\widetilde{\nabla} f$ par cette involution et de l'unicité des courbes tangentes à $\widetilde{\nabla} f$, transverses au diviseur et passant les points de Sa.

Supposons que X_0 soit le pôle nord $(0,0,\ldots,0,1)$ de $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Notons $(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$ les $(n-1)$ premières coordonnées des points X de l'hémisphère nord $N = \{X \in S^{n-1}/X_n > 0\}$. L'espace tangent en X_0 à S^{n-1}, $T_{X_0}S^{n-1}$ est muni de la structure euclidienne E_{1,X_0}. Dans la carte $(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$ elle s'écrit

$$E_{1,X_0} = dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_{n-1}^2 \, .$$

Considérons $D^2F_v(X_0)$ comme un endomorphisme auto-adjoint de $(T_{X_0}S^{n-1}, E_{1,X_0})$. Modulo un changement de base orthonormal de $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$, on peut supposer que la matrice $B(X_0)$ de $D^2F_v(X_0)$ dans la base $(\partial/\partial X_1, \partial/\partial X_2, \ldots, \partial/\partial X_{n-1})$ de $T_{X_0}S^{n-1}$ est diagonale. Dans la suite nous identifions N à $\mathbf{R}^{n-1}$ et TN à $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1}$ via la carte $(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$ ainsi définie. Le fibré tangent à $\mathbf{R} \times N$ est muni de la trivialisation correspondante. Nous considérons la restriction de $\widetilde{\nabla} f$ à $\mathbf{R} \times N$ comme une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$. Pour chaque Y appartenant à N nous posons

$$\widetilde{\nabla}_Y f(r,X) = \widetilde{\nabla} f(r,X) - \widetilde{\nabla} f(0,Y) \, .$$

L'application $(r,X,Y) \to \widetilde{\nabla}_Y f(r,X)$ est une famille de champs de vecteurs $\widetilde{\nabla}_Y f$ sur $\mathbf{R} \times N$ qui dépend analytiquement de $Y \in N$. Remarquons que, pour Y fixé, le point $(0,Y)$ est un point singulier de $\widetilde{\nabla}_Y f$ et que $\widetilde{\nabla}_Y f = \widetilde{\nabla} f$ si Y est un point de $\operatorname{Sing} F_v$ puisque $\widetilde{\nabla} f(0,Y) = \nabla F_v(Y)$.

Pour étudier $\widetilde{\nabla} f$ au voisinage de $(0,Y)$ posons $(X - Y) = T = (T_1,T_2,\ldots,T_{n-1})$. D'après II. (4) l'équation différentielle correspondante à $\widetilde{\nabla}_Y f$ s'écrit alors:

$$E_Y \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(vF_v(Y+T) + 0(r)) \\ \dfrac{dT}{dt} = \nabla F_v(Y+T) + r(\nabla F_{v+1}(Y+T) + 0(r)) \end{cases}$$

où les $0(r)$ sont des fonctions analytiques en $(r,T;Y)$ nulles pour $r = 0$. Soit $B(Y)$ la matrice jacobienne de l'application $T \to \nabla F_v(Y+T)$ dans les coordonnées $(T_1,T_2,\ldots,T_{n-1})$. La partie linéaire de E_Y s'écrit dans les coordonnées $(r,T_1,T_2,\ldots,T_{n-1})$

$$\frac{dr}{dt} = rvF_v(Y) \, , \qquad \frac{dT}{dt} = B(Y)T + r\nabla F_{v+1}(Y) \, .$$

Naturellement, l'application $Y \to B(Y)$ est analytique. D'après le choix des coordonnées $(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})$, $B(X_0)$ est diagonale de diagonale $(\lambda_1(X_0), \lambda_2(X_0), \ldots, \lambda_{n-1}(X_0))$. Puisque X_0 est un point de Sa on sait que $vF_v(X_0) < 0$ et $vF_v(X_0) < \inf\{\lambda_k(X_0)\}$. Soit W_0 un voisinage de X_0 dans S^{n-1} tel que pour Y appartenant W_0 on a toujours $vF_v(Y) < 0$ et $vF_v(Y)$ n'est pas une valeur propre de $B(Y)$. Notons $(u,e_1,e_2,\ldots,e_{n-1})$ la base de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ correspondant aux coordonnées $(r,T_1,T_2,\ldots,T_{n-1})$. Pour chaque $Y \in W_0$ il existe un unique élément $(\alpha_1(Y), \alpha_2(Y), \ldots, \alpha_{n-1}(Y)) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que:

$$v_Y = u + \alpha_1(Y)e_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(Y)e_{n-1}$$

soit un vecteur propre associé à la valeur propre $vF_v(Y)$ pour l'endomorphisme correspondant à J^1E_Y. Soient $(r,Z) = (r, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1})$ les coordonnées des points de $\mathbf{R}^n$ dans la base $(v_Y, e_1, \ldots, e_{n-1})$: $Z_k = T_k - \alpha_k(Y)r$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ce changement de coordonnées dépend analytiquement de $Y \in W$ puisque les $\alpha_k : Y \to \alpha_k(Y)$ sont analytiques sur W. Dans les coordonnées (r,Z) on a:

$$E_Y : \frac{dr}{dt} = vF_v(Y)r(1 + 0(r)) , \qquad \frac{dZ}{dt} = B(Y)Z + \theta_2(r,Z)$$

où $\theta_2(r,Z)$ désigne une application analytique en $(r,Z;Y)$ qui s'annule aux points $(0,0;Y)$ ainsi que ses dérivées partielles premières en $r, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$. En faisant un changement de temps du type $t \to t(1 + 0(r))$ nous pouvons écrire E_Y sous la forme

$$E_Y : \frac{dr}{dt} = vF_v(Y)r , \qquad \frac{dZ}{dt} = B(Y)Z + \theta_2(r,Z) .$$

Considérons $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1})$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$ comme des points voisins de l'origine de $\mathbf{R}^{n-1}$. Les composantes de E_Y sont des séries entières réelles convergentes en les variables $(r, Z_1, Z_2, \ldots, Y_{n-1})$. Nous notons encore E_Y l'équation différentielle holomorphe en $(z,Z) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1}$ à paramètre holomorphe $Y \in \mathbf{C}^{n-1}$ obtenue en considérant ces séries comme des séries entières complexes. Nous conservons les notations Z, Y pour les complexifiés de Z, Y et notons z le complexifié de r. Nous écrirons encore:

$$E_Y : \frac{dz}{dt} = vF_v(Y)z , \qquad \frac{dZ}{dt} = B(Y)Z + \theta_2(z,Z) .$$

Il existe $\eta >$ tel que les seconds membres de ce système soient des fonctions holomorphes en $(z,Z;Y)$ sur $D_\eta(0) \times P_\eta(0) \times W$ où W désigne un voisinage de $X_0 = 0$ dans le complexifié $\mathbf{C}^{n-1}$ de $N \equiv \mathbf{R}^{n-1}$. Munissons l'espace $\mathbf{C}^{n-1}$ de la norme $\|Z\| = \sup |Z_i|$, posons

$$s(Y) = \exp(-vF_v(Y)) , \qquad A(Y) = \exp(-B(Y))$$

et notons $\|A(Y)\|$ la norme de $A(Y)$ (considéré comme un endomorphisme de $\mathbf{C}^{n-1}$) associée à la norme ci-dessus. X_0 appartenant à Sa et la matrice $B(X_0)$ étant diagonale on a: $s(X_0) > 1$, $s(X_0) > \exp(-\lambda(X_0)) = \|A(X_0)\|$. On choisit W de telle façon que ces inégalités soient encore vérifiées par $s(Y)$, $\|A(Y)\|$ pour Y appartenant à W; c'est-à-dire qu'il existe $s, s' > 0$ tels que pour $Y \in W$

$$1 < s \quad \text{et} \quad \|A(Y)\| \leqq s' < s \leqq s(Y) .$$

Soit ϕ_Y le difféomorphisme obtenu en prenant le temps -1 du flot de l'équation différentielle E_Y. Il s'écrit dans les coordonnées (z,Z): $\phi_Y : (z,Z) \to$

$(s(Y)z, \varphi_Y(z,Z))$. Compte tenu de la forme de E_Y, l'application $(z,Z,Y) \to \varphi_Y(z,Z)$ est holomorphe et

$$\varphi_Y(z,Z) = A(Y) + \theta_2(z,Z)\ .$$

Pour $\eta > 0$ assez petit, les hypothèses du lemme de Hadamard du paragraphe précédent sont vérifiées par la famille de difféomorphismes $\varphi_Y,\ Y \in W$. Soit $h : (z,Y) \to h_Y(z)$ l'application holomorphe qui apparaît dans la conclusion du lemme. Notons encore $h : (r,Y) \to h_Y(r)$ sa restriction à la partie réelle de son domaine de définition. D'après un argument classique (voir [Me, Pa]), pour chaque $Y \in W$, le graphe de h_Y dans les coordonnées (r,Z) est l'unique courbe invariante de E_Y transverse à $0 \times \mathbf{R}^{n-1}$. Elle est en fait tangente à $\mathbf{R} \times 0$. Pour obtenir le plongement H de l'assertion il nous faut revenir aux coordonnées initiales (r,X) de $\mathbf{R} \times N$. Rappelons que nous avons posé $X = Y + T,\ T_k = Z_k + \alpha_k(Y)r$. Notons α l'application de W dans $\mathbf{R}^{n-1}$ de composantes les α_k et soit H l'application $H : (r,Y) \to (r, Y + h_Y(r) + r\alpha(Y))$. Le déterminant de sa matrice jacobienne est égale à 1 sur $0 \times W$. Pour $\eta' > 0$ assez petit H est un plongement analytique de $]-\eta', \eta'[\times W$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ vérifiant $H(0,Y) = (0,Y)$. Pour chaque $Y \in W$, la courbe $\Gamma_Y : r \to H_Y(r)$ est l'unique courbe invariante de $\widetilde{\nabla}_Y f$ transverse à $0 \times \mathbf{R}^{n-1}$ et passant par $(0,Y)$. Supposons que Y appartienne à Sa. Alors $\Gamma_Y : r \to H_Y(r)$ est l'unique courbe tangente à $\widetilde{\nabla} f = \widetilde{\nabla}_Y f$ passant par $(0,Y)$ transverse à $0 \times \mathbf{R}^{n-1}$. □

IV Généralisation des résultats dans le cas riemannien

Nos résultats sur la dynamique des champs de gradient sont locaux. Pour montrer qu'ils restent vrais pour les champs de gradient des fonctions analytiques sur des variétés riemanniennes, on peut se placer dans une seule carte. Dans la suite, f désigne une fonction analytique sur un voisinage ouvert V du point 0 de $\mathbf{R}^n$ et $g_x = \sum a_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j$ une métrique riemannienne analytique sur V. On choisit les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de telle façon que $g_0 = e$ soit la structure euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n \equiv T_0\mathbf{R}^n$. On note encore S^{n-1} la sphère de rayon 1 de $\mathbf{R}^n$ pour cette structure. Le champ de gradient $\nabla_g f$ de f pour g est défini par $g(\nabla_g f, \bullet) = df$. Soit $t \to \gamma(t)$ une intégrale maximale de $\nabla_g f$. La fonction $f(\gamma(t))$ est (comme dans le cas euclidien) croissante et on peut supposer que f vérifie la condition $*$ ($f \leqq 0,\ \mathrm{Sing}\, f = f^{-1}(0)$).

L'inégalité de Lojasiewicz est vraie dans le cadre riemannien et ainsi le théorème de Lojasiewicz-Thom du chapitre I dont la preuve repose sur cette inégalité est vrai pour le champ de gradient $\nabla_g f$. Dans la suite, nous supposons que V vérifie le point iii) de la conclusion de ce théorème.

1 Eclaté $G = \pi^*(g)$ de la structure riemannienne

Notons comme précédemment $\pi : \mathbf{R}^+ \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n,\ (r,X) \to rX$, l'éclatement sphérique de l'origine 0 de $\mathbf{R}^n$. La sphère S^{n-1} est munie (comme précédemment) de la structure riemannienne E_1 induite par la structure euclidienne $e = g_0$.

Calculons $G_{(r,X)}$ à partir de l'expression de $g_x = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\,dx_i \otimes dx_j$ où les $a_{i,j}$ sont des fonctions analytiques réelles sur V. En utilisant les "coordonnées" sphériques $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ avec $\sum X_i^2 = 1$ on obtient

$$G_{(r,X)} = \sum a_{i,j}(r,X)(X_i dr + r dX_i) \otimes (X_j dr + r dX_j)\,.$$

Puisque $e = g_0$, on a $a_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$ et $a_{i,j}(r,X) = \delta_{i,j} + rA_{i,j}(r,X)$ où les $A_{i,j}$ sont des fonctions analytiques sur $\widetilde{V} = \pi^{-1}(V)$, on obtient

$$G_{r,X} = dr^2 + r^2 E_1 + r\,A_{i,j}(r,X)(X_i X_j dr^2 + r dr \otimes d(X_i X_j) + r^2 dX_i \otimes dX_j)\,.$$

Pour simplifier cette écriture nous posons:

$$G = dr^2(1 + 0(r)) + r^2(E_1 + rQ) + r^2 dr \otimes L\,.$$

$$Q_{r,X} = \sum A_{i,j}(r,X)\,dX_i \otimes dX_j\,, \qquad L_{(r,X)} = \sum A_{i,j}(r,X)\,d(X_i X_j)\,.$$

Q est une forme quadratique sur $T_{(r,X)} S^{n-1}$ et $L_{(r,X)}$ une 1-forme sur S^{n-1}.

2 Eclaté de $\nabla_g f$

L'image inverse de $\nabla_g f$ par la restriction de π à $\mathbf{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ est le gradient $\nabla_G F$ pour G de $F(r,X) = f(rX) = \sum_{k \geqq \nu} r^k F_k(X)$. Notons $R(r,X) = R$ la composante de $\nabla_G F(r,X)$ sur $r\partial/\partial r$ et $\tau(r,X)$ sa composante tangente à la sphère $\{r\} \times S^{n-1}$. Ce sont les solutions de l'équation $G(r \cdot \partial/\partial r \cdot R + \tau, \bullet) = dF$. En utilisant l'expression précédente de G elle s'écrit:

$$(1 + 0(r))rR + r^2 L(\tau) = \frac{\partial F}{\partial r}\,, \qquad r^2(E_1(\tau) + rQ(\tau)) + r^3 RL = d_X F\,.$$

En divisant la première équation par r, la seconde par r^2, on obtient:

$$R = r^{\nu-2}(\nu F_\nu + 0(r))\,, \quad E_1(\tau) = r^{\nu-2}(d_X F_\nu + 0(r))\,.$$

$$\nabla_G F(r,X) = r^{\nu-1}\left((\nu F_\nu(X) + 0(r))\frac{\partial}{\partial r} + (\nabla F_\nu(X) + 0(r))\right)$$

où $\nabla F_\nu(X)$ désigne toujours le champ de gradient de F_ν pour E_1.

3 Eclaté divisé $\widetilde{\nabla}_g f$ de $\nabla_g f$

Il faut encore distinguer comme dans II- 2. les deux cas:

a) F_ν est constante. On a alors $\widetilde{\nabla}_g f = (\nu F_\nu(X) + 0(r))\,\partial/\partial r + \Theta(r,X)$ où Θ est un champ de vecteurs tangent aux sphères $r \times S^{n-1}$. Les courbes intégrales de $\widetilde{\nabla}_g f$ coupent transversalement le diviseur et on conclut comme dans II- 2. a).

b) F_ν n'est pas constante. On suppose cette condition réalisée dans toute la suite. L'équation différentielle correspondant à $\widetilde{\nabla}_g f$ s'écrit encore sous la forme:

$$(4') \qquad \frac{dr}{dt} = r(\nu F_\nu(X) + 0(r))\,, \qquad \frac{dX}{dt} = \nabla F_\nu(X) + 0(r))$$

Remarquons que la séparation en cas a), b) ne dépend que de la structure euclidienne $e = g_0$ et non pas de la structure riemannienne.

4 Extension des résultats

Ils sont clairement vrais si $F_v =$ constante. Supposons F_v non constante. Soulignons tout d'abord que l'écriture (4′) ne dépend que de $e = g_0$. Pour prouver les théorèmes 1 et 2 du chapitre II, nous n'utilisons que cette écriture (modulo r) de $\widetilde{\nabla} f$. Tous les arguments de leurs preuves restent valables dans le cadre riemannien: utilisation de F_v comme fonction de "contrôle" croissante sur les courbes intégrales, approximation de la dérivée de $F_v(X(t))$ par $\|\nabla F_v(X(t))\|^2$, utilisation de l'inégalité de Lojasiewicz (en remplaçant la norme euclidienne $\|v\|^2$ d'un vecteur v de $T_{(r,X)}(\mathbf{R} \times S^{n-1})$ par $G_{(r,X)}(v,v)$). Les théorèmes 1 et 2 sont vrais dans le cadre riemannien et s'énoncent de la même façon que dans le cadre euclidien ainsi que leur corollaire. De la même façon, la preuve du théorème 3 dans le chapitre III n'utilise $\widetilde{\nabla} f$ que sous la forme (4′) et ne s'appuie que sur la structure riemannienne E_1 de S^{n-1}. Tous les arguments de sa preuve sont encore valables pour $\widetilde{\nabla}_g f$. Il s'énonce comme dans le cas euclidien.

Remarque. Cette généralisation au cas riemannien n'est pas gratuite. En effet, je crois que pour étudier la conjecture de R. Thom il est nécessaire d'éclater des sous-emsembles algébriques de $\operatorname{Sing} F_v \cap F_v^{-1}(0)$. On peut espérer, qu'après un certain nombre d'éclatements, l'éclaté divisé d'un gradient a des singularités avec des jets d'ordre 1 non nuls et qu'il est alors possible de contrôler sa dynamique (voir [Ca]). En utilisant cette méthode, dès le deuxième éclatement, on est amené à travailler dans un cadre "riemannien singulier".

Bibliographie

[Ca] F. Cano: Reduction of the singularities of the non dicritical singularities. Dimension three. Am. J. Math. **115**(3) (1993), 509–588

[D1] F. Dumortier: Singularities of vector fields on the plane. J. of Differential Equations, **23**(1) (1977), 53–106

[HA] J. Hadamard: Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 29, 1901 – Oeuvres complètes – tome 3, p. 1023–1026

[Hu] Hu Xing Lin: Sur la structure des champs de gradients de fonctions analytiques réelles. Thèse Paris VII (1992)

[Ku_1] N.H. Kuiper: C^1-equivalence of functions near isolated critical points. Pro. Symp. in Infinite Dimensional Topology. (Baton Rouge, 1967)

[Ku_2] N.H. Kuiper: Sur la conjecture du gradient. Notes manuscriptes (1990)

[Lo_1] S. Lojasiewicz: Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. Colloques Internationaux du C.N.R.S. n°117, les équations aux dérivées partielles, Paris 25–30 juin (1962), p. 87–89

[Lo_2] S. Lojasiewicz: Ensembles semi-analytiques. Séminaire E.C. Zeeman, Seminar on Combinatorial Topology I.H.E.S. p. 92

[Lo_3] S. Lojasiewicz: Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique. Seminari Di Geometria 1982–1983 Universita degli studi Di Bologna, Bologna (1984), p. 115–117

[Me, Pa] W. de Melo, J. Palis: Geometric theory of dynamical systems. Springer-Verlag (1982)

[Th_1] R. Thom: Local topological properties of differentiable mappings. Colloquium on Differential Analysis, p.191–202, Tata Inst. Bombay 1964, Oxford University Press, London (1964)

[Th_2] R. Thom: Gradients of analytic functions. Proceedings of Seventh National Mathematics Conferences p. 364–371 Azarabadegan Univ. Tabriz 1977 (D.R.J. Chillingworth)

[Th_3] R. Thom: Limit set of leaves of analytic foliations. Notes manuscriptes (1980)