ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1963 *МАТЕМАТИКА* *№ 3 (34)*

Г. М. Мубаракзянов

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СТРУКТУР АЛГЕБР ЛИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Эта статья является непосредственным продолжением работы [6]; метод классификации и обозначения заимствованы из неё; равным образом, ссылки на теоремы, без указания работы, относятся к ней же. Переходя к классификации алгебр Ли 5-го порядка, отметим 27 типов разложимых алгебр:

$$5g_1,\ g_2+3g_1,\ 2g_2+g_1,\ g_{3,i}+2g_1,\ g_{3,i}+g_2,\ g_{4,k}+g_1$$
$$(i=1,\ 2,\dots,7;\ \ k=1,\dots,10).$$

Из них типы $g_{3,6}+2g_1$, $g_{3,7}+2g_1$, $g_{3,6}+g_2$, $g_{3,7}+g_2$ неразрешимые, а все остальные разрешимые. В дальнейшем при отыскании канонических структур алгебр Ли всегда будем предполагать их неразложимость.

§ 1. Пусть сначала L_5 — неразрешимая алгебра Ли. Согласно теоремам 70 и 81 работы [5], она не может быть полупростой. Следовательно, по теореме Леви — Мальцева, L_5 разлагается в полупрямую сумму g и $\widetilde{R}$, то есть $L_5=g+\widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ — идеал (радикал) второго порядка с базисными элементами e_4 и e_5; g есть простая алгебра, изоморфная алгебре вычетов $L_5/\widetilde{R}$, с базисными элементами e_1, e_2, e_3.

Построим представление алгебры g в идеале $\widetilde{R}$. Это представление может быть приводимо и неприводимо. Если представление приводимо, то оно разлагается в прямую сумму одномерных представлений, но одномерное представление тривиально, следовательно, алгебра будет разложимой. Далее, если $g\cong g_{3,7}$, то алгебра g не имеет вещественных двумерных представлений. Поэтому L_5, содержащая подалгебру $g_{3,7}$ в поле вещественных чисел, всегда разложима. Если g изоморфна алгебре $g_{3,6}$, то есть алгебре со структурой $e_1\circ e_2=2e_1$, $e_1\circ e_3=-e_2$, $e_2\circ e_3=2e_3$, и имеет двумерное неприводимое представление в идеале $\widetilde{R}$, то преобразованием базисных элементов идеала $\widetilde{R}$ это представление можно получить в следующем виде:

$$e_1\to\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_2\to\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad e_3\to\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

причем $e_4\circ e_5=\lambda_1e_4+\lambda_2e_5$ и из тождества $(f,\ 245)$ очевидно: $\lambda_1=\lambda_2=0$. Следовательно, в поле вещественных чисел существует единственная неразрешимая алгебра L_5 структуры g_5:

$$e_1\circ e_2=2e_1,\quad e_1\circ e_3=-e_2,\quad e_2\circ e_3=2e_3,$$
$$e_1\circ e_4=e_5,\quad e_2\circ e_4=e_4,\quad e_2\circ e_5=-e_5,\quad e_3\circ e_5=e_4.$$

§ 2. Пусть теперь L_5 — разрешимая неразложимая алгебра Ли над полем вещественных чисел R с базисными элементами $e_1, e_2, \dots, e_5$; M — ее максимальный нильпотентный идеал, m—порядок этого идеала, $e_1, e_2, \dots, e_m$ — его базис. По следствию теоремы 5, порядок максимального нильпотентного идеала M удовлетворяет неравенству $3 \leqslant m \leqslant 5$. Если $m=5$, то L_5 нильпотентна. Нильпотентные алгебры Ли 5-го порядка над полем комплексных чисел K изучены в работе [3], над полем характеристики нуль — в работе [1]. Для полноты таблицы классификации, здесь уместно их привести;

$g_{5,1}$: $e_3 \circ e_5 = e_1$, $e_4 \circ e_5 = e_2$; (5, 2), $s=4$, $z=2$.
$g_{5,2}$: $e_2 \circ e_5 = e_1$, $e_3 \circ e_5 = e_2$, $e_4 \circ e_5 = e_3$; (5, 3, 2, 1), $s=4$, $z=1$.
$g_{5,3}$: $e_2 \circ e_4 = e_3$, $e_2 \circ e_5 = e_1$, $e_4 \circ e_5 = e_2$; (5, 3, 2), $s=3$, $z=2$.
$g_{5,4}$: $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_5 = e_1$; (5, 1), $s=3$, $z=1$.
$g_{5,5}$: $e_3 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_5 = e_1$, $e_3 \circ e_5 = e_2$; (5, 2, 1), $s=3$; $z=1$.
$g_{5,6}$: $e_3 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_5 = e_1$, $e_3 \circ e_5 = e_2$, $e_4 \circ e_5 = e_3$; (5, 3, 2, 1), $s=3$, $z=1$.

Справа приведены инвариантные характеристики L_5: s — порядок максимального абелева идеала, z — порядок центра, и в скобках — шифр алгебры [1].

§ 3. Если $m=4$, то возможны три случая: $M \cong 4g_1$, $M \cong g_{3,1} + g_1$, $M \cong g_{4,1}$. Когда L_5 содержит абелев идеал 4-го порядка, алгебры классифицируются по возможным вещественным формам матрицы A_5, определенной формулой $e_i \circ e_5 = c_{i5}^k e_k = e_i A_5$ $(i, k = 1, \dots, 4)$. По теореме 4, алгебра L_5 неразложима (ненильпотентна) тогда и только тогда, когда A_5 не имеет нулевого собственного значения с простым элементарным делителем (соответственно, когда A_5 ненильпотентна), а канонические вещественные формы матрицы A_5 определяются с точностью до постоянного множителя, и они следующие:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$
$$-1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1 \qquad 0 < |\gamma| \leqslant 1 \qquad 0 \neq \gamma \leqslant \beta$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\gamma \neq 0$$

$$a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -s \\ 0 & 0 & s & p \end{pmatrix}, \quad a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad a_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix},$$
$$s \neq 0,\ 1 \geqslant \gamma \neq 0 \qquad -1 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

$$a_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & -s \\ 0 & 0 & s & p \end{pmatrix}, \quad a_{11} = \begin{pmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & -s \\ 0 & 0 & s & q \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ 1 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & -1 \\ 0 & 1 & 1 & p \end{pmatrix}.$$
$$s \neq 0 \qquad s \neq 0 \qquad p \geqslant 0$$

Этим различным каноническим формам соответствуют неизоморфные между собой алгебры $g_{5,7}, g_{5,8}, \dots, g_{5,18}$, приведенные в таблице в конце статьи.

§ 4. Если $M \cong g_{3,1} + g_1$, то структурные соотношения запишутся в виде $e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_i \circ e_5 = c_{i5}^k e_k = e_i A_5$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$). Проверяя тождества (f, 235), (f, 245) и (f, 345) соответственно, находим, что $c_{15}^2 = c_{15}^3 = c_{15}^4 = 0$, $c_{15}^1 = c_{25}^2 + c_{35}^3$, $c_{4,5}^3 = c_{45}^2 = 0$. По теореме 2 (при $c_{23}^1 = 1$), заменой $\bar{e}_5 = e_5 - c_{25}^1 e_3 + c_{35}^1 e_2$ коэффициенты c_{25}^1 и c_{35}^1 всегда можно уничтожить; теперь мы приходим к структуре

$$e_2 \circ e_3 = e_1, \quad e_1 \circ e_5 = (c_{25}^2 + c_{35}^3)\, e_1, \quad e_2 \circ e_5 = c_{25}^2 e_2 + c_{25}^3 e_3 + c_{25}^4 e_4,$$
$$e_3 \circ e_5 = c_{35}^2 e_2 + c_{35}^3 e_3 + c_{35}^4 e_4, \quad e_4 \circ e_5 = c_{45}^1 e_1 + e_{45}^4 e_4 .$$

Матрица

$$A_5' = \begin{pmatrix} c_{25}^2 & c_{25}^3 & c_{25}^4 \\ c_{35}^2 & c_{35}^3 & c_{35}^4 \\ 0 & 0 & c_{45}^4 \end{pmatrix},$$

индуцированная матрицей A_5 в подпространстве $((e_2, e_3, e_4))$, также ненильпотентна. Преобразованием $\bar{e}_2 = \alpha e_2 + \beta e_3 + \mu e_4$, $\bar{e}_3 = \gamma e_2 + \delta e_3 + \nu e_4$, $\bar{e}_4 = \lambda e_4$ (где $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$), ее можно привести, с точностью до постоянного множителя, к следующим каноническим формам:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$b_5 = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что элементы e_2, e_3 входят в идеал M симметрично, а элемент e_4 — обособленно от других базисных элементов. Поэтому расположение диагональных жордановых клеток в A_5' существенно. В силу этого, дополнительно получаем еще два типа:

$$b_7 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а возможная каноническая форма

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

в силу симметрии элементов e_2 и e_3, подстановкой (e_2, e_3) переходит в b_7 (при $h = 0$) или в b_6 (при $h \neq 0$).

Далее, при $c_{25}^2 + c_{35}^3 \neq c_{45}^4$ коэффициент c_{45}^1, по теореме 3, можно всегда уничтожить. При приведении матрицы A_5 к канонической форме, полагая $\bar{e}_1 = (\alpha\delta - \gamma\beta)\, e_1$ (если $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 1$), мы всегда можем сохранить прежнюю структуру идеала M. Учитывая эти замечания, соответственно вышеприведенным каноническим формам матрицы A_5' нетрудно получить алгебры $g_{5,19}, g_{5,20}, \ldots, g_{5,29}$, которые также приведены в конце статьи. Очевидно, они не изоморфны между собой и предыдущим им алгебрам.

§ 5. Если $M \cong g_{4,1}$, то структурные соотношения запишутся в виде $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$, $e_i \circ e_5 = c_{i5}^k e_k$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$. Проверяя тождества $(f, 235)$, $(f, 345)$ и $(f, 245)$, находим $c_{35}^4 = c_{25}^4 = c_{25}^3 = c_{15}^2 = c_{15}^3 = c_{15}^4 = 0$, $c_{25}^2 = c_{35}^3 + c_{45}^4 = \lambda + \mu$, $c_{15}^1 = c_{35}^3 + 2c_{45}^4 = \lambda + 2\mu$, $c_{25}^1 = c_{35}^2$. Коэффициенты $c_{25}^1 = c_{35}^2$, c_{45}^1 и c_{45}^2 (при $c_{24}^1 = c_{34}^2 = 1$), по теореме 2, заменой e_5, можно всегда привести к нулю. Получаем структуру $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$, $e_1 \circ e_5 = (\lambda + 2\mu) e_1$, $e_2 \circ e_5 = (\lambda + \mu) e_2$, $e_3 \circ e_5 = c_{35}^1 e_1 + \lambda e_3$, $e_4 \circ e_5 = c_{45}^3 e_3 + \mu e_4$, где, в силу ненильпотентности элемента e_5, структурные константы λ и μ не равны нулю одновременно.

Пусть $\mu \neq 0$, тогда, положив $\bar{e}_5 = e_5/\mu$ можно обратить c_{45}^4 в единицу, а коэффициент c_{35}^1, по теореме 3, можно привести к нулю. Имеем

$$e_2 \circ e_4 = e_1, \quad e_3 \circ e_4 = e_2, \quad e_1 \circ e_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) e_1,$$

$$e_2 \circ e_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right) e_2, \quad e_3 \circ e_5 = \frac{\lambda}{\mu} e_3, \quad e_4 \circ e_5 = \frac{c_{45}^3}{\mu} e_3 + e_4.$$

Отсюда при $\lambda \neq \mu$, заменой $\bar{e}_4 = e_4 - \dfrac{c_{45}^3}{\lambda - \mu} e_3$ приходим к $g_{5,30}$. При $\lambda = \mu$, если $c_{45}^3 \neq 0$, полагая $\bar{e}_i = \dfrac{c_{45}^3}{\mu} e_i$, $(i = 1, 2, 3)$ получаем алгебру $g_{5,31}$. Если $\mu = 0$, то, как мы уже сказали, $\lambda \neq 0$, производя замену $\bar{e}_4 = e_4 - \dfrac{c_{45}^3}{\lambda} e_3$, $\bar{e}_5 = e_5/\lambda - \dfrac{c_{35}^1 c_{45}^3}{\lambda^2} e_2$ приходим к $g_{5,32}$.

§ 6. Пусть $m = 3$; e_1, e_2, e_3 — базис M; e_4 и e_5 — два линейно ниль-независимых элемента, дополняющие базис M до базиса L_5. Отнесем этим двум элементам линейно ниль-независимые операторы (матрицы) S и H, действующие в пространстве M и определенные формулами

$$e_i \circ e_4 = e_i S = s_i^k e_k, \quad e_i \circ e_5 = e_i H = h_i^k e_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Из множества пар (S, H) вещественных, ненильпотентных квадратных матриц две: (S, H) и (S_1, H_1), будем называть эквивалентными, если существует неособенная матрица T, такая, что $(S_1 = TST^{-1}, \ H_1 = THT^{-1})$.

Обозначим через Z центр алгебры L_5. При нашем условии, то есть при $N(L_5) = 2$ докажем, что $\dim Z \leqslant 1$. Действительно, если бы $\dim Z = 2$ и $Z = ((e_2, e_3))$, то из соотношений $e_1 \circ e_4 = \alpha e_1 + \ldots$, $e_1 \circ e_5 = \beta e_1 + \ldots$, $e_2 \circ e_4 = e_3 \circ e_4 = e_2 \circ e_5 = e_3 \circ e_5 = 0$, $e_4 \circ e_5 = \lambda e_1 + \beta e_2 + \nu e_3$ заменой $\bar{e}_5 = e_5 - \beta/\alpha e_4$ получили бы, что элементы e_4 и e_5 линейно ниль зависимы, а это, по первоначальному предположению, невозможно. Следовательно, для полной классификации L_5 нам необходимо рассмотреть отдельно четыре случая, а именно: 1) $Z = 0$, $M \cong 3g_1$; 2) $Z = 0$, $M \cong g_{3,1}$; 3) $Z = ((e_3))$, $M \cong 3g_1$; 4) $Z = ((e_3))$, $M \cong g_{3,1}$. Докажем, что четвертый случай невозможен.

Лемма. *При* $\dim Z = 1$, $N(L_5) = 2$ *максимальный нильпотентный идеал* M — *абелев.*

Пусть, для определенности, центр Z порождается базисным элементом e_3, а элементы e_4 и e_5 по-прежнему линейно ниль-независимы. Известно, что при $N(L_5) = 2$, или, что тоже самое, при $m = 3$, идеал M либо абелев, либо изоморфен алгебре $g_{3,1}$.

Пусть $M \cong g_{3,1}$, тогда структурные соотношения алгебры L_5 запишутся в виде $e_1 \circ e_2 = e_3$, $e_i \circ e_4 = \alpha_i^k e_k$, $e_i \circ e_5 = \beta_i^k e_k$, $e_4 \circ e_5 = \gamma e_3$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$, а невыписанные произведения, как всегда, равны нулю. Произведя замену $\overline{e}_4 = e_4 - \alpha_1^3 e_2 + \alpha_2^3 e_1$, $\overline{e}_5 = e_5 - \beta_1^3 e_2 + \beta_2^3 e_1$, коэффициенты α_1^3, α_2^3, β_1^3 и β_2^3 можно уничтожить. Из тождеств $(f,\ 124)$ и $(f,\ 125)$ следует, что $\alpha_2^2 = -\alpha_1^1$, $\beta_2^2 = -\beta_1^1$. Очевидно, при $N(L_5) = 2$, α_1^1 и β_1^1 не равны нулю одновременно. Пусть, для определенности, $\alpha_1^1 \neq 0$. Тогда, полагая $\overline{e}_5 = e_5 - \beta_1^1/\alpha_1^1 e_4$, коэффициент β_1^1 можно уничтожить, и мы приходим к структуре $e_1 \circ e_2 = e_3$, $e_1 \circ e_4 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2$, $e_2 \circ e_4 = \alpha_2^1 e_1 - \alpha_1^1 e_2$, $e_1 \circ e_5 = \overline{\beta}_1^2 e_2$, $e_2 \circ e_5 = \overline{\beta}_2^1 e_1$, $e_4 \circ e_5 = \gamma e_3$.

Проверяя тождества $(f,\ 145)$ и $(f,\ 245)$, дополнительно находим $\overline{\beta}_1^2 = \overline{\beta}_2^1 = 0$. Следовательно, в идеале M ненильпотентному элементу e_5 соответствует нулевая матрица, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 7. Пусть $Z = 0$, $M \cong 3g_1$, тогда всякое линейное преобразование базиса M будет автоморфизмом идеала M, а элементы e_4 и e_5 и, следовательно, им соответствующие матрицы S и H, между собой перестановочны. Это последнее утверждение вытекает из того факта, что линейно ниль-независимые элементы можно выбрать так, чтобы они, вместе с центром алгебры, образовали регулярную нильпотентную подалгебру $\overset{0}{L}_H$, производная алгебры которой содержится в Z. Разложение по регулярной нильпотентной подалгебре и ее определение смотри в работе [2] (стр. 89). Далее, если матрицы S и H коммутируют и у одной из них элементарный делитель 3-го порядка, то они линейно ниль-зависимы.

Учитывая неразложимость искомых алгебр и перестановочность S и H, нетрудно доказать, что каждая пара $(S,\ H)$ эквивалентна одной из следующих:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\right]; \quad \left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right];$$
$$\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$
$$h^2 + \alpha^2 \neq 0$$

Соответственно имеем три алгебры: $g_{5,33}$; $g_{5,34}$; $g_{5,35}$.

§ 8. При $Z = 0$, $M \cong g_{3,1}$ не всякое линейное преобразование базиса M будет его автоморфизмом. В этом случае структурные соотношения имеют вид $e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_i \circ e_4 = s_i^k e_k$, $e_i \circ e_5 = h_i^k e_k$ $(i,\ k = 1, 2, 3)$. Из тождеств Якоби находим: $s_1^1 = s_2^2 + s_3^3$, $h_1^1 = h_2^2 +$

$+h_3^3$, $s_1^2=s_1^3=h_1^2=h_1^3=0$. По теореме 2 (при $c_{23}^1=1$), заменой $\bar{e}_4=e_4+s_3^1e_2-s_2^1e_3$, $\bar{e}_5=e_5+h_3^1e_2-h_2^1e_3$ коэффициенты h_2^1, h_3^1, s_2^1 и s_3^1 можно уничтожить. Тогда

$$S=\begin{pmatrix} s_2^2+s_3^3 & 0 & 0\\ 0 & s_2^2 & s_2^3\\ 0 & s_3^2 & s_3^3\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} h_2^2+h_3^3 & 0 & 0\\ 0 & h_2^2 & h_2^3\\ 0 & h_3^2 & h_3^3\end{pmatrix}.$$

Преобразованием $\bar{e}_1=(\alpha\delta-\gamma\beta)e_1$, $\bar{e}_2=\alpha e_2+\beta e_3$, $\bar{e}_3=\gamma e_2+\delta e_3$, $\bar{S}=aS+bH$, $\bar{H}=cS+dH$, где $\bar{S}\bar{H}=\bar{H}\bar{S}$, $(ad-cb)\neq 0$, учитывая ниль-независимость $\bar{S}$ и $\bar{H}$, получаем следующие неэквивалентные канонические пары:

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right] \text{ и } \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\right].$$

Этим парам соответствуют алгебры $g_{5,36}$ и $g_{5,37}$.

§ 9. Пусть, наконец, $Z=((e_3))$, $M\cong 3g_1$. Структурные соотношения запишутся в виде $e_i\circ e_4=s_i^ke_k$, $e_i\circ e_5=h_i^ke_k$, $e_4\circ e_5=\gamma e_3$ $(i=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\ 3)$. Докажем, что в этой структуре $\gamma\neq 0$.

Пусть, вопреки предположению, $\gamma=0$; тогда для неразложимости алгебры необходимо, чтобы среди коэффициентов s_1^3, s_2^3, h_1^2, h_2^3 нашелся хотя бы один ненулевой. Пусть, для определенности, $s_1^3\neq 0$, чего всегда можно достичь путем перенумерации базисных элементов. Для этого необходимо, чтобы было $s_1^1=s_1^2=0$. Тогда, полагая $\bar{e}_3=s_1^3e_3$, приходим к структуре $e_1\circ e_4=e_3$, $e_2\circ e_4=s_2^ke_k$, $e_i\circ e_5=h_i^ke_k$ $(i=1,2;\ k=1,\ 2,\ 3)$. Здесь, в силу ненильпотентности элемента e_4, коэффициент $s_2^2\neq 0$. По теореме 3 (при $s_2^2\neq 0$), коэффициенты s_2^1 и s_2^3 можно уничтожить. Произведя замену $\bar{e}_1=s_2^2e_1$, $\bar{e}_4=e_4/s_2^2$, приходим к структуре $e_1\circ e_4=e_3$, $e_2\circ e_4=e_2$, $e_i\circ e_5=h_i^ke_k$ $(i=1,\ 2;\ k=1,2,3)$. Из тождеств $(f,\ 145)$ и $(f,\ 245)$ следует $h_1^1=h_1^2=h_2^1=0$. Таким образом, получаем структуру, где элементы e_4 и e_5 линейно ниль-зависимы.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение. При $\gamma\neq 0$ коэффициент γ можно обратить в единицу. Заметим, что для того, чтобы $\gamma\neq 0$ необходимо равенство нулю всех коэффициентов s_1^3, s_2^3, h_1^3 и h_2^3 одновременно. В самом деле, если бы среди них нашелся хотя бы один ненулевой коэффициент (пусть, для определенности, s_1^3), то заменой $\bar{e}_5=e_5+\gamma/s_1^3e_1$, мы получили бы структуру, где $\gamma=0$. Следовательно, вместо операторов S и H можно рассмотреть операторы второго порядка S' и H', индуцированные операторами S и H в подпространстве $((e_1,\ e_2))$. Пара $(S',\ H')$ может иметь следующие канонические формы:

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right] \text{ или } \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right],$$

соответственно которым получаем алгебры $g_{5,38}$ и $g_{5,39}$.

Этим заканчивается классификация всех алгебр Ли 5-го порядка.

§ 10. Приведем таблицы результатов классификации ненильпотентных разрешимых алгебр Ли пятого порядка.

Разрешимые L_5 с одним ненильпотентным базисным элементом e_5, содержащие абелев идеал $4g_1$

Тип	A_5	$e_1 \circ e_5 =$	$e_2 \circ e_5 =$	$e_3 \circ e_5 =$	$e_4 \circ e_5 =$	Примечание
$g_{5,7}$	a_1	e_1	αe_2	βe_3	γe_4	$-1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$
$g_{5,8}$	a_2	—[1]	e_1	e_3	γe_4	$0 < \lvert\gamma\rvert \leqslant 1$
$g_{5,9}$	a_3	e_1	$e_1 + e_2$	βe_3	γe_4	$0 \neq \gamma \leqslant \beta$
$g_{5,10}$	a_4	—	e_1	e_2	e_4	
$g_{5,11}$	a_5	e_1	$e_1 + e_2$	$e_2 + e_3$	γe_4	$\gamma \neq 0$
$g_{5,12}$	a_6	e_1	$e_1 + e_2$	$e_2 + e_3$	$e_3 + e_4$	
$g_{5,13}$	a_7	e_1	γe_2	$pe_3 - se_4$	$se_3 + pe_4$	$\lvert\gamma\rvert \leqslant 1$, $\gamma s \neq 0$
$g_{5,14}$	a_8	—	e_1	$pe_3 - e_4$	$e_3 + pe_4$	
$g_{5,15}$	a_9	e_1	$e_1 + e_2$	γe_3	$e_3 + \gamma e_4$	$-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$
$g_{5,16}$	a_{10}	e_1	$e_1 + e_2$	$pe_3 - se_4$	$se_3 + pe_4$	$s \neq 0$
$g_{5,17}$	a_{11}	$pe_1 - e_2$	$e_1 + pe_2$	$qe_3 - se_4$	$se_3 + qe_4$	$s \neq 0$
$g_{5,18}$	a_{12}	$pe_1 - e_2$	$e_1 + pe_2$	$e_1 + pe_3 - e_4$	$e_2 + e_3 - pe_4$	$p \geqslant 0$

Разрешимые L_5 с одним ненильпотентным базисным элементом e_5, содержащие идеал $M \cong g_{3,1} + g_1$

Тип	A_5'	$e_2 \circ e_3 =$	$e_1 \circ e_5 =$	$e_2 \circ e_5 =$	$e_3 \circ e_5 =$	$e_4 \circ e_5 =$	Примечание
$g_{5,19}$	b_1	e_1	$(1+\alpha) e_1$	e_2	αe_3	βe_4	$\beta \neq 0$
$g_{5,20}$	b_1	e_1	$(1+\alpha) e_2$	e_2	αe_3	$e_1 + (1+\alpha) e_4$	
$g_{5,21}$	b_2	e_1	$2e_1$	$e_2 + e_3$	$e_3 + e_4$	e_4	
$g_{5,22}$	b_3	e_1	—	e_3	—	e_4	
$g_{5,23}$	b_4	e_1	$2e_1$	$e_2 + e_3$	e_3	βe_4	$\beta \neq 0$
$g_{5,24}$	b_4	e_1	$2e_1$	$e_2 + e_3$	e_3	$\varepsilon e_1 + 2e_4$	$\varepsilon = \pm 1$
$g_{5,25}$	b_5	e_1	$2pe_1$	$pe_2 + e_3$	$-e_2 + pe_3$	βe_4	$\beta \neq 0$
$g_{5,26}$	b_5	e_1	$2pe_1$	$pe_2 + e_3$	$-e_2 + pe_3$	$\varepsilon e_1 + 2pe_4$	$\varepsilon = \pm 1$
$g_{5,27}$	b_6	e_1	e_1	—	$e_3 + e_4$	$e_1 + e_4$	
$g_{5,28}$	b_6	e_1	$(1+\alpha) e_1$	αe_2	$e_3 + e_4$	e_4	
$g_{5,29}$	b_7	e_1	e_1	e_2	e_4	—	

[1] Тире в таблицах означает, что соответствующее произведение равно нулю.

Разрешимые алгебры L_5 с одним ненильпотентным базисным элементом e_5, содержащие идеал $M = g_{4,1}$

$g_{5,30}$: $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$, $e_1 \circ e_5 = (2+h)e_1$, $e_2 \circ e_5 = (1+h)e_2$, $e_3 \circ e_5 = he_3$, $e_4 \circ e_5 = e_4$.

$g_{5,31}$: $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$, $e_1 \circ e_5 = 3e_1$, $e_2 \circ e_5 = 2e_2$, $e_3 \circ e_5 = e_3$, $e_4 \circ e_5 = e_3 + e_4$

$g_{5,32}$: $e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$, $e_1 \circ e_5 = e_1$, $e_2 \circ e_5 = e_2$, $e_3 \circ e_5 = he_1 + e_3$.

Разрешимые L_5 с двумя линейно ниль-независимыми элементами e_4, e_5

$g_{5,33}$: $e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = \beta e_3$, $e_2 \circ e_5 = e_2$, $e_3 \circ e_5 = \gamma e_3$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

$g_{5,34}$: $e_1 \circ e_4 = \alpha e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = e_3$, $e_1 \circ e_5 = e_1$, $e_3 \circ e_5 = e_2$.

$g_{5,35}$: $e_1 \circ e_4 = he_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = e_3$, $e_1 \circ e_5 = \alpha e_1$, $e_2 \circ e_5 = -e_3$, $e_3 \circ e_5 = e_2$, $h^2 + \alpha^2 \neq 0$.

$g_{5,36}$: $e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_2 \circ e_5 = -e_2$, $e_3 \circ e_5 = e_3$.

$g_{5,37}$: $e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_1 \circ e_4 = 2e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = e_3$, $e_2 \circ e_5 = -e_3$, $e_3 \circ e_5 = e_2$.

$g_{5,38}$: $e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_5 = e_2$, $e_4 \circ e_5 = e_3$.

$g_{5,39}$: $e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_5 = e_2$, $e_1 \circ e_5 = -e_2$, $e_2 \circ e_5 = e_1$, $e_4 \circ e_5 = e_3$,

Неразрешимая и неразложимая алгебра Ли 5-го порядка

g_5: $e_1 \circ e_2 = 2e_1$, $e_1 \circ e_3 = -e_2$, $e_2 \circ e_3 = -2e_3$, $e_1 \circ e_4 = e_5$, $e_2 \circ e_4 = e_4$, $e_2 \circ e_5 = -e_5$, $e_3 \circ e_5 = e_4$.

г. Казань

Поступило
7 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Морозов. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка. Изв. вузов, Матем., № 4 (5), стр. 161—171, 1958.

2. Е. Б. Дынкин. Структура полупростых алгебр Ли. УМН, т. 2, вып. 4 (20), стр. 59—127, 1947.

3. K. Umlauf. Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen von Range Null. Leipzig, S. 80, 1918.

4. К. Шевалле. Теория групп Ли, т. 3. ИЛ, 1958.

5. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. М.—Л., 1940.

6. Г. М. Мубаракзянов. О разрешимых алгебрах Ли. Изв. вузов, Матем., № 1, 1963.

Н. И. ШКИЛЬ. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(аннотация статьи, принятой к печати)

В статье рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Для этой системы дается алгоритм построения асимптотического решения в случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются корни постоянной кратности, а внешняя частота становится равной одному из корней в изолированных точках конечного промежутка изменения независимой переменной. (Работа поступила в журнал „Математика" 10.IV.1962.)