ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1963 МАТЕМАТИКА № 1 (32)

Г. М. Мубаракзянов

О РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

В предлагаемой статье дается ряд теорем, касающихся разрешимых алгебр Ли, и приводится классификация вещественных структур алгебр Ли до пятого порядка. Через L (L_n) в последующем обозначается алгебра Ли (алгебра Ли порядка n) над полем P нулевой характеристики. закон композиции в ней обозначается через $\circ$; если $x \in L$, то через D_x обозначается внутренний дифференциал алгебры порожденный элементом x $(D_x y = x \circ y$ при $y \in L)$. Если L и $\tilde{L}$ — две алгебры Ли над полем P, то через $L \dotplus \tilde{L}$ обозначается их прямая сумма. В частности, если $\tilde{L} = L$, то для сокращения полагаем $L \dotplus \tilde{L} = 2L$. Алгебру Ли, представимую в виде прямой суммы двух ее подалгебр, будем называть **разложимой**, в противном случае — **неразложимой**.

Структура алгебры L_n задается произведениями базисных элементов

$$e_i \circ e_j = c_{ij}^s e_s \qquad (i < j;\ i,\ j,\ s = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Как правило, рассматриваются лишь произведения, для которых $i < j$, и при действительном задании конкретной алгебры мы выписываем только отличные от нуля произведения $e_i \circ e_j$, считая при этом все невыписанные — нулями.

Структурные константы c_{ij}^s в соотношениях (1) не произвольны, для любых трех базисных элементов e_i, e_j, e_k должны выполняться тождества Якоби

$$(f,\ ijk) = (e_i \circ e_j) \circ e_k + (e_j \circ e_k) \circ e_i + (e_k \circ e_i) \circ e_j = 0. \tag{2}$$

Напомним, что элемент $x \in L$ называется **нильпотентным**, если $D_x^m = 0$ для некоторого целого положительного m. Очевидно, при гомоморфном отображении одной алгебры на другую нильпотентные и ненильпотентные элементы первой переходят соответственно в нильпотентные и ненильпотентные элементы второй. Аналогично, если некоторый элемент f подалгебры $F \subset L$ нильпотентен или ненильпотентен в L, то он будет таким же и в F. Обратное, вообще говоря, неверно.

Известно, что, если L разрешима, то любой элемент $x \in L$, принадлежащий L', нильпотентен и существует ряд подалгебр

$$L_n \supset L_{n-1} \supset \dots \supset L_1 \supset L_0 = 0, \tag{K}$$

таких, что каждая L_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ является идеалом алгебры L_{i+1}. Этот ряд называют **композиционным** рядом алгебры L_n.

Упорядоченный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ алгебры L_n, обладающий тем свойством, что $L_i = ((e_1, \dots, e_i))$ (где двойными скобками обозначена, как обычно, линейная оболочка векторов, задаваемых в этих скобках), будем называть K-каноническим базисом L_n.

§ 1. Некоторые свойства K-канонического базиса

Очевидно, что для данной алгебры L_n и ее композиционного ряда (K) K-канонический базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ не единственен. Для каждого K-канонического базиса L_n справедливы соотношения

$$e_i \circ e_{i+k} = \sum_{s=1}^{i+k-1} c^s_{i,\, i+k} e_s \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n-i). \tag{3}$$

И наоборот: для K-каноничности базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ необходимо и достаточно, чтобы в соотношениях (1) все $c^s_{ij} = 0$ при $s \geqslant j > i$, то есть выполнялись бы соотношения (3). Далее можно отметить следующие свойства K-канонического базиса.

Теорема 1. *Пусть L_n — разрешимая алгебра Ли с композиционным рядом (K); пусть $s_1(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $s_2(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$—два ее базиса, причем первый K-канонический, и матрица перехода T от s_1 к s_2 треугольная; тогда s_2 — также K-канонический базис.*

Теорема 2. *Пусть $L = L_n$ — разрешимая алгебра Ли, (K) — её композиционный ряд, (K_r): $L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_0 = 0$ — индуцированный (K) композиционный ряд подалгебры L_r ($r < n$), и $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — K-канонический базис L_r. Пусть для некоторого $s_0 < r$ $e_{s_0} \in L'_r$. Тогда элементы $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n$, дополняющие K_r базис L_r до K-канонического базиса L_n, можно выбрать так, чтобы для некоторых i, $k < r$*

$$\bar{c}^{s_0}_{ij} = \bar{c}^{s_0}_{kj} = 0 \qquad (j = r+1,\ r+2, \ldots,\ n).$$

Теорема 3. *Пусть $L = L_n$ — разрешимая алгебра Ли, (K) — ее композиционный ряд; пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — K- канонический базис L_n, и для некоторого h в соотношениях (3) $c^i_{ih} \neq c^{i+j}_{i+jh}$ $(1 \leqslant j \leqslant h-i-1)$. Тогда при $c^{i+j}_{ih} = 0$, не нарушая K-каноничности базиса алгебры L_n, элемент e_{i+j} можно заменить так, чтобы $e_i \overline{\in} ((e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, \ldots, e_{n-1}, e_{i+j} \circ e_h))$.*

Доказательства этих теорем, ввиду их простоты, не приводим.

§ 2. О структуре разрешимых алгебр L_n, содержащих абелев идеал (n — 1)-го порядка

Одночленная алгебра Ли всегда абелева. Обозначим ее через g_1. Ненильпотентная алгебра Ли 2-го порядка, которую мы обозначим через g_2, изоморфна алгебре со структурой $e_1 \circ e_2 = e_1$, в которой элемент e_2, имеющий отличное от нуля собственное значение ($c^1_{12} = 1$), является ненильпотентным. Нильпотентная алгебра Ли 2-го порядка разлагается в прямую сумму двух g_1, то есть является алгеброй $2g_1$.

Пусть нам дана разрешимая алгебра L_n, которая содержит абелев идеал ($n-1$)-го порядка $(n-1)g_1$, и пусть e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — базис L_n, причем e_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — базис алгебры $(n-1)g_1$. Тогда структурные соотношения для L_n запишутся в виде

$$e_i \circ e_n = c^k_{in} e_k = e_i M_n \qquad (i,\ k = 1, \ldots, n-1). \tag{7}$$

Матрица M_n, определенная формулой (7), является линейным преобразованием пространства $(n-1)g_1$. Очевидно, что, если элемент e_n

ненильпотентен (нильпотентен), то и $M_n=(c_{in}^k)$ $(i,\ k=1, \dots, n-1)$ ненильпотентна (нильпотентна). Из формулы (7) непосредственно видно, что классификация вещественных (комплексных) форм матрицы M_n равносильна нахождению вещественных (комплексных) структур алгебры L_n. Элемент e_n можно заменить любой его кратностью, поэтому канонические формы матрицы M_n ищутся с точностью до постоянного множителя. Очевидно, различным каноническим формам матрицы M_n, не пропорциональным друг другу, будут отвечать неизоморфные типы алгебр, пропорциональным же каноническим формам — изоморфные типы. Поделив элемент e_n на наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы M_n, мы всегда можем сделать его единицей. При классификации структур алгебр это преобразование, если оно упрощает каноническую форму, будем считать выполненным.

Далее, алгебра L_n, содержащая абелев идеал $(n-1)g_1$, разложима тогда и только тогда, когда матрица M_n имеет нулевой корень с простым элементарным делителем. Действительно, если такой корень существует и ему соответствует собственный вектор $e_1' \in L_{n-1}= =(n-1)g_1$, то, выбрав в L_{n-1} дополнительное к e_1' инвариантное подпространство L_{n-2} (что возможно, в силу предположения о простоте элементарного делителя), найдем $e_1 \circ e_n=0$, $L_{n-2}M_n \subset L_{n-2}$, т. е. L_n разлагается в прямую сумму центрального элемента e_1 и алгебры $L_{n-2}+M_n$. Обратное утверждение очевидно. Формулируем результат.

Теорема 4. *Структура разрешимых алгебр L_n, содержащих абелев идеал $(n-1)g_1$, в поле R (поле комплексных чисел) находится по возможным вещественным (комплексным) каноническим формам матрицы M_n порядка $n-1$, определенной формулой* (7). *При этом алгебра L_n ненильпотентна (неразложима) тогда и только тогда, когда ненильпотентна матрица M_n (соответственно, когда M_n не имеет нулевых корней с простым элементарным делителем).*

§ 3. О ненильпотентных элементах разрешимой алгебры Ли

Напомним, что матрица A называется нильпотентной, если некоторая ее степень равна нулю.

Определение 1. Систему матриц m-го порядка назовем линейно нильь-независимой, если никакая нетривиальная линейная комбинация ее элементов не дает нильпотентной матрицы.

Заметим, что, если система матриц линейно зависима, то она также нильь-зависима. Следовательно, система всех линейно-нильнезависимых матриц образует подсистему в системе всех линейно-независимых матриц. На основании теоремы Ли, нетрудно доказать, что в разрешимой линейной алгебре $\tilde{L}_n$, действующей в m-мерном пространстве P, число линейно нильь-независимых матриц $N(L_n)$ не превосходит m.

Определение 2. Пусть L — алгебра Ли. Ее элементы $e_1, \dots, e_k$ назовем линейно нильь независимыми, если никакая их линейная комбинация не дает нильпотентного элемента алгебры. В алгебры L_n число линейно нильь-независимых элементов обозначим через $N(L_n)$.

Теорема 5. *В разрешимой алгебре L_n* $N(L_n)\leqslant\frac{n}{2}$.

Доказательство. Все нильпотентные элементы из L_n образуют максимальный нильпотентные идеал M этой алгебры; пусть m — его порядок.

Отнесем каждому элементу x из L_n линейный оператор A_x в про странстве M, определенный формулой

$$u \circ x = uA_x \quad (u \in M). \tag{8}$$

Элемент x нильпотентен (ненильпотентен) тогда и только тогда, когда нильпотентна (ненильпотентна) матрица A_x. В самом деле, пусть $f_1, \dots, f_m$ — базис M; дополним его до базиса L_n, присоединив линейно ниль-независимые элементы $e_1, \dots, e_{n-m}$, где $n-m=N(L_n)$. В силу теоремы Энгеля, ненильпотентные элементы $e_1, \dots, e_{n-m} \in L_n'$ и мы имеем $f_i \circ x = \alpha_i^k f_k$, $e_s \circ x = \beta_s^k f_k$ $(i, k = 1, 2, \dots, m; s = 1, \dots, n-m)$. Тогда матрица регулярного представления имеет вид

$$D_x = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } A = A_x = (\alpha_i^k), \quad B = (\beta_s^k).$$

Отсюда ясно, что D_x (следовательно, и элемент x) нильпотентна (ненильпотентна) тогда и только тогда, когда нильпотентна (ненильпотентна) A_x, что и доказывает наше утверждение. Число $n-m = N(L_n)$ не зависит от данного поля, поэтому, не нарушая общности рассуждения, мы можем предположить, что основное поле — поле комплексных чисел K. Поскольку L_n — разрешимая алгебра и $x \to A_x$ — ее линейное представление, то, по теореме Ли, матрицы A_x можно одновременно привести к треугольному виду. Если эту систему треугольных матриц обозначим через $T_{(m)}$, то, очевидно, число ниль-независимых матриц из $T_{(m)}$ не превышает m.

Далее, элементы из L_n линейно ниль-независимы тогда и только тогда, когда ниль-независимы им соответствующие матрицы. Следовательно, $N(L_n) = N(T_{(m)})$ и $n-m \leqslant m$, $m \geqslant \frac{n}{2}$. Тем самым теорема доказана.

Следствие. В разрешимой алгебре L_n, порядок m максимального нильпотентного идеала удовлетворяет неравенству $m \geqslant \frac{n}{2}$.

Теорема 6. *Если L_n — разрешимая алгебра Ли четного порядка над полем комплексных чисел K и $N(L_n) = n/2$, то L_n разлагается в прямую сумму $\frac{n}{2}$ двучленных ненильпотентных алгебр, то есть $L_n = n/2\, g_2 = N(L_n)\, g_2$.*

Доказательство. Разложим алгебру L_n по регулярной нильпотентной подалгебре H:

$$L_n = H + \sum_{\alpha \in \Sigma} L_H^{\alpha_i},$$

где $H = L_H^0$, Σ — система корней алгебры L_n, L_H^α — корневые подпространства ([4], стр. 90). Число линейно-независимых корней из Σ обозначим через Q. Докажем, что

$$N(L_n) = \dim \frac{H}{H \cap M} = Q.$$

Первое равенство очевидно. Докажем второе. Если бы $Q < N(L_n)$, то нашелся бы такой ненильпотентный элемент x, для которого выполнялось бы соотношение $\alpha_i(x) = 0$ при любом α, т. е. $f_{\alpha_i} \circ x = 0$. $(f_{\alpha_i} \in L_H^{\alpha_i})$. А это равенство показывает, что x нильпотентен. Противоречие доказывает наше утверждение. Отсюда непосредственно следует, что $\dim \sum\limits_{\alpha_i \in \Sigma}^{\cdot} L_H^{\alpha_i} = Q$ и каждое $L_H^{\alpha_i}$ одномерно. Действительно, если бы

$$\dim \sum_{\alpha_i \in \Sigma}^{\cdot} L_H^{\alpha_i} = N(L_n) + \rho,$$

то из равенства $\dim L_n = N + \dim H \cap M + N + \rho = 2N(L_n)$ следовало бы $\rho = 0$. Из этого же равенства следует $\dim H \cap M = 0$, т. е. $M = \sum\limits_{\alpha_i \in \Sigma}^{\cdot} L_H^{\alpha_i}$ и H не содержит нильпотентного элемента алгебры L_n.

Из соотношений

$$\dim \sum_{\alpha_i \in \Sigma}^{\cdot} L_H^{\alpha_i} = \dim M = Q$$

следует, что в системе Σ все корни различны и $\alpha_i + \alpha_j \overline{\in} \Sigma$, поэтому $f_{\alpha_i} \circ f_{\alpha_j} = 0$ $(f_{\alpha_k} \in L_H^{\alpha_k})$ ([1], теорема 60), т. е. M — коммутативный идеал. Соотношения $H' \subset L' \subset M$, $H \cap M = 0$ показывают, что H — коммутативная подалгебра. Пусть ненильпотентные, линейно нильнезависимые элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{N(L_n)}$ образуют базис H, а элементы $f_1, f_2, \ldots, f_{N(L_n)}$ — базис M, где каждый $f_i = f_{\alpha_i} \in L_H^{\alpha_i}$. Имеем $f_j \circ e_i = \alpha_j f_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N(L_n))$, где $\alpha_j \neq 0$. Следовательно, операторы A_{e_i}, определенные при доказательстве теоремы 5 и отвечающие элементам $e_i \in H$, диагональны, каждая из этих матриц единственным образом линейно выражается через матрицы E_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, N(L_n))$, и мы можем вместо первых взять последние базисные матрицы. Тогда структура L_n имеет вид $f_k \circ e_k = f_k$, $f_k \in L_H^{\alpha_k}$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N(L_n) = n/2)$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 7. *Если разрешимая алгебра Ли L_{n+1} содержит своим идеалом $L_n = n/2\, g_2$, то $L_{n+1} = L_n + g_1$.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{n/2}, f_1, f_2, \ldots, f_{n/2}$ — базис идеала L_n; дополним его до базиса L_{n+1}, присоединив элемент f. По теореме 5, f нильпотентный и принадлежит к максимальному идеалу M. Докажем, что M — коммутативный идеал в L_{n+1}. Для этого запишем общую структуру L_{n+1}: $f_i \circ e_i = f_i$, $f_i \circ f = \alpha_i^k f_k$, $f \circ e_i = \beta_i^k f_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n/2)$. В силу нильпотентности f, $\alpha_i^i = 0$.

Из тождеств $(f_i \circ e_i) \circ f + (e_i \circ f) \circ f_i + (f \circ f_i) \circ e_i = 0$ получаем $f_i \circ f = (f \circ e_i) \circ f_i + (f_i \circ f) \circ e_i = \beta_i^k f_k \circ f_i + \alpha_i^k f_k \circ e_i = \alpha_i^k \delta_k^i f_i = \alpha_i^i f_i = 0$ $(i, k = 1,2, \ldots, n/2)$. Соотношения $f_i \circ f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$ доказывают коммутативность M. Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что $e_i \circ f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$.

По теореме 2, делая замену $\overline{f} = f - \sum\limits_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} \beta_i^i f_i$, получаем, что все β при $i = k$ равны нулю. Для того, чтобы доказать, что и остальные $N(L_n)[N(L_n) - 1] = \frac{n(n-2)}{4}$ коэффициентов тоже равны нулю, достаточно проверить тождества $(f, e_i e_k f)$ $(i < k \leqslant N(L_n))$, число которых равно $\frac{n(n-2)}{8}$. Проверка каждого дает равенство нулю двух коэффициентов. Это и доказывает теорему.

Теорема 8. *Разрешимая алгебра L_{n+2}, имеющая своим идеалом алгебру $L_{n+1}=N(L_n)g_2+g_1$, может приводиться к одному из трех типов*:

а) $L_{n+2}=[N(L_n)+1]g_2=\frac{n+2}{2}g_2$,

б) $L_{n+2}=N(L_n)g_2+2g_1=n/2\,g_2+2g_1$,

в) $f_i\circ e_i=f_i,\ e\circ e_{k_0}=f\quad (1\leqslant k_0\leqslant N(L_n),\qquad i=1,\ 2,\dots,\ N(L_n))$,

где $N(L_n)=\frac{n}{2}$.

Доказательство. Пусть $(e_1,\ e_2,\dots,\ e_{n/2},\ f_1,\ f_2,\dots,\ f_{n/2},\ f)$ — базис алгебры L_{n+1}. Дополним его до базиса L_{n+2}, присоединив элемент e. Учитывая то, что ненильпотентные элементы $e_1,\ e_2,\dots,\ e_{n/2}$ не принадлежат к L'_{n+2}, получаем

$$f_i\circ e=\alpha_i^k f_k+a_if,\qquad e\circ e_i=\beta_i^kf_k+b_if,\quad f\circ e=\gamma^kf_k+cf,\quad f_i\circ e_i=f_i$$
$$(\alpha_i^i=0,\quad i,\ k=1,\ 2,\dots,\ N(L_n)).$$

Проверяя тождества $(f,\ e_kfe)=(e_k\circ f)\circ e+(f\circ e)\circ e_k+(e\circ e_k)\circ f=0$, находим, что все γ^k $(k=1,\dots,n/2)$ равны нулю. Если $c\neq0$, то элемент e ненильпотентен и линейно ниль-независим от остальных $e_1,\ e_2,\dots,\ e_{n/2}$. Следовательно, число линейно ниль-независимых элементов в L_{n+2} равно половине ее порядка, и мы приходим к условию теоремы 6. Отсюда тип а).

Если $c=0$, тогда элементы e и f перестановочны. Проверяя тождества $(f,\ e_if_ie)$, $(i=1,\ 2,\dots,\ n/2)$, находим, что $f_i\circ e=0$ $(i=1,\ 2,\dots,\ n/2)$. Следовательно, элементы e и f нильпотентны, и максимальный нильпотентный идеал M, содержащий их, коммутативен. Как в теореме 7, проверяя тождества $(f,\ e_ie_k\,e)$, доказываем равенство нулю всех β_i^k и приходим к условию $e\circ e_i=b_if$. Отсюда, если все b_i $(i=1,\ 2,\dots,\ n/2)$ равны нулю, получаем канонический тип б).

Если какой-нибудь b_{k_0} отличен от нуля, то, делая замену $\bar e=e/b_{k_0}$, его можно привести к единице, а остальные b_i $(i=1,\ 2,\dots,\ n/2,\ i\neq k_0)$, по теореме 3, — уничтожить. Отсюда канонический тип в).

§ 4. Алгебры Ли 3-го порядка

Образуя прямые суммы одночленной g_1 с алгебрами Ли 2-го порядка, получаем два типа алгебр 3-го порядка: $3g_1$, g_2+g_1. Что касается неразложимой разрешимой алгебры L_3, то она содержит двучленный идеал, который может быть изоморфным либо g_2, либо $2g_1$. В первом случае, по теореме 7, она изоморфна разложимой алгебре g_2+g_1. Во втором случае, по теореме 4, классификация L_3 сводится к нахождению канонических вещественных форм матриц 2-го порядка. Они следующие:

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}p&-1\\1&p\end{pmatrix}p\geqslant0,-1\leqslant h<1,\ h\neq0.$$

Соответственно получается пять типов разрешимых алгебр Ли 3-го порядка:

$g_{3,1}: e_2\circ e_3=e_1$;
$g_{3,2}: e_1\circ e_3=e_1,\ e_2\circ e_3=e_1+e_2$;
$g_{3,3}: e_1\circ e_3=e_1,\ e_2\circ e_3=e_2$;
$g_{3,4}: e_1\circ e_3=e_1,\ e_2\circ e_3=he_2,\ -1\leqslant h<1,\ h\neq0$;
$g_{3,5}: e_1\circ e_3=pe_1-e_2,\ e_2\circ e_3=e_1+pe_2\qquad p\geqslant0.$

Символом $g_{i,k}$ в дальнейшем будем обозначать алгебры с конкретной канонической структурой; первый из индексов указывает порядок алгебры, второй – номер неразложимого типа. Символом L_i по-прежнему будем обозначать разрешимую алгебру порядка i с общей структурой. В поле R существует два типа неразрешимых алгебр 3-го порядка:

$$g_{3,6}: e_1 \circ e_2 = e_1, \quad e_1 \circ e_3 = 2e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_3;$$
$$g_{3,7}: e_1 \circ e_2 = e_3, \quad e_3 \circ e_1 = e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_1.$$

Алгебры эти простые здесь их приводим для полноты классификации. Итак, имеет место

Теорема 9. *В поле вещественных чисел R всякая алгебра Ли размерности $\leqslant 3$ изоморфна одной из алгебр следующей таблицы:*

размерности 1: g_1,
размерности 2: $2g_1$, g_2,
размерности 3: $3g_1$, $g_2 + g_1$, $g_{3,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

Замечание. Алгебру $g_{3,3}$ можно рассматривать как предельный случай алгебры $g_{3,5}$ (при $p \to \infty$).

При $\frac{p-i}{p+i} = h$ алгебра $g_{3,5}$ комплексной подстановкой $\bar{e}_1 = e_1 + i e_2$, $\bar{e}_2 = e_1 - ie_2$, $\bar{e}_3 = \frac{1}{1+p} e_3$ переходит в тип $g_{3,4}$, а в поле R такой переход невозможен.

§ 5. Алгебра Ли 4-го порядка

Переходя к классификации алгебр Ли 4-го порядка, отметим 10 разложимых алгебр: $4g_1$, $g_2 + 2g_1$, $2g_2$, $g_{3,i} + g_1$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ Из них типы $g_{3,6} + g_1$ и $g_{3,7} + g_1$ неразрешимые, а все остальные — разрешимые. Поскольку неразрешимые алгебры Ли данного порядка исчерпываются этими двумя алгебрами, в последующем под L_n следует понимать неразложимую, разрешимую алгебру Ли 4-го порядка. Пусть M — максимальный нильпотентный идеал алгебры L_4. По следствию из теоремы 5 $\dim M \geqslant 2$. Следовательно, достаточно рассмотреть отдельно три случая.

Если $\dim M = 4$, то алгебра L_4 нильпотентна. Четырехчленная нильпотентная, неразложимая алгебра Ли имеет структуру [2] $g_{4,1}: e_2 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$. Если $\dim M = 3$, то идеал M изоморфен либо алгебре $3g_1$, либо $g_{3,1}$. В первом случае, по теореме 4, дело сводится к нахождению всех вещественных форм ненильпотентной матрицы 3-го порядка, за которые можно взять

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix},$$

$$\alpha \neq 0 \qquad\qquad -1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1, \ \gamma\beta \neq 0, \qquad \alpha \neq 0, \ p \geqslant 0.$$

Соответственно получаем 5 типов алгебр L_4:

$g_{4,2}: e_1 \circ e_4 = \alpha e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = e_2 + e_3$, $\alpha \neq 0$;
$g_{4,3}: e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_3 \circ e_4 = e_2$;
$g_{4,4}: e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_1 + e_2$, $e_3 \circ e_4 = e_2 + e_3$;
$g_{4,5}: e_1 \circ e_4 = e_1$, $e_2 \circ e_4 = \beta e_2$, $e_3 \circ e_4 = \gamma e_3$, $-1 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant 1$, $\gamma\beta \neq 0$;
$g_{4,6}: e_1 \circ e_4 = \alpha e_1$; $e_2 \circ e_4 = pe_2 - e_3$, $e_3 \circ e_4 = e_2 + pe_3$, $\alpha \neq 0$, $p \geqslant 0$.

Замечание. Алгебру $g_{4,3}$ можно рассмотреть как предельный случай алгебры $g_{4,2}$, так как при $\alpha \to \infty$, после замены $\bar{e}_1 = e_1$, $\bar{e}_2 = e_2/\alpha$, $\bar{e}_3 = e_3$, $\bar{e}_4 = e_4/\alpha$, $g_{4,2}$ переходит в $g_{4,3}$. Алгебра $g_{4,6}$ комплексной подстановкой $\bar{e}_1 = e_1$, $\bar{e}_2 = e_2 - ie_3$, $\bar{e}_3 = e_2 + ie_3$, $\bar{e}_4 = e_4$ легко переводится в алгебру $g_{4,5}$.

Во втором случае, когда $M = g_{3,1}$, структурные соотношения запишутся в виде

$$e_2 \circ e_3 = e_1, \ e_i \circ e_4 = c_{i4}^k e_k \qquad (i, \ k = 1, \ 2, \ 3).$$

Структурные константы c_{24}^1 и c_{34}^1 можно уничтожить. Из тождества $(f, 2\ 3\ 4)$ находим $c_{14}^2 = c_{14}^3 = 0$, $c_{14}^1 = c^2{}_4 + c_{34}^3$ и приходим к $e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_2 \circ e_4 = c_{14}^2 e_2 + c_{24}^3 e_3$, $e_1 \circ e_4 = (c_{24}^2 + c_{34}^3) e_1$, $e_3 \circ e_4 = c_{34}^3 e_2 + c_{34}^3 e_3$.

Преобразованием $\bar{e}_2 = \alpha e_2 + \beta e_3$, $\bar{e}_3 = \gamma e_2 + \delta e_3$, где $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, ненильпотентную матрицу $M_4 = (c_{i4}^k)$, $(i, k = 2{,}3)$ можно привести к видам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix},$$

соответственно которым получаем три новых типа:

$g_{4,7} : e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_1 \circ e_4 = 2e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = e + e_3$;
$g_{4,8} : e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_1 \circ e_4 (1 + h) e_1$, $e_2 \circ e_4 = e_2$, $e_3 \circ e_4 = he_3$, $|h| \leqslant 1$;
$g_{4,9} : e_2 \circ e_3 = e_1$, $e_1 \circ e_4 = 2pe_1$, $e_2 \circ e_4 = pe_2 - e_3$, $e_3 \circ e_4 = e_2 + pe_3$, $p \geqslant 0$.

Заметим, что, если определитель преобразования $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 1$, то, положив $\bar{e}_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} e_1$, можно прийти к прежней структуре $e_2 \circ e_3 = e_1$.

Пусть, наконец, $\dim M = 2$, или, что то же самое, $N(L_4) = 2$. Пусть e_1, e_2 — базис M. Линейно ниль-независимым элементам e_3 и e_4 отнесем линейные операторы A_3 и A_4, действующие в M, задаваемые ненильпотентными матрицами второго порядка, которые в поле R могут иметь следующие канонические пары:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \text{ или } \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Если учесть линейную ниль-независимость и коммутативность элементов e_3 и e_4 (соответственно — матриц A_3 и A_4), то другие случаи приводятся к этим двум.

Первой паре соответствует разложимая алгебра $L_4 = 2g_2$, второй паре — алгебра

$$g_{4,10} : \ e_1 \circ e_3 = e_1, \quad e_2 \circ e_3 = e_2, \quad e_1 \circ e_4 = -e_2, \quad e_2 \circ e_4 = e_1,$$

которая в поле комплексных чисел также разложима и изоморфна алгебре $2g_2$. Итак, алгебры Ли 4-го порядка в поле вещественных чисел R полностью классифицированы.

В поле комплексных чисел K алгебры $\leqslant 4$ были уже получены С. Ли в 1877 году [5]. Алгебры Ли третьего порядка были исследованы в 1918 году Л. Бианки [6], который получил еще два типа алгебр L_3, кроме полученных Ли, рассмотревшим только комплексные структуры. Задача вновь была рассмотрена в 1947 году Г. Врынчану [8] и Х. Ч. Ли [7], причем классификации Врынчану и Х. Ч. Ли являются эквивалентными классификации, данной Бианки [9].

Алгебры $g_{3,5} + g_1$, $g_{3,7} + g_1$, $g_{4,6}$, $g_{4,9}$, $g_{4,10}$ у С. Ли отсутствуют, так как в поле K они соответственно изоморфны алгебрам $g_{3,4} + g_1$, $g_{3,6} + g_1$, $g_{4,3}$, $g_{4,8}$, $2g_2$.

Алгебры 4-го порядка, полученные С. Ли, следующие (число в круглых скобках указывает номер формул в книге С. Ли [5]):

Алгебры L_4, содержащие своим идеалом $3g_1$.

1. (73) : абелев тип.
2. (71) : $x_3 \circ x_4 = x_2$;
3. (69) : $x_1 \circ x_4 = x_2$, $x_3 \circ x_4 = x_1$;
4. (72) : $x_1 \circ x_4 = x_1$, $x_2 \circ x_4 = x_2$, $x_3 \circ x_4 = x_2 + x_3$;
5. (70) : $x_1 \circ x_4 = x_1$, $x_2 \circ x_4 = x_1 + x_2$, $x_3 \circ x_4 = x_2 + x_3$;
6. (68) : $x_1 \circ x_4 = cx_1$, $x_2 \circ x_4 = (1 + c) x_2$, $x_3 \circ x_4 = x_1 + cx_3$;
7. (67) : $x_1 \circ x_4 = x_1$, $x_2 \circ x_4 = ax_2$, $x_3 \circ x_4 = cx_3$;

L_4 разрешимые, не содержащие абелев $3g_1$

8. (64) : $x_2 \circ x_3 = x_2$, $x_1 \circ x_4 = x_1$;
9. (65) : $x_2 \circ x_3 = x_1$, $x_1 \circ x_4 = x_1$, $x_2 \circ x_4 = x_2$;
10. (66) : $x_2 \circ x_3 = x_1$, $x_1 \circ x_4 = 2x_1$, $x_2 \circ x_4 = x_2$, $x_3 \circ x_4 = x_2 + x_3$;
11. (62) : $x_2 \circ x_3 = x_1$, $x_1 \circ x_4 = cx_1$, $x_2 \circ x_4 = x_2$, $x_3 \circ x_4 = (c-1) x_3$; $c \neq 1$.

Неразрешимая алгебра

12. (58) $x_1 \circ x_2 = x_1$, $x_1 \circ x_3 = 2x_2$, $x_2 \circ x_3 = x_3$.

Ниже приводится таблица эквивалентности этой классификации с нашей. Преобразования к типам С. Ли осуществляются в поле комплексных чисел K. Если они сложнее, чем перенумерация и изменение знаков элементов базиса, то преобразования эти приводятся в примечаниях, ссылка на которые дается звездочкой.

Переход к алгебрам С. Ли

Наш тип	С. Ли	Наш тип	С. Ли
$4g_1$	1.(73)	$g_{4,2}$ $(\alpha = 1)$	4.(72)
$g_2 + 2g_1$	7.(67) $(a = c = 0)$	$g_{4,2}$ $(\alpha \neq 0, \neq 1)$	6.(68) $(c \neq 0, \neq -1)$*
$2g_2$	8.(64)	$g_{4,3}$	6.(68) $(c = 0)$
$g_{3,1} + g_1$	2.(71)	$g_{4,4}$	5.(70)
$g_{3,2} + g_1$	6.(68) $(c = -1)$	$g_{4,5}$	7.(67) $(a \neq 0, c \neq 0)$
$g_{3,3} + g_1$	7.(67) $(a = 1, c = 0)$	$g_{4,6}$ $(\alpha \neq 0)$	7.(67) $\left(a = \frac{p-i}{\alpha}, c = \frac{p+i}{\alpha}\right)$*
$g_{3,4} + g_1$	7.(67) $(a \neq 0, \neq 1, c = 0)$	$g_{4,7}$	10.(64)
$g_{3,5} + g_1$	7.(67) $\left(a = \frac{p-i}{p+i}, c = 0\right)$*	$g_{4,8}$ $(h = 0)$	9.(65)
$g_{3,6} + g_1$	12.(58)	$g_{4,8}$ $(h \neq 0)$	11.(62) $c = h + 1$
$g_{3,7} + g_1$	12.(58)*	$g_{4,9}$	11.(62) $\left(c = \frac{2p}{p+i}\right)$*
$g_{4,1}$	3.(69)	$g_{4,10}$	8.(64)*

Примечания:

Тип $g_{3,5}+g_1: x_1=e_1+ie_2,\ x_2=e_1-ie_2,\ x_3=e_4,\ x_4=e_3;$

Тип $g_{3,7}+g_1: x_1=-ie_1-e_2,\ x_2=ie_3,\ x_3=ie_1-e_2,\ x_4=e_4;$

Тип $g_{4,2}\ (\alpha\neq 0,\ \neq 1): x_1=\frac{1}{\alpha-1}e_2,\ x_2=e_1,\ x_3=e_3,\ x_4=\frac{1}{\alpha-1}e_4;$

Тип $g_{4,6}\ (\alpha\neq 0): x_1=e_1,\ x_2=e_2-ie_3,\ x_3=e_2+ie_3,\ x_4=\frac{e_4}{\alpha};$

Тип $g_{4,9}: x_1=e_1,\ x_2=e_2+ie_3,\ x_3=\frac{e_2-ie_3}{-2i},\ x_4=\frac{e_4}{p+i};$

Тип $g_{4,10}: x_1=ie_1-e_2,\ x_2=ie_1+e_2,\ x_3=\frac{e_3-ie_4}{2},\ x_4=\frac{e_3+ie_4}{2};$

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
15 V 1961.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. М.—Л., 1940.

2. В. В. Морозов. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка. Изв. вузов, Матем., № 4(5), стр. 161—171, 1958.

3. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. ИЛ, 1947.

4. Е. Б. Дынкин. Структура полупростых алгебр Ли. УМН, т. II, вып. 4, стр. 59—127, 1947.

5. S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, §§ 136—137, S. 713—732. 1893.

6. L. Bianchi. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Spoerri. Pisa. 1918.

7. H. C. Lee. Sur bes groupes á trois paramètres. J. math. pur. et appl., t. XXVI, p 251, 1947.

8. G. Vranceanu, Leçons de geométrie différentielle, p. 105—111, Bucarest, 1947.

9. A. Dobrescu. Asupra grupurilor Lui Lie cu trei parametri. Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R., Secţiunca de ştiinţe Matem. si Fizice, t. V, № 1, p. 75, 1953.

10. Г. М. Мубаракзянов. Некоторые теоремы о разрешимых алгебрах Ли. Сб. аспирантск. работ (точн. науки), Изд. Казанск. ун-та, стр. 103, 1962.