



دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

منطق شناختی پویای احتمالاتی

نگارش

امیرحسین شرفی

استاد راهنما

دکتر مرتضی منیری

۱۳۹۰

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه،
اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه شهید بهشتی
محفوظ است. نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و نخواهد که بداند

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را بیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می‌باید تا به رسگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اول آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه ممتز چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که در اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

پس منطق ناگزیر آید بر جوینده‌ی رسگاری.^۱

^۱ مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس‌گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که منطق را فطرتاً در وجود آدمی نهاد. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات دکتر منیری در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه قدردانی نمایم.

همچنین جا دارد که تشکری ویژه داشته باشم از دوست عزیزم علی ولی‌زاده، که با همراهی و مساعدت او به فراگیری منطق‌های شناختی پرداختیم و مقالات مرتبط با پایان‌نامه را به دقت مطالعه کرده و مسائل و مشکلات پیش‌آمده را با نویسندگان مقالات در میان گذاشتیم.

و نیز از دکتر رسول رمضانیان، دکتر کویی و دکتر سک بواسطه‌ی رفع مشکلاتی چند از پایان‌نامه و تمامی اساتیدی که بر پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند بالاخص استاد دکتر محمد مهدی ابراهیمی سپاسگزارم.

در آخر لازم است از آقایان وفا خلیقی (پدیدآورنده‌ی XePersian)، محمود امین‌طوسی، هادی صفی‌اقدام و وحید دامن‌افشان و دیگر دوستانی که در سایت وزین www.parsilatex.com به راهنمایی کاربران T_EX می‌پردازند قدردانی نمایم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

امیرحسین شرفی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: شرفی

نام: امیرحسین

عنوان: منطق شناختی پویای احتمالاتی

استاد راهنما: دکتر مرتضی منیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: منطق ریاضی

دانشگاه: شهید بهشتی

علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰

تعداد صفحات: ۲۸

واژگان کلیدی: منطق شناختی، منطق پویا، منطق احتمالاتی، به‌روزرسانی، Monty Hall

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا نمونه‌ای از منطق‌های شناختی احتمالاتی (PEL) را معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن مدلی ساده از این منطق، در راستای تعمیم آن به منطق‌های پویا که تغییر اطلاعات در سناریوهای چند عاملی را مدل می‌کنند پیش می‌رویم. پس از توصیف مختصری از منطق‌های شناختی پویای غیر احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL) را نیز با در نظر گرفتن سه گونه‌ی طبیعی احتمال، یعنی احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها، معرفی خواهیم کرد. این سه گونه، شیوه‌ی به‌روزرسانی تعمیم‌یافته‌ای در اختیار می‌گذارند که روشی است مناسب و طبیعی برای مدل‌سازی جریان اطلاعات. سپس برای اینکه تمامیت منطق شناختی پویای احتمالاتی را با استفاده از تمامیت منطق شناختی احتمالاتی اثبات کنیم، اصول موضوعه‌ی صحیحی ارائه می‌کنیم تا فرمول‌های شامل عملگر پویا را به فرمول‌هایی فاقد این عملگر در زبان ایستای متناظر تحویل کنند. سرانجام گونه‌ای از منطق شناختی پویای احتمالاتی، مورد نیاز برای حل معمای Monty Hall ارائه کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس راه‌حلی صوری برای این معما در این منطق بدست می‌آوریم.

پیش‌گفتار

منطق شناختی احتمالاتی پویا منطقی نسبتاً جدید است که قبل از مطالعه‌ی آن می‌بایست منطق شناختی، منطق شناختی پویا و منطق شناختی احتمالاتی معرفی شده باشد و به فراخور در فصول سه‌گانه به معرفی و توصیف هریک خواهیم پرداخت.

مقدمه را با بهره‌جستن از مقدمه‌ی مقاله‌ی [؟] نگاشتم و البته هر کجا که لازم بود از مقدمه‌های دیگر مقالات نیز استفاده کردم.

در فصل ۱ ابتدا با کمک [؟] و [؟] به خلاصه‌ای از منطق شناختی می‌پردازیم، سپس بر مبنای [؟] منطق شناختی احتمالاتی را که همان منطق شناختی سنتی است به اضافه‌ی توانایی استدلال درباره‌ی احتمال معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم.

فصل ۲ بر اساس [؟] نوشته شده است و به معرفی منطق‌های پویا اعم از شناختی پویا و شناختی پویای احتمالاتی اختصاص دارد. در این فصل پس از معرفی منطق اعلان عمومی و سپس گونه‌ای تا حدی تعمیم یافته از منطق شناختی پویا با در نظر گرفتن مدلی ساده از منطق شناختی احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی معرفی شده و تمامیت آن اثبات می‌شود. برای آنکه منطق‌های شناختی پویا را احتمالاتی کنیم ابتدا سه گونه‌ی طبیعی احتمال را تعریف می‌کنیم که عبارتند از: احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها. برای اثبات تمامیت منطق‌های پویا اصول موضوعه‌ای مطرح می‌شود تا بتوان معادل با هر فرمول در این منطق‌ها، با حذف عملگر پویا، فرمولی در منطق‌های ایستا بدست آورد. این اصول اثرات متقابل عملگر پویا با اتم‌ها و عملگرهای بولی و شناختی را توصیف می‌کنند. پس از اثبات صحت، با کمک آنها تمامیت منطق‌های پویا را از تمامیت منطق‌های ایستا نتیجه می‌گیریم.

هنگامی که به همراه ولی‌زاده به مطالعه و اثبات جزئیات مقاله‌ی [؟] مشغول بودیم با مسائل و مشکلاتی برخورد کردیم که به تناسب در بخش‌های مختلف فصل ۲ با عنوان ملاحظه به آنها اشاره خواهیم کرد.

فصل ۳ نیز بر گرفته از [؟] است و به منظور ارائه‌ی مثالی برای نشان دادن کاربرد منطق شناختی پویای احتمالاتی نگاشته شده است. مثالی که ارائه می‌شود معمای معروف Monty Hall است که پیش از این مقاله راه‌حلی صوری برای آن داده نشده بود، ولی ما بر اساس این مقاله به راه‌حلی صوری با کمک گونه‌ای از منطق‌های شناختی پویای احتمالاتی دست می‌یابیم که به زیبایی جوابی معقول در اختیار

می‌گذارد. این راه‌حل زیبا را نمی‌توانستم با جزئیات بیان کنم اگر از [؟] استفاده نمی‌کردم و آن را نیافتم مگر با راهنمایی دکتر کویی.

فهرست مطالب

۱	مقدمه
۳	۱ منطق‌های شناختی ایستا
۳	۱.۱ منطق شناختی (EL)
۳	۲.۱ زبان شناختی پایه‌ای
۵	۳.۱ همه‌دانی مشترک
۶	۴.۱ اصول موضوعه وقواعد منطق شناختی
۶	۵.۱ منطق شناختی احتمالاتی (PEL)
۷	۲ منطق‌های شناختی پویا
۷	۱.۲ منطق‌های شناختی پویا به منظور به‌روزرسانی غیر احتمالاتی
۷	۱.۱.۲ منطق اعلان عمومی (PAL)
۹	۲.۱.۲ منطق شناختی پویا - به‌روزرسانی مدل‌ها (DEL)
۱۰	۲.۲ منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL)
۱۳	۳ معمای MONTY HALL
۱۳	۱.۳ منطق اعلان عمومی احتمالاتی (PPAL)
۱۵	۲.۳ معمای Monty Hall
۲۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۵	نمایه

مقدمه

در سال ۱۹۵۱ فان رایت^۲ کتابی با عنوان «مقاله‌ای در منطق موجهات» [؟] منتشر کرد. هینتیکا^۳ با ایده‌هایی که از این مقاله گرفته بود در سال ۱۹۶۲ کتابی با عنوان «دانش و باور، مقدمه‌ای بر منطق مبتنی بر این دو مفهوم» [؟] به چاپ رساند. وی در این کتاب به کمک مفهوم جهان‌های ممکن مدلی برای دانش و باور ارائه کرد و به همین دلیل بسیاری او را پدر منطق شناختی می‌دانند. هدف اصلی او واکاوی مفهومی دانش و باور بود ولی پس از او عبارت «شناخت» در محدوده‌ای فراتر به کار گرفته شد، اعم از باور و هر روشی که یک عامل می‌تواند دانشی را بدست آورد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ منطق شناختی مورد توجه دانشمندان فعال در شاخه‌هایی مانند هوش مصنوعی، فلسفه و نظریه بازی‌ها قرار گرفت. در دهه ۸۰ محققین علوم کامپیوتر به منطق شناختی روی آوردند، فاگین^۴، هالپرن^۵، موزز^۶ و وردی^۷ که از این دسته به حساب می‌آمدند مقالاتی را که در طی حدود ۱۰ سال در مورد منطق شناختی به چاپ رسانده بودند در کتابی با نام «استدلال درباره دانش» [؟] جمع آوری کرده و در سال ۱۹۹۵ منتشر کردند.

منطق شناختی، منطقی وجهی است که به استدلال بر مبنای دانش^۸ و فرادانش^۹ می‌پردازد، فرادانش دانشی است که عاملی درباره‌ی دانش خود و یا دانش دیگر عامل‌ها دارد. برای روشن شدن موضوع مثالی را با سه بازیکن ۱، ۲ و ۳، و سه کارت قرمز، سفید و آبی در نظر بگیرید. کارت‌ها در میان بازیکنان به این صورت توزیع شده‌اند که قرمز، سفید و آبی به ترتیب در دستان ۱، ۲ و ۳ قرار دارد. فرض کنید بازیکنان تنها کارت خویش را می‌بینند و همه می‌دانند که کارت‌ها به گونه‌ای میانشان توزیع شده است که هر یک فقط یک کارت در دست دارند. بوسیله‌ی منطق شناختی می‌توان جملات پیچیده‌ای را مانند «بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۲ نمی‌داند که چه کارتی در دستان بازیکن ۳ است.» صوری کرد. منطق شناخت با چنین فرادانش‌هایی سر و کار دارد. حتی فرادانش‌های پیچیده‌تری مانند همه‌دانی مشترک وجود دارد. برای نمونه در مثال بالا علم به اینکه دقیقاً سه کارت وجود دارد و علم به رنگ کارت‌ها

^۲ von Wright

^۳ Hintikka

^۴ Fagin

^۵ Halpern

^۶ Moses

^۷ Vardi

^۸ information

^۹ higher order information

همه‌دانی مشترک است. منطق شناختی همچنين واكاوی مفهومی خوبی از همه‌دانی مشترک در اختیار می‌گذارد.

اگرچه منطق شناختی آنالیز مناسبی از فرادانش در اختیار می‌گذارد ولی بررسی تغییر دانش خارج از گستره‌ی این منطق است. منطق‌های شناختی پویا منطق شناختی را به گونه‌ای توسعه می‌دهند که استدلال درباره‌ی تغییرات دانش نیز امکان‌پذیر باشد. این توسعه از طرفی از نوعی معناشناسی زبان طبیعی الهام گرفته شد که در آن معنای جمله بعنوان طریقی برای تغییر داده‌های کسانی که آن را می‌شنوند در نظر گرفته می‌شود، و از طرف دیگر از مطالعه‌ی بازی‌ها که تغییر داده‌ها و فرادانش‌ها نقش بسزایی در آنها ایفا می‌کند. سیستم‌های منطقی مختلفی بر این اساس در طول سال‌ها شکل گرفته است که برجسته‌ترین آنها عبارتند از [؟] (الهام گرفته از [؟])، [؟] و [؟].

در منطق شناختی پویا تغییر وضعیت موجود توسط داده‌های جدید را به روزرسانی می‌خوانیم. ساده‌ترین مثال زمانی است که عاملی می‌فهمد که گزاره‌ی φ برقرار است. به روزرسانی با یک گزاره در این مثال به این معنی است که گزینه‌هایی که عامل ممکن می‌دانست ولی در آنها گزاره‌ی φ برقرار نیست حذف می‌شوند. در یک سیستم چند عاملی ممکن است عامل‌های مختلف دسترسی مختلفی به داده‌های جدید داشته باشند و همچنین اطلاعات عامل‌ها درباره‌ی دیگر عامل‌ها نقش بازی کند، از این رو می‌توان به روزرسانی پیچیده‌تری را در مثال قبل مدل کرد: فرض کنید بازیکن ۱ کارت خود را به بازیکن ۲ نشان دهد و بازیکن ۳ نیز این را ببیند ولی از محتوای کارت خبردار نشود. در نتیجه دانش بازیکنان به این صورت تغییر می‌کند: بازیکن ۲ می‌داند که محتوای کارت بازیکن ۱ چیست، بازیکن ۳ می‌داند که بازیکن ۲ می‌داند محتوای کارت بازیکن ۱ چیست ولی خودش محتوا را نمی‌داند و بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۳ این را می‌داند.

اگرچه نظریه‌ی احتمال منطق نیست لکن حوزه‌ی مطالعاتی مناسبی برای منطق است، زیرا در بسیاری از حوزه‌های کاربردی به منظور استدلال درباره‌ی دانش، اهمیت توانایی استدلال درباره‌ی احتمال رخداد‌های معین به همراه دانش عامل‌ها رخ می‌نماید و اغلب احتمال به عنوان نظریه‌ای برای مدلسازی استدلال مطرح می‌شود. از این رو همه‌ی مقالات منتشر شده در علم اقتصاد که به استدلال درباره‌ی دانش می‌پردازند (که بازگشت می‌کنند به مقاله‌ی اصلی اومان [؟]) با ساختاری احتمالاتی مدل می‌شوند، هرچند آنها زبانی منطقی که بصورتی روشن استدلال درباره‌ی احتمال را جایز کند در نظر نگرفته‌اند. با این اوصاف تلاش‌هایی در جهت بیرون کشیدن منطق بعنوان بهترین راه استدلال از دل نظریه‌ی احتمال صورت گرفته است. که یکی از مناسب‌ترین آنها منطق احتمالاتی است که در [؟] معرفی شده است.

فصل ۱

منطق‌های شناختی ایستا

۱.۱ منطق شناختی (EL)

منطق شناختی^۱ ابزاری است برای توصیف و تحلیل دانش (knowledge) یا باور (belief) عامل‌ها. این منطق در ابتدا برای تحلیل دانش و کمی بعد برای توصیف باورها به کار گرفته شد^۲. رابطه‌ی بین دانش و باور کمی ظریف است و اغلب دانش را باور درست در نظر می‌گیرند.

منطق شناختی با استفاده از زبانی صوری به تحلیل دانش و باور می‌پردازد. ابتدا به گونه‌ای غیر صوری منظورمان از «منطق» هر آن چیزی است که تحلیل‌های ما را در بر می‌گیرد، و منظورمان از «زبان» مجموعه‌ی دنباله‌هایی از نمادهاست که توسط قواعد زبانی خاصی ایجاد شده‌اند. اما در ادامه به صورتی دقیق‌تر به این مفاهیم می‌پردازیم.

منطقی که اکنون ارائه می‌شود مجموعه‌ی غیر تهی A از عوامل را دربر دارد. پایه‌ای‌ترین خاصیت‌های جهان درباره‌ی آنچه که عامل^۳‌ها ممکن است استدلال کنند، مجموعه‌ی غیر تهی \mathbb{P} را تشکیل می‌دهد. اعضای \mathbb{P} را گزاره‌های اتمی می‌نامیم.

۲.۱ زبان شناختی پایه‌ای

زبان شناختی L_{EL} بر پایه‌ی مجموعه‌ی نمادهای زیر شکل می‌گیرد:

$$\mathbb{P} \cup \{\top, \perp, \neg, \wedge, (\cdot,)\} \cup \{\Box_a : a \in A\}.$$

^۱ Epistemic Logic

^۲ برخی منطق‌ها که بر باورها تأکید دارند منطق doxastic نامیده می‌شوند، به سبب آنکه ریشه یونانی کلمه‌ی doxastic بر شکل‌گیری عقیده اطلاق می‌کند، در حالی که ریشه یونانی کلمه‌ی epistemic بیشتر در زمینه‌ی فهمیدن و دانش به کار می‌رود.

^۳ agent

برای ایجاد رشته‌ای از نمادها که تشکیل فرمول می‌دهند از قواعد نحوی زیر استفاده می‌کنیم.
مجموعه‌ی فرمول‌ها کوچکترین مجموعه‌ای است که شرایط زیر را داشته باشد:

- نماد \perp و \top و همه‌ی عناصر $p \in \mathbb{P}$ فرمول هستند.
- اگر φ فرمول باشد آنگاه $(\neg\varphi)$ فرمول است، و برای هر $a \in A$ ، $(\Box_a\varphi)$ فرمول است.
- اگر φ و ψ فرمول باشند، آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$ نیز فرمول است

معمولاً برای راحتی خارجی‌ترین پراتز را نمی‌نویسیم. نحو اغلب به شیوه‌ای دیگر بیان می‌شود که فرم Bachus-Naur نامیده می‌شود. با استفاده از این فرم برای بدست آوردن همان فرمول‌هایی که در بالا به صورت استقرایی بیان شد می‌توان اینگونه نوشت:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a\varphi$$

نماد \neg و \wedge معمولاً عملگرهای بولی اطلاق می‌شوند و \Box_a برای هر $a \in A$ عملگرهای شناختی نامیده می‌شوند.

حال معنای شهودی هر فرمول را بیان می‌کنیم. فرمول \top همیشه درست و \perp همیشه غلط است. هر گزاره‌ی اتمی p خاصیتی پایه‌ای از جهان را بیان می‌کند، که یا درست است و یا غلط. فرمول $\neg\varphi$ ، «نقیض φ » و فرمول $(\varphi \wedge \psi)$ ، « φ و ψ » خوانده می‌شود. درنهایت به‌ازای هر عامل a ، فرمول $\Box_a\varphi$ به صورت « a باور دارد φ را» و یا « a می‌داند φ را» خوانده می‌شود. در هر جهان برای هر فرمول یک ارزش درستی مفروض است.

برای آنکه معنای فرمول‌ها را دقیقتر کنیم، نوعی ساختار را که مدل کریپکی^۴ نامیده می‌شود تعریف می‌کنیم. مدل‌های کریپکی که به اقتباس از Saul Kripke نام گرفته‌اند، ساختارهای مرتبطی هستند که در معناشناسی‌های منطق وجهی استفاده می‌شوند. منطق شناخت نوع خاصی از منطق وجهی است.

تعریف ۱.۲.۱. مدل‌های کریپکی مدل کریپکی M سه‌تایی (S, \xrightarrow{a}, V) است، که مؤلفه‌هایش به این صورت توصیف می‌شوند:

S مجموعه‌ای است که اعضایش وضعیت‌ها یا جهان‌های ممکن نامیده می‌شوند. هر جهان ممکن با وضعیت ممکن که عاملی با آن مواجه است متناظر می‌شود.

مؤلفه‌ی \xrightarrow{a} مجموعه‌ای است از روابط دوتایی \xrightarrow{a} که به‌ازای هر $a \in A$ روی S تعریف شده‌اند. از نماد $t \xrightarrow{a} s$ استفاده می‌کنیم برای اینکه نشان دهیم $(s, t) \in \xrightarrow{a}$. اگر این روابط دوتایی هم‌ارزی باشند آنها را به صورت \sim_a نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی شامل آنها را \sim می‌نامیم. معمولاً $t \sim_a s$ را به این صورت معنا می‌دهند که عامل a جهان s و t را از هم تمییز نمی‌دهد، یعنی هر دو را یک جهان می‌پندارد، و این تحلیلگر است که می‌داند این دو جهان متفاوتند.

^۴Kripke Model

در نهایت V تابعی است که هر گزاره‌ی اتمی را به زیرمجموعه‌ای از S می‌نگارد. هر گزاره‌ی اتمی می‌تواند با گزاره‌ای از زبان طبیعی متناظر شود. به‌عنوان مثال گزاره‌ی p را می‌توان به‌صورت «بیرون، هوا بارانی است» خواند، و اگر جهان $s \in S$ در مجموعه‌ی $V(p)$ باشد، ما s را یکی از چند جهان ممکن در نظر می‌گیریم که در آن وضعیت بارانی بودن بیرون برقرار باشد.

کلاس همه‌ی مدل‌های کریپکی را \mathbb{K} می‌نامیم و مدل‌های کریپکی با رابطه‌ی هم‌ارزی را مدل‌های شناختی می‌نامیم و کلاس این مدل‌ها را به‌صورت $\mathbb{S5}$ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ همه‌دانی مشترک

در زبانی که ارایه شد، می‌توان با استفاده از فرمول زیر بیان کرد که همه φ را می‌دانند:

$$\Box\varphi \equiv \bigwedge \{\Box_a\varphi : a \in \mathcal{A}\}$$

البته اغلب، این دانش به این وابسته است که آیا عامل‌ها از این دانش متقابل آگاهند یا نه. ما می‌توانیم این موضوع را به این صورت بنویسیم که نه‌تنها همه φ را می‌دانند، بلکه همه می‌دانند که همه φ را می‌دانند:

$$\Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi$$

هرچندکه به بیش از درجه‌ی سه استدلال نمی‌شود و ممکن است گفته شود که اگر

$$\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi,$$

آنگاه φ همه‌دانی مشترک^۵ است اما ما عامل‌هایی را در نظر می‌گیریم که توانایی استدلال ایده‌آلی دارند و درجات دلخواه را در نظر می‌گیرند. از این رو می‌گوییم که φ همه‌دانی مشترک است اگر و فقط اگر $\Box^n\varphi$ برای هر $n \geq 0$ ، جایی که $\Box^0\varphi \equiv \varphi$ و برای هر $n \geq 0$ ، $\Box^{n+1}\varphi \equiv \Box\Box^n\varphi$. می‌توانیم فرمول همه‌دانی مشترک را به فرم $\Box^*\varphi$ به زبان اضافه کنیم، و معناشناسی‌اش را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

• اگر $M, s \models \Box^*\varphi$ و فقط اگر $M, t \models \varphi$ برای هر t که برای آن $t \rightarrow^* s$ ، که در آن \rightarrow^* به‌صورت بستار تراگذری انعکاسی از رابطه‌ی $\{ \overset{a}{\rightarrow} : a \in \mathcal{A} \} \cup$ تعریف شده است.

همچنین می‌توانیم به همین منوال برای هر مجموعه از عامل‌های $B \subseteq \mathcal{A}$ فرمول‌هایی را به شکل $\Box_B^*\varphi$ اضافه کنیم، که به‌صورت « φ در میان عامل‌های درون B همه‌دانی مشترک است» خوانده می‌شود. برای تعریف معناشناسی، کافی است در تعریف معناشناسی $\Box^*\varphi$ ، B را جایگزین \mathcal{A} کنیم. همچنین توجه کنید که $\Box^*\varphi$ می‌تواند با فرمول $\Box_{\mathcal{A}}^*\varphi$ جایگزین شود.

^۵common knowledge

۴.۱ اصول موضوعه و قواعد منطق شناختی

منطق متناظر با اصول موضوعه و قواعد زیر را منطق \mathcal{K} می‌نامیم

- (□۱) تمامی نمونه جانشین‌های همانگو^۶های گزاره‌ای
- (□۲) $\Box_a(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_a\varphi \rightarrow \Box_a\psi)$ توزیع \Box_a روی \rightarrow
- (R1) $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ قاعده‌ی وضع مقدم^۷
- (R2) $\frac{\varphi}{\Box_a\varphi}$ قاعده‌ی ضرورت^۸

قضیه ۱.۴.۱. (صحت اصول موضوعه و قواعد منطق شناختی) اگر $\mathcal{K} \vdash \varphi$ آنگاه $\mathbb{K} \models \varphi$ ؛ اگر $S5 \vdash \varphi$ آنگاه $S5 \models \varphi$.

□ برهان. برای اثبات می‌توانید به کتاب [؟] رجوع کنید.

قضیه ۲.۴.۱. (تمامیت منطق شناختی) اگر $\mathbb{K} \models \varphi$ آنگاه $\mathcal{K} \vdash \varphi$ ؛ اگر $S5 \models \varphi$ آنگاه $S5 \vdash \varphi$.

□ برهان. برای اثبات می‌توانید به کتاب [؟] رجوع کنید.

۵.۱ منطق شناختی احتمالاتی (PEL)

تعریف ۱.۵.۱. زبان شناختی احتمالاتی L_{PEL} . این زبان بر پایه‌ی مجموعه‌ی شمارای \mathbb{P} از گزاره‌های اتمی، مجموعه‌ی متناهی A از عامل‌ها، عملگر شناختی K_a و نماد تابعی احتمالاتی P_a شکل می‌گیرد. فرمول‌های خوش‌تعریف با استفاده از فرم Backus-Naur به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid \sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i) \geq r$$

^۶tautology

^۷modus ponens rule

^۸necessitation rule

فصل ۲

منطق‌های شناختی پویا

در این فصل سه منطق شناختی پویا را با این رویکرد مطرح می‌کنیم که برای هر یک اصولی موسوم به اصول موضوعه‌ی تحویل^۱ معرفی کرده و با اثبات صحت آنها گامی به سوی تمامیت بر می‌داریم. در انتهای فصل نیز تمامیت را در یک قضیه برای هر سه منطق اثبات خواهیم کرد.

۱.۲ منطق‌های شناختی پویا به منظور به‌روزرسانی غیر احتمالاتی

منطق‌های شناختی پویا جریان اطلاعات ایجاد شده توسط عمل^۲ها را توصیف می‌کنند. ساده‌ترین عمل آموزنده، و نمونه‌ای رهگشا برای بیشتر این نظریه، اعلان عمومی گزاره‌ی درستی چون A به گروهی از عامل‌هاست، که به صورت $A!$ نمایش می‌دهیم. به‌روزرسانی برای عمل‌های پیچیده‌تر می‌تواند برحسب «مدل‌های عمل» توصیف شود، که الگوهای پیچیده‌تری از دسترسی عامل‌ها به عمل در حال رخداد را مدل می‌کنند. پس ابتدا به‌روزرسانی منطق شناختی توسط اعلان عمومی را بررسی می‌کنیم سپس آن را به حالت کلی‌تر، برای هر نوع عمل، توسعه می‌دهیم.

۱.۱.۲ منطق اعلان عمومی (PAL)

تأثیر پویای اعلان عمومی^۳ A این است که مدل (غیر احتمالاتی) جاری $M = (S, \sim, V)$ را به مدل به‌روز شده‌ی $M|A$ تبدیل می‌کند. این مدل به‌روز شده با تحدید جهان‌های M به جهان‌هایی که A در آنها درست است تعریف می‌شود.

اعلان عمومی معمولاً حاوی اطلاعاتی مفید است. از این رو ممکن است که ارزش درستی عبارات شناختی در نتیجه‌ی اعلان تغییر کند. برای مثال قبل از اعلان A عامل a آن را نمی‌دانست ولی اکنون

^۱reduction axioms

^۲event

^۳public announcement

می‌داند.

تعریف ۱.۱.۲. زبان اعلان عمومی. زبان اعلان عمومی توسط فرم Backus-Naur به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$$

فرمول $[!\varphi]\psi$ به صورت « ψ پس از اعلان φ برقرار است» خوانده می‌شود. زبان بدست آمده در مدل‌های استاندارد برای منطق شناختی نیز قابل تفسیر است. معناشناسی برای این زبان به غیر از اعلان عمومی همانند تعریف؟؟ می‌باشد. معناشناسی اعلان عمومی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. معناشناسی اعلان عمومی. فرض کنید مدل شناختی $M = (S, \sim, V)$ داده شده باشد و $s \in S$

$$M|A, s \models \varphi \text{ آنگاه } M, s \models A \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad M, s \models [!A]\varphi$$

که در آن $M|A$ مدل (S', \sim', V') است به طوری که، با فرض $\llbracket A \rrbracket = \{t \in S \mid M, t \models A\}$

- $S' = \llbracket A \rrbracket$,
- $\sim'_a = \sim_a \cap (S' \times S')$,
- $V'(p) = V(p) \cap S'$.

اصول موضوعه‌ی تحویل در PAL به صورت زیر است:

$$[!A]p \leftrightarrow (A \rightarrow p) \quad (۱.۲)$$

$$[!A]\neg\varphi \leftrightarrow (A \rightarrow \neg[!A]\varphi) \quad (۲.۲)$$

$$[!A](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([!A]\varphi \wedge [!A]\psi) \quad (۳.۲)$$

$$[!A]K_a\varphi \leftrightarrow (A \rightarrow K_a[!A]\varphi) \quad (۴.۲)$$

قضیه ۳.۱.۲. (صحت اصول موضوعه‌ی تحویل برای اعلان عمومی)

برهان. با ارجاع به هر اصل اثباتی برای آن می‌آوریم.

(۱.۲)

$$M, s \models [!A]p \Leftrightarrow M, s \models A \Rightarrow M|A, s \models p \quad (۱)$$

$$\Leftrightarrow M, s \models A \Rightarrow M, s \models p \quad (۲)$$

$$\Leftrightarrow M, s \models A \rightarrow p$$

اگر $M, s \models A$ آنگاه $s \in S'$ و اگر $s \in S'$ آنگاه $V(p) = V'(p)$. در نتیجه از (۱) به (۲) و برعکس می‌توان رسید.

(۲.۲)

$$\begin{aligned} M, s \models [!A]\neg\varphi &\Leftrightarrow M, s \models A \Rightarrow M|A, s \models \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow M, s \models A \Rightarrow (M, s \models A \text{ و } M|A, s \not\models \varphi) \\ &\Leftrightarrow M, s \models A \Rightarrow M, s \models \neg[!A]\varphi \\ &\Leftrightarrow M, s \models A \rightarrow \neg[!A]\varphi \end{aligned}$$

□

۲.۱.۲ منطق شناختی پویا - به‌روزرسانی مدل‌ها (DEL)

تعریف ۴.۱.۲. مدل عمل^۴. فرض کنید مجموعه‌ی A از عامل‌ها و زبان منطقی \mathcal{L} داده شده باشد، مدل عمل ساختار $A = (E, \sim, pre)$ است بطوری که

- E مجموعه‌ای متناهی و غیر تهی است از عمل‌ها،
- \sim مجموعه‌ای است از روابط هم‌ارزی \sim_a روی E برای هر عامل $a \in A$ ،
- pre تابعی است که به هر عمل $e \in E$ فرمولی از \mathcal{L} را نسبت می‌دهد.

تابع پیش‌شرط^۵ pre با نسبت دادن فرمول (pre_e) به هر عمل در E معین می‌کند که در کدام جهان‌ها این عمل‌ها ممکن است روی دهند. این مدل‌ها را مدل به‌روزرسانی نیز می‌نامند.

این مدل‌ها بسیار شبیه مدل‌های شناختی هستند، با این تفاوت که به‌جای دانش‌های مربوط به وضعیت‌های ثابت، دانش درباره‌ی عمل‌ها مدل شده است.^۶ روابط تمیز ناپذیری \sim روی عمل‌ها ابهام درباره‌ی اینکه چه عملی واقعاً رخ داده است را مدل می‌کنند. $e \sim_a e'$ می‌تواند به این صورت خوانده شود که «اگر فرض شود که عمل e رخ داده است رخداد عمل e' با دانش a سازگار است».

اعلان عمومی $[!\varphi]$ نیز خود به نوعی یک مدل عمل است که در آن $E = \{!\}$ و $\{(!, !)\} = \sim$ و $pre = \{(!, \varphi)\}$.

^۴event model

^۵precondition function

^۶کلمه‌ی «عمل» ترجمه‌ای است از کلمه‌ی event، از آنجایی که این کلمه علاوه بر منطق شناختی پویا در نظریه احتمالات نیز استفاده می‌شود، باید دانست که با تفسیرهای متفاوتی در این دو مقوله به کار می‌رود. در نظریه احتمال، event آن است که در منطق بدان گوئیم گزاره. در حالی که یک event در منطق شناختی پویا به همراه گزاره‌ی پیش‌شرط ایجاد می‌شود، ولی در واقع event‌های مدل عمل، مدل شناختی داده شده را تغییر می‌دهند و خود بخشی از مدل نیستند. از این پیچیده‌تر، گاهی اوقات به تمام مدل عمل، یک event اطلاق می‌شود.

نتیجه‌ی رخداد یک عمل نمایش داده شده با A در وضعیت نمایش داده شده با M برحسب ساختاری ضربی مدل می‌شود.

۲.۲ منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL)

برای اینکه بتوانیم به گونه‌ای صریح و شفاف در باب تغییر داده‌های احتمالاتی در قالبی شناختی-پویا استدلال کنیم، می‌بایست منطق شناختی احتمالاتی موجود را به وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی تحویل مناسب توسعه دهیم. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این کار را بر مبنای معناشناسی مدل‌های عمل احتمالاتی، که معرفی خواهد شد، انجام داد.

تعریف ۱.۲.۲. زبان شناختی پویای احتمالاتی. زبان شناختی پویای احتمالاتی به فرم Backus-Naur به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid [A, e]\varphi \mid \sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i) \geq r$$

با همان نمادگذاری منطق شناختی احتمالاتی، علاوه بر آن A مدل عمل احتمالاتی و e عملی از آن می‌باشد. فرمول‌هایی که پیش شرط‌ها را در مدل احتمالاتی عمل تعریف می‌کنند از همین زبانی که معرفی شد می‌آیند.

در این زبان علاوه بر خلاصه‌نویسی‌های پیش گفته خلاصه‌نویسی‌های زیر نیز مطرح است:

$$\langle A, e \rangle \psi : \neg[A, e]\neg\psi$$

و به منظور اینکه پیش شرط‌ها را در یک شیء از زبان فرموله کنیم قرار می‌دهیم

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi \in \Phi, pre(\varphi, e) > 0} \varphi \quad (5.2)$$

ملاحظه ۲.۲.۲. در مقاله‌ی [؟]، $pre_{A,e}$ به صورت زیر مطرح شده است:

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi \in \Phi, pre(\varphi, e) \geq 0} \varphi \quad (6.2)$$

این تعریف معادل است با $\bigvee_{\varphi \in \Phi} \varphi$ زیرا $pre(\varphi, e)$ تابع احتمال است و همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

به دلایلی که مطرح می‌شود تعریف ۵.۲ طبیعی‌تر به نظر می‌رسد. اولاً $pre_{A,e}$ به عنوان پیش شرط e مطرح است پس باید شامل پیش شرط‌هایی باشد که به e احتمال مثبت نسبت می‌دهند، ثانیاً اگر برای هر پیش شرط φ داشته باشیم $pre(\varphi, e) = 0$ می‌توان $pre_{A,e}$ را تعریف کرد \perp که از دو جنبه‌ی زیر قابل دفاع است:

- از منظر جبری وقتی ترتیب به وسیله‌ی استلزام روی فرمول‌ها تعریف شده باشد داریم $\perp = \bigvee \phi$.
- از نقطه نظر منطقی از آنجایی که منظور ما از $pre(\varphi, e)$ احتمال رخداد e است وقتی φ برقرار است، زمانی که برای هر $\varphi \in \Phi$ داریم $pre(\varphi, e) = \circ$ ، از جهت احتمالاتی امکان وقوع ندارد، بنابراین اگر ما $pre_{A,e}$ را قرار دهیم \perp از برقراری پیش شرط‌های e جلوگیری به عمل آورده‌ایم و از این رو اجازه نمی‌دهیم e رخ دهد.

فصل ۳

معمای MONTY HALL

این فصل اختصاص یافته به بررسی مسأله‌ای دشوار، مشهور به معمای *Monty Hall*، با کمک منطق شناختی پویای احتمالاتی. همانطور که در بخش؟؟ مطرح شد تنها دو گونه از سه گونه احتمالی که معرفی شد در به‌روزرسانی در این معما کافی است و همچنین تنها عملی که در آن رخ می‌دهد اعلان عمومی است. از این رو می‌توانیم منطق را به همان دو گونه از احتمال و اعلان عمومی محدود کنیم ولی کمی از سادگی مدل‌های ایستا و پویای آن بکاهیم و بنابراین برای حل این معما یک منطق اعلان عمومی احتمالاتی را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که مدل‌های ایستای آن مدل‌های کریپکی احتمالاتی باشند.

۱.۳ منطق اعلان عمومی احتمالاتی (PPAL)

مدل‌های شناختی احتمالاتی معرفی شده در فصل ۱ را به یاد بیاورید، در مدل کریپکی احتمالاتی که در اینجا معرفی می‌کنیم فضای احتمالاتی که به هر عامل $a \in A$ در هر جهان $s \in S$ تخصیص می‌دهیم به صورتی است که فضای نمونه یعنی $S_{a,s}$ هر زیرمجموعه‌ی دلخواهی از S می‌تواند باشد ولی σ -جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر $(\mathcal{F}_{a,s})$ همواره مجموعه‌ی توانی فضای نمونه است. همچنین چون تمامی زیرمجموعه‌های تک عضوی از فضای نمونه در σ -جبر قرار می‌گیرند، می‌توان اندازه‌ی احتمالاتی را مستقیماً روی فضای نمونه تعریف کرد و در نتیجه تعریف مدل‌های کریپکی احتمالاتی به صورت زیر در می‌آید:

تعریف ۱.۱.۳. مدل‌های کریپکی احتمالاتی. فرض کنید A مجموعه‌ی عامل‌ها و \mathbb{P} مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی باشد. مدل کریپکی احتمالاتی ساختار $M_{PKL} = (S, \overset{A}{\rightarrow}, P, V)$ است بطوریکه

- S مجموعه‌ای است غیر تهی از جهان‌های ممکن،
- $\overset{A}{\rightarrow}$ مجموعه‌ای است از روابط دسترسی $\overset{a}{\rightarrow}$ که به‌ازای هر $a \in A$ روی S تعریف شده‌اند،

• $P : A \rightarrow (S \rightarrow (S_{a,s} \rightarrow [0, 1]))$ تابعی احتمالاتی روی $S_{a,s}$ به هر عامل $a \in A$ و هر جهان $s \in S$ نسبت می‌دهد (احتمالی که به t توسط تابعی که به a در s مربوط شده نسبت داده می‌شود به صورت $P_a(s)(t)$ نمایش داده می‌شود)،

• V به هر گزاره‌ی اتمی مجموعه‌ای از جهان‌ها نسبت می‌دهد

مجموعه‌ی همه‌ی مدل‌های کریپکی احتمالاتی را \mathbb{M}_{PKL} می‌نامیم. برای هر زیرمجموعه‌ی E از $S_{a,s}$ از آنجا که مجموعه‌های اندازه‌پذیر زیرمجموعه‌های $S_{a,s}$ هستند، داریم:

$$P_a(s)(E) = \sum_{t \in E} P_a(s)(t)$$

و برای هر فرمول φ در زبان تعریف می‌کنیم:

$$P_a(s)(\varphi) = \sum_{\{v \in S_{a,s} \mid M, v \models \varphi\}}$$

تعریف ۲.۱.۳. زبان اعلان عمومی احتمالاتی \mathcal{L}_{PPAL} . این زبان بر پایه‌ی مجموعه‌ی شمارای \mathbb{P} از گزاره‌های اتمی، مجموعه‌ی متناهی A از عامل‌ها، عملگر کریپکی \Box_a ، عملگر به‌روزرسانی $[\cdot]$ و نماد تابعی احتمالاتی P_a شکل می‌گیرد. فرمول‌های خوش‌تعریف با استفاده از فرم Backus-Naur به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg \varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a \varphi \mid [\varphi] \psi \mid \sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i) \geq r$$

که در آن $a \in A, p \in \mathbb{P}$ و $r_1, \dots, r_n, r \in \mathbb{Q}$ و $\sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i)$ یک نام از زبان \mathcal{L}_{PPAL} خوانده می‌شود، و $\sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i) \geq r$ فرمول a -احتمالاتی از \mathcal{L}_{PPAL} نامیده می‌شود. قرار دهید Γ_{PPAL} مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های خوش‌تعریف و $P_{a, \mathcal{L}_{PPAL}}$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های a -احتمالاتی از زبان \mathcal{L}_{PPAL} باشد، و $T_{\mathcal{L}_{PPAL}}$ را نیز مجموعه‌ی همه‌ی نام‌ها قرار دهید. اگر از این زبان عملگر به‌روزرسانی را حذف کنیم آن را \mathcal{L}_{PKL} می‌نامیم.

علاوه بر همه‌ی خلاصه‌نویسی‌های پیش‌گفته‌ی قابل بیان در این زبان، از آنجا که عملی غیر از اعلان عمومی در این زبان مطرح نیست برای سادگی نوشتار از $[\varphi] \psi$ به جای $[\varphi] \psi$ به عنوان خلاصه‌نویسی استفاده می‌کنیم.

به منظور تعبیر این زبان می‌بایست به طور همزمان دو تعریف مطرح شود، یکی تعریف راستی و دیگری تعریف مدل‌های به‌روز شده. این دو تعریف به یکدیگر وابسته‌اند ولی به دور نمی‌انجامد.

تعریف ۳.۱.۳. معناشناسی منطق اعلان عمومی احتمالاتی. درستی فرمول $\varphi \in \Gamma_{PPAL}$ در $s \in S$ در مدل کریپکی احتمالاتی M با نماد $M, s \models \varphi$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$s \in V(p)$	اگر و فقط اگر	$M, s \models p$
$M, s \not\models \varphi$	اگر و فقط اگر	$M, s \models \neg\varphi$
$M, s \models \psi$ و $M, s \models \varphi$	اگر و فقط اگر	$M, s \models \varphi \wedge \psi$
برای هر $v \in S$ ، اگر $s \xrightarrow{a} v$ ، آنگاه $M, v \models \varphi$	اگر و فقط اگر	$M, s \models \Box_a \varphi$
$M A, s \models \psi$ (تعریف؟؟ را ببینید)	اگر و فقط اگر	$M, s \models [A]\psi$
$\sum_{i=1}^n r_i P_{a,s}(\varphi_i) \geq r$	اگر و فقط اگر	$M, s \models \sum_{i=1}^n r_i P_a(\varphi_i) \geq r$

۲.۳ معمای Monty Hall

فرض کنید در یک مسابقه‌ی تلویزیونی شرکت کرده‌اید، و باید از میان سه در یکی را انتخاب کنید با این وصف که پشت یکی از آنها اتومبیل است و پشت دو در دیگر دوچرخه. شما دری را انتخاب می‌کنید، مثلاً در شماره ۱، و مجری، که می‌داند پشت هر در چه چیزی نهفته است، دری دیگر را باز می‌کند که پشت آن دوچرخه است، مثلاً در شماره ۳. او از شما می‌پرسد «آیا حاضرید دری که انتخاب کرده‌اید را با در شماره ۲ عوض کنید؟». سؤال اینجاست که عوض کردن در به نفع شماست یا نه؟

همانطور که در [؟] آمده است خانم سونت^۱ که مرتباً در کتاب گینس به‌عنوان باهوش‌ترین فرد رکورد داشته است بر این باور است که اگر انتخاب را تغییر دهید در یک سوم موارد دوچرخه می‌برید و در دو سوم موارد اتومبیل. او اینگونه استدلال می‌کند که فرض کنید شما در مرحله‌ی اول دری را انتخاب کردید که پشت آن اتومبیل است، بنابراین شما نباید انتخابتان را تغییر دهید و این در یک سوم موارد اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر فرض کنید که انتخاب اولیه‌ی شما دری باشد که پشتش دوچرخه است، که در دو سوم موارد رخ می‌دهد. مجری نمی‌تواند دری که پشتش اتومبیل است و دری که شما انتخاب کرده‌اید را باز کند او مجبور است در دیگری را که پشتش دوچرخه است باز کند. بنابراین در حالی که شما ابتدا دری را انتخاب کرده‌اید که پشتش دوچرخه است تغییر انتخاب، بردن ماشین را تضمین می‌کند. پس با تغییر انتخاب در دو سوم موارد برنده‌ی اتومبیل خواهید شد.

می‌خواهیم به کمک اثباتی صوری در PPAL نشان دهیم که تعویض در به نفع شماست و مدعای خانم سونت را اثبات کنیم.

قبل از آن به چند لم نیازمندیم که آنها را در اینجا اثبات می‌کنیم.

$$\text{لم ۱.۲.۳} \quad P_a(\varphi) = 1 - P_a(\neg\varphi)$$

^۱Savant

برهان. از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم $\mathbf{P}_a(T \wedge \varphi) + \mathbf{P}_a(T \wedge \neg\varphi) = \mathbf{P}_a(T)$ و با استفاده از احتمال راستی حکم برقرار است. \square

لم ۲.۲.۳. در فرمول $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$ ، اگر داشته باشیم $\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$ ، که در آن $1 \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r'$$

برهان. از فرضیات و با استفاده از خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و اصل 0-نام‌ها داریم

$$r_1 \mathbf{P}_a(\varphi_1) + \dots + r_j \mathbf{P}_a(\varphi_j) + \dots + r_n \mathbf{P}_a(\varphi_n) \geq r$$

$$0 \mathbf{P}_a(\varphi_1) + \dots - \mathbf{P}_a(\varphi_j) + \dots + 0 \mathbf{P}_a(\varphi_n) = -r'$$

سپس با استفاده از اصل افزودن، حکم قضیه اثبات می‌شود. \square

لم ۳.۲.۳. در فرمول $[\varphi] \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$ ، اگر داشته باشیم $[\varphi] \mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$ ، که در آن $1 \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$[\varphi] \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow [\varphi] \sum_{i=1, i \neq j}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r_j r'$$

برهان. فرض کنید $\mathbf{P}_a(\varphi) > 0$ آنگاه هم‌ارزی‌های زیر با استفاده از اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ برقرارند:

$$[\varphi] \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi] \varphi_i) \geq r \mathbf{P}_a(\varphi)$$

$$[\varphi] \mathbf{P}_a(\varphi_j) = r' \leftrightarrow \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi] \varphi_j) = r' \mathbf{P}_a(\varphi)$$

حال با استفاده از لم ؟؟ و خلاصه‌نویسی فرمول‌ها بدست می‌آوریم

$$[\varphi] \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=1, i \neq j}^n r_i \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi] \varphi_i) \geq (r - r_j r') \mathbf{P}_a(\varphi)$$

و در نتیجه اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ حکم را نتیجه می‌دهد. برای حالت $\mathbf{P}_a(\varphi) = 0$ نیز مشابه همین استدلال با کمک اصل به‌روزرسانی احتمال ۲ برقرار است. \square

اکنون به مدل‌سازی معما در دستگاه منطقی مان می‌پردازیم و سپس به اثبات مدعا روی می‌آوریم.

مجموعه‌ی عامل‌ها را $A = \{c, m\}$ می‌گیریم (c معرف شرکت‌کننده و m معرف مجری) و مجموعه‌ی

گزاره‌های اتمی را اجتماع سه مجموعه‌ی A ، C و O . بطوریکه

$A = \{A_1, A_2, A_3\}$ که در آن A_i یعنی اتومبیل پشت در شماره i است.

$C = \{C_1, C_2, C_3\}$ که در آن C_i یعنی شرکت‌کننده ابتدا در شماره i را انتخاب کرده است.

$O = \{O_1, O_2, O_3\}$ که در آن O_i یعنی در شماره i توسط مجری باز شده است.

اکنون قواعد بازی را مدل می‌کنیم. این قواعد به این شرح هستند که: تنها یک اتومبیل پشت درهاست، شرکت‌کننده تنها می‌تواند یک در را انتخاب کند و مجری تنها می‌تواند یک در را باز کند.

$$onecar = \oplus A, \quad onechoice = \oplus C, \quad oneopen = \oplus O$$

که \oplus یعنی «یای انحصاری^۲». فرض می‌کنیم که شرکت‌کننده می‌بایست به اینکه اتومبیل پشت دری خاص قرار دارد احتمال $\frac{1}{3}$ نسبت دهد. همچنین فرض می‌کنیم شرکت‌کننده با انتخاب یک در چیزی در مورد جایگاه اتومبیل کشف نمی‌کند. بنابراین شرکت‌کننده بعد از انتخاب در نیز می‌بایست این احتمال را همان $\frac{1}{3}$ در نظر بگیرد، یعنی انتخاب شرکت‌کننده مستقل است از جایی که اتومبیل قرار دارد.

$$equal = \bigwedge_{i \in \{1,2,3\}} P_c(A_i) = \frac{1}{3}, \quad independentAC = \bigwedge_{j \in \{1,2,3\}} [C_j]equal$$

بخش اساسی بررسی این معما آن است که ببینیم تحت چه شرایطی مجری دری را باز می‌کند. او دقیقاً یک در را باز می‌کند به شرطی که شرکت‌کننده آن را انتخاب نکرده باشد و اتومبیل نیز پشت آن نباشد.

$$conditions = \bigwedge_{i,j \in \{1,2,3\}} [C_i](O_j \leftrightarrow (\neg A_j \wedge \neg C_j \wedge \bigwedge_{k \in \{1,2,3\}, k \neq j} \neg O_k))$$

حال قرار دهید

$$initial = onecar \wedge onechoice \wedge oneopen \wedge equal \wedge independentAC \wedge conditions$$

سؤال این است که شرکت‌کننده انتخاب خود را تغییر دهد یا نه:

$$switch = [C_1][O_3]P_c(A_1) \leq P_c(A_2)$$

اگر این جمله درست باشد، احتمال اینکه شرکت‌کننده ماشین را ببرد با تغییر در انتخاب کاهش نمی‌یابد. معلوم می‌شود که $initial$ برای بدست آوردن این نتیجه کفایت نمی‌کند. آنچه ضروری است آن است که شرکت‌کننده از برقراری شرایط اولیه‌ی بازی مطمئن باشد: $P_c(initial) = 1$. ما همچنین به دو فرض طبیعی نیز نیاز داریم، اولاً از نظر شرکت‌کننده احتمال اینکه او در شماره ۱ را انتخاب کند بزرگتر از صفر است: $P_c(C_1) > 0$ ثانیاً بعد از اینکه شرکت‌کننده در شماره ۱ را انتخاب کرد از نظر او احتمال اینکه مجری در ۳ را باز کند بزرگتر از صفر است: $[C_1]P_c(O_3) > 0$. اینها برای بدست آوردن $switch$ کفایت می‌کنند.

فرض $independentAc$ دلالت دارد بر اینکه $[C_1]P_c(A_1) = \frac{1}{3}$ و بنابراین:

$$P_c(A_1) = P_c(O_3 \wedge A_1) + P_c(\neg O_3 \wedge A_1) \Rightarrow [C_1]P_c(O_3 \wedge A_1) \leq \frac{1}{3} \quad (1.3)$$

با در نظر گرفتن شرایط $conditions$ ، $onechoice$ و $onecar$ خواهیم داشت:

$$[C_1]P_c(A_2 \rightarrow O_3) = 1 \quad (2.3)$$

زیرا از شرایط $onechoice$ و $onecar$ داریم

$$C_1 \leftrightarrow \neg C_1 \wedge \neg C_3 \quad \text{و} \quad A_2 \leftrightarrow \neg A_1 \wedge \neg A_3$$

^۲exclusive or

و در نتیجه

$$C_1 \wedge A_2 \rightarrow \neg C_3 \wedge \neg A_3 \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر شرط *conditions* داریم $[C_1]O_1 \rightarrow [C_1]\neg C_1$. از این و از $C_1 \rightarrow [C_1]C_1$ نتیجه می‌شود $C_1 \wedge O_1 \rightarrow \perp$ که معادل است با

$$\neg C_1 \vee \neg O_1 \quad (۲)$$

و به همین صورت داریم

$$\neg A_2 \vee \neg O_2 \quad (۳)$$

پس با استفاده از (۱)، (۲) و (۳) بدست می‌آید

$$C_1 \wedge A_2 \rightarrow \neg C_3 \wedge \neg A_3 \wedge \neg O_1 \wedge \neg O_2$$

و از قاعده‌ی ضرورت $[C_1]$ داریم

$$[C_1](C_1 \wedge A_2) \rightarrow [C_1](\neg C_3 \wedge \neg A_3 \wedge \neg O_1 \wedge \neg O_2)$$

و از شرط *conditions* نتیجه می‌شود $[C_1](C_1 \wedge A_2) \rightarrow [C_1]O_2$ که به خاطر اصل ثبات اتم معادل است با

$$C_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow O_2)$$

در نتیجه داریم $[C_1]C_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow O_2)$ و بنابراین $C_1 \rightarrow [C_1](A_2 \rightarrow O_2)$ و

$$C_1 \leftrightarrow C_1 \wedge [C_1](A_2 \rightarrow O_2)$$

و با استفاده از قاعده‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌شود

$$\mathbf{P}_c(C_1 \wedge [C_1](A_2 \rightarrow O_2)) = \mathbf{P}_c(C_1)$$

و چون طبق اصل به‌روزرسانی-احتمال ۱ داریم

$$\mathbf{P}_c(C_1) > 0 \rightarrow ([C_1]\mathbf{P}_c(A_2 \rightarrow O_2) = 1 \leftrightarrow \mathbf{P}_c(C_1 \wedge [C_1](A_2 \rightarrow O_2)) = \mathbf{P}_c(C_1))$$

گزاره‌ای که به دنبالش بودیم اثبات می‌شود.

حال با استفاده از ۲.۳ بدست می‌آید:

$$[C_1]\mathbf{P}_c(O_2 \wedge A_2) = \mathbf{P}_c(A_2) \quad (۳.۳)$$

زیرا از لم ۱.۲.۳ می‌دانیم

$$\mathbf{P}_c(A_2 \wedge \neg O_2) = 0$$

و از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم

$$\mathbf{P}_c(O_2 \wedge A_2) + \mathbf{P}_c(\neg O_2 \wedge A_2) = \mathbf{P}_c(A_2)$$

پس با استفاده از لم ۲.۲.۳ بدست می‌آید

$$\mathbf{P}_c(O_2 \wedge A_2) = \mathbf{P}_c(A_2)$$

و سپس قاعده‌ی ضرورت $[C_1]$ حکم را اثبات می‌کند.

(۳.۳) به همراه $\mathbb{P}_c(A_2) = \frac{1}{3}$ $[C_1]$ (که از $independentAC$ بدست می‌آید) و با استفاده از لم

۳.۲.۳ ما را مجاز می‌کند که نتیجه بگیریم $\mathbb{P}_c(O_3 \wedge A_2) = \frac{1}{3}$. حال خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و لم

۳.۲.۳ (قرار دهید $r = \frac{1}{3}$ ، $r' = 0$ و $r_j = 1$) و (۱.۳) نتیجه دهد:

$$[C_1]\mathbb{P}_c(O_3 \wedge A_1) \leq \mathbb{P}_c(O_3 \wedge A_2)$$

و با استفاده از اصل ثبات اتم خواهیم داشت

$$[C_1]\mathbb{P}_c(O_3 \wedge [O_2]A_1) \leq \mathbb{P}_c(O_3 \wedge [O_2]A_2) \quad (4.3)$$

و در نهایت اثبات می‌شود

$$[C_1][O_2]\mathbb{P}_c(A_1) \leq \mathbb{P}_c(A_2) \quad (\text{switch})$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

probability	احتمال
posterior probability	احتمال پسینی
prior probability	احتمال پیشینی
occurrence probability	احتمال رخداد
propositional probability	احتمال گزاره‌ای
observation probability	احتمال مشاهده‌محور
axiom	اصل موضوع
reduction axioms	اصول موضوعه‌ی تحویل
public announcement	اعلان عمومی
probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
static	ایستا
belief	باور
update	به‌روزرسانی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

agent	عامل
axiom	اصل موضوع
belief	باور
common knowledge	همه‌دانی مشترک
completeness	تمامیت
consistent	سازگار
countably additive	جمع‌پذیر شمارا
distinguish	تمییز دادن
dynamic	پویا
epistemic	شناخت
event	عمل
exclusive or	یای انحصاری
finitely additive	جمع‌پذیر متناهی
formula	فرمول
higher order information	فرا دانش
hypochondriac	خودبیمار انگار
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
intropection	خودآگاهی

مراجع

- Aumann, R. J. (1976). Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics* 4(6), 1236–1239.
- Batlag, A., L. S. Moss, and S. Solecki (1998). The logic of public announcements and common knowledge and private suspicions. In *Proc. TARK'98*, San Francisco, CA, USA, pp. 43–56. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- Benthem, J. V., J. Gerbrandy, and B. P. Kooi (2009). Dynamic update with probabilities. *Studia Logica* 93(1), 67–96.
- Cate, B. t. (2002). Internalizing epistemic actions. In *Proceedings of the NASSLLI-2002 student session, 1st North American Summer School in Logic, Language and Information, Stanford.*, pp. 109–123.
- Ditmarsch, H. v., W. van der Hoek, and B. Kooi (2007). *Dynamic Epistemic Logic* (1st ed.). Springer Publishing Company.
- Fagin, R. and J. Y. Halpern (1994). Reasoning about knowledge and probability. *Journal of the ACM* 41(2), 340–367.
- Fagin, R., J. Y. Halpern, and N. Megiddo (1990). A logic for reasoning about probabilities. *Inf. Comput.* 87(1), 78–128.
- Fagin, R., J. Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi (1995). *Reasoning About Knowledge*. MIT Press.
- Gerbrandy, J. and W. Groeneveld (1997). Reasoning about information change. *Journal of Logic, Language and Information* 6, 147–169.
- Hintikka, J. (1962). *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Ithaca, N. Y.: Cornell University Press.
- Kooi, B. P. (2003a). *Knowledge, Chance, and Change*. Ph.D. dissertation .
- Kooi, B. P. (2003b). Probabilistic dynamic epistemic logic. *Journal of Logic, Language and Information* 12(4), 381–408.
- Meyer, J.-J. C. and W. V. D. Hoek (1995). *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. UK, USA, Australia, South Africa: Cambridge University Press.

-
- Sack, J. (2007). *Adding temporal logic to dynamic epistemic logic*. Ph.D. disseration , Indianapolis, IN, USA. AAI3274928.
- Veltman, F. (1996). Defaults in update semantics. *Journal of Logic, Language and Information* 25, 221–261.
- Wright, G. H. v. (1951). *An essay in modal logic*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

Surname: Sharafi

Name: Amir Hossein

Title: Probabilistic Dynamic Epistemic Logic

Supervisor: Dr. Morteza Moniri

Degree: Master of Science

Subject: Department of Mathematics

Field: Mathematical Logic

Shahid Beheshti University

Faculty of Mathematical Sciences

Date: 2011

Number of pages: [28](#)

Keywords: epistemic logic, dynamic logic, probabilistic logic, updat, Monty Hall

Abstract

In this thesis, we first introduce an instance of probabilistic epistemic logics (PEL) and prove its completeness. Then in our approach toward generalization we will consider a simple model of this logic to develop it to dynamic logics which are able to model information changes in multi-agent systems.

After a short description of non-probabilistic dynamic epistemic logics, we also introduce probabilistic dynamic epistemic logic (PDEL) by taking into account three sources of probability, namely, prior probability of states, occurrence probability for events based on a process corresponding to agents' view, and the probability of uncertainty of observing events. This three sources are used to provide a generalized update mechanism that is a natural and convenient format for modeling information flow.

Then in order to prove a completeness of probabilistic dynamic epistemic logic from the completeness of probabilistic epistemic logic we present axioms which are sound to reduce the formulas containing dynamic operators to the formulas in the corresponding static language.

Finally we will introduce a kind of probabilistic dynamic epistemic logic which is adapted to solve the Monty Hall dilemma and will prove its completeness. Then we will obtain a formal solution for this dilemma within this logic.



Shahid Beheshti University
Faculty of Mathematical Sciences
Department of Mathematics

M. Sc. Thesis

Probabilistic Dynamic Epistemic Logic

by

Amir Hossein Sharafi

Supervisor

Dr. Morteza Moniri

2011